UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ULBRA

JOGOS MATEMÁTICOS PARA O ENSINO DE FUNÇÃO

FABIANA MACHADO DE BORBA

Canoas

2008

FABIANA MACHADO DE BORBA

JOGOS MATEMÁTICOS PARA O ENSINO DE FUNÇÃO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Drª. Marilaine de Fraga Sant´Ana

Canoas

2008

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação – CIP

B726j Borba, Fabiana Machado de.

Jogos matemáticos para o ensino de função / Fabiana Machado de Borba. – Canoas, 2008.
139 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, 2008.

Orientadora: Dra. Marilaine de Fraga Sant'ana.

Bibliotecária responsável: Heloisa Helena Nagel – CRB 10/981

Ao **Samuel** e **Helena**

"Agradeço o carinho, o olhar compreensivo...Seu amor foi um estímulo para que eu pudesse alcançar meus objetivos."

AGRADECIMENTOS

A Deus, por estar sempre ao meu lado dando-me forças e coragem para superar todas as dificuldades surgidas ao longo desta caminhada.

Aos meus familiares, em especial meus pais e meus sogros que sempre me incentivaram e valorizaram a conquista de novos conhecimentos.

A Profª. Drª. Marilaine Sant'Ana que transmitiu seus ensinamentos de maneira clara e segura, auxiliando na construção desta pesquisa.

Aos colegas e professores que estavam sempre presentes nos momentos de alegria e de dificuldades. Aos professores agradeço por nos exigirem ao máximo, pois foram estas cobranças que nos fizeram progredir e valorizar ainda mais nossa conquista.

Às colegas de escola pelas palavras de carinho e entusiasmo, pelos olhares saudosos e pela alegria constante.

A direção e aos alunos do Instituto de Educação Pereira Coruja, que permitiram que este trabalho fosse desenvolvido.

A todas as pessoas que de uma forma ou de outra contribuíram para a realização deste trabalho, afetuosos agradecimentos.

RESUMO

Este trabalho traz o relato de uma pesquisa que teve como tema o ensino de funções. A investigação foi orientada pela seguinte questão: “Como a utilização de jogos matemáticos contribui para a criação de imagens conceituais associadas ao conceito de Função?” Para atendê-la, a principal base está na teoria de David Tall, que formula os conceitos de imagem e definição conceitual e que sugere relacionar o conceito de função com máquinas. Este conceito foi fundamental para as escolhas didáticas. A proposta didática consiste no uso de jogos e, entre eles, aqueles que utilizam a idéia de máquina. Estudos sobre a relação entre jogo e educação fundamentam o trabalho. A metodologia de pesquisa qualitativa envolve diferentes modos de coletar dados, alguns com análise quantitativa, em particular, durante a experimentação didática, gravações permitiram mostrar a evolução do saber e o envolvimento dos alunos nas atividades didáticas. Concluiu-se que através das atividades que foram realizadas, ocorreu uma evolução dos alunos em relação ao conceito de função, apesar destas não serem exatamente a definição do conceito.

Palavras-chave:
Ensino de Matemática – Funções – Jogos Matemáticos

ABSTRACT

In this work, we report the results of a research about function teaching, making use of studies of education with games. It is guided by the question: “How the use of mathematical games contributes to the creation of conceptual images associated with the concept of Function?" To answer it, we investigate the theory of conceptual image and conceptual definition, whose main author is David Tall. He suggests the relationship about function concept and a machine. This concept is important to the didactic choices, because we use games, in particular taking into account the idea of function machine. This is a qualitative research, that’s methodology involves different ways of collecting data, someone with quantitative analysis. We make use of recordings to help us to observe the development of knowledge and involvement of students in didactic activities. Finally, we verify the evolution of students conceptual image about function after the activities with selected games, although someone are not exactly the conceptual definition.

Key-words:

Mathematical Teaching – Functions – Mathematical Games

LISTA DE GRÁFICOS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

O ensino da Matemática sempre provocou inquietação e temor em muitas pessoas, as quais sempre demonstraram insatisfação diante dos resultados negativos obtidos muitas vezes em relação às suas aprendizagens (BRASIL, 1997).

Neste contexto, percebemos que a maior parte das dificuldades apresentadas se devem à falta de compreensão dos conceitos matemáticos que estão relacionados ao conteúdo estudado. A matemática ensinada na escola é geralmente muito mecânica, normalmente trabalhada utilizando muitas regras, as quais os estudantes precisam decorar e aplicar em problemas hipotéticos que não condizem com a realidade.

Convictos da importância de desenvolvermos, em nossos educandos, conhecimentos mais coesos e significativos, focalizamos nossa pesquisa na investigação da contribuição de jogos matemáticos na formação de imagens conceituais a cerca do conteúdo de Função.

Fundamentamos nosso trabalho nas pesquisas realizadas por David Tall sobre a utilização da máquina de função no desenvolvimento de aprendizagens mais interessantes para os educandos. Tall (2000-a) afirma que a máquina de função pode ser imaginada e representada de várias maneiras, ligadas diretamente à percepção humana e a sensação, permitindo interpretações simples de idéias profundas.

O trabalho está estruturado em oito itens, ao longo de oito capítulos.

O item um intitulado Imagem e Definição Conceitual, deriva de levantamentos bibliográficos e de reflexões de alguns autores como Tall e Vinner acerca de imagem e definição conceitual, elucidando a importância dos educadores utilizarem imagens conceituais claras e definidas na formação dos conhecimentos nos estudantes.

O item dois faz uma abordagem teórica sobre Função, com reflexões de autores como Tall, Akkoç, Bakar, entre outros. Neste capítulo, dissertamos sobre as dificuldades na aprendizagem de conceitos relacionados ao conteúdo de Função pelos estudantes. Abordamos também um aspecto importante desenvolvido nas pesquisas de Tall que é a máquina de Função.

O item três realiza uma abordagem teórica sobre a utilização de jogos matemáticos no ensino. Apresenta as idéias de diversos autores, os quais acreditam que, através do uso de jogos, a aprendizagem ocorre de uma forma mais interessante e motivadora.

O item quatro traz as considerações sobre a pesquisa, apresenta o problema, os objetivos, bem como a metodologia utilizada na realização da mesma.

O item cinco descreve a análise dos dados da entrevista que foi realizada com os estudantes do 1º ano do Magistério a fim de verificar a impressão que os mesmos tinham sobre o uso de jogos nas aulas de Matemática.

O item seis traz a descrição dos jogos utilizados na pesquisa.

O item sete é intitulado Os Encontros, e traz uma descrição de cada encontro realizado, fazendo uma reflexão sobre aspectos importantes que tenham acontecido.

O item oito traz a análise do Pré-teste e do Pós-teste que foi realizado com os estudantes. Neste capítulo, dissertaremos sobre os resultados obtidos, pelos educandos, na realização de um pré-teste no início da pesquisa sobre Funções, e de um pós-teste ao final.

Nos apêndices, encontram-se a entrevista realizada com os estudantes, o pré e o pós-teste realizados, bem como os exercícios dos jogos utilizados na pesquisa.

Esperamos que este trabalho possa servir de referência para futuras discussões sobre o ensino de Matemática e contribua para que os educadores tornem mais relevantes e expressivos seus ensinamentos a cerca do enriquecimento das imagens conceituais relacionadas à Função.

1 IMAGEM E DEFINIÇÃO CONCEITUAL

Nos últimos anos, as concepções referentes à imagem e definição conceituais, tornaram-se cada vez mais presentes em nossas vidas. Imagem conceitual, segundo Tall e Vinner (1981), consiste em toda estrutura cognitiva na mente do indivíduo que é associada com um conceito dado. As investigações realizadas por Tall e Vinner demonstram que as imagens conceituais individuais diferem da teoria formal e contêm fatores que causam conflito cognitivo.

Comparando a Matemática com outros campos, Tall e Vinner (1981) colocam que esta é considerada geralmente como um assunto de grande precisão, em que os conceitos podem ser definidos para fortalecer uma teoria.

Conforme Tall e Vinner (1981):

> The human brain is not a purely logical entity. The complex manner in which it functions is often at variance with the logic of mathematics. It is not always pure logic which gives us insight, nor is it chance that causes us to make mistakes. To understand how these processes occur, both successfully and erroneously, we must formulate a distinction between the mathematical concepts as formally defined and the cognitive processes by which they are conceived (TALL E VINNER, 1981, p. 01)[1].

Muitos conceitos que utilizamos, segundo Tall e Vinner (1981), são reconhecidos pela experiência e pelo uso em contextos apropriados. Mais tarde estes conceitos podem ser refinados em seu significado e serem interpretados com sutileza tendo ou não uma definição precisa. Durante os processos mentais de recordar e manipular um conceito, muitos processos associados são trabalhados, conscientemente e inconscientemente afetando o significado e o uso.

Tall e Vinner (1981) utilizam o termo imagem conceitual para descrever a estrutura cognitiva total que é associada com o conceito, que inclui todos os retratos mentais, propriedades e processos relacionados.

---

[1] O cérebro humano não é uma entidade puramente lógica. A maneira complexa na qual ele funciona está variando constantemente com a lógica da matemática. Não é sempre a lógica pura que nos dá compreensão e não é o acaso que nos faz cometer erros. Para entender como esse processo ocorre, com ou sem sucesso, nós temos que distinguir os conceitos matemáticos formalmente definidos dos processos cognitivos através dos quais eles são concebidos (Tradução da autora).

Como exemplo, de imagem conceitual Tall e Vinner (1981), colocam que o conceito de subtração é geralmente trabalhado como um processo que envolve números inteiros positivos. Neste estágio as crianças podem observar que a subtração de um número reduz sempre a resposta. Para tal criança esta observação é parte de sua imagem associada a subtração e pode causar conflitos mais tarde quando a subtração de números negativos for estudada.

Definição conceitual, segundo Tall e Vinner (1981), são as palavras utilizadas para especificar um conceito. Pode ser aprendido por um indivíduo de uma forma rotineira ou mais significativa, podendo ser também uma reconstrução pessoal do estudante.

Conforme Tall e Vinner (1981), para cada indivíduo, uma definição conceitual gera sua própria imagem conceitual. Por exemplo, a definição conceitual de uma função matemática pode ser feita como "uma relação entre dois conjuntos A e B, em que cada elemento de A é relacionado à precisamente um elemento em B" (Tall e Vinner, 1981, p. 03). Mas os indivíduos que estudaram funções podem ou não recordar que a definição conceitual e a imagem conceitual podem incluir muitos outros aspectos, tais como a idéia que uma função é dada por uma fórmula, ou um gráfico, ou uma tabela de valores.

A "Matemática Moderna" dos anos sessenta, segundo Tall (1992) era uma tentativa audaciosa de criar uma aproximação baseada nas definições desobstruídas de conceitos matemáticos, apresentadas de uma maneira que se esperava que os estudantes compreendessem. Este movimento não obteve o sucesso esperado, pois dentro da matemática, as noções são usadas não somente de acordo com sua definição formal, mas também através das representações mentais que podem diferir para pessoas diferentes.

Muitas vezes um conhecimento novo contradiz o velho, e assim, para que ocorra uma aprendizagem eficaz, torna-se necessário o desenvolvimento de estratégias diferenciadas para tratar de tal conflito. Na construção curricular, espontaneamente partimos das idéias e do movimento simples para conceitos mais complexos por acreditar que o estudante cresce na experiência.

Tall (1992) acredita que quando os estudantes são confrontados primeiramente com definições matemáticas é quase inevitável que encontrarão somente uma escala restrita das possibilidades que realcem suas imagens conceituais, sendo que para a construção de uma raiz cognitiva apropriada devemos partir de conceitos que sejam conhecidos pelos estudantes e sejam esteios para o desenvolvimento do conhecimento matemático, ele ainda nos coloca que:

> Rather than deal initially with formal definitions which contain elements unfamiliar to the learner, it is preferable to attempt to find an approach which builds on concepts which have the dual role of being familiar to the students and also provide the basis for later mathematical development. Such a concept I term a cognitive root. These are not easy to find – they require a combination of empirical research (to find out what is appropriate to the student at the current stage of development) and mathematical knowledge (to be certain of the long term mathematical relevance) (TALL, 1992, p. 04).[2]

A aprendizagem do conceito de função muitas vezes ocorre através de exemplos que são representados pela utilização de fórmulas. Tall e Vinner (1981) argumentam que em tal caso a imagem conceitual pode tornar-se uma noção mais restrita, somente envolvendo fórmulas, onde a definição conceitual é pela maior parte inativa na estrutura cognitiva. Inicialmente o estudante nesta posição pode operar completamente feliz com sua noção restrita, adequada em seu contexto restrito. Mais tarde, quando se depara com as funções definidas em um contexto mais amplo pode ser incapaz de lidar com a mesma. Contudo o próprio programa de ensino foi responsável para esta situação infeliz.

Acreditamos ser importante por parte das instituições escolares, que estas atuem como formadores de cidadãos críticos e atuantes dentro da sociedade. É necessário que os educandos busquem desenvolver seu raciocínio e saibam utilizar suas aprendizagens para a solução de problemas diários. Através de uma educação de qualidade, onde a construção do conhecimento acontece de maneira integrada e diversificada, poderemos promover o enriquecimento das imagens e definições conceituais dos estudantes.

---

[2] Em vez de lidar inicialmente com definições formais que contém elementos não familiares ao aluno, é preferível tentar achar uma aproximação que construa conceitos que têm o duplo papel de serem familiares aos alunos e também de fornecerem a base para um posterior desenvolvimento matemático. Tais conceitos, eu denomino raízes cognitivas. Estas não são fáceis de achar – elas requerem uma combinação de grandes pesquisas (para achar o que é apropriado para o aluno no corrente estágio de desenvolvimento) e conhecimento matemático (para estar certo da longa relevância aos termos matemáticos) (Tradução da autora).

2 FUNÇÃO

Muitos conceitos que desde cedo fazem parte de nossa vida estudantil se relacionam com situações do nosso cotidiano. A noção de função evidencia sua importância na interpretação de situações diárias encontradas em jornais, revistas e noticiários de televisão, além de estar presente nas mais diversas situações da atividade humana, como o preço que se paga por uma ligação telefônica que depende do tempo que se fala ao telefone. Acreditamos que estes conhecimentos podem ser utilizados em aula para o ensino do conceito de Função, despertando no educando o interesse e a motivação em adquirir novos conhecimentos.

De acordo com o PCN, do Ensino Médio (BRASIL, 1999) cabe ao ensino de Matemática garantir que o aluno adquira certa flexibilidade para lidar com o conceito de função em diversas situações e, nesse sentido, através de uma variedade de situações problema, o educando pode ser incentivado a buscar a solução, ajustando seu conhecimento sobre funções para construir um modelo para interpretação e investigação em Matemática.

As funções, que são correspondências especiais, estão presentes no decorrer de todo o currículo escolar, sendo encontradas tanto na aritmética, quanto na álgebra, na geometria e na probabilidade. O conceito de função é importante, pois relaciona matematicamente diversas situações encontradas no mundo real. Sob este aspecto Akkoç e Tall (2005) afirmam que os formadores do currículo supõem que os estudantes podem conceitualizar a definição de função após ter estudado várias representações.

Conforme Iezzi (1997), em Matemática se x e y são duas variáveis tais que para cada valor atribuído a x existe, em correspondência, um único valor para y, dizemos que y é uma **função** de x. O conjunto de valores que podem ser atribuídos a x é chamado *domínio* da função. A variável x é chamada *variável independente*. O valor de y, correspondente a determinado valor atribuído a x, é chamado *imagem* de x pela função e é representado por $f(x)$. A variável y é chamada *variável dependente*, porque y assume valores que dependem dos correspondentes valores de x. O conjunto *imagem* é formado pelos valores que y assume, em correspondência a x.

Segundo Akkoç e Tall (2002):

> To a mathematician, the notion of function is a model of simplicity. The definition is not only mathematically simple, for the mathematician it provides access to a huge complexity of mathematical ideas. Some students are able to build this subtle combination of simplicity and complexity. For others, however, the

> situation is quite different. As they respond to being introduced to the notion of function, they bring their implicit understandings of language and all their previous experiences to bear on the task. The result for them is a highly complicated array of personal meanings that both help and hinder their interpretation of the mathematical concept (AKKOÇ E TALL, 2002, p. 01).[3]

Uma das dificuldades na aprendizagem da matemática encontradas por estudantes, segundo Akkoç e Tall (2005), é que o desenvolvimento lógico da matemática não é o mesmo que o desenvolvimento cognitivo dos estudantes. Uma minoria dos estudantes se detém na aprendizagem do conceito da função, enquanto que a maioria trabalha com conceitos desconectados, revelando uma irregular combinação entre o projeto do currículo e as estruturas cognitivas dos educandos.

A complexidade do conceito de função desencadeou a atenção de pesquisadores durante muito tempo. A distinção entre a definição conceitual que os matemáticos usam em um conceito matemático e a imagem conceitual gerada que povoa a mente dos educandos foi evidenciado por Vinner (1983) apud Akkoç e Tall (2002), mostrando que a maioria dos estudantes utilizam definições pessoais para o conceito de função, dando significados geralmente equivocados ao termo.

Conforme Tall (1992), ao invés de serem trabalhadas as definições formais inicialmente, com elementos pouco conhecidos pelos estudantes, é preferível que se procure achar uma aproximação que construa conceitos que estejam familiarizados com os estudantes e sejam as bases, para um desenvolvimento matemático posterior.

Tall (2000-a) considera que o conceito de função pode ser introduzido de uma maneira que seja potencialmente mais eficaz, procurando desenvolver desta forma os princípios gerais que se relacionam a outras teorias do desenvolvimento cognitivo na instrução da matemática.

Ao enfatizarmos as muitas representações do conceito de função tais como: a fórmula, o gráfico, a relação entre variáveis e assim por diante, a idéia central da função como um processo é negligenciada freqüentemente. Para exemplificar esta situação, embora os gráficos sejam representados freqüentemente como uma excelente maneira de analisar e entender uma

---

[3] Para um matemático, a noção de função é um modelo de simplicidade. O que poderia ser mais simples do que a idéia de que 'nós temos dois conjuntos e cada elemento no primeiro é ligado a precisamente um elemento no segundo'? A definição não é apenas matematicamente simples, para o matemático isso fornece acesso a uma enorme complexidade de idéias. Alguns alunos são capazes de construir essa delicada combinação de simplicidade e complexidade. Para outros, entretanto, a situação é bem diferente. Como eles respondem ao ser introduzida a noção de função? Eles trazem seu entendimento implícito da língua e todas as suas experiências prévias para empregar na tarefa. O resultado para eles é uma altamente complicada série de significados pessoais que ao mesmo tempo ajuda e atrapalha suas interpretações do conceito matemático (Tradução da autora).

função, poucos estudantes parecem relacionar o gráfico ao processo funcional subentendido, vendo um gráfico simplesmente como um objeto estático.

Os educandos desenvolvem protótipos para o conceito de função da mesma forma que desenvolvem protótipos para conceitos da vida diária, e apesar de o conceito de função trespassar cada ramo da matemática e ocupar uma posição central em seu desenvolvimento, mostra-se sutil e ardiloso sempre que tentamos o ensinar na escola.

Neste sentido, Bakar e Tall (1991) nos colocam que o movimento da "Matemática Moderna" introduziu o conceito da função na escola secundária nos termos do domínio, da escala e do relacionamento entre os elementos, sendo que muitos estudantes demonstraram dificuldades na compreensão desta noção. Embora nós possamos apresentar para nossos educandos conceitos gerais tais como o domínio em que a função é definida e a escala de valores possíveis, estes termos não parecem ser entendidos por eles.

Conforme Tall (1988), a "Matemática Moderna" acreditava que se os educadores formulassem as definições e as deduções matemáticas corretamente, levariam a aprendizagem da matemática. Mas, apesar disto ter sido feito, as dificuldades continuavam a persistir. Uma análise cuidadosa sugere que estas dificuldades não são falta de discernimento dos estudantes, mas um fenômeno humano natural que é encontrado dentro de todos nós.

Em uma pesquisa realizada por Bakar e Tall (1991), fica clara a similaridade dos critérios que os estudantes utilizam quando se deparam com conceitos matemáticos. Eventualmente os estudantes utilizam os chamados "exemplos protótipos" do conceito da função em sua mente, como: uma função é como $y = x^2$, ou um polinômio, ou $1/x$, ou uma função seno.

Bakar e Tall (1991) nos colocam ainda que:

> When asked if graph is a function, in the absence of an operative definition of a function, the mind attempts to respond by resonating with these mental prototypes. If there is a resonance, the individual experiences the sensation and responds positively. If there is no resonance, the individual experiences confusion, searching in the mind for a meaning to the question, attempting to formulate the reason for failure to obtain a mental match (BAKAR E TALL, 1991, p. 02).[4]

---

[4] Quando perguntada se um gráfico é uma função, na ausência de uma definição de função, a mente tenta responder por ressonância com esses protótipos mentais. Se há ressonância, as experiências individuais levam a uma resposta positiva. Se não há ressonância, as experiências levam à confusão, procurando na mente por um significado à questão, tentando formular a razão para a falha na obtenção de uma combinação mental (Tradução da autora).

O conceito de função é uma idéia complexa cujas ramificações permeiam séculos. Para Bakar e Tall (1991), o estudante não pode construir o conceito abstrato da função sem experimentar exemplos da função na ação; torna-se imprescindível o desenvolvimento de uma aproximação que faça os protótipos desenvolvidos pelos educandos tão apropriados quanto possíveis.

Tall (2000-a) apresenta como uma opção viável à "Máquina de Função",

> A highly likely candidate is the function machine as an input-output box. This already has iconic, visual aspects, embodying both an object like status and also the process aspect from input to output. The usual representations of function (table, graph, formula, procedure, verbal formulation, etc) may also be seen as ways of representing or calculating the inner input-output relationship (TALL, 2000-a, p. 03).[5]

A máquina de função conforme Tall (2000-a), é um recurso extremamente importante na compreensão dos conceitos matemáticos, entretanto normalmente ela é utilizada como o problema "adivinhe a minha regra", para que os educandos encontrem a fórmula interna que expressa a regra. Desta forma é gerado um obstáculo epistemológico de que todas as funções são emitidas por uma fórmula.

A máquina de função permite que os estudantes tenham uma imagem mental de uma máquina que pode ser usada para descrever e nomear vários processos sem a necessidade de ter um processo explícito definido.

Para Tall (2000-a), a máquina de função neste contexto mais abrangente é uma versão que inclui o conceito mais geral da função. Pode ser imaginada e representada de várias maneiras que ligam diretamente a percepção humana e a sensação, permitindo interpretações simples de idéias profundas.

Acreditamos que a máquina de função é uma importante ferramenta no auxílio ao ensino do conceito de função, promovendo uma aprendizagem diferenciada e desenvolvendo o raciocínio de nossos educandos. Desta forma, pretendemos dar nossa contribuição em algo motivador e interessante para que estas aprendizagens se tornem proveitosas para a vida diária de nossos discentes.

[5] Um provável bom candidato é a máquina de função como uma caixa de entrada e saída. Essa incorpora ícones, aspectos visuais, apresentando tanto um status de objeto quanto do processo de entrada e saída. As usuais representações de função (tabela, gráfico, fórmula, procedimento, formulação verbal, etc.) também podem ser vistas como modos de representação ou cálculo interno da relação entrada e saída (Tradução da autora).

3 JOGOS MATEMÁTICOS

As dificuldades encontradas por alunos e professores no processo de ensino-aprendizagem da Matemática são bastante conhecidas. Por um lado, o aluno não consegue entender a matemática que a escola lhe ensina, enquanto o professor, consciente de que não consegue alcançar resultados satisfatórios junto a seus alunos, procura novos elementos que possam melhorar este quadro (FIORENTINI E MIORIM, 1990).

Atualmente os professores competem com um mundo novo, repleto de recursos eletrônicos e movimentos representados pela mídia aos quais os alunos têm acesso em ambientes fora da escola. Torna-se cada vez mais complicado despertar o interesse nos alunos pelo que está sendo estudado. Desta forma, o melhor caminho para que estas dificuldades sejam superadas é através do emprego do lúdico.

Macedo (2000), coloca que o uso de jogos possibilita a produção de uma experiência significativa para as crianças, tanto em termos de conteúdos escolares como do desenvolvimento de competências e habilidades.

Conforme Kishimoto (1997), as evidências parecem justificar a importância que vem assumindo o jogo nas propostas de ensino de matemática. Torna-se relevante à análise desta tendência para que possamos assumir conscientemente o nosso papel de educadores. A observação dos novos elementos incorporados ao ensino de matemática não pode deixar de considerar o avanço das discussões a respeito da educação e dos fatores que contribuem para uma melhor aprendizagem. O jogo aparece, deste modo, dentro de um amplo cenário que procura apresentar a educação, em particular a educação matemática, em bases cada vez mais científicas.

Segundo Kishimoto (1997):

> As concepções sócio-interacionistas partem do pressuposto de que a criança aprende e desenvolve suas estruturas cognitivas ao lidar com o jogo de regra. Nesta concepção, o jogo promove o desenvolvimento, porque está impregnado de aprendizagem. E isto ocorre porque os sujeitos, ao jogar, passam a lidar com as regras que lhes permitem a compreensão do conjunto de conhecimentos veiculados socialmente, permitindo-lhes novos elementos para aprender os conhecimentos futuros (KISHIMOTO, 1997).

Desta forma, se quer afirmar que o jogo desenvolve o mental, o afetivo, o físico, atingindo o social, no reconhecimento dos demais aspectos. No lúdico, ocorre uma conscientização real das potencialidades, das limitações, das capacidades e conflitos, mas para que isso ocorra Golbert (2002) afirma que:

> Cabe ao professor ajudar os estudantes a adquirir as ferramentas culturais que lhes possibilitem refletir sobre suas próprias intuições e experiências e comunicá-las, articulando suas idéias, construindo compreensões mais ricas. Isto significa que é da competência do professor encontrar os meios de transpor a distância entre a linguagem usual dos alunos e as convenções matemáticas mais abstratas (GOLBERT, 2002, p. 8).

Segundo Kishimoto (1997), as primeiras ações de professores apoiados em teorias construtivistas foram no sentido de tornar os ambientes de ensino bastante ricos em quantidade e variedade de jogos, para que os alunos pudessem descobrir conceitos inerentes às estruturas dos jogos por meio de sua manipulação.

Almeida (1984), ao comentar a respeito da importância do jogo na educação em relação aos benefícios didáticos afirma que tais recursos tornaram-se fatores decisivos para a promoção de uma aprendizagem significativa, pois diversas teorias, dadas como difíceis, quando aplicadas através de jogos revelavam-se mais fáceis de serem compreendidas.

Lara (2003), coloca que o jogo é uma atividade poderosa para instigar a vida social e a atividade construtiva da criança, é uma oportunidade de viver plenamente, em um clima e em um âmbito de aprendizagem participativa, interativa e criativa, em que as crianças, os alunos e seus professores procuram construir um vínculo rico e produtivo, através do qual ambas as partes se fortalecerão, num mundo de descoberta recíproca, para alcançar objetivos propostos e desejados.

Conforme Kishimoto (1997), através do jogo ocorre a promoção da aprendizagem e do desenvolvimento, passando a ser considerado nas práticas escolares como um importante aliado para o ensino, já que colocar o educando diante de situações de jogo pode ser uma boa estratégia para aproximá-lo dos conteúdos culturais a serem veiculados na escola, além de poder estar promovendo o desenvolvimento de novas estruturas cognitivas.

Corroborando com essa idéia, no PCN do Ensino Médio, volume 3 (BRASIL, 1999), obtemos que além de ser um objeto sociocultural em que a Matemática está presente, o jogo é uma atividade natural no desenvolvimento dos processos psicológicos básicos. Por meio dos jogos, as crianças não apenas vivenciam situações que se repetem, mas aprendem a lidar com símbolos e a pensar por analogia. Ao criarem essas analogias, tornam-se produtoras de linguagens, criadoras de convenções, capacitando-se para submeter-se a regras e dar explicações.

Com o uso de jogos, é possível desenvolvermos no aluno, além de habilidades matemáticas, a sua concentração, a sua curiosidade, a consciência de grupo, o companheirismo, a autoconfiança e a sua auto-estima. Conforme Huizinga (1999), o jogo constitui uma preparação do jovem para as tarefas sérias que mais tarde a vida exigirá, trata-se de um exercício de autocontrole indispensável ao indivíduo.

Para Rizzo (1996), o jogo torna-se importante por estimular a construção de esquemas de raciocínio através de sua ativação, por proporcionar a busca de soluções problemáticas, através do esforço voluntário.

O uso de jogos nas aulas de Matemática não só possibilitam a criança construir relações qualitativas ou lógicas, aprender a raciocinar e a questionar, como também priorizam a socialização da criança. Eles constituem-se num excelente recurso pedagógico, onde a problematização presente, permite desafiar o discente na busca de diferentes processos que induzam a novas estratégias para a resolução dos cálculos presentes na atividade.

Segundo Lara (2003), se concebermos o ensino de Matemática como sendo um processo de repetição, treinamento e memorização, desenvolveremos um jogo apenas como sendo um outro tipo de exercício. Mas, se concebermos esse ensino como sendo um momento de descoberta, de criação e de experimentação, veremos o jogo não só como um instrumento de recreação, mas, principalmente como um veículo para a construção do conhecimento.

Rizzo (1996), coloca que quando se observa à realização de um jogo, nunca se tem o conhecimento prévio dos rumos da ação do jogador. A incerteza está sempre presente. A ação do jogador dependerá de fatores internos, de motivações pessoais, bem como de estímulos externos como a conduta de outros parceiros.

Ao jogar e discutir partidas, muitos conceitos são reavaliados, bem como diferentes aspectos do conhecimento são ampliados e aprofundados.

Segundo Grando (1995):

> O jogo é caracterizado como aquele que incorpora a estrutura matemática, fornecendo uma representação concreta e manipulativa para sustentar e demonstrar o que há por trás da Matemática. Assim, os aspectos relacionados à ação pedagógica do jogo propiciam uma discussão matemática que objetiva, sobretudo, o desenvolvimento do aluno e a sua compreensão e relação com a realidade que o cerca. Se a criança se sentir em dúvida por algum motivo lógico ou lingüístico do conceito matemático, ela pode recorrer ao concreto (jogo) para checar e dar suporte ao que está pensando (GRANDO, 1995, p. 105).

De acordo com Grossi (2000), é importante aprender a perder nos jogos didáticos, uma vez que, para aprender de verdade, se é obrigado a renunciar hipóteses que se julgavam válidas, para passar a outras mais elaboradas e mais completas.

Segundo Macedo (2000), qualquer jogo pode ser utilizado quando o objetivo é propor atividades que favorecem a aquisição de conhecimento. A questão não está no material, mas no modo como ele é explorado. Isto significa que a ação de jogar deve estar comprometida e coordenada, correspondendo a um conjunto de ações intencionais e integradas no sistema como um todo.

O professor deve buscar a avaliação constante do grau de interesse que cada jogo terá para cada criança, ficando atento se eles levarão ou não ao desenvolvimento do raciocínio e da cooperação. Ciente do tipo de desafio que o jogo coloca para a criança, se torna essencial que o professor procure unir a teoria e a prática para que possa construir um trabalho cada vez mais profundo e equilibrado, com jogos relevantes para o desenvolvimento das crianças.

A avaliação e escolha de jogos adequados para cada grupo devem ser feitas com cuidado e, na maioria das vezes, incluir a análise da participação da criança, devendo ser descartados aqueles desprovidos de um conteúdo significativo e desencadeador de processos de pensamento na criança.

Conforme Kamii (1991), queremos reafirmar que um bom jogo não é aquele que necessariamente a criança pode dominar "corretamente". O importante é que a criança possa jogar de uma maneira lógica e desafiadora para si mesma e seu grupo.

Um critério importante na aplicação de jogos implica na possibilidade de as crianças avaliarem sozinhas os resultados de suas ações. Torna-se necessário evitar qualquer situação de ambivalência para que, diante a um resultado falho a criança possa julgar onde errou e exercitar sua inteligência na resolução de problemas, construindo relações entre vários tipos de ação e vários tipos de reação de um objeto.

A predominância de uma participação ativa de todos os jogadores num jogo irá depender da capacidade de envolvimento das crianças, o que será decorrente do seu nível de desenvolvimento. Esta participação ativa se refere à atividade mental que será desenvolvida pelas crianças, o que envolve a participação de cada jogador, seja observando, agindo ou pensando.

Segundo Kamii (1991), a proposta de jogos em grupo não é advogada meramente para que as crianças aprendam a jogar determinados jogos, o que importa é que o jogo proporcione um contexto estimulador da atividade mental da criança e de sua capacidade de cooperação, seja ele jogado ou não de acordo com as regras previamente determinadas.

Lara (2003), classifica os jogos matemáticos em jogos de construção, jogos de treinamento, jogos de aprofundamento e jogos estratégicos. Os **jogos de construção** são aqueles que trazem para o estudante um assunto desconhecido fazendo com que, através da manipulação de materiais ou de perguntas e respostas, ele sinta a necessidade de uma nova ferramenta, ou se preferirmos um novo conhecimento para resolver determinada situação-problema proposta no jogo. Segundo Lara (2003), os **jogos de treinamento** podem auxiliar no desenvolvimento de um pensamento dedutivo ou lógico mais rápido. Muitas vezes, é através de exercícios repetitivos que o aluno percebe a existência de outro caminho de resolução que poderia ser seguido aumentando, assim, suas possibilidades de ação e intervenção.

Conforme Lara (2003), um outro tipo de jogo são os chamados **jogos de aprofundamento**. Depois que o aluno tenha construído ou trabalhado determinado assunto, é importante que o professor proporcione situações onde o aluno aplique-o. A resolução de problemas é uma atividade muito conveniente para esse aprofundamento, e tais problemas podem ser apresentados na forma de jogos. O último tipo de jogo são os denominados **jogos estratégicos**, os quais fazem com que o aluno crie estratégias de ação para uma melhor atuação como jogador. Onde ele tenha que criar hipóteses e desenvolver um pensamento sistêmico, podendo pensar múltiplas alternativas para resolver um determinado problema.

A revisão bibliográfica justifica a opção pelos jogos educativos no ensino do conceito de função. Em síntese, o jogo, na sala de aula é recomendado, pois conforme Macedo (2000), o jogo favorece e enriquece o processo de aprendizagem, na medida em que o sujeito é levado a refletir, fazer previsões e inter-relacionar objetos e eventos.

Seguindo a classificação proposta por Lara (2003), optamos pelos jogos de construção, seguidos pelos jogos de treinamento e jogos de estratégia. Os primeiros utilizam a idéia de Máquina de Função para trabalhar com o conceito de função. Os outros são motivadores para revisão de conteúdos e, mesmo sendo considerados de treinamento, têm potencial para dar à conversação, à discussão e à interação, na sala de aula, propiciando um ambiente efetivo para a aprendizagem.

4 CONSIDERAÇÕES SOBRE A PESQUISA

4.1 Problema

Como a utilização de jogos matemáticos contribui para a criação de imagens conceituais associadas ao conceito de Função?

4.2 Objetivos

4.2.1 Objetivo Geral

Investigar a contribuição de jogos matemáticos na formação de imagens conceituais a cerca de Função em uma turma específica.

4.2.2 Objetivos Específicos

- Realizar um levantamento bibliográfico envolvendo o conteúdo de Função e as pesquisas referentes à utilização de jogos no ensino de matemática.
- Investigar, em uma pesquisa qualitativa com os alunos do Magistério, as imagens conceituais dos mesmos sobre Função.
- Investigar a utilização de jogos matemáticos que promovam evolução da imagem conceitual de Função no caso de estudantes do Magistério.
- Verificar a aplicabilidade do jogo Máquina de Função entre outros na criação e evolução de imagens conceituais de Função, desenvolvidos em turma piloto e analisar os resultados obtidos.

4.3 Metodologia

Na realização da pesquisa sobre Jogos Matemáticos para o Ensino de Função, utilizou-se uma pesquisa qualitativa, que segundo Goldenberg (2004), consiste em descrições detalhadas de situações com o objetivo de compreender os indivíduos em seus próprios termos, obrigando o pesquisador a ter flexibilidade e criatividade no momento de coletá-los e analisá-los.

Para o desenvolvimento de nossa pesquisa, optamos por trabalhar com uma turma do Magistério, pois como futuros professores, acreditamos que estejam cientes da importância de buscarmos novas formas de trabalho para o ensino da matemática. Esta escolha foi fundamental para a pesquisa, pois os estudantes no decorrer dos encontros demonstravam muito interesse e motivação pelo trabalho que estava sendo realizado. Para os discentes foi importante, pois tiveram a oportunidade de trabalhar mais profundamente com funções e conheceram variados jogos, os quais poderiam ser adaptados para atividades que os mesmos pudessem aplicar com seus alunos futuramente.

A pesquisa foi desenvolvida com 17 alunos do 1º ano do Magistério do Instituto Estadual de Educação Pereira Coruja, no município de Taquari.

A turma contava com 31 alunos, mas para a realização da pesquisa, optamos por trabalhar com um grupo menor, para que pudéssemos acompanhar melhor o desenvolvimento das atividades realizadas, bem como analisar e observar suas dúvidas e dificuldades. Nesta fase, obtivemos a ajuda da professora titular de Matemática, a qual selecionou os estudantes que gostariam de participar entre os que apresentavam maiores dificuldades de aprendizagem.

Um fator importante a ser esclarecido foi que a pesquisa teve que ocorrer em horários alternativos, de acordo com a disponibilidade dos alunos e da pesquisadora, pois os discentes estudavam em turnos variados. Os alunos tinham aula no turno da tarde, e retornavam toda a quarta-feira pela manhã para completarem suas horas aulas, sendo que sempre neste dia o horário das aulas era reduzido para que os professores realizassem suas reuniões pedagógicas.

A professora de Matemática da turma esclareceu aos estudantes que participariam da pesquisa que avaliaria a participação e os resultados dos mesmos, dentro da programação usual de recuperações da escola.

Para o desenvolvimento da pesquisa em um primeiro momento, foi realizado um levantamento bibliográfico envolvendo o conteúdo de Função e as pesquisas referentes à utilização de jogos matemáticos no ensino, conforme foi descrito nos itens um, dois e três. Desta forma, nos foi possível analisar diferentes teses e dissertações sobre funções, onde observamos que a maioria se referem à história das funções, ou estão relacionadas à utilização de programas de computador. Torna-se importante salientar que poucas utilizam o uso de jogos matemáticos para desenvolver o conceito de função.

Em um segundo momento foi feita uma pesquisa quantitativa mediante aplicação de um questionário com alunos do 1º ano do Magistério, a fim de verificar quais são os jogos, dentre os disponíveis no mercado, que os agradam e que costumam jogar.

Em um terceiro momento, a partir dos resultados da análise quantitativa foram confeccionados e selecionados jogos matemáticos, enfocando a construção do conceito de Função.

Os jogos Trevo da Sorte, Jogo da Velha, Envelopes Matemáticos e Pino Vivo, foram confeccionados pela pesquisadora, pois a mesma trabalhou com eles durante a sua graduação em Matemática-Licenciatura Plena na Universidade de Santa Cruz do Sul – Unisc, como Monitora do projeto "A Matemática através dos Jogos". Os demais jogos: Jogo de Damas, Máquina de Função (desenhos), Máquina de Função (descubra a saída), Máquina de Função (descubra a função), Encaixe Matemático, Matemática Divertida e Dorminhoco Matemático, foram criados e confeccionados pela pesquisadora que procurou desenvolver estes jogos a partir das análises de David Tall sobre a Máquina de Função.

Em um quarto momento, realizou-se um pré-teste abordando o conceito de Função, baseado nas pesquisas desenvolvidas por David Tall, o qual em diversos artigos relata as entrevistas e testes realizados com estudantes. Diferentes aspectos relacionados ao conceito de função foram abordados: como a definição e as variadas representações, tanto através de expressões, de diagramas e de gráficos, entre outras.

Em um quinto momento, foi feita a aplicação dos jogos em turmas do 1º ano do Magistério. A análise do pré-teste e do pós-teste foi qualitativa, com observações decorrentes da aplicação dos jogos registrados através de filmagens e do diário de bordo da pesquisadora.

Finalmente, procedemos com a avaliação dos jogos aplicados, bem como da compreensão do conceito de Função mediante aplicação de pós-teste e análise das observações e registros.

5 ANÁLISE DAS ENTREVISTAS

Nossa pesquisa foi realizada com estudantes do 1º ano do Magistério do Instituto Estadual de Educação Pereira Coruja. O Instituto oferece as seguintes modalidades de ensino: Educação Infantil, Ensino Fundamental, Ensino Médio, Magistério, Curso Técnico em Química e em Meio Ambiente.

5.1 Dados das entrevistas de estudantes do 1º ano do Ensino Médio

Foi realizada uma entrevista, dentro do paradigma quantitativo, a qual foi desenvolvido com a intenção de verificar a impressão que os alunos tinham sobre o uso de jogos nas aulas de Matemática e os jogos de sua preferência.

Torna-se importante salientarmos que nossa pesquisa "Jogos Matemáticos para o Ensino de Função", é uma pesquisa qualitativa, a qual utilizou o paradigma quantitativo apenas visando a obtenção de dados que serão utilizados na realização da pesquisa a ser desenvolvida.

A entrevista foi realizada através de um questionário com onze perguntas (em anexo). Foram entrevistados 31 estudantes do 1º ano do Magistério. O questionário foi composto tanto de perguntas específicas quanto não específicas.

O primeiro questionamento em nossa entrevista refere-se à idade que os alunos entrevistados possuem. No gráfico abaixo, podemos observar que a maioria dos alunos possui entre quatorze e quinze anos, e somente 19% possuem dezesseis anos.

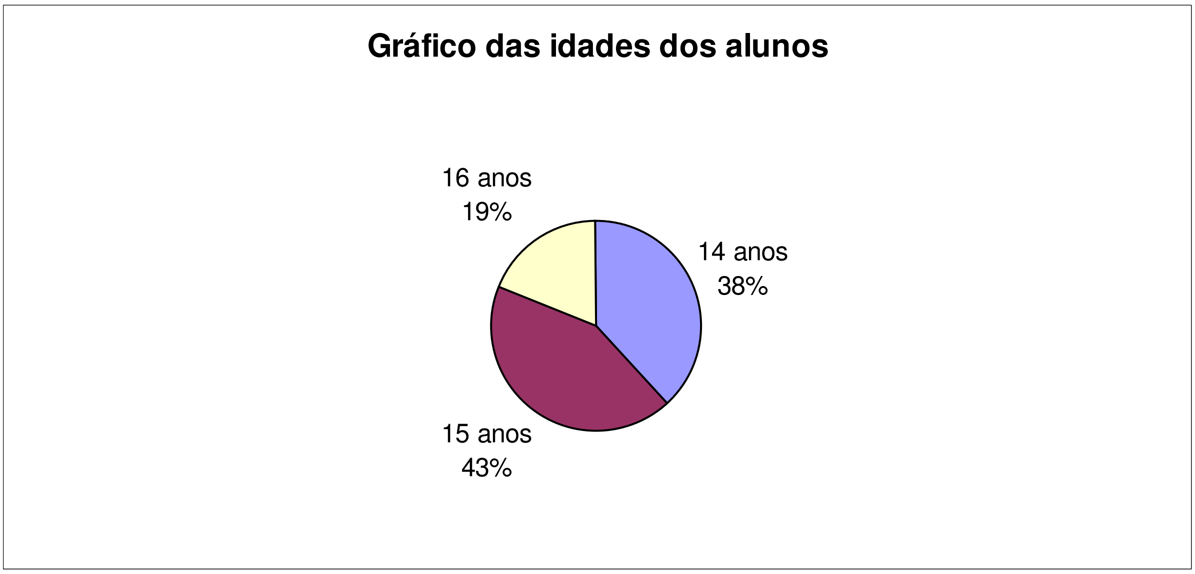


Gráfico 1: Gráfico das idades dos alunos - Fonte: Pesquisa

Quando os educandos foram questionados sobre suas expectativas em relação à disciplina de Matemática a maioria demonstrou ter boas expectativas, dentre os aspectos citados, observa-se à preocupação com o futuro e a pretensão de possuir uma profissão gratificante no futuro.

Alguns alunos não demonstraram apreensão sobre o futuro, mas colocaram que entre suas expectativas sobre a disciplina de Matemática estava o desenvolvimento do raciocínio, a obtenção de novas aprendizagens, estimular o pensamento, bem como obter aprovação na disciplina.

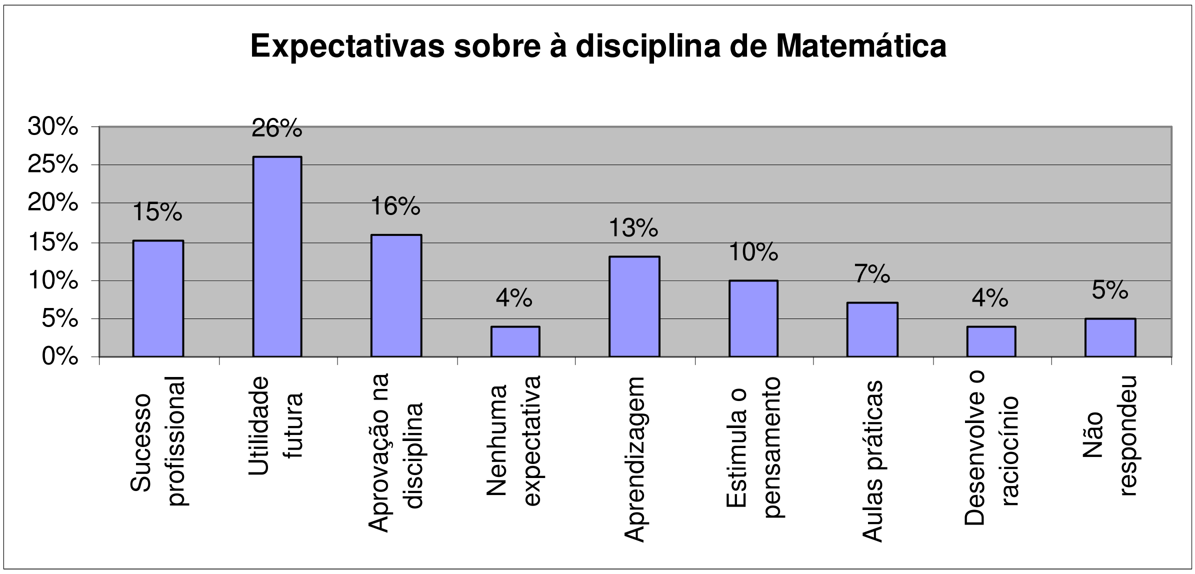


Gráfico 2: Expectativas sobre à disciplina de Matemática - Fonte: Pesquisa

Em um dos questionamentos, foi solicitado aos alunos que opinassem se as aulas de Matemática os motivam a buscarem novos conhecimentos. A maioria dos alunos entrevistados respondeu que “sim”, sendo que os demais responderam que “às vezes” e outros que “não”.

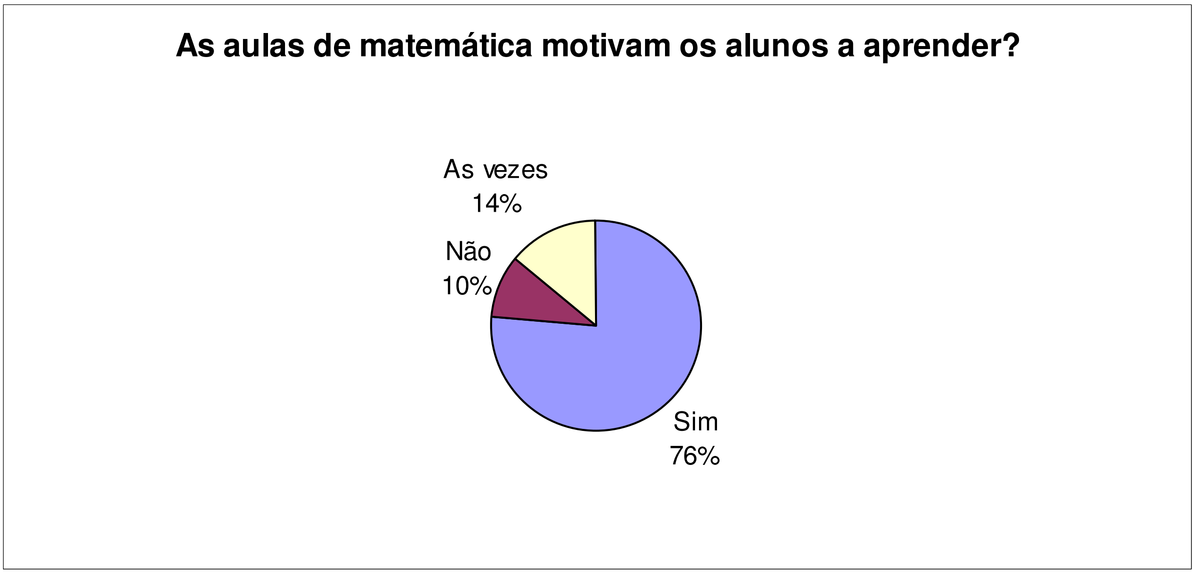


Gráfico 3: As aulas de Matemática motivam os alunos a aprender? - Fonte: Pesquisa

Com a intenção de obter uma visão mais ampla do cotidiano dos alunos, foi questionado como as aulas de Matemática costumam ser ministradas. As respostas dos estudantes se detiveram à aula expositiva e dialogada, e utilização de material impresso ou mimeografado.

Segundo os educandos, nas aulas de Matemática não são utilizados recursos didáticos e não são realizados trabalhos em grupos ou individuais.

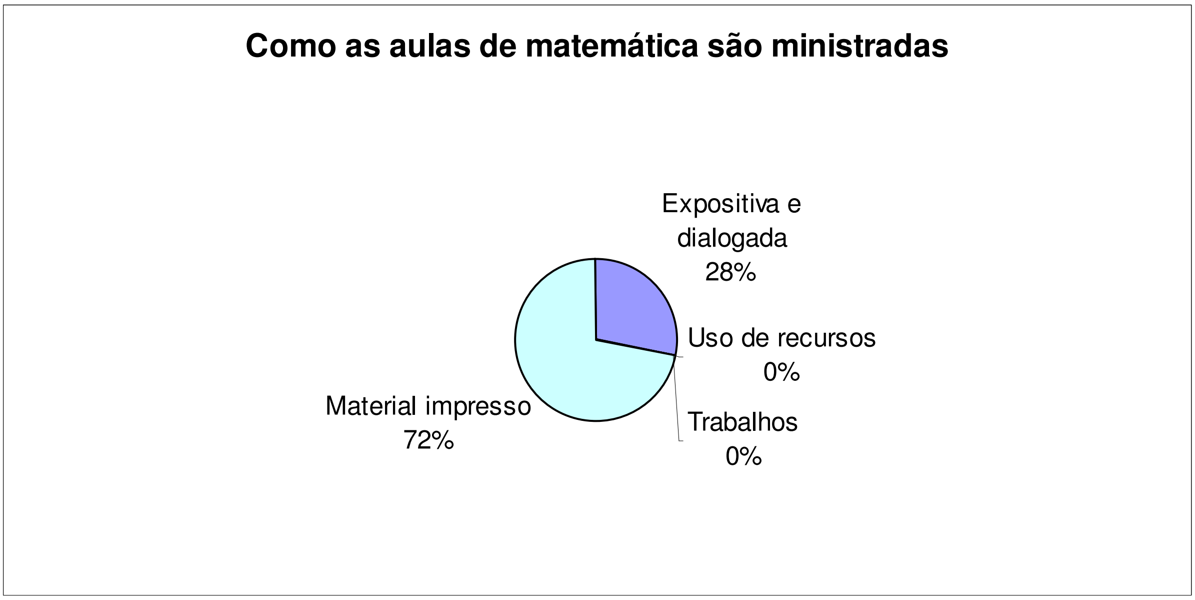


Gráfico 4: Como as aulas de Matemática são ministradas - Fonte: Pesquisa

Com a intenção de analisar o nível de interesse dos alunos em adquirir novos conhecimentos, questionamos se os mesmos possuem o hábito de estudar além do que lhes é ensinado em aula. Observamos que a maior parte dos alunos (76%) respondeu que não costuma estudar além do que lhe é ensinado em aula, sendo que alguns alunos afirmaram que procuram realizar as tarefas extraclasse que lhes são dadas. Em relação ao fato de não estudar, um dos alunos alegou que “tenho muita preguiça”.

Os educandos que responderam que “sim” e “às vezes”, justificaram que costumam fazê-lo quando não entenderam o conteúdo que foi explanado em aula, ou quando possuem alguma prova ou trabalho de avaliação.

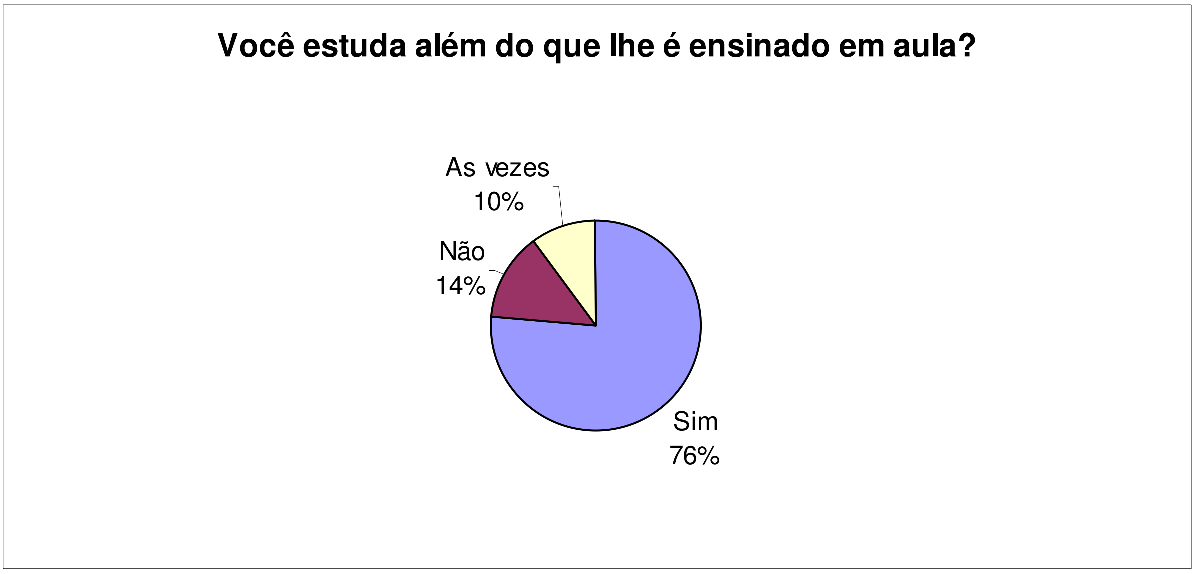


Gráfico 5: Você estuda além do que lhe é ensinado em aula? - Fonte: Pesquisa

Questionamos os alunos sobre os tipos de jogos de sua preferência, buscamos subsídios para os jogos que desejamos criar para trabalhar com os educandos. Nesta questão podemos observar que todos os jogos foram selecionados, demonstrando o grande interesse que os alunos tem por este tipo de atividade.

O jogo mais votado foi o baralho, seguido pelo quebra-cabeça e pelo bingo. Foram citados, pelos alunos, ainda jogos no computador e jogos esportivos, como vôlei e futebol.

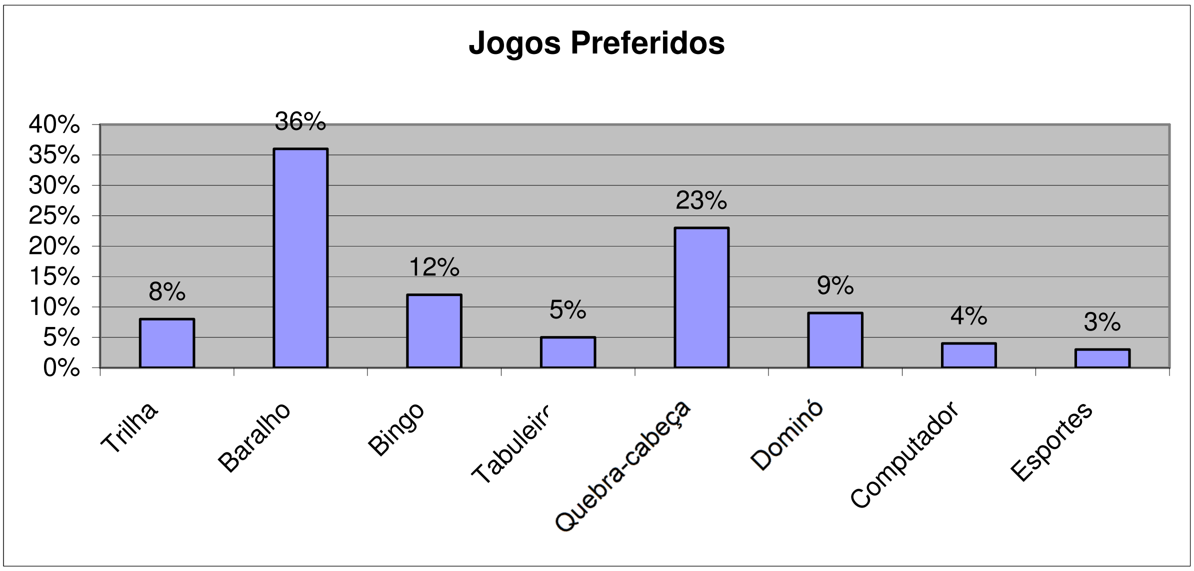


Gráfico 6: Jogos preferidos - Fonte: Pesquisa

Com o propósito de obter respostas mais específicas, em um dos questionamentos citamos alguns jogos para que os alunos assinalassem os que mais apreciavam.

Neste questionamento, nossa intenção era analisar os jogos preferidos dos estudantes para que pudéssemos construir jogos matemáticos que fossem ao encontro das expectativas dos mesmos. Foi possível observar que com exceção do jogo War e do jogo Imagem e Ação, os quais não foram citados pelos alunos talvez por falta de conhecimento dos mesmos, todos os outros foram escolhidos. Sendo que os mais votados foram Palavras Cruzadas, Banco Imobiliário, Batalha Naval e Xadrez.

Alguns alunos citaram ainda sua preferência pelos jogos esportivos e pelo jogo de computador RPG.

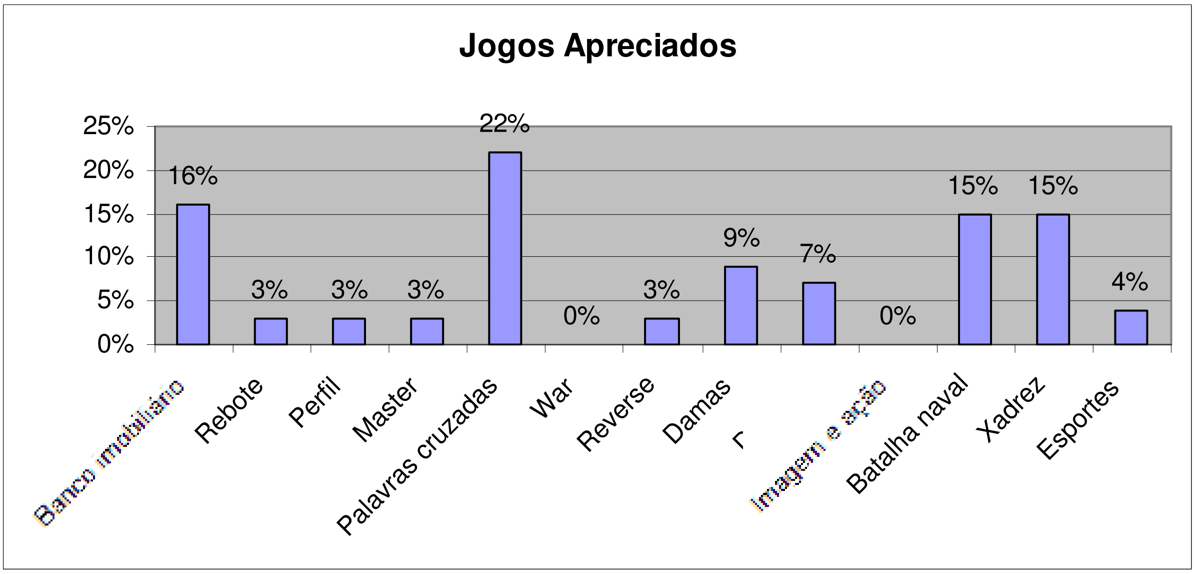


Gráfico 7: Jogos Apreciados - Fonte: Pesquisa

Com o propósito de conduzir os questionamentos aos nossos objetivos mais específicos, perguntamos aos educandos se o uso de jogos matemáticos os motivaria e os ajudaria no estudo da matemática.

A maioria dos estudantes (90%) respondeu que acham importante por ser uma forma divertida e interessante de aprender, um dos estudantes justificou sua opinião escrevendo que "É brincando que se aprende". Um dos alunos não soube responder, e outro respondeu que não gosta do uso de jogos ao que colocou: "Não gosto de misturar jogo com aula".

Através deste questionamento podemos analisar, que grande parte dos educandos demonstram interesse no uso de jogos nas aulas de matemática, acreditando que desta forma a aquisição de novos conhecimentos se tornaria algo prazeroso e diferenciado.

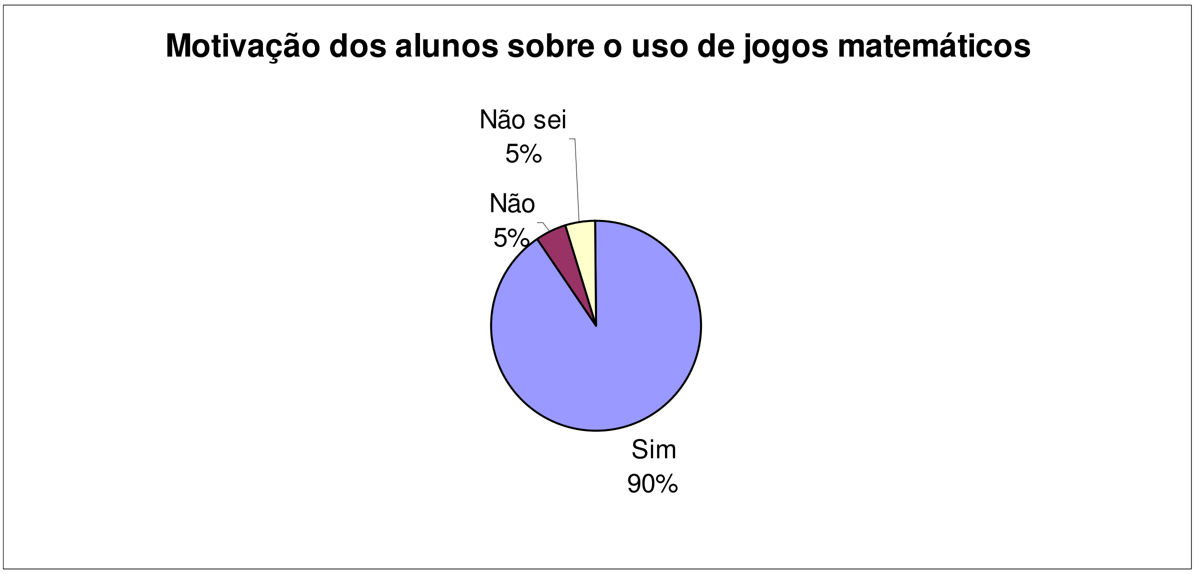


Gráfico 8: Motivação dos alunos sobre o uso de jogos matemáticos - Fonte: Pesquisa

Questionamos os alunos se em suas aulas de Matemática são utilizados jogos e desafios. A maioria dos alunos respondeu que “não”, enquanto (5%) responderam que “sim”.

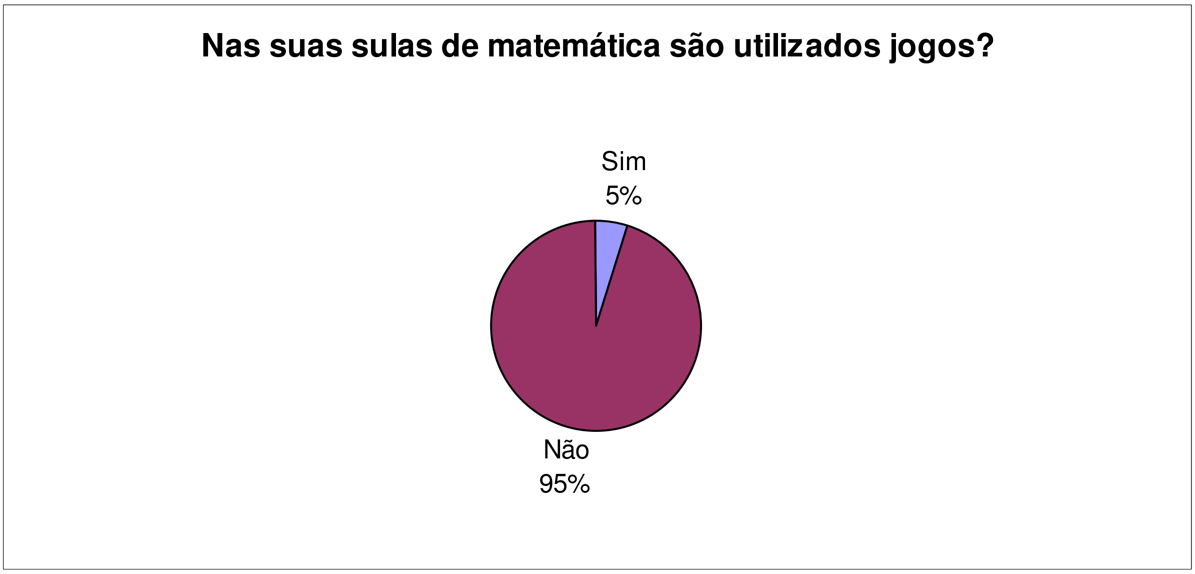


Gráfico 9: Nas suas aulas de matemática são utilizados jogos? - Fonte: Pesquisa

O questionamento seguinte se referia à regularidade com que são utilizados jogos e desafios nas aulas de Matemática. Perguntamos se eles eram utilizados semanalmente, mensalmente ou trimestralmente.

A maioria dos educandos não respondeu este questionamento, pois haviam colocado anteriormente que não eram utilizados jogos nas suas aulas. A regularidade colocada por um aluno (5%) foi que os jogos são utilizados trimestralmente.

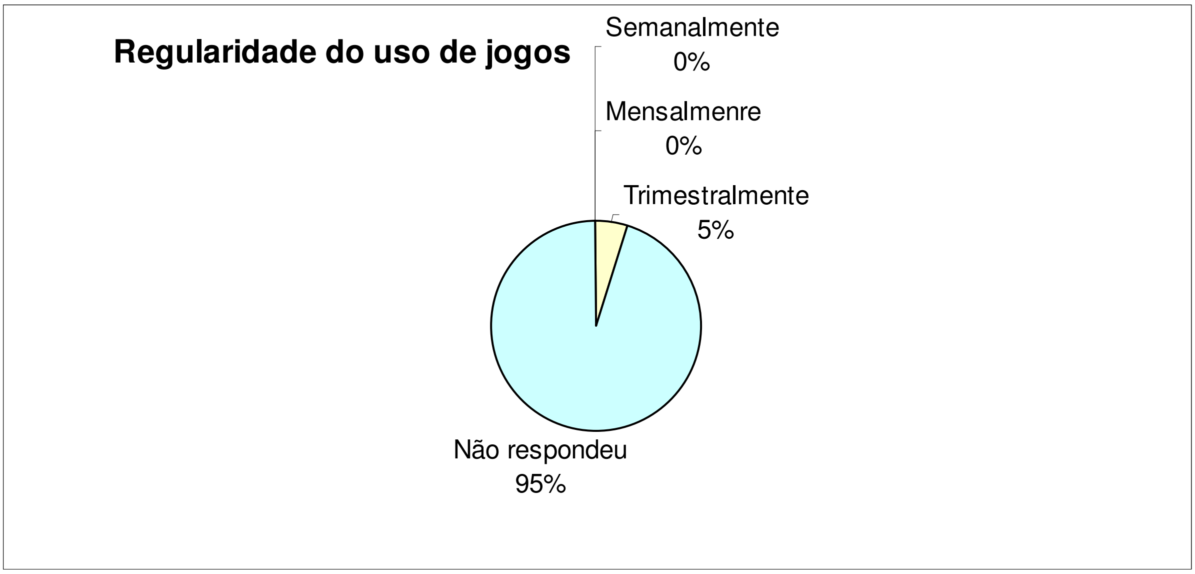


Gráfico 10: Regularidade do uso de jogos - Fonte: Pesquisa

Na última questão perguntamos aos educandos se eles consideravam importante o uso de jogos e desafios matemáticos nas suas aulas e solicitamos que justificassem suas respostas.

Os educandos em sua maioria utilizaram respostas afirmativas para o questionamento, fazendo uso de argumentações positivas como o fato de que o uso de jogos torna as aulas motivadoras, divertidas, promove a aprendizagem, estimula o raciocínio e desperta o interesse. Um dos estudantes justificou que acredita que o uso de jogos seja importante porque "Motivaria os alunos a estudar matemática e ficaria mais interessante e divertida".

Um total de (9%) dos educandos não respondeu este questionamento, enquanto um aluno colocou que gosta de aulas tradicionais dizendo: "Eu gosto de aula normal, atividades no quadro, provas e trabalhos individuais e em grupo".

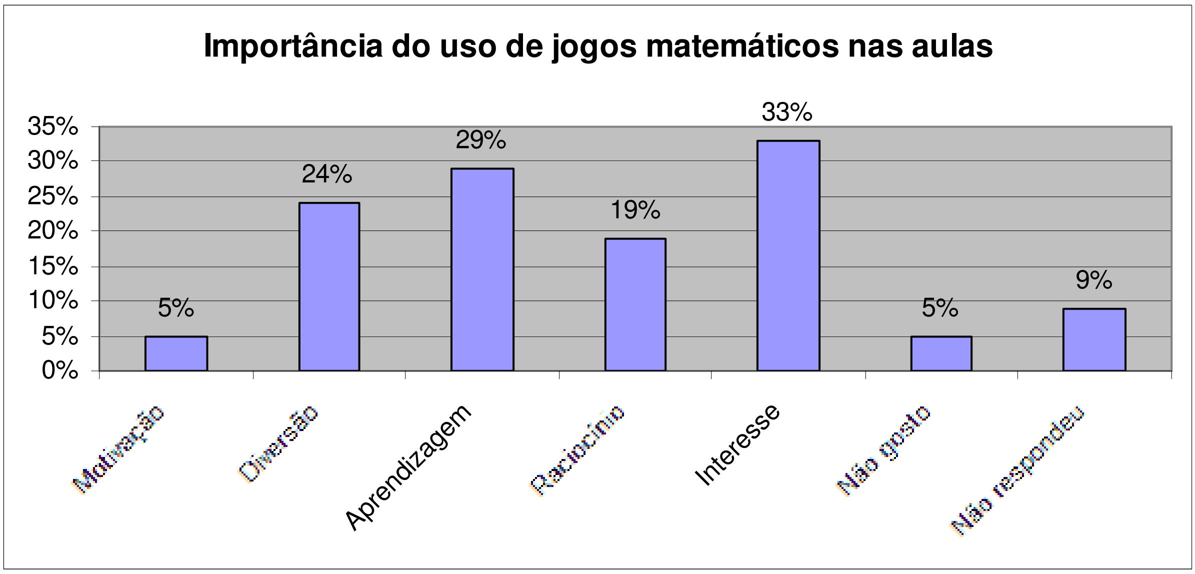


Gráfico 11: Importância do uso de jogos matemáticos nas aulas - Fonte: Pesquisa

Através da realização desta entrevista, nos foi possível observar os sentimentos dos estudantes a cerca do uso de jogos nas aulas de matemática. Percebemos que a maioria demonstrou interesse em participar de aulas diferenciadas, acreditando que desta forma desenvolverão suas habilidades e potencialidades amplamente.

6 JOGOS MATEMÁTICOS UTILIZADOS NA PESQUISA

Os jogos construídos para o desenvolvimento desta pesquisa, basearam-se nas teorias de David Tall. Em suas pesquisas, Tall utilizou a idéia da Maquia de Função para trabalhar o conceito de função com os estudantes. A máquina de função era pensada como uma máquina de entrada e saída, onde se colocava uma entrada, e baseado numa função estipulada obtinha-se uma saída. Baseado nesta idéia de máquina procuramos desenvolver variados tipos de jogos que propiciassem aos educandos variadas maneiras de trabalharmos com o conceito de função, tanto através da faceta simbólica, quanto da faceta numérica.

Neste item descreveremos as regras dos jogos que foram utilizados na realização da pesquisa envolvendo Jogos Matemáticos para o Ensino de Função.

Os jogos foram confeccionados de forma bastante colorida para que os alunos se sentissem interessados em participar das atividades. Não foram utilizados personagens infantis por se tratarem de jogos que seriam aplicados no Ensino Médio.

Os conteúdos presentes em cada jogo são diferenciados, embora todos trabalhem com os conceitos envolvidos no conteúdo de Função. Os jogos confeccionados recebem os nomes de Jogo de Damas, Máquina de Função, Encaixe Matemático, Matemática Divertida, Trevo da Sorte, Jogo da Velha, Dorminhoco Matemático, Encaixe Matemático e Pino-Vivo.

A seguir, colocaremos o desenvolvimento de cada jogo utilizado, sua foto, seus objetivos e as regras do mesmo.

6.1 Jogo: <u>Jogo de Damas</u>

Este jogo foi criado e confeccionado pela pesquisadora. Podemos classificar este jogo tanto como construção quanto estratégia, conforme definição apresentada por Lara no capítulo três, página 25.

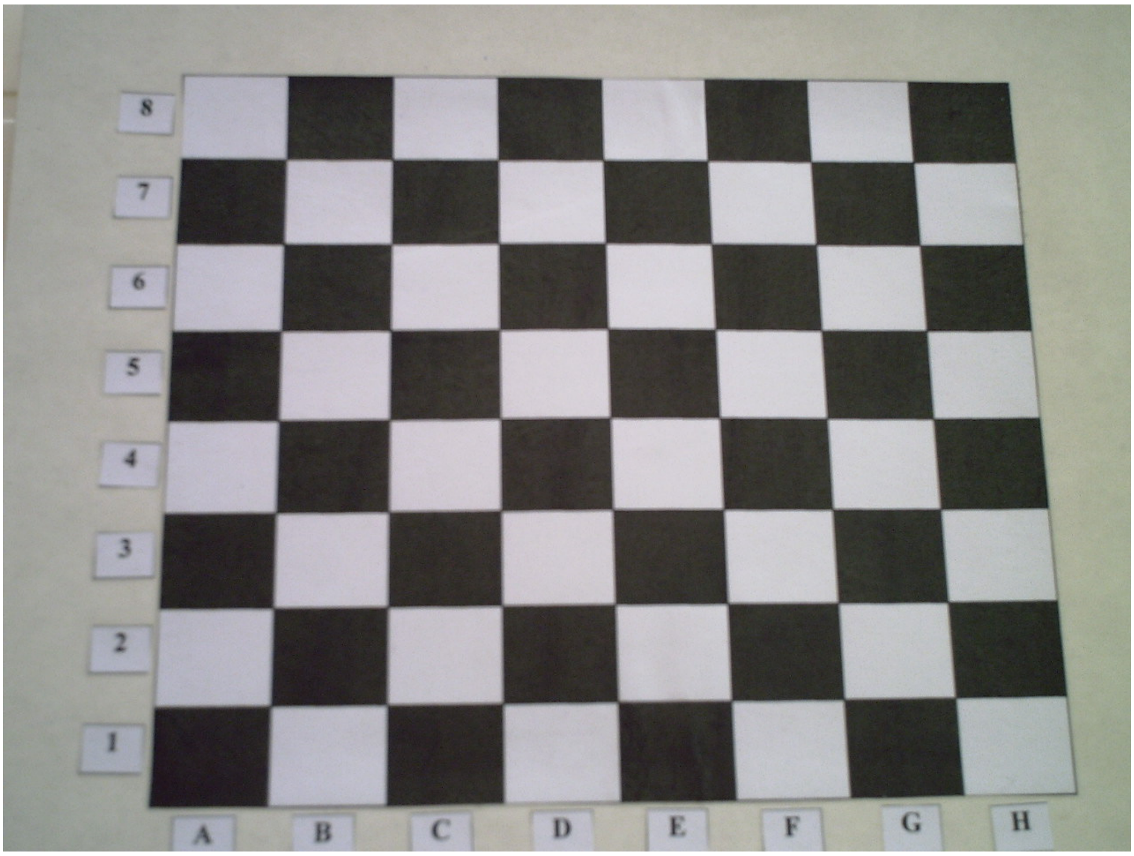


Figura 1: Tabuleiro para o Jogo de Damas.

Objetivos:

- reconhecer o sistema de coordenadas cartesianas;
- desenvolver o conceito de função.

Regras do Jogo:

Neste Jogo de Damas, cada casa pode ser identificada por um par ordenado de números e letras, onde as letras indicam as colunas e os números representam as linhas. Em duplas, os alunos deverão realizar as jogadas, mas sempre anotando a "casa" de saída e a "casa" de chegada. Vencerá o jogo que "comer" todas as peças do adversário, e tenha escrito corretamente todos os pontos encontrados.

Exemplo de como as jogadas poderão ser anotadas:

Saída	**Chegada**
(B,2)	(C,3)
(F,4)	(E,5)

6.2 Jogo: <u>Máquina de Função (desenhos)</u>

Este jogo foi criado e confeccionado pela pesquisadora. Os exercícios utilizados neste jogo encontram-se na página 126. Podemos classificar este jogo como construção, conforme definição apresentada por Lara no capítulo três, página 25.

Figura 2: Tabuleiro para o jogo Máquina de Função (desenhos)

<u>Objetivos</u>:

- desenvolver o conceito de Função através de representações simbólicas;
- descobrir as funções presentes em cada situação.

<u>Regras do Jogo</u>:

Divisão dos alunos em grupos.

O jogo contém quatro situações diferentes, na qual existem uma entrada, uma função e uma saída. Em cada uma há alterações nos desenhos referentes às saídas. Os alunos deverão observar as posições das figuras na entrada e na saída, procurando encontrar a função que está representada em cada situação, ou seja, o deslocamento sofrido por cada elemento da entrada.

<u>Observação</u>: Neste jogo não há vencedores nem perdedores, pois visamos o debate em grupo e a construção de conhecimentos.

6.3 Jogo: <u>Máquina de Função (descubra a saída)</u>

Este jogo foi criado e confeccionado pela pesquisadora. Os exercícios utilizados neste jogo encontram-se na página 127. Podemos classificar este jogo como construção, conforme definição apresentada por Lara no capítulo três, página 25.

Figura 3: Tabuleiro para o jogo Máquina de Função (descubra a saída)

<u>Objetivos</u>:

- desenvolver o conceito de Função através de representações numéricas;
- descobrir as saídas presentes em cada situação.

<u>Regras do Jogo</u>:

Divisão dos alunos em grupos.

Neste jogo são apresentadas diferentes situações onde em cada uma está representada uma entrada, que contém números, e uma função. Questiona-se qual será a saída para cada situação. Os educandos deverão debater no grupo quais serão as saídas referentes a cada situação apresentada.

Observação: Neste jogo não há vencedores nem perdedores, pois visamos o debate em grupo e a construção de conhecimentos.

6.4 Jogo: <u>Máquina de Função (descubra a função)</u>

Este jogo foi criado e confeccionado pela pesquisadora. Os exercícios utilizados neste jogo encontram-se na página 129. Podemos classificar este jogo como construção, conforme definição apresentada por Lara no capítulo três, página 25.

Figura 4: Tabuleiro para o jogo Máquina de Função (descubra a função)

<u>Objetivos</u>:

- desenvolver o conceito de Função através de representações numéricas;
- descobrir as funções apresentadas em cada situação.

<u>Regras do Jogo</u>:

Divisão dos alunos em grupos.

Neste jogo estão representadas diferentes situações, onde aparecem números na entrada e na saída. Os estudantes deverão analisar cada situação e descobrir qual a função presente em cada uma.

Observação: Neste jogo não há vencedores nem perdedores, pois visamos o debate em grupo e a construção de conhecimentos.

6.5 Jogo: <u>Encaixe Matemático (desenhos)</u>

Este jogo foi criado e confeccionado pela pesquisadora. Os exercícios utilizados neste jogo encontram-se na página 130. Podemos classificar este jogo como construção, conforme definição apresentada por Lara no capítulo três, página 25.

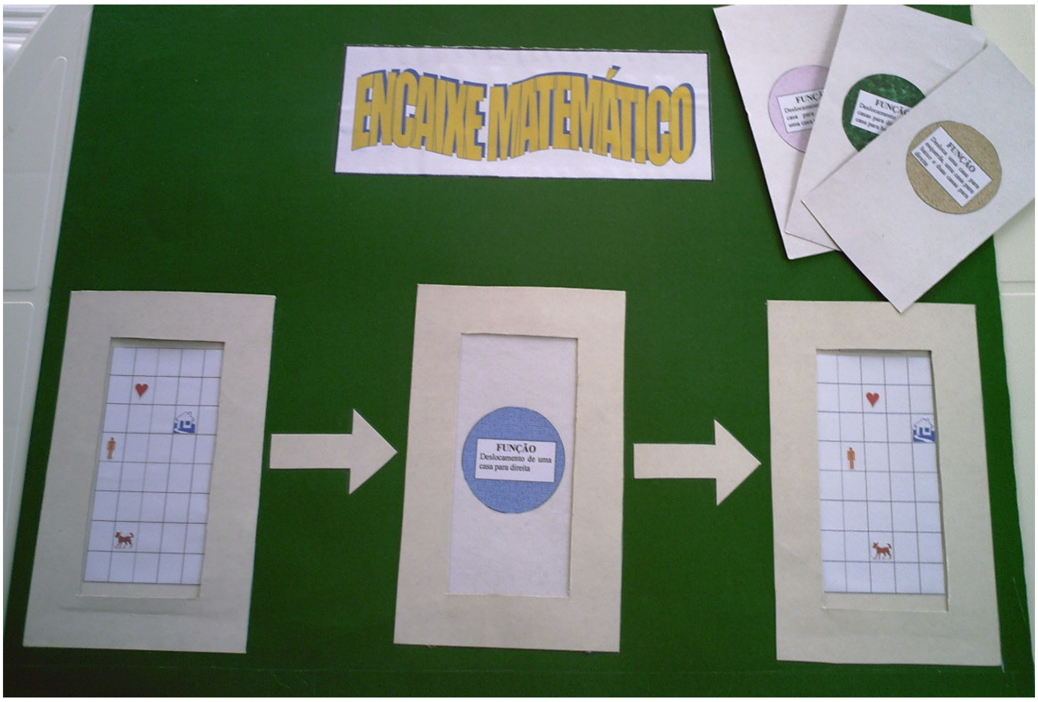


Figura 5: Tabuleiro para o jogo Encaixe Matemático (desenhos)

<u>Objetivos</u>:

- reconhecer as funções presentes em cada situação;
- desenvolver o conceito de Função.

<u>Regras do Jogo</u>:

Divisão dos alunos em grupos.

Neste jogo os alunos receberão cartelas com desenhos, representados pelas palavras entrada e saída. Os alunos também receberão cartelas contendo funções. Para jogar os alunos deverão pegar as cartelas de entrada e saída que tenham o número 1 atrás. Após deverão analisar e procurar qual é a função que está representada nesta situação. Os educandos deverão proceder da mesma forma com as outras cartelas.

6.6 Jogo: Encaixe Matemático (descubra a saída)

Este jogo foi criado e confeccionado pela pesquisadora. Os exercícios utilizados neste jogo encontram-se na página 132. Podemos classificar este jogo como construção, conforme definição apresentada por Lara no capítulo três, página 25.

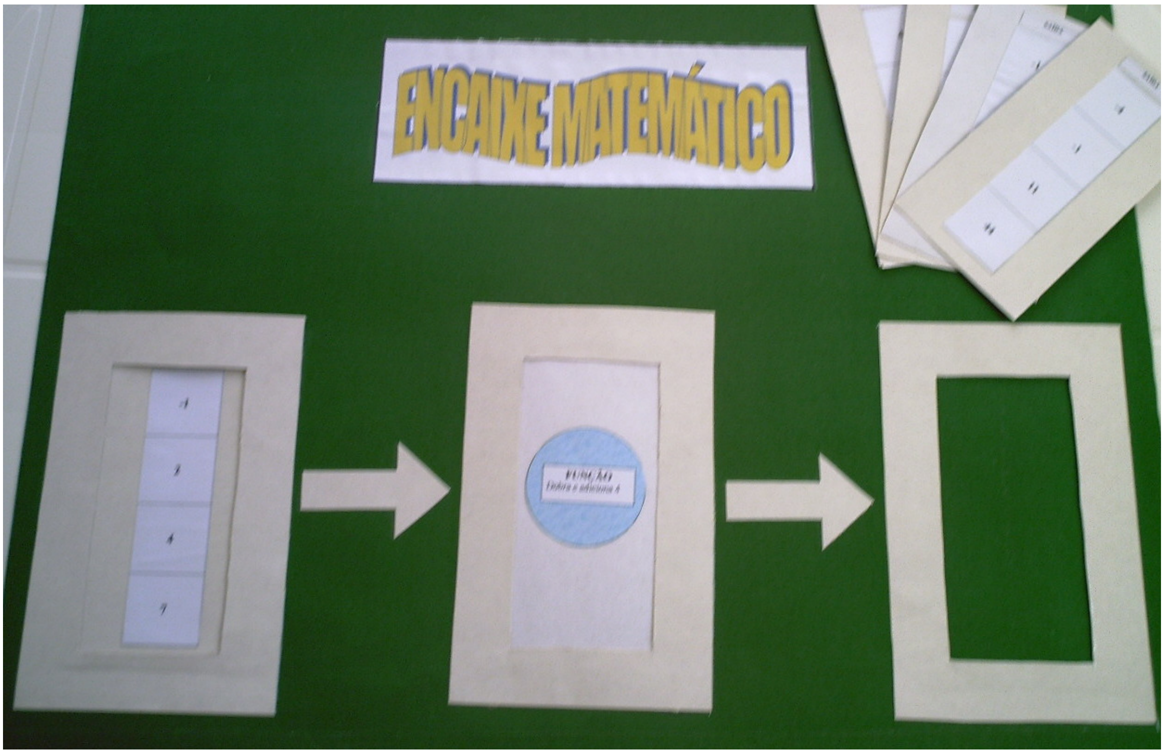


Figura 6: Tabuleiro para o jogo Encaixe Matemático (descubra a saída)

Objetivos:

- fortalecer o conceito de Função;
- descobrir as funções representadas por números em cada situação apresentada.

Regras do Jogo:

Divisão dos alunos em grupos.

Os alunos receberão cartelas onde aparecerão entrada, função e saída. Serão várias situações com este formato. Atrás das cartelas de entrada e função terão números, os quais correspondem a uma determinada saída que deverá ser descoberta pelos estudantes. Para o exemplo, sugerimos que primeiramente os alunos coloquem a entrada e a função 1. Após realizar esses encaixes, eles deverão descobrir qual é a saída. Após terem encontrado esta saída, eles encaixarão as outras entradas e funções presentes no jogo.

6.7 Jogo: <u>Encaixe Matemático (descubra a função)</u>

Este jogo foi criado e confeccionado pela pesquisadora. Os exercícios utilizados neste jogo encontram-se na página 133. Podemos classificar este jogo como construção, conforme definição apresentada por Lara no capítulo três, página 25.

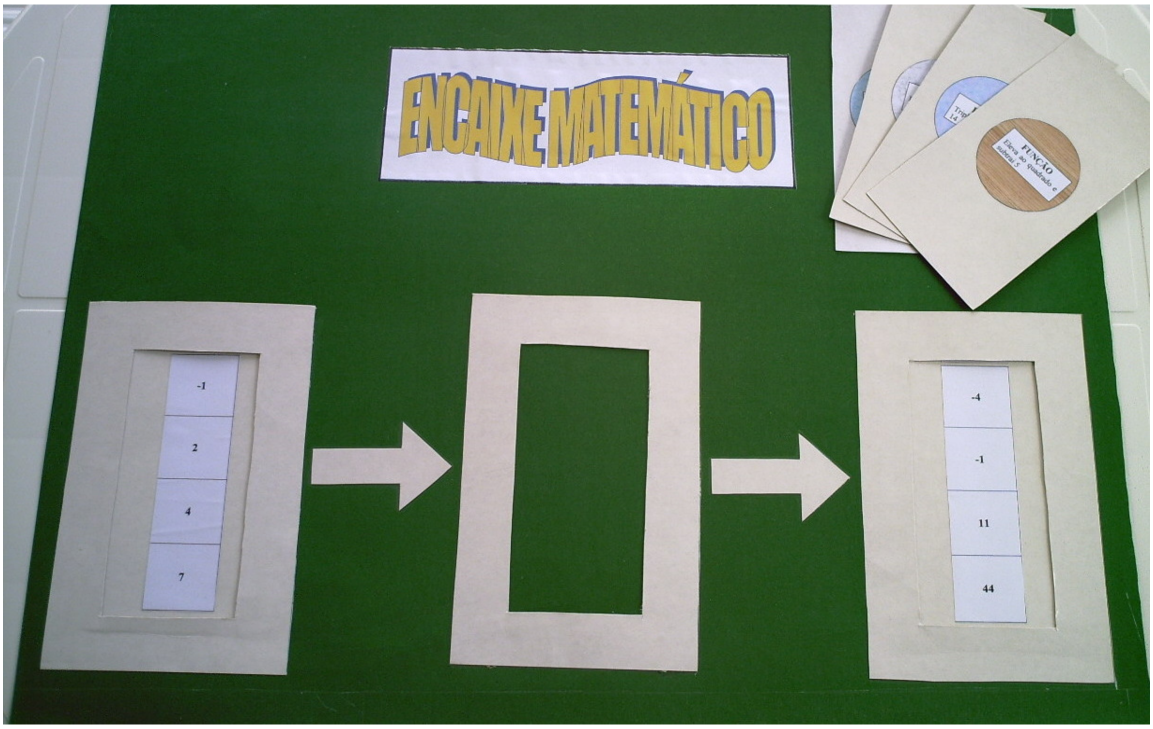


Figura 7: Tabuleiro para o jogo Encaixe Matemático (descubra a função)

<u>Objetivos</u>:

- reconhecer as funções presentes em cada situação;
- desenvolver o conceito de função utilizando representações numéricas.

<u>Regras do Jogo</u>:

Divisão dos alunos em grupos.

Neste jogo os alunos receberão cartelas nas quais as entradas e saídas estão numeradas. Através do debate em grupo, os alunos deverão encontrar qual é a função presente em cada situação.

6.8 Jogo: Matemática Divertida (desenhos)

Este jogo foi criado e confeccionado pela pesquisadora. Podemos classificar este jogo como construção, conforme definição apresentada por Lara no capítulo três, página 25.

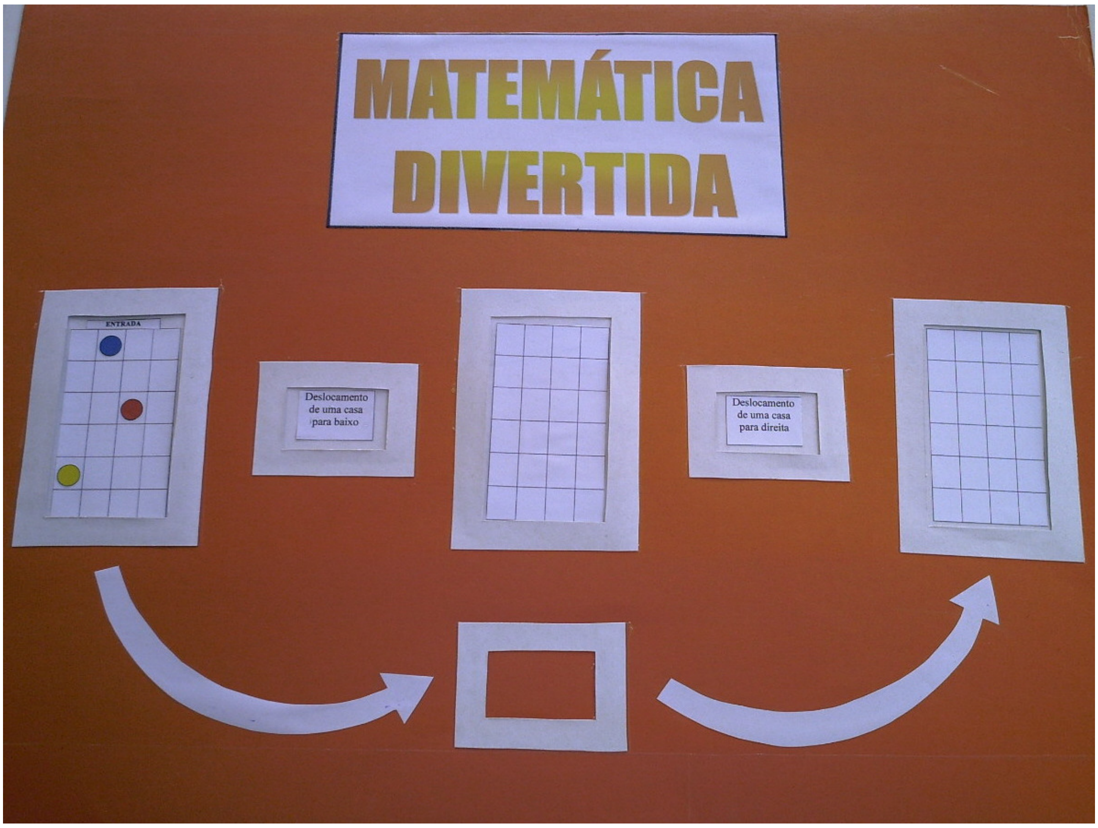


Figura 8: Tabuleiro para o jogo Matemática Divertida (desenhos)

Objetivos:

- desenvolver o conceito de função através de representação simbólica;
- reconhecer as funções compostas.

Regras do Jogo:

Divisão dos alunos em grupos.

Este jogo é dividido em três partes. Na primeira parte os alunos terão três cartelas com 3 entradas diferentes representadas através de desenhos. Primeiramente os alunos encaixam qualquer uma das entradas e deverão pegar qualquer uma das funções, sendo que nos outros dois espaços colocarão as cartelas que estão em branco. Com as peças que imitam os desenhos os alunos deverão fazer os deslocamentos sugeridos em cada função. Eles deverão colocar uma entrada, pegar uma função e na primeira tabela em branco fazer o deslocamento solicitado. Depois pegarão outra função e farão o deslocamento solicitado com base na saída anterior. O espaço em branco que está apresentado embaixo é para que os alunos discutam o que aconteceu da entrada até a saída final.

6.9 Jogo: <u>Matemática Divertida (descubra a saída)</u>

Este jogo foi criado e confeccionado pela pesquisadora. Podemos classificar este jogo como construção, conforme definição apresentada por Lara no capítulo três, página 25.

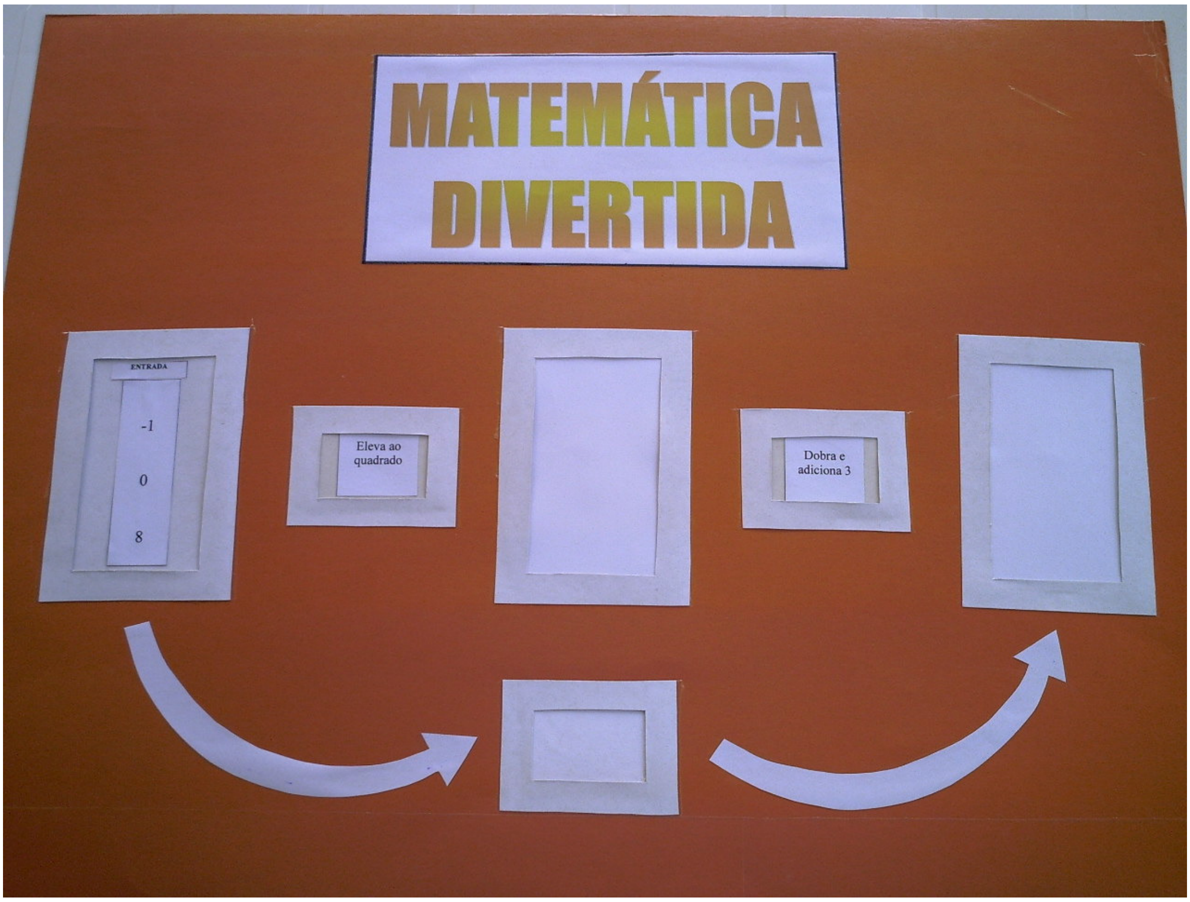


Figura 9: Tabuleiro para o jogo Matemática Divertida (descubra a saída)

<u>Objetivos</u>:

- desenvolver o conceito de Função através de representações numéricas;
- analisar o conceito de função composta.

<u>Regras do Jogo</u>:

Divisão dos alunos em grupos.

Neste jogo os alunos terão cartelas com quatro tipos de entradas diferentes. Os estudantes deverão colocar qualquer uma delas na entrada, pegarão aleatoriamente uma função, e deverão verificar qual deverá ser a saída. Após, pegarão outra função e novamente completarão qual deverá ser a saída correspondente. Terminado este processo, os alunos deverão analisar o que ocorreu com os números desde a entrada até a saída final.

6.10 Jogo: Jogo da Velha

Este jogo confeccionado pela pesquisadora, a partir de um jogo pertencente ao Laboratório de Matemática da Unisc, tendo sido adaptado para trabalhar com funções. Os exercícios utilizados neste jogo encontram-se na página 134. Podemos classificar este jogo tanto como de treinamento quanto de estratégia, conforme definição apresentada por Lara no capítulo três, página 25.

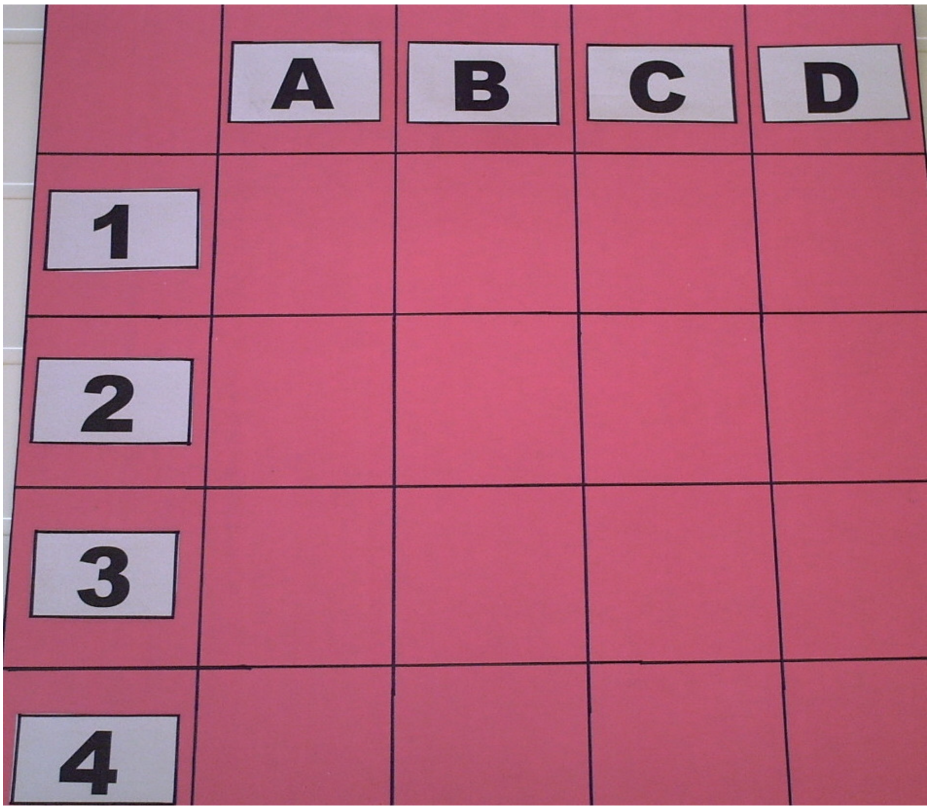


Figura 10: Tabuleiro para o Jogo da Velha

Objetivos:

- reconhecer o vértice e o zero de uma função;
- construir gráficos de funções do 1º e do 2º grau;
- resolver problemas envolvendo funções.

Regras do Jogo:

Divisão dos alunos em grupos.

Este jogo contém uma grade na qual aparecem números na vertical e letras na horizontal. A junção de uma letra com um número forma uma posição. Todas as posições possíveis são encontradas nas cartelas, as quais contém questões sobre construção de gráficos, sobre vértice e zero da função, e problemas. Os alunos devem escolher o ponto desejado, e observar a questão que deverão resolver; se acertarem a questão coloquem no ponto um círculo com a sua cor que representa a sal equipe, se errar o seu adversário colocará o círculo com a sua cor. Vencerá o jogo quem preencher todos os pontos com a sua cor na diagonal, na vertical ou na horizontal.

6.11 Jogo: <u>Trevo da Sorte</u>

Este jogo foi confeccionado pela pesquisadora, a partir de um jogo pertencente ao Laboratório de Matemática da Unisc, tendo sido adaptado para trabalhar com funções. Os exercícios utilizados neste jogo encontram-se na página 135. Podemos classificar este jogo como de treinamento, conforme definição apresentada por Lara no capítulo três, página 25.

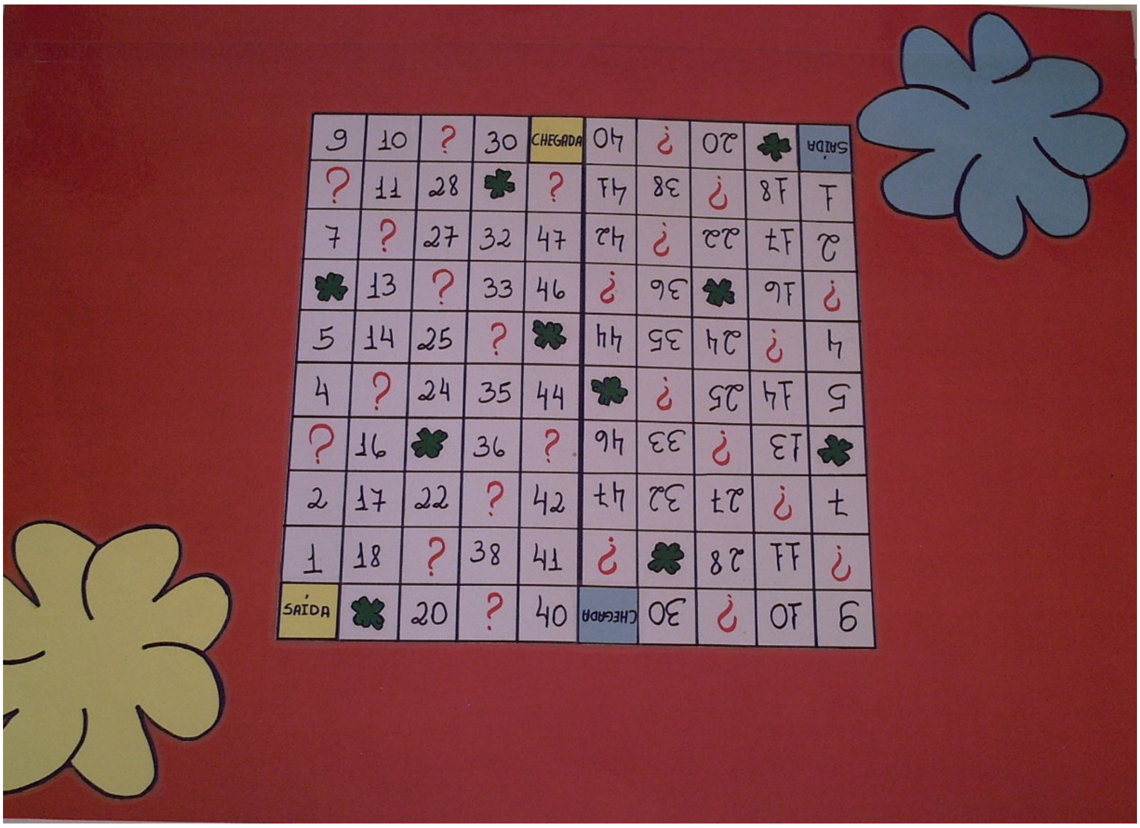


Figura 11: Tabuleiro para o jogo Trevo da Sorte

<u>Objetivos</u>:

- resolver problemas relacionados com funções.

<u>Regras do Jogo</u>:

Divisão dos alunos em grupos.

Este jogo é representado por uma trilha onde cada equipe tem a sua saída e a sua chegada. Cada dupla joga o dado e anda o número de casas correspondente. Toda vez que parar em cima de um ponto de interrogação pega uma pergunta e responde; se estiver correta pode avançar uma casa e se errar permanece no mesmo local. Quando parar na casa que possui um trevo da sorte poderá avançar uma casa. Vencerá o jogo quem terminar primeiro a trilha.

6.12 Jogo: <u>Dorminhoco Matemático</u>

Este jogo foi criado e confeccionado pela pesquisadora. Os exercícios deste jogo encontram-se na página 136. Podemos classificar este jogo tanto como de treinamento quanto de estratégia, conforme definição apresentada por Lara no capítulo três, página 25.

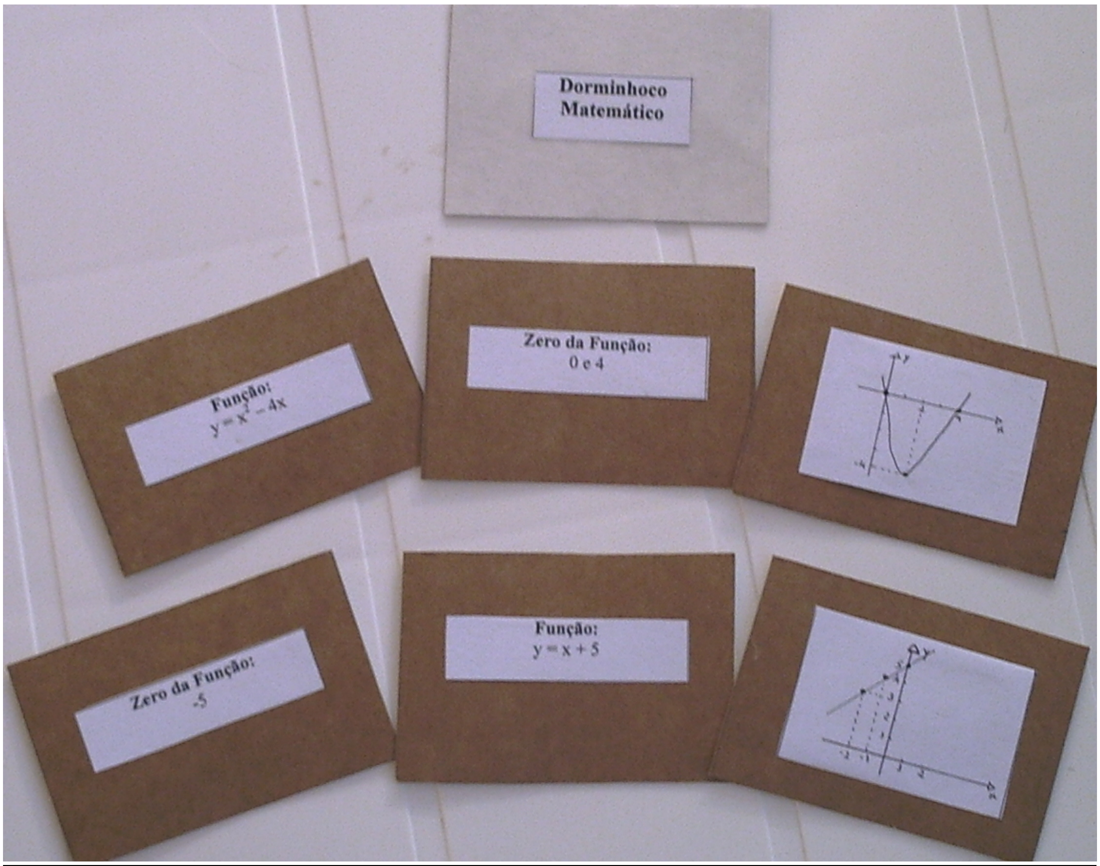


Figura 12: Cartas utilizadas no jogo Dorminhoco Matemático

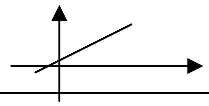
<u>Objetivos</u>:

- calcular corretamente os zeros das funções do 1º e do 2º grau;
- reconhecer os gráficos das funções.

<u>Regras do Jogo</u>:

Divisão dos alunos em grupos de quatro elementos.

Esse é um jogo de cartas no qual primeiramente as cartas são embaralhadas e depois são divididas entre os participantes. Todos os alunos do grupo receberão três cartas e um receberá quatro cartas. O aluno que recebeu quatro cartas será quem iniciará o jogo. Atrás de cada carta tem uma função, um zero da função e a representação de um gráfico, e uma das cartas tem a palavra “Dorminhoco”. Quem recebe esta carta tem que ficar uma rodada com ela. No momento que os alunos recebem as cartas devem analisar se a função, o zero e o gráfico estão corretos; se algum estiver errado, quando for sua vez de jogar você passa esta carta adiante. Quando você estiver formado o trio correto abaixa as cartas, o último que abaixar perde e é o Dorminhoco.

Função	**Zero da Função**	
y = x - 2	2	

6.13 Jogo: <u>Envelopes Matemáticos</u>

Este jogo foi confeccionado pela pesquisadora, a partir de um jogo pertencente ao Laboratório de Matemática da Unisc, tendo sido adaptado para trabalhar com funções. Os exercícios utilizados neste jogo encontram-se na página 137. Podemos classificar este jogo como de treinamento, conforme definição apresentada por Lara no capítulo três, página 25.

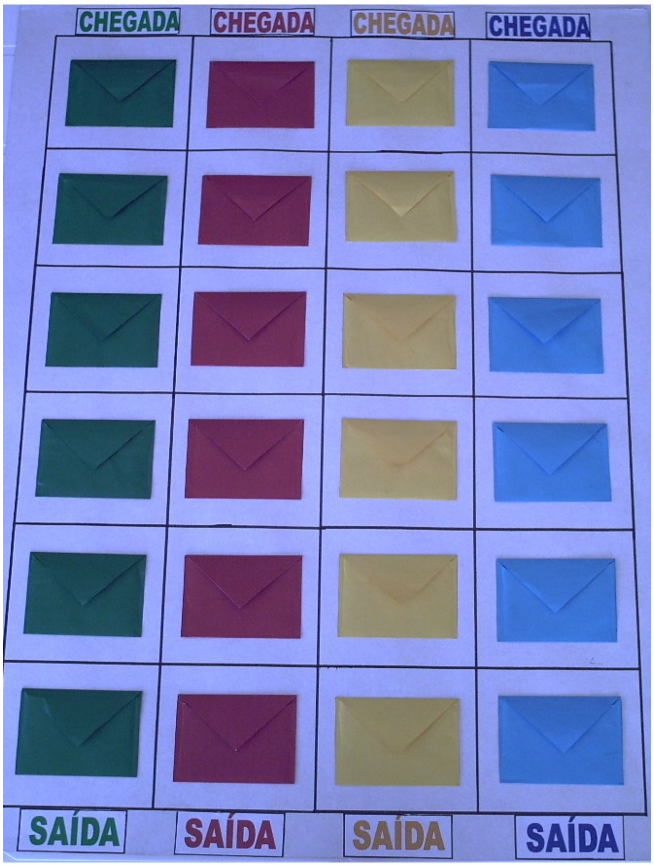


Figura 13: Tabuleiro para o jogo Envelopes Matemáticos

<u>Objetivo</u>:

- construir leis de funções a partir da análise de diagramas.

<u>Regras do Jogo</u>:

Divisão dos alunos em grupos.

Esta atividade é realizada em grupos. O jogo contém envelopes de quatro cores diferentes, onde cada grupo será representado por uma cor. Na primeira rodada todas as perguntas são iguais; um representante de cada grupo vem pega a questão e leva para que ela seja resolvida no grupo. Quando terminar se estiver correta, o grupo irá pegar outra questão. Vencerá quem fizer corretamente todas as questões.

6.14 Jogo: <u>Pino Vivo</u>

Este jogo foi confeccionado pela pesquisadora, a partir de um jogo pertencente ao Laboratório de Matemática da Unisc, tendo sido adaptado para trabalhar com funções. Os exercícios utilizados neste jogo encontram-se na página 138. Podemos classificar este jogo como de treinamento, conforme definição apresentada por Lara no capítulo três, página 25.

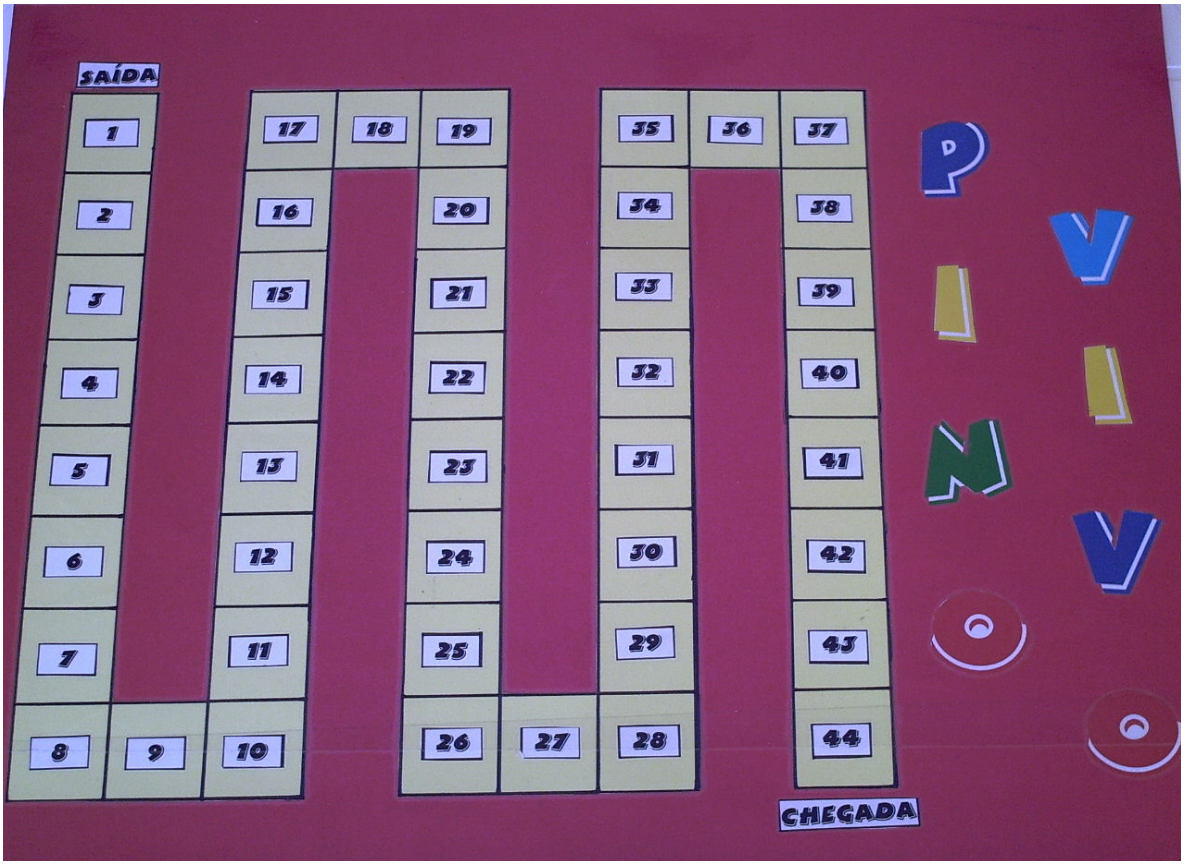


Figura 14: Tabuleiro para o jogo Pino Vivo

<u>Objetivos</u>:

- verificar se os gráficos representam funções;
- reconhecer o domínio e a imagem das funções;
- analisar as funções crescentes e decrescentes representadas por gráficos.

<u>Regras do Jogo</u>:

Divisão dos alunos em grupos.

Este jogo é uma trilha um pouco diferente das trilhas tradicionais. O jogo é realizado em grupos, onde cada grupo terá um representante. O dado será lançado por uma equipe de cada vez e a equipe andará o número de casas que lhe couber. Após, o dado não será mais utilizado; cada equipe andará o número de casas correspondente à cor de cartela que quiser. O jogo tem três cores de cartelas: branca, rosa e verde, as quais contém questões envolvendo assuntos variados. Na cartela branca se fizer a questão corretamente poderá avançar uma casa e se errar tem que voltar três casas. Na cartela rosa, se acertar a questão avança duas casas e se errar volta duas casas. Na cartela verde se acertar avança três casas e se errar volta uma. As cartelas brancas contêm perguntas fáceis, as cartelas rosas perguntas médias e as verdes perguntas consideradas difíceis.

Com base nos estudos e nas pesquisas realizadas, construímos variados jogos os quais constituem-se em idéias baseadas na máquina de função, que utiliza a noção de entrada e saída para que sejam compreendidos diferentes conceitos envolvendo funções. Foram confeccionados jogos utilizando tanto a representação simbólica quanto à representação numérica. Em alguns jogos tivemos como objetivo que os discentes, através do debate em grupo, descobrissem a função a qual estava sendo representada em determinada situação, enquanto em outros os estudantes deveriam descobrir a saída da situação apresentada, desenvolvendo desta forma a construção de imagens conceituais, pois segundo Tall e Vinner (1981) durante os processos mentais de recordar e manipular um conceito, muitos processos associados são trazidos ao jogo, conscientemente e inconscientemente afetando o significado e o uso.

7 OS ENCONTROS

Neste capítulo trataremos dos encontros realizados durante o desenvolvimento da pesquisa sobre Jogos Matemáticos na Aprendizagem de Função. Os mesmos aconteceram no período de cinco de outubro a nove de novembro do ano de dois mil e cinco, perfazendo um total de sete encontros. Foram aplicados quatorze jogos com os alunos, sendo eles: Jogo de Damas, Máquina de Função (desenhos), Máquina de Função (descubra a saída), Máquina de Função (descubra a função), Encaixe Matemático (desenhos), Encaixe Matemático (descubra a saída), Encaixe Matemático (descubra a função), Matemática Divertida (desenhos), Matemática Divertida (descubra a saída), Jogo da Velha, Trevo da Sorte, Dorminhoco Matemático, Envelopes Matemáticos e Pino-Vivo.

O capítulo será dividido em encontros, sendo que o mesmo conterá uma descrição do encontro seguido dos relatos ocorridos e finalmente uma reflexão sobre os mesmos. Para as falas da professora/pesquisadora utilizaremos a palavra “mediador”, e para as falas dos alunos colocaremos números.

7.1 Primeiro encontro

Dia: 05 de outubro de 2005 (quarta-feira)

Horário: das 8h15min às 9h30min

Número de alunos: 17

Neste primeiro encontro, foi escolhida uma turma do 1º ano do Magistério do Instituto de Educação Pereira Coruja para o desenvolvimento da pesquisa.

Em um primeiro momento, foi realizada juntamente com os estudantes, uma explanação sobre o trabalho que seria realizado, o tempo de duração e a organização dos horários.

Em um segundo momento, foi aplicado um pré-teste contendo o conteúdo de Funções, a fim de verificar os conhecimentos e as imagens conceituais que os alunos apresentavam em torno deste conteúdo.

7.2 Segundo encontro

Dia: 19 de outubro de 2005 (quarta-feira)

Horário: das 8h15min às 9h30min

Número de alunos: 17

Neste segundo encontro iniciaram-se as atividades, utilizando o recurso didático de jogos matemáticos. Inicialmente foi apresentado o Jogo de Damas, o qual foi modificado para que pudéssemos trabalhar as imagens conceituais dos estudantes a cerca do conteúdo de Função, principalmente no que se refere às coordenadas cartesianas.

Logo após, os alunos conheceram o jogo Máquina de Função, o qual trabalha com o conceito de Função através de situações diferenciadas demonstradas através de desenhos.

7.2.1 Jogo: Jogo de Damas - (ver regra do jogo na página 39)

Mediador: O nosso trabalho vai ser desenvolvido com a aplicação de jogos matemáticos envolvendo o conteúdo de Função. Este jogo é o primeiro que iremos desenvolver, o que ele lembra vocês?

Aluno 1: Um jogo de damas?

Mediador: Isso mesmo é um jogo de damas, mas ele tem algumas diferenças de um jogo de damas normal. Qual seria a primeira diferença que vocês percebem?

Aluno 2: Ele tem números e letras.

Mediador: Vocês sabem que nós estamos trabalhando com o conceito de Função, e então que relação nós podemos fazer entre este jogo de damas e as funções.

Aluno 1: Ele parece um gráfico.

Mediador: Vocês lembram como se chama o local onde são marcados os pontos que definem o gráfico?

Aluno 3: Parábola.

Aluno 4: Não é parâmetro?

Aluno 5: Ah, não sei...

Aluno 6: Ai, como é que é...função imagem.

Aluno 2: É coordenadas alguma coisa.

Aluno 7: É coordenadas cartesianas.

Aluno 1: É mesmo, mas também é chamado de plano cartesiano.

Mediador: Se pensarmos, podemos usar as coordenadas cartesianas para mostrar a localização de qualquer ponto; por exemplo, que posição que o meu dedo está marcando agora (a pesquisadora mostra o ponto D4).

Aluno 2: É o ponto 4D, linha 4 e coluna D.

Mediador: Pensando num sistema de coordenadas cartesianas, o que seriam as letras que aparecem aqui?

Aluno 1: Seria o x.

Mediador: E como é o nome que o eixo x recebe?

Aluno 2: Não sei.

Aluno 4: Coordenadas.

Mediador: O eixo x recebe o nome de abscissas e o eixo y recebe o nome de ordenadas. Retomando o que nós estávamos vendo, quando eu marquei um ponto e pedi que vocês dessem a localização dele, o que vocês disseram?

Aluno 3: 4D.

Mediador: Mas quando marcamos um ponto no plano cartesiano a gente parte do eixo y para o eixo x?

Aluno 2: Não a gente parte do eixo x para o y.

Mediador: Então qual seria esse ponto marcado?

Aluno 5: D4.

Mediador: Quando marcamos os pontos no plano, essa noção do que vem primeiro e o que vem depois é muito importante, porque se colocarmos os pontos trocados o gráfico ficará totalmente diferente. Esse jogo de damas é para que trabalhem e relembrem essa marcação de pontos, pois não adianta saber calcular corretamente a função e não saber colocar os pontos no plano. Vocês estão recebendo agora o jogo de damas e o material que vão precisar. Coloquem as peças no tabuleiro como no jogo de damas. Agora vão jogar normalmente. Podem perceber que cada peça representa um ponto. Agora, nessa folha que receberam (cada dupla do grupo recebeu uma folha de ofício), façam duas colunas uma de saída e outra de chegada. Cada jogada que fizerem irão anotar de que ponto saiu e em que ponto chegou, por exemplo, saí do ponto A3 e fui para o ponto B4.

Aluno 2: Saí do ponto G3 para H4.

Aluno 1: Saí do ponto H6 para G5.

<u>Aluno 3</u>: Saí do ponto F2 para o ponto G3.

Após os alunos terem terminado o jogo de damas foram feitos questionamentos sobre as conclusões e as possíveis dúvidas que poderiam ainda persistir em relação à marcação de pontos no plano cartesiano.

<u>Mediador</u>: Agora que já jogaram, que relação vocês acham que existe entre este jogo e o conceito de função. Para cada ponto que marcavam vocês tinham uma saída e quantas chegadas?

<u>Aluno 1</u>: Uma.

<u>Mediador</u>: Eu não poderia ter mais de um ponto de correspondência?

<u>Aluno 2</u>: Não, porque saía de um lugar e chegava em outro.

<u>Mediador</u>: Então que relação sobre o conceito de função a gente pode concluir?

<u>Aluno 3</u>: Que pra cada saída tem uma única chegada.

Quando iniciamos a pesquisa, observamos que apesar de os alunos terem trabalhado recentemente com o conteúdo de Função muitos conceitos estavam esquecidos. Este aspecto é ressaltado, pois demonstra que muitas vezes os conteúdos são trabalhados sem relacionar o assunto trabalhado com a vida diária dos mesmos, tornando-os sem significado para os discentes.

Conforme Bakar e Tall (1991), quando perguntada se um gráfico representa uma função, a mente tenta responder ressoando com protótipos mentais. Se houver uma ressonância, o indivíduo experimenta a sensação e responde positivamente. Se não houver ressonância, o indivíduo experimenta a confusão, procurando na mente por um significado à pergunta.

Este fato observa-se quando pesquisador questiona que relação pode existir entre o jogo de damas e as funções, o Aluno 1 responde que ele parece um gráfico, sendo que logo em seguida o Aluno 2 argumenta que o local onde são marcados os pontos que definem o gráfico chama-se parábola. Neste sentido percebemos o quanto pode ser prejudicial para o educando, os conceitos serem trabalhados somente através de protótipos, pois desta forma eles delimitam seus conhecimentos não progredindo da forma como deveriam.

A dificuldade apresentada pelos alunos foi em relação ao modo como se marcavam os pontos no gráfico, pois acreditavam que deveriam partir do eixo y para o eixo x. Após dialogarmos ficou esclarecida esta idéia e o jogo transcorreu sem maiores problemas.

7.2.2 Jogo: Máquina de Função (desenhos) - (ver regra do jogo na página 41)

No segundo momento do encontro, foi desenvolvido com os alunos o jogo Máquina de Função, o qual tem o intuito de associar uma imagem dinâmica ao conceito de Função através da representação de situações reproduzidas pelo intermédio de desenhos e símbolos.

<u>Mediador</u>: *Continuando o trabalho que estamos realizando sobre a compreensão do conceito de Função, vamos trabalhar com um jogo que é chamado de Máquina de Função. Muitos estudos trazem esta idéia de que função pode ser pensada como uma máquina que possui uma entrada e uma saída. Neste jogo podem observar que aparecem quatro situações, nas quais estão presentes uma entrada, uma função e uma saída. Houve, em cada uma, alterações nos desenhos referentes às saídas. Desta forma fica bem claro que, para ser uma função, cada entrada deve ter uma única saída, e a lei da função deve valer para todos os elementos do conjunto. Vocês trabalharão juntos, irão analisar cada situação e observar as posições que cada figura ocupa na entrada e na saída, e chegarão a um consenso sobre que função está presente em cada situação apresentada.*

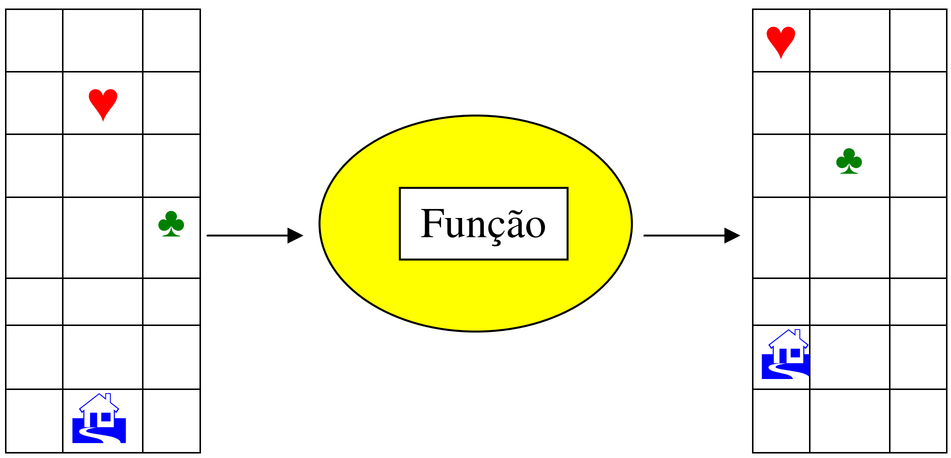


Figura 15: Exemplo de atividade do jogo Máquina de Função (desenhos)

<u>Mediador</u>: *Analisando a primeira situação vamos observar as posições ocupadas por cada elemento da entrada. Qual é a posição do trevo nesta entrada?*

<u>Aluno 1</u>: *Ele tá no (3, 4).*

<u>Aluno 2</u>: *O coração tá na (2,6) e a casa tá na (2,1).*

<u>Mediador</u>: *Agora vamos analisar a saída que cada elemento teve. Qual a posição da casa nesta saída?*

<u>Aluno 3</u>: *É a posição (2,1).*

<u>Mediador</u>: *Você tem certeza?*

<u>Aluno 3</u>: *Não, é (1,2).*

<u>Mediador</u>: *Por quê?*

<u>Aluno 2</u>: *Porque a gente sempre olha o eixo x primeiro para depois o y.*

<u>Mediador</u>: *Qual a posição do trevo e do coração?*

<u>Aluno 1</u>: *O trevo tá na (2,5) e o coração tá na (1,7).*

<u>Mediador</u>: *Vocês já observaram as posições de todos os elementos na entrada e na saída. Agora pensem o que aconteceu, que deslocamento ocorreu entre os elementos. Por exemplo, disseram que a casinha ocupava a posição (2,1) na entrada e na saída ela passou a ocupar a posição (1,2), o que pode ter acontecido?*

<u>Aluno 3</u>: *Ela andou uma casa para a esquerda e uma casa para cima.*

<u>Mediador</u>: *Todos concordam?*

<u>Todos</u>: *Sim.*

<u>Mediador</u>: *Para que seja função esse deslocamento pode ter ocorrido somente com um elemento?*

<u>Aluno 1</u>: *Não, tem que acontecer com todos.*

<u>Mediador</u>: *Isso mesmo, a função tem que atender a todos os elementos, pois se com algum deles não acontecer não é função.*

<u>Aluno 2</u>: *Todos andaram uma casa para esquerda e uma casa pra cima.*

<u>Mediador</u>: *Então vocês diriam que esta situação representa uma função?*

<u>Todos</u>: *Sim.*

<u>Mediador</u>: *Agora vamos analisar a segunda situação. Analisem a posição dos elementos na entrada e na saída.*

<u>Aluno 3</u>: *O homem está na (1,7), o cachorro na (2,4) e o carro na (3,6).*

<u>Mediador</u>: *E quais foram às saídas?*

<u>Aluno 4</u>: *O homem tá na (1,5), o cachorro na (2,2) e o carro na (3,4).*

<u>Mediador</u>: *Que função vocês acham que está presente nesta situação? Que posição o cachorro estava e qual posição ele passou a ocupar?*

<u>Aluno 1</u>: *Ele tava na (2,4) e passou para (2,2).*

Mediador: O que tu acha que aconteceu?

Aluno 1: Ele desceu.

Mediador: Desceu quantas casas?

Aluno 1: Duas.

Mediador: Isso ocorre com todos os elementos?

Aluno 2: Sim.

Mediador: Então esta situação representa uma função?

Aluno 3: Sim, e a função é deslocamento de duas casas para baixo.

Mediador: Analisem agora a terceira situação. Qual é a entrada e a saída da casa?

Aluno 4: A entrada da casa é (1,6) e a saída é (2,7).

Mediador: E os outros elementos?

Aluno 2: O carro estava na (2,4) e saiu na (3,5) e o cachorro estava na (2,2) e saiu na (3,1).

Mediador: Vejam que função está presente nesta situação?

Aluno 1: O carro e a casa andaram uma casa para cima e uma casa para a direita, mas o cachorro não, ele andou uma para baixo e uma para a direita.

Mediador: Então vocês acham que esta situação caracteriza uma função?

Aluno 2: Não, porque para o cachorro a função não deu certo.

Mediador: Observando a última situação o que vocês notam?

Aluno 3: Na entrada a posição do trevo é (3,2), a do coração é (1,4) e a do carro é (2,6).

Aluno 2: Mas na saída eles estão nos mesmos lugares.

Mediador: Mas eles permanecem iguais?

Aluno 4: Não, eles viraram.

Mediador: Viraram quantos graus?

Aluno 2: 180°.

Aluno 4: Não, 360°.

Mediador: Como deveria ter sido a saída se ele tivesse virado 360°?

Aluno 1: Ele teria saído igual a entrada, ele girou 90°.

Mediador: E com todos os elementos ocorre este giro?

Aluno 2: Sim, então é uma função.

Através deste jogo podemos observar a importância de trabalharmos o conceito de Função como uma máquina, a qual possui uma entrada e uma saída. Conforme Tall (2000-a), dado à complexidade do conceito de função, torna-se necessário à busca por uma raiz cognitiva que inclua sua dualidade do processo – objeto e também suas representações múltiplas.

Tall (2000-a) apresenta a máquina de função como uma caixa de entrada e saída, que apresenta aspectos icônicos, visuais, envolvendo o status de objeto e também o aspecto como um processo de entrada e saída. As representações usuais da função (tabela, gráfico, fórmula, procedimento, formulação verbal, etc.) podem também ser vistas como maneiras de representar ou de calcular o relacionamento interno de entrada e saída.

Utilizando a máquina de função, foi possível aos alunos visualizarem as posições dos elementos presentes na entrada e na saída de cada situação, como na situação dois onde o Aluno 3 coloca que o cachorro na entrada estava na posição (2,4) , o Aluno 4 observa que na saída ele estava na posição (2,2) e assim o Aluno 3 responde que a função representada é o deslocamento de duas casas para baixo. Através destas observações, foram proporcionadas aos estudantes possibilidades de fazerem uma análise sobre os deslocamentos que ocorreram para que fosse possível a construção de conceitos envolvidos nesta atividade relacionados ao conteúdo de Função.

7.3 Terceiro encontro

Dia: 19 de outubro de 2005 (quarta-feira)

Horário: das 16h45min às 17h20min

Número de alunos: 4

7.3.1 Jogo: Máquina de Função (descubra a saída) - (ver regra do jogo na página 43)

No terceiro encontro, utilizamos o jogo Máquina de Função sob um aspecto diferenciado. Desta vez foram apresentados aos alunos situações que continham números na entrada, havia explícita uma função, e foi solicitado que os alunos debatessem sobre quais seriam as possíveis saídas para cada situação. Neste dia, um número considerável de alunos não compareceu ao encontro, pois eles foram liberados dos estudos mais cedo, e assim a maioria optou por ir embora.

<u>Mediador</u>: *Este jogo também se chama Máquina de Função, mas ele é um pouco diferente do que trabalhamos anteriormente. Nele vocês têm, na entrada números, têm uma função e pergunta-se qual é a saída em cada situação apresentada. Por exemplo, nesta primeira*

situação temos os números –5, 1 e 4, e a função é "Eleva ao quadrado e subtrai 6". Então para cada elemento da entrada vocês utilizarão essa função para ver qual será a saída. Cada situação apresenta números e funções diferentes.

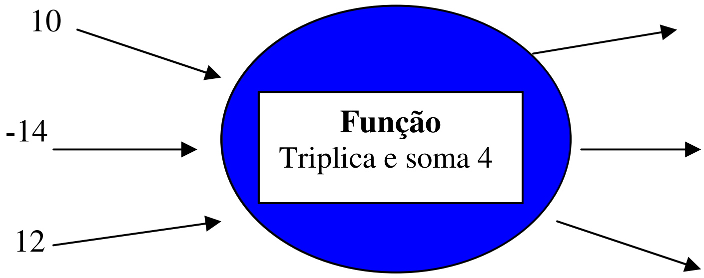


Figura 16: Exemplo de atividade do jogo Máquina de Função (descubra a saída)

<u>Aluno 1</u>*: Pegamos a função "Triplica e soma 4", então entra 10; 10 vezes 3 mais 4, sai 34, entra –14; (-14) vezes 3 mais 4, sai –37.*

<u>Aluno 2</u>*: Não, tem que fazer 10 vezes 10 vezes 10...*

<u>Aluno 1</u>*: Não, porque triplicar é multiplicar por 3.*

<u>Aluno 2</u> *: Então quando entrar 12 tem que sair 40.*

<u>Mediador</u>*: As saídas estão corretas?*

<u>Aluno 4</u>*: Entra 10 e sai 34, tá certo.*

<u>Aluno 3</u>*: Ah! Deixa eu ver, (-14) vezes 3 dá –52 com mais 4 dá –56.*

<u>Mediador</u>*: Tem certeza?*

<u>Aluno 2</u>*: Não, (-14) vezes 3 dá 42 com mais 4 dá 46.*

<u>Mediador</u>*: Mas esse 42 é positivo ou negativo?*

<u>Aluno 2</u>*: É negativo, ..., ah! Já sei... –42 + 4 tem que diminuir e não somar, vai ficar –38.*

<u>Mediador</u>*: Muito bem, agora está correto.*

<u>Aluno 3</u>*: Vamos fazer agora a função "Eleva ao quadrado e adiciona 2".*

<u>Aluno 4</u>*: Se entra 6; 6 vezes 6 é igual a 36 mais 2 fica 38.*

<u>Aluno 3</u>*: Agora se entra –7; fica –7 ao quadrado dá 49 mais 2 fica 51.*

<u>Aluno 4</u>*: Agora o último, entra 2; 2 ao quadrado fica 4 mais 2 fica 6.*

<u>Aluno 3</u>*: Tá certo professora?*

<u>Mediador</u>*: Está.*

<u>Aluno 2</u>*: Agora a função é " Multiplique por –3 e subtraia 2".*

<u>Aluno 1</u>*: Se entra 0; 0 vezes –3 dá 0 e 0 menos 2, dá...*

<u>Aluno 3</u>:-2.

<u>Aluno</u> 1: -2?

<u>Aluno 3</u>: É –2. Agora quando entra 23; 23 vezes –3, dá –69 com –2, dá –67.

<u>Aluno 2</u>: É –67.

<u>Aluno 3</u>: Se entra –15 vezes –3 dá –45,..., não, dá 45 com –2 fica...

<u>Aluno</u> 2: 47.

<u>Aluno 3</u>: Não, fica 43.

<u>Aluno 2</u>: Professora, tá certo?

<u>Mediador</u>: Não sei, as outras chegaram a fazer?

<u>Aluno 1</u>: Só a do meio não fechou.

<u>Mediador</u>: Então vamos analisar ela de novo.

<u>Aluno 2</u>: Ta, 23 vezes –3 dá –69, com –2 dá –67.

<u>Aluno 1</u>: Peraí, menos com menos dá mais, né?

<u>Mediador</u>: Sim.

<u>Aluno 1</u>: Então o meu tava certo, eu tinha achado –71.

<u>Aluno 3</u>: Por quê?

<u>Mediador</u>: Porque tu vai ter –67 com –2, os sinais ficam iguais então a gente soma e conserva o sinal.

<u>Aluno 3</u>: Agora eu entendi.

O jogo transcorreu sem maiores dificuldades, sendo que observamos que um dos problemas apresentados durante a realização da atividade foram às dúvidas existentes em relação às operações com números inteiros. A compreensão das operações envolvendo números inteiros é importante para a construção de imagens conceituais corretas relacionadas ao conteúdo de função, pois apenas um sinal equivocado compromete todo o desenvolvimento da questão realizada.

Na associação de imagens conceituais relacionadas ao conteúdo de Função, a máquina de função conforme Tall (2000-b) pode ser considerada como uma raiz cognitiva, porque é um conceito que é significativo a um número expressivo dos estudantes, incluindo a maioria daqueles que experimentam a dificuldade na matemática. Evidenciamos este fato, quando o Aluno 1, analisa a função "Triplica e soma 4", logo o Aluno 2 questiona se não deveria ser feito 10 vezes 10 vezes 10, e neste instante o Aluno 1 responde que não, porque triplicar é multiplicar por 3. É interessante percebermos quantas dificuldades vão sendo esclarecidas ao longo da atividade pelos próprios alunos. Por isso evidenciamos que a utilização da máquina de função é uma ferramenta de suma importância na promoção de momentos como estes abordados.

7.4 Quarto encontro

Dia: 26 de outubro de 2005 (quarta-feira)

Horário: das 8h15min às 9h30min

Número de alunos: 17

7.4.1 Jogo: Máquina de Função (descubra a função) - (ver regra do jogo na página 45)

No quarto encontro, a atividade desenvolvida abrangia o jogo Máquina de Função, onde os alunos eram confrontados com diversas situações onde se encontravam números na entrada e na saída, sendo que os educandos deveriam evidenciar a função que estava inserida em cada situação.

<u>Mediador</u>: *Hoje vamos trabalhar com uma máquina de função na qual vocês terão que descobrir qual é a função presente em cada situação. Vocês podem observar que existem números diferentes na entrada e na saída. Analisem cada situação e descubram que função está inserida nas situações apresentadas. Por exemplo, nesta primeira situação vocês tem na entrada o 0, -2 e 3, e na saída tem 0, -6 e 9. Eu quero saber qual é a função que está presente aqui. Procurem escrever a função como uma lei do tipo $y = 3x + 4$ ou $f(x) = 2x$.*

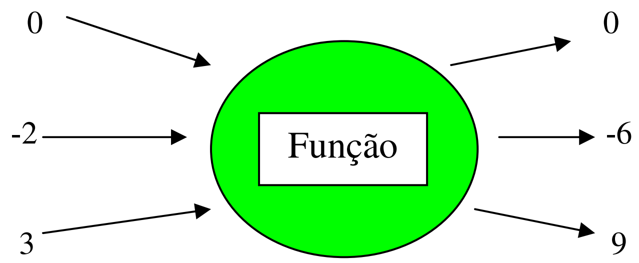


Figura 17: Exemplo de atividade do jogo Máquina de Função (descubra a função)

<u>Aluno 1</u>: *Nessa primeira entra 0, -2 e 3 e sai 0, -6 e 9. Eu acho que a função é elevar ao cubo.*

<u>Mediador</u>: *O que é elevar ao cubo?*

<u>Aluno 1</u>: *É fazer ele, vezes ele, vezes ele.*

<u>Mediador</u>: Então quando entra -2 como fica?

<u>Aluno 2</u>: Faz (-2) vezes (-2) vezes (-2), que dá -8.

<u>Aluno 1</u>: Então não pode ser ao cubo, porque teria que ter saído -6.

<u>Mediador</u>: Para entrar zero e sair zero, o que pode acontecer?

<u>Aluno 1</u>: Não pode somar nem subtrair de nada, tem que multiplicar.

<u>Mediador</u>: Então por qual número vocês têm que multiplicar o zero para sair 0, -2 para sair -6 e 3 para sair 9?

<u>Aluno 4</u>: É o 3, porque 3 vezes 0 é 0, 3 vezes (-2) é -6 e 3 vezes 3 dá 9.

<u>Mediador</u>: Isso mesmo, agora como vocês podem escrever esta lei.

*<u>Aluno 1</u>: Pode ser y = x * 3 ou y = 3x.*

<u>Mediador</u>: Ótimo.

<u>Aluno 2</u>: Agora na segunda situação entra -4, 1 e 8 e sai 2, 7 e 14.

<u>Aluno 3</u>: Eu acho que multiplica por 2 e soma 3.

<u>Mediador</u>: Verifica então se dá certo.

<u>Aluno 3</u>: Entra 1, vezes 2 dá 2 mais 6 dá 8. É não dá.

<u>Aluno 1</u>: Eu acho que é só somar 6,..., olha -4 mais 6 dá 2, 1 mais 6 dá 7 e 8 mais 6 dá 14.

<u>Aluno 2</u>: E a função é y = x + 6.

<u>Mediador</u>: Vocês têm que ter cuidado que pra ser função todas as entradas e saídas devem corresponder com a função que vocês encontraram.

<u>Aluno 3</u>: A outra entra -3, 2 e -5 e sai 21, -14 e 35.

<u>Aluno 4</u>: Eu acho que multiplica...

<u>Aluno 3</u>: Por 7.

<u>Aluno 2</u>: Tem que ser por -7, se não vai dar errado. Olha, (-7) vezes (-3) dá -21, (-7) vezes 2 dá -14 e (-7) vezes (-5) dá 35.

<u>Mediador</u>: Então escreve a lei da função.

<u>Aluno 1</u>: Fica y = -7x.

<u>Mediador</u>: E a quarta situação como fica?

<u>Aluno 1</u>: Deixa eu ver, entra 0 e sai 0, entra -2 e sai 4 e entra 3 e sai 9.

<u>Aluno 2</u>: Multiplica por 2.

<u>Aluno 3</u>: Não, porque se multiplicar -2 vezes 3 sai – 6.

<u>Aluno 4</u>: Eu acho que fica ao quadrado. O 0 ao quadrado é 0, (-2) ao quadrado dá 4 e 3 ao quadrado dá 9.

<u>Aluno 1</u>: Aí a função fica $y = x^2$.

<u>Aluno 2</u>: Nessa outra situação entra 0 e sai 4, entra -2 e sai -2 e entra 3 e sai 13.

<u>Aluno 1</u>: Essa eu não sei.

<u>Mediador</u>: Olha só, vocês tem na entrada 0 e na saída 4. o que pode ter acontecido?

<u>Aluno 2</u>: Qualquer coisa multiplicada por zero é zero, né?

<u>Mediador</u>: É, mas como pode ter saído 4.

<u>Aluno 2</u>: É porque somou 4.

<u>Mediador</u>: Ta certo, agora vocês tem que ver por qual número a entrada foi multiplicada pra depois somar 4.

<u>Aluno 3</u>: Por 3, 3 vezes 3 dá 9 mais 4 fica 13.

<u>Mediador</u>: E para as outras entradas essa função serve?

<u>Aluno 3</u>: 0 vezes 3 dá 0 mais 4 fica 4, e -2 vezes 3 dá -6 mais 4 dá -2. Tá certo.

<u>Mediador</u>: Como fica essa função?

<u>Aluno 1</u>: Fica $y = 3x + 4$.

Podemos observar através destes relatos, que muitos conceitos envolvidos ao conteúdo de Função que por eles estavam esquecidos aos poucos vão sendo constituídos.

Desta forma, a Máquina de Função é uma importante ferramenta de ensino que auxilia na aprendizagem e compreensão de conceitos. Conforme Tall (2000-a), a máquina de função neste contexto é uma versão que inclui o conceito mais geral de função podendo ser imaginado e representado em várias maneiras que ligam diretamente à percepção humana e a sensação, permitindo interpretações simples de idéias profundas.

No desenvolvimento desta atividade podemos observar o debate e a troca de informações a cerca do conteúdo de função, sendo que um dos momentos que representam este fato é quando o Aluno 1 começa a analisar a situação sugerida no jogo ele percebe que entra 0 e sai 0, entra –2 e sai 4 e entra 3 e sai 9. Neste momento o Aluno 2 diz que deve-se multiplicar por 2, , mas o Aluno 3 observa que se multiplicarmos –2 vezes 3 deveria sair –6, então o Aluno 4 argumenta que a lei deve ser elevar o número ao quadrado, e após todas estas argumentações elas chegam a formação correta da função.

7.4.2 Jogo: Encaixe Matemático (desenhos) - (ver regra do jogo na página 47)

Este jogo que foi desenvolvido se chama Encaixe Matemático, ele traz consigo situações representadas através de desenhos. Os alunos terão uma entrada e uma saída, e deverão analisar quais as funções que determinam as saídas corretas para cada situação. O jogo tem por objetivo proporcionar aos alunos uma reflexão sobre o conceito de Função, fazendo-os analisar que uma situação só é a representação de uma função se a relação corresponder todos os elementos da entrada com os elementos da saída.

Mediador: *Esse jogo que vamos trabalhar agora se chama Encaixe Matemático. Ele é parecido com o que estavam trabalhando anteriormente, só que nos outros as entradas, as saídas e as funções vinham prontas. Vocês vão receber cartelas com desenhos, representados pelas palavras entrada e saída. Também receberão cartelas com funções. Nesta atividade, primeiramente vocês pegarão as cartelas de entrada e saída que tenham o número 1 na parte de trás. Depois irão procurar a função que está representada nesta situação. Façam a mesma coisa com as outras cartelas.*

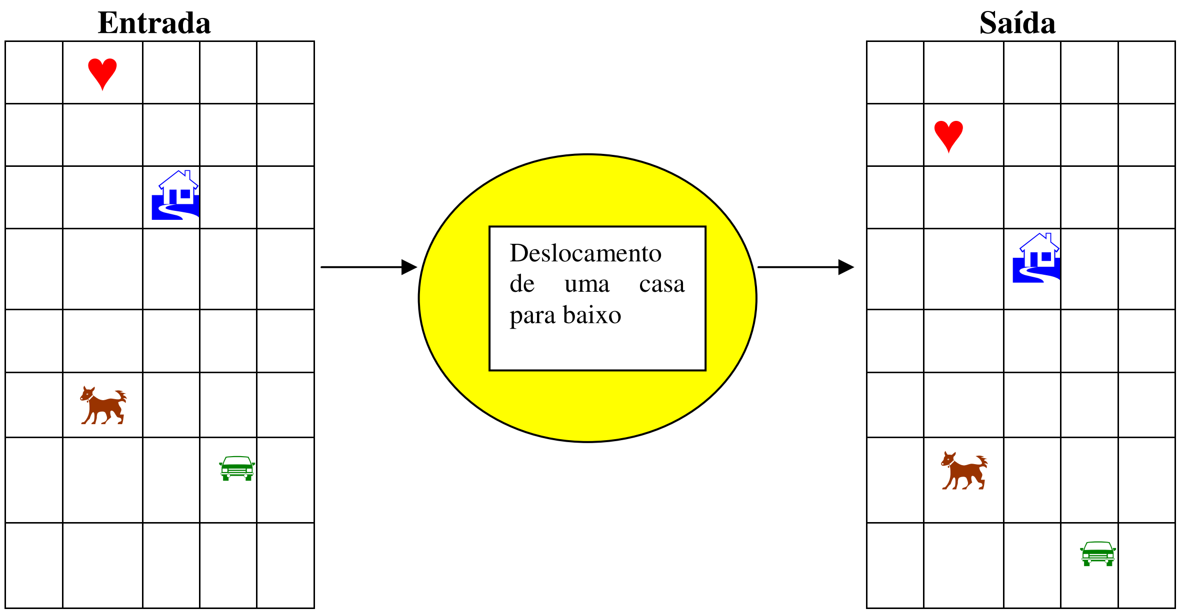


Figura 18: Exemplo de atividade do jogo Encaixe Matemático (desenhos)

Aluno 1: *Tá, vamos encaixar a entrada e a saída 1.*

Mediador: *Qual é a posição do coração na entrada e na saída?*

Aluno 2: É (2,7) e a saída é (3,7).

Mediador: Qual foi o deslocamento que ocorreu?

Aluno 3: Ele andou uma casa para a direita.

Mediador: Verifiquem se com todos os elementos houve o mesmo deslocamento.

Aluno 2 : Todos andaram uma casa para a direita, então esta situação representa uma função.

Mediador: Agora vocês peguem a entrada 2 e a saída 2, analisem as posições dos elementos e vejam qual é a função correspondente.

Aluno 1: Na entrada o carro tá na (4,2) e na saída tá na (3,1), o coração na entrada tá na (5,4) e na saída na (4,3).

Aluno 3: O homem na entrada tá na (2,5) e na saída ficou na (1,4) e o trevo na entrada tá na (2,8) e na saída na (1,7).

Aluno 4: Todos andaram uma casa para esquerda e uma casa para baixo. Esta situação também representa uma função.

Conforme Tall (2000-b), a introdução da máquina de função como uma caixa de entrada e saída permite que os estudantes tenham uma imagem mental de uma caixa que possa ser usada para descrever e nomear freqüentemente vários processos sem a necessidade de ter um processo explícito definido.

No desenvolvimento desta atividade percebemos o interesse dos estudantes em dialogar e construir um conhecimento em conjunto; durante este jogo quando solicitados para que analisassem a primeira situação os discentes demonstraram facilidade em encontrar a função de correspondência, o Aluno 2 observou que a posição do coração na entrada era (2,7) e na saída era (3,7), e sendo após observar os demais elementos, verificou que todos andaram uma casa para a direita, então esta situação representa uma função. Devemos destacar na realização deste jogo a importância da imagem conceitual associada à transformação geométrica.

7.5 Quinto encontro

Dia: 01 de novembro de 2005 (terça-feira)

Horário: das 15h45min às 17h20min

Número de alunos: 17

7.5.1 Jogo: Encaixe Matemático (descubra a saída) - (ver regra do jogo na página 48)

Na realização desta atividade, trabalhamos com o jogo Encaixe Matemático, no qual os alunos deverão descobrir a saída equivalente a cada entrada. Os alunos receberam cartelas contendo diferentes possibilidades de entrada e de funções, eles irão encaixar uma determinada entrada e uma função, e através de debates no grupo verificar as possíveis saídas para cada situação.

Mediador: *Hoje vamos trabalhar com o jogo Encaixe Matemático que já conhecem, mas de uma forma diferente. Nas cartelas podemos observar que há uma entrada, uma função e uma saída. Atrás das cartelas de entrada e função tem números; então, por exemplo, primeiro irão colocar a entrada 1 e a função 1, e após descobrirão qual é a saída correspondente a essa função que se formou.*

Entrada	**Função**	**Saída**
7		19
12	Multiplica por 2 e adiciona 5	29
-3		-1
5		15

Figura 19: Exemplo de atividade do jogo Encaixe Matemático (descubra a saída)

Aluno 1: *Na entrada 1 tem os números 7, 12, -3 e 5 e a função é "Multiplica por 2 e adiciona 5".*

Aluno 2: *Entra 7, vezes 2 é 14 mais 5 dá 19, entra 12 vezes 2 dá 24 mais 5 dá 29, se entra (-3) vezes 2 dá (-6) mais 5 dá -1.*

Aluno 3: *Eu não entendi...*

Aluno 1: *Tu pega o número da entrada -3 multiplica por 2 dá -6 e depois soma 5 que fica -1.*

Aluno 3: *Então se entra 5 vezes 2 dá 10 mais 5 dá 15. Daí dá certo!*

Mediador: *Todos os resultados obedeceram à função?*

Aluno 1: *Sim, por isso ela é uma função.*

Aluno 4: *E se só um dos resultados não tivesse dado certo, também seria uma função?*

Aluno 1: *Daí não, todos os resultados tem que ter um correspondente pra ser função.*

Aluno 2: *Agora a função é multiplicar por 6 e adicionar 4.*

Aluno 1: *-43 vezes 6 dá 258.*

Aluno 3: *Não, dá -258 porque o 43 é negativo.*

Aluno 1: Tá -258 mais 4, dá -254.

Aluno 2: ½ vezes 6 dá...como é que faz?

Mediador: A gente multiplica numerador por numerador e denominador por denominador.

Aluno 2: Então se faz 6 vezes 1, que fica 6/2 que dá 3.

Mediador: Agora completa a função solicitada.

Aluno 2: 3 mais 4 dá 7. Se entra 4 vezes 6 dá 24 mais 4 dá 28. Entra 9 vezes 6 dá...

Aluno 4: Dá 36, não...

Aluno 1: 47.

Aluno 3: Fica 54 mais 4 dá 58.

Aluno 1: A função fecha para todos os elementos da entrada.

Em relação ao estudo do conceito de Função, Sierpinska apud Tall (1996), coloca que o conceito mais fundamental da função é aquele de um relacionamento entre valores variáveis. Se isto não for desenvolvido, as representações tais como equações e gráficos perdem seu significado e tornam-se isoladas uma da outra.

Relacionando o pensamento de Tall com o encontro realizado observamos a conversação entre os componentes do grupo na busca da solução de dificuldades que alguns integrantes apresentaram. Nesta atividade o Aluno 1 passou a analisar a situação que havia sido formada, visualizando que na entrada haviam os números 7, 12, -3 e 5 e a função era "Multiplica por 2 e adiciona 5". Após realizarem todos os cálculos correspondentes o Aluno 4 questionou se, no caso de um dos resultados não darem certo, a situação representaria uma função. O Aluno 1 respondeu que neste caso não, pois todos os resultados tem que ter correspondente para ser função. A colocação do Aluno 1 talvez apresente indício de uma certa confusão entre os conceitos de função e função sobrejetora quando argumenta que todos os resultados tem que ter correspondente para ser função.

Salientamos uma outra situação na qual o Aluno 2 argumenta não saber multiplicar ½ por 6, evidenciando a falta de conhecimento prévio a respeito deste assunto. Observamos que os estudantes apresentam muitas dificuldades em relação a diversos conteúdos, tais como números inteiros, operações com frações, entre outros, demonstrando que muitas vezes os conteúdos são desenvolvidos de forma pouco atrativa, permitindo que os educandos os esqueçam com facilidade.

7.5.2 Jogo: Encaixe Matemático (descubra a função) - (ver regra do jogo na página 50)

No jogo Encaixe Matemático a seguir será trabalhada a noção do conceito de Função entre duas variáveis, representadas nesta situação por entradas e saídas. Para cada entrada e saída existe uma função que torna as sentenças verdadeiras.

Os alunos deverão debater as diversas possibilidades a fim de encontrarem as soluções possíveis.

Mediador: A atividade que vocês vão participar agora é no mesmo estilo do que estavam jogando, só que agora as cartelas de entrada e saída vêm numeradas e é preciso que descubram qual a função que está presente em cada situação.

Entrada	Função	Saída
0		4
3	Dobra e adiciona 4	10
2		8
6		16

Figura 20: Exemplo de atividade do jogo Encaixe Matemático (descubra a função)

Aluno 2: Vamos colocar a entrada e saída 1.

Aluno 1: Entra 0 e sai 4, entra 3 e sai 10.

Aluno 2: É essa aqui que diz dobra e adiciona 4. Olha, 2 vezes 0 é 0 mais 4 dá 4; 2 vezes 6 dá 12 mais 4 dá 16.

Aluno 3: É dá certo!

Aluno 4: Vamos encaixar a entrada e a saída 2. Entra -1 e saí -4.

Aluno 2: Eu acho que é essa aqui que eleva ao quadrado e subtrai 5, pois -1 ao quadrado dá 1 com -5 dá -4.

Aluno 3: Por quê? Não dá 4?

Aluno 2: Porque fica 1, 1 menos 5, daí diminui e fica o sinal do maior, nesse caso fica -4.

Aluno 1: Se entra 4 ao quadrado dá 16 menos 5 dá 11 e 7 ao quadrado dá 49 menos 5 fica 44.

Mediador: Aqui vocês têm como função elevar ao quadrado e subtrair 5. Como escreveriam essa lei de função?

Aluno 2: $y = x^2 - 5$.

<u>Aluno 4</u>*: Porque menos 5?*

<u>Aluno 2</u>*: Porque diz subtrai 5.*

<u>Aluno 4</u>*: É mesmo!*

Observamos que novamente uma grande dificuldade apresentada pelos alunos relaciona-se com as operações, envolvendo Números Inteiros. Neste sentido, percebemos que o Aluno 3 não compreende por que 1 menos 5 dá –4, pois para ela deveria dar 4. Em seguida o Aluno 2 explica que com sinais diferentes deve-se diminuir e conservar o sinal do número maior.

Em relação ao desenvolvimento geral do jogo os educandos não apresentaram muitas dúvidas sobre as funções sugeridas na atividade.

7.5.3 Jogo: Matemática Divertida (desenhos) - (ver regra do jogo na página 51)

Neste jogo, chamado Matemática Divertida, além de trabalharmos com o conceito de Função também desenvolveremos o conceito de função composta, permitindo que os alunos tenham uma compreensão mais ampla deste conteúdo.

<u>Mediador</u>*: Esse jogo se chama Matemática Divertida,vocês podem observar que ele tem três partes. Na primeira parte terão cartelas com três entradas diferentes, contendo três situações representadas através de desenhos. Vocês irão encaixar qualquer uma das entradas e pegarão qualquer uma das funções, no caso aqui eu peguei "deslocamento de uma casa para baixo". Nos outros espaços vão colocar as cartelas que estão em branco, e com as peças que imitam os desenhos vocês farão os deslocamentos sugeridos em cada função. Então colocam uma entrada, pegam uma função e na primeira tabela em branco fazem o deslocamento. Depois peguem outra função e façam o deslocamento solicitado com base na saída anterior. O espaço em branco que está embaixo é para que analisem e escrevam o que aconteceu da entrada até a saída final.*

<u>Mediador</u>*: Esse jogo além de trabalhar com o conceito de função, também trabalha com a composição de função.*

<u>Aluno 1</u>*: A primeira função é deslocamento de uma casa para baixo.*

<u>Mediador</u>*: Vamos analisar a entrada que colocaram. Quais são as posições das bolinhas?*

<u>Aluno 3</u>*: A amarela tá na (1,2), a vermelha tá na (3,4) e a azul tá na (2,6).*

Mediador: Se elas têm que se deslocar uma casa para baixo como ficarão as posições dos elementos da entrada?

Aluno 2: A amarela vai ir para a (1,1), a azul vai para (2,5) e a vermelha pra (3,3).

Mediador: Agora, coloquem outra função e vejam quais serão as saídas.

Aluno 4: Tá, a função é deslocamento de uma casa para a direita. A amarela tava na (1,1) e vai ficar na (2,1).

Aluno 1: A vermelha estava na (3,3) e foi para a (4,3) e a azul estava na (2,5) e foi pra (3,5).

Aluno 3: Terminamos.

Mediador: Analisem o que aconteceu desde a função na entrada até a saída.

Aluno 1: Eles se deslocaram uma casa para baixo e uma para a direita.

Mediador: E isso ocorreu com todos os elementos da entrada.

Aluno 1: Sim.

Mediador: Então podemos considerar esta situação como a representação de uma função?

Aluno 3: Sim, porque todos obedeceram a mesma lei da função.

No desenvolvimento desta atividade, os alunos puderam relacionar diferentes funções, fazendo um estudo da composição destas. Com a utilização de representações com desenhos analisaram diferentes situações onde a partir de uma entrada encontravam duas saídas, através das funções escolhidas.

Conforme Tall (1996) ao desenvolver uma pesquisa com estudantes utilizando a composição de funções para sondar a profundidade das facetas numéricas, geométricas e simbólicas, foi possível analisar que embora alguns apresentem dificuldades ao tratar do aspecto numérico da composição de funções usando tabelas, são perfeitamente capazes de interpretar o simbolismo numericamente.

Na realização da pesquisa, observamos que os discentes não apresentaram dificuldades em relação à composição das funções. O Aluno 1 na primeira situação escolheu a função deslocamento de uma casa para baixo, e a segunda função foi escolhida pelo Aluno 4 que era deslocamento de uma casa para a direita. Após, fazerem as transferências sugeridas foi solicitado aos estudantes que analisassem o que aconteceu desde a função na entrada até a saída. O Aluno 1 colocou que todos os elementos se deslocaram uma casa para baixo e uma para a direita, caracterizando assim uma função.

7.5.4 Jogo: Matemática Divertida (descubra a saída) - (ver regra do jogo na página 53)

O jogo que será trabalhado agora é Matemática Divertida, o qual utiliza entradas que contém números para que os alunos, utilizando funções específicas, encontrem as saídas designadas. O objetivo desta atividade é enriquecer o conceito de Função e desenvolver as aprendizagens necessárias para que ocorra a compreensão das funções compostas.

<u>Mediador</u>: *Nesta atividade utilizaremos o jogo Matemática Divertida para trabalharmos com a noção de função de uma forma mais abrangente. Vocês têm cartelas com quatro tipos de entradas diferentes; irão colocar qualquer uma delas na entrada, pegarão aleatoriamente uma função, e verificarão qual deverá ser a saída, após pegarão outra função e novamente completarão qual deverá ser a saída correspondente. A seguir, deverão analisar o que ocorreu com os números desde a entrada até a saída.*

<u>Mediador</u>: *Quais os números que fazem parte da entrada?*

<u>Aluno 1</u>: *Primeiro nós pegamos a entrada que tem os números 9, 10 e -5; a função é "Multiplica por 2", daí vai sair 18, 20 e -10.*

<u>Mediador</u>: *Peguem outra função.*

<u>Aluno 4</u>: *Tá eu peguei essa "Multiplica por 4 e adiciona 2". Daí vai ser 18 vezes 4 dá 72 mais 2 fica 74.*

<u>Aluno 2</u>: *4 vezes 20 dá 80 mais 2 dá 82; e -10 vezes 4 dá -40 mais 2 -42.*

<u>Aluno 1</u>: *Acho que não...não tem que diminuir?*

<u>Aluno 2</u>: *Ah! Fica -38.*

<u>Mediador</u>: *Agora que completaram todas as saídas, pensem o que aconteceu e escrevam uma função relacionando os números da entrada com os números da saída.*

<u>Aluno 3</u>: *Entrou 9 e saiu 74, entrou 10 e saiu 82 e entrou -5 e saiu -38. A gente tem que reunir essas duas funções que foram usadas?*

<u>Mediador</u>: *Sim.*

<u>Aluno 1</u>: *Mas como a gente faz?*

<u>Mediador</u>: *Pensem e descrevam uma lei que defina cada uma das funções utilizadas.*

<u>Aluno 1</u>: *Então a função multiplica por 2 fica $y = 2x$, né?*

<u>Mediador</u>: *Isso.*

<u>Aluno 2</u> : *E a função multiplica por 4 e adiciona 2 fica $y = 4x + 2$.*

<u>Aluno 3</u>: *Se a gente pensar em juntar as duas fica $y = 2x + 4x + 2$ que dá $y = 6x + 2$.*

Mediador: Tentem substituir algum dos valores da entrada nessa função e verifiquem se dá certo.

Aluno 1: Se entra 9 fica 6 vezes 9 que dá 54 mais 2 dá 56, não dá certo.

Mediador: Então não pode ser esta função. Lembram-se como eram resolvidos os cálculos envolvendo função composta?

Aluno 2: A gente substituía uma na outra.

Mediador: E como ficaria?

Aluno 2: Uma das funções é y = 2x e a outra é y = 4x + 2, então ficaria 4 (2x) + 2.

Aluno 4: Daí tem que resolver, faz 4 vezes 2x mais 2, fica y = 8x + 2.

Mediador: Façam a verificação.

Aluno 1: Tá, se entra 10 vai ficar 8 vezes 10 que dá 80 mais 2 fica 82, tá certo!

Aluno 3: Vamos ver os outros, 9 vezes 8 dá 72 mais 2 fica 74 e -5 vezes 8 dá -40 mais 2 fica -31. Achamos a função.

Foi possível através da realização deste jogo, analisar as dificuldades manifestadas pelos educandos no que se refere ao entendimento das funções compostas.

Conforme Tall (1996), tendo consciente a complexidade do conceito de função, observamos que o estudante concernido pode operar com mais sucesso na faceta simbólica do que na faceta numérica, mesmo que o simbolismo pareça ser mais sofisticado do que às representações numéricas.

Isto é evidenciado nos relatos vinculados ao jogo Matemática Divertida, nos quais os alunos ao realizarem a composição de funções numéricas, demonstraram não ter a compreensão necessária deste conteúdo para a realização da atividade. Podemos observar este fato quando o mediador solicita que os estudantes façam a composição das funções, e o Aluno 3 demonstra possuir uma imagem conceitual de que para compor uma função basta reunir as funções em questão. O Aluno 3 coloca que a composição da função y = 2x com a função y = 4x + 2 ficaria y = 6x + 2, o que demonstra o desconhecimento desta em relação a este assunto.

7.6 Sexto encontro

Dia: 04 de novembro de 2005 (sexta-feira)

Horário: das 13h às 13h50min

Número de alunos: 17

7.6.1 Jogo: Jogo da Velha - (ver regra do jogo na página 55)

No Jogo da Velha, iremos relembrar e sanar possíveis dúvidas em relação à construção de gráficos de funções, cálculo do vértice e zero da função, e também problemas envolvendo assuntos do cotidiano dos educandos.

<u>Mediador</u>: *A atividade que vamos desenvolver hoje é o Jogo da Velha. Nele vocês têm uma grade onde aparecem números na vertical e letras na horizontal. A junção de uma letra com um número forma uma posição. Todas as posições possíveis encontrarão nas cartelas que receberam, as quais contém questões sobre a construção de gráficos de funções, sobre vértice, zero da função e problemas. Escolham o ponto desejado, vejam a questão que terão que resolver, se acertarem a questão coloque no ponto um círculo da cor que representa a sua equipe, se errar seu adversário colocará o círculo com a sua cor. Vencerá o jogo quem preencher todos os pontos com a sua cor na diagonal, na vertical ou na horizontal.*

Essa atividade será realizada para rever e fixar o conteúdo de função, já que até o momento nosso trabalho esteve envolto em atividades visando o desenvolvimento do conceito de função.

<u>Mediador</u>: *Qual é o primeiro ponto que vocês vão pegar?*

<u>Aluno 1</u>: *Vamos pegar a B3 que é construir o gráfico da função y = 2x – 4.*

<u>Aluno 2</u>: *É aquele que a gente faz a tabelinha e o gráfico?*

<u>Aluno 1</u>: *É, coloca na tabela -1, 0 e 1, e agora substitui no lugar do x e calcula.*

<u>Aluno 2</u>: *Duas vezes -1 dá -2 menos 4 fica 2.*

<u>Mediador</u>: *Tem certeza?*

<u>Aluno 2</u>: *Tá, fica -2 menos 4, ah...Tem que somar, fica -6.*

<u>Mediador</u>: *Agora aplica a função para os outros valores de x.*

<u>Aluno 1</u>: *Para 0, 2 vezes 0 é 0 menos 4 fica 4.*

<u>Mediador</u>: *Preste atenção nos sinais; o que pode acontecer se vocês trocarem o sinal de algum número?*

<u>Aluno 1</u>: *Quando a gente for fazer o gráfico ele vai dar errado. Agora eu vi o erro, 0 menos 4 fica -4, e o 1 fica 2 vezes 1 que dá 2 menos 4 fica -2.*

<u>Mediador</u>: *Agora representem esses pontos em um gráfico. Que tipo de gráfico ele será?*

<u>Aluno 2</u>: *Uma reta.*

<u>Mediador</u>: *Você saberia dizer por quê?*

<u>Aluno 2</u>: Porque é uma função do 1º grau.

<u>Mediador</u>: Agora a outra dupla escolhe um ponto e resolve a questão.

<u>Aluno 3</u>: Nós queremos o ponto C3 que pede para determinar o zero da função y = 5x.

<u>Aluno 4</u>: Como se faz o zero da função?

<u>Mediador</u>: É só igualar a função a zero.

<u>Aluno 4</u>: Assim, 5x = 0, e depois o que eu faço.

<u>Mediador</u>: Resolve como se fosse uma equação do 1º grau.

<u>Aluno 3</u>: Tá, daí vai ficar x = 0 – 5.

<u>Mediador</u>: Cuidem que o 5 está multiplicando o x e não somando.

<u>Aluno 4</u>: Ah, ele passa dividindo, vai ficar x = 0/5 que dá 5.

<u>Aluno 3</u>: Acho que não, todo número dividido por 0 não dá 0?

<u>Mediador</u>: Correto.

<u>Aluno 4</u>: Então o zero da função y = 5x é 0.

<u>Mediador</u>: Sabem o que significa achar o zero da função? O que representa dizer que o zero da função y = 5x é 0.

<u>Aluno 3</u>: Quer dizer que a reta passa no 0.

<u>Mediador</u>: Mas o zero da função pode ser tanto no eixo x quanto no eixo y?

<u>Aluno 3</u>: Não, é no eixo x.

<u>Mediador</u>: Isso, o zero da função indica o ponto em que a reta corta o eixo x.

<u>Aluno 1</u>: Eu quero o ponto D1, que pede para construir o gráfico da função $y = x^2 - 10x + 9$*. Isso é uma função do 2º grau, né?*

<u>Mediador</u>: É sim, e como você vai resolvê-la?

<u>Aluno 1</u>: Tem que fazer a Bháskara.

<u>Mediador</u>: Está certo, fazendo a Bháskara vocês encontrarão os zeros da função, mas e o que mais vocês têm que fazer?

<u>Aluno 2</u>: Tem que fazer o vértice.

<u>Mediador</u>: Antes de iniciarem vamos analisar que tipo de função é esta. Vocês disseram que se trata de uma função do 2º grau, então como deve ser o gráfico desta função?

<u>Aluno 1</u>: Dá uma parábola.

<u>Mediador</u>: E a concavidade vai ficar voltada pra cima ou pra baixo?

<u>Aluno 1</u>: Não sei.

<u>Mediador</u>: O que devemos observar na função para saber se ela é para cima ou para baixo?

<u>Aluno 2</u>: Ah... não é o valor de <u>a</u>?

<u>Mediador</u>: Claro, e quanto vale o coeficiente <u>a</u> nesta função?

<u>Aluno 2</u>: Vale 1, e quando o <u>a</u> é maior que 1 a concavidade fica virada para cima e quando é menor que 1 ela fica virada para baixo.

<u>Mediador</u>: Muito bem, agora que vocês relembraram como deve ficar o gráfico, achem o zero e o vértice da função.

Os alunos fizeram os cálculos do zero da função utilizando a fórmula de Bháskara e após fizeram o vértice da função. Na hora de colocar os pontos no gráfico surgiram algumas dúvidas.

<u>Aluno 1</u>: Nós já calculamos, mas o que a gente faz com esses valores encontrados?

<u>Mediador</u>: O que representa os zeros da função que acharam?

<u>Aluno 2</u>: É onde ela passa pelo eixo x.

<u>Mediador</u>: Então agora marquem os pontos que acharam no eixo x.

<u>Aluno 1</u>: Nós achamos 1 e 9. Mas e o vértice, como a gente marca?

<u>Mediador</u>: No vértice calcularam um valor para x e um para y, então esses valores formam um ponto.

<u>Aluno 2</u>: A gente pega o 5 no eixo x e vai até o -16 no eixo y. Depois une os pontos.

<u>Mediador</u>: Daí forma a parábola.

Esta atividade que realizamos foi um momento muito especial, pois conseguimos trabalhar com vários conceitos em relação ao conteúdo de Função.

Foi possível esclarecer desde as dúvidas referentes ao cálculo do zero da função até a análise e compreensão de conceitos que muitas vezes passam desapercebidos pelos estudantes, por serem trabalhados muitas vezes de uma forma mecânica, onde o aluno resolve as operações sem se questionar sobre o significado das relações que realiza.

A prática de atividades diferenciadas permite que os discentes busquem respostas consistentes para suas dúvidas através do debate em grupo. No decorrer desta atividade, os estudantes após calcularem o zero da função e o vértice tiveram dúvidas em relação à colocação destes pontos no gráfico. O Aluno 1 indagou sobre o que fazer com os valores que foram encontrados, e através do debate entre o mediador e os estudantes as incertezas apresentadas foram analisadas e esclarecidas.

Bakar e Tall (1991), realizaram uma pesquisa com estudantes com o intuito de verificar os protótipos mentais para funções e gráficos que os mesmos possuíam. Segundo

Bakar e Tall, quando perguntado se um gráfico representa uma função à mente procura responder ressoando protótipos mentais os quais muitas vezes podem estar incorretos, como o fato de que um gráfico estranho não pode ser uma função porque não combina com alguns dos protótipos, ou que uma função não pode ser constante, porque uma função depende de uma variável e se considera essencial que esta apareça realmente na expressão.

Este fato é observado em alguns momentos da aplicação da atividade, onde se evidenciou que os educandos possuem muitos protótipos em relação ao conteúdo de função, como é revelado na fala do Aluno 2 que ao analisar a função de 1º grau automaticamente a relacionou com o gráfico de uma reta. Outra situação onde podemos contemplar a utilização de protótipos mentais por parte dos estudantes é quando questionados sobre a resolução da equação $5x = 0$ o Aluno 3 argumentou que a solução seria $x = 0 - 5$, demonstrando possuir o protótipo "passar para o outro lado" e não aplicar a operação inversa.

Neste sentido, a utilização de jogos matemáticos visa propiciar uma educação de qualidade, onde questões como as surgidas na realização desta atividade possam ser debatidas e esclarecidas.

7.6.2 Jogo: Trevo da Sorte - (ver regra do jogo na página 57)

Neste momento desenvolveremos o jogo Trevo da Sorte, o qual consiste em uma trilha onde os alunos devem percorrer tendo o cuidado de responder corretamente as questões presentes no jogo. Este jogo tem por objetivo trabalhar com problemas contextualizados referentes ao conteúdo de Função, onde os alunos deverão construir as leis de função presentes nas situações mencionadas.

<u>Mediador</u>: *Este jogo que vamos trabalhar agora se chama Trevo da Sorte. Ele é uma trilha onde cada equipe tem a sua saída e a sua chegada. Cada dupla joga o dado e anda o número de casas que sair no dado. Toda vez que parar em cima de um ponto de interrogação pega uma pergunta e responde, se responder corretamente pode avançar uma casa e se errar permanece no mesmo local. Quando parar na casa que um trevo da sorte você poderá avançar uma casa. Vence quem terminar primeiro a corrida.*

Aluno 1: A questão é "Os participantes de uma gincana recebem 7 pontos para cada tarefa cumprida. Há ainda um bônus de 20 pontos pela participação na gincana. O total de pontos é dado em função do número de tarefas cumpridas. Escreva a lei de formação dessa função".
Mediador: Você tem que escrever a lei da função.
Aluno 1: Não seria y = 7x + 20.
Aluno 2: Não, eu acho que é y = 20x + 7.
Mediador: Nesta questão tem um ponto que é constante e um que é variável.
Aluno 1: O bônus de 20 é constante.
Aluno 2: Ah, eu achei que o 7 que era constante.
Aluno 1: Então tá certo y = 7x + 20.

A Aluno 1 tirou a seguinte questão:

Aluno 1: "Ângelo é digitador e recebe R$ 0,35 por página digitada. a) Escreva a lei de formação da função que representa o salário de Ângelo. b)A despesa fixa mensal de Ângelo é de R$ 195,30. Quantas páginas ele precisa digitar para cobrir essas despesas?".
Aluno 2: Fica y = 0,35x.
Mediador: Isso mesmo, agora calcule quantas páginas ele precisa digitar para cobrir as despesas de R$ 195,30.
Aluno 1: Tem que botar R$ 195,30 no lugar do x...não...
Aluno 3: Tem que somar...subtrair...
Aluno 2: Eu acho que tem que pegar esse valor de R$ 195,30 e dividir por R$ 0,35.
Mediador: Tá certo, então faz.

Observação: Os Alunos levaram bastante tempo para realizar esta divisão, tiveram dúvidas quanto à divisão de números decimais. O Aluno 1 ao invés de fazer a divisão por partes tentava encontrar qual o número que multiplicado por 0,35 resultaria em 195,30. Após um tempo chegaram à resposta correta.

Aluno 1: Dá 558 páginas.
Mediador: Isso mesmo, este é o número de páginas que ele precisa digitar somente para cobrir as suas dívidas.

Conforme Bakar e Tall (1991), na vida diária nosso desenvolvimento dos conceitos depende das negociações perpetuadas deste tipo, que são uma parte arraigada do psicológico humano. Os discentes desenvolvem os exemplos protótipos do conceito de função em sua mente, como: uma função é como $y = x^2$, ou um polinômio, ou 1/x.

Nesta atividade, foi possível observar as dificuldades apresentadas pelos discentes na interpretação dos problemas utilizados. Os estudantes não compreendiam como poderiam a partir de um problema escrever a lei de uma função utilizando uma linguagem algébrica. Para elucidar esta situação citamos as falas dos Alunos 1 e 2 quando debatiam sobre como deveria ser escrita a lei da função do primeiro problema apresentado. Nesta situação o Aluno 1 logo respondeu corretamente que a função era $y = 7x + 20$, mas foi questionada pelo Aluno 2 que acreditava que a função deveria ser $y = 20x + 7$. Ele colocou que pensava que o 7 era constante. Através das discussões no grupo, realizou-se uma representação algébrica correta do problema.

Tall (1992) argumenta que a idéia de definir um conceito em uma sentença, ao invés de descrevê-la é muito difícil de se entender inicialmente. É impossível começar sem que sejam realizadas algumas suposições, e estas são baseadas na imagem conceitual do indivíduo e não em algumas definições logicamente formuladas do conceito.

Neste jogo nos foi oportunizado trabalhar com a formação de leis de função a partir de problemas. Procuramos disponibilizar problemas relacionados com o cotidiano dos educandos, para que tenham consciência de que este conteúdo trabalhado está presente em muitos momentos do nosso dia-a-dia.

7.6.3 Jogo: Dorminhoco Matemático - (ver regra do jogo na página 59)

O jogo Dorminhoco Matemático consiste em uma atividade a qual contém cartas com funções, zeros da função e gráficos. O objetivo neste jogo é fazer com que os alunos encontrem o zero da função e gráfico referente a cada função dada.

<u>Mediador</u>: *Neste jogo vamos trabalhar com os zeros e com gráficos envolvendo funções do 1º e do 2º grau. Esse é um jogo de cartas e ele funciona assim; eu vou dividir as cartas entre vocês, todas receberão 3 cartas e uma receberá 4 cartas. A Aluno que recebeu 4 cartas será quem iniciará o jogo. Atrás de cada carta tem uma função, um zero da função e a representação de um gráfico, sendo que uma das cartas contém a palavra "Dorminhoco". Quem recebe esta carta tem que ficar uma rodada com ela. No momento que receberem as cartas vejam a função e se o zero e o gráfico estão corretos, se algum estiver errado, quando*

for sua vez de jogar você passa esta carta adiante. Quando estiver formado o trio correto você abaixa as cartas, o último que abaixar perde.

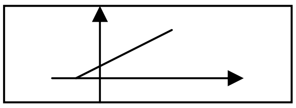
Função	**Zero da Função**	
$y = x + 5$	-5	

Figura 21: Exemplo de atividade do jogo Dorminhoco Matemático

O último que baixar é o Dorminhoco.

Aluno 1: *Aí que confusão!*

Mediador: *Vamos jogar a primeira, eu vou ajudando.*

Aluno 2: *Como é que eu faço?*

Mediador: *Veja qual é a função que receberam e analisem se o zero e o gráfico que têm servem para essa função.*

Aluno 1: *Olha essa aqui.*

Mediador: *Que tipo de função tu tem aqui?*

Aluno 1: *Uma função do 1º grau.*

Mediador: *E uma função do 1º grau pode dar este tipo de gráfico? (o gráfico representado era uma parábola).*

Aluno 1: *Não, tem que ser uma reta.*

Mediador: *Então tu podes passar esta carta adiante.*

Aluno 3: *E nesta função (a Aluno mostra a função $y = x^2 - 4x$), como eu acho o zero da função?*

Mediador: *Iguala a função a zero.*

Aluno 3: *Assim, $x^2 - 4x = 0$, vai dar 0 e 4.*

Mediador: *Correto, agora falta completar com o gráfico.*

Apesar de o jogo Dorminhoco ser um jogo bastante antigo muitos alunos não tinham conhecimento das suas regras e da maneira de jogá-lo, fato que acabou atrapalhando um pouco o desenvolvimento da atividade.

Observamos que alguns alunos ainda apresentam muitas dificuldades nos cálculos envolvendo funções. Mesmo quando os alunos tinham uma função do 1º grau e um gráfico de uma função do 2º grau, não conseguiam perceber que as cartas não estavam corretas.

Bakar e Tall (1991), realizaram uma pesquisa na qual observaram as concepções equivocadas que envolvem o conceito de função. Na ocasião foram entrevistados estudantes que estavam iniciando o curso de matemática, estes consideraram que uma função constante não era uma função, e acreditavam que um círculo era uma função. Isto revela o distanciamento existente entre a maneira como os conceitos são ensinados e como são realmente aprendidos pelos estudantes.

Na atividade realizada, foi possível observarmos que as cartas utilizadas evocavam imagens algébricas e gráficas, propondo um confronto de idéias. Isto ficou evidenciado quando os estudantes mesmo possuindo uma função de 1º grau acreditavam que o gráfico de uma parábola estaria correto.

7.7 Sétimo encontro

Dia: 09 de novembro de 2005 (quarta-feira)

Horário: das 15h45min às 17h20min

Número de alunos: 17

7.7.1 Jogo: Envelopes Matemáticos - (ver regra do jogo na página 61)

No jogo Envelopes Matemáticos, os alunos realizaram atividades referentes à criação de leis de função a partir de diagramas, outra representação muito utilizada no contexto escolar, mas que em diversas vezes o aluno não associa às outras imagens relacionadas às funções. Conforme Akkoç e Tall (2005), ao realizarem um estudo sobre as aprendizagens dos alunos em relação ao conceito de função, constatou-se que os estudantes eram mais bem sucedidos com diagramas de correspondência do que comparados com gráficos e expressões.

<u>Mediador</u>: *Esta atividade vocês vão realizar trabalhando em grupos. Podem observar que o jogo tem envelopes de 4 cores diferentes, onde cada grupo será representado por uma cor. Na primeira rodada todas as perguntas são iguais; um representante de cada grupo vem pega a questão e leva para que ela seja resolvida no grupo. Quando terminar se estiver correta, o grupo irá pegar outra questão. Vencerá quem fizer corretamente todas as questões. Nesta atividade nós trabalharemos com a construção da lei das funções presentes nos diagramas.*

Neste diagrama ocorreu a seguinte situação:

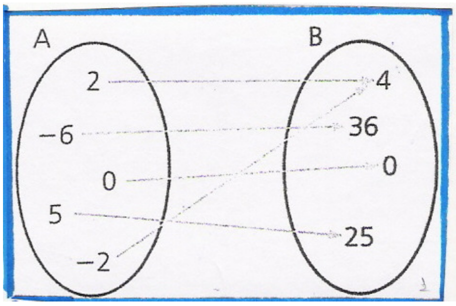


Figura 22: Exemplo de atividade do jogo Envelopes Matemáticos

<u>Aluno 1</u>: O primeiro diagrama entra 2 e sai 4, entra -6 e sai 36 e entra 0 e sai 0.

<u>Aluno 2</u>: Eu acho que é o número vezes ele. Porque, oh, 2 vezes 2 dá 4, 5 vezes 5 dá 25.

<u>Aluno 4</u>: Então como a gente pode escrever a lei?

<u>Aluno 1</u>: Fica $y = x^2$.

O diagrama abaixo fez surgir a seguinte situação:

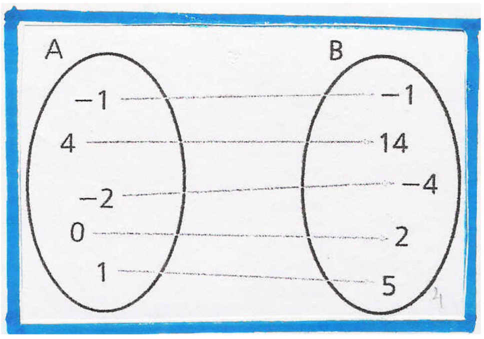


Figura 23: Exemplo de atividade do jogo Envelopes Matemáticos

<u>Aluno 3</u>: Neste diagrama entra -1 e sai -1, entrou 4 e saiu 14.

<u>Aluno 1</u>: Eu acho que é vezes um número mais outro número.

<u>Aluno 2</u>: Acho que é 4 vezes 4 dá 8 mais 1 dá 9.

<u>Mediador</u>: 4 vezes 4 dá quanto?

<u>Aluno 2</u>: Ah é, (risos) dá 16, ...é mais não dá certo.

<u>Aluno 4</u>: Peraí, qualquer número vezes 0 dá 0, como saiu 2, o 2 é da soma, a gente tem que descobrir que número multiplica antes.

<u>Aluno 3</u>: É o 3,...o 3, 3 vezes 4 dá 12 mais 2 dá 14.

<u>Aluno 2</u>: 3 vezes -1 dá -3 mais 2 dá -1, é essa mesmo.

<u>Mediador</u>: Então como fica a função?

<u>Aluno 2</u>: Fica $y = 3x + 2$.

<u>Mediador</u>*: Isso mesmo.*

Nesta atividade os alunos mais uma vez realizaram os exercícios solicitados através do debate e da cooperação em grupo. No segundo diagrama analisado o Aluno 4 ao desenvolver a lei de função caracterizado nesta situação argumentou que qualquer número vezes 0 dá 0, como saiu 2, o 2 é da soma, a gente tem que descobrir que número multiplica antes. Com base nesta colocação o grupo encontrou a função representada pelo diagrama.

Conforme Tall (1996), alguns estudantes tendem a ser muito não-específicos em relação ao conteúdo de função. Ao pesquisar sobre as camadas da definição verbal, ao questionar um estudante sobre o que ele pensava ser uma função, o discente argumentou que uma função é a idéia geral do todo. Tall observou que quando pedido para ser mais específico, o discente utilizou uma descrição chave que os materiais enfatizam: relacionamento, entretanto não coloca nenhuma circunstância no relacionamento. No desenvolvimento deste jogo os estudantes buscaram a compreensão da lei que estava presente na função estudada, observando se a todos os elementos do conjunto A, a lei encontrada poderia ser aplicada.

7.7.2 Jogo: Pino Vivo - (ver regra do jogo na página 63)

Neste momento trabalhamos com os alunos um jogo chamado Pino Vivo, o qual é constituído por uma trilha, que possui cartelas de três cores diferentes; as cartelas brancas contêm perguntas de nível fácil, as cartelas rosas contêm perguntas de nível médio e as cartelas verdes contêm perguntas consideradas difíceis.

Os conteúdos desenvolvidos neste jogo foram questões onde os alunos devem verificar se o gráfico apresentado é ou não função, questões envolvendo domínio e imagem, funções crescentes e decrescentes, entre outras, evocando diferentes imagens conceituais.

<u>Mediador</u>*: Este jogo se chama Pino Vivo, e é uma trilha um pouco diferente das trilhas tradicionais. O jogo é realizado em grupos, onde cada grupo terá um representante. O dado será lançado por uma equipe de cada vez e a equipe andará o número de casas que lhe couber. Após, o dado não será mais utilizado; cada equipe andará o número de casas correspondente à cor da cartela que quiser. O jogo tem três cores de cartelas: branca, rosa e verde, as quais contém questões envolvendo gráficos onde deverá ser verificado se é uma função ou não, questões sobre domínio, imagem, funções crescentes e decrescentes, entre*

outras. Na cartela branca se fizer à questão corretamente poderá avançar uma casa e se errar tem que voltar três casas. Na cartela rosa, se acertar a questão avança duas casas e se errar volta duas casas. Na cartela verde se acertar avança três casas e se errar volta uma. As cartelas brancas contêm perguntas fáceis, as cartelas rosas perguntas médias e as verdes perguntas consideradas difíceis.

Uma das questões que um dos grupos pegou foi:

<u>Aluno 1</u>*: É pra ver onde é crescente, decrescente ou constante.*

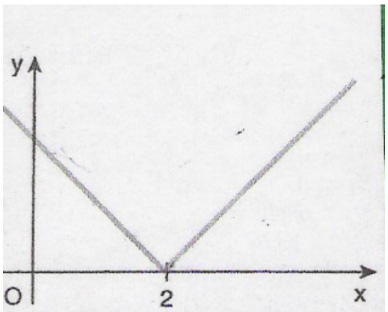


Figura 24: Exemplo de atividade do jogo Pino Vivo

<u>Aluno 2</u>*: Ela é uma parábola crescente.*

<u>Aluno 1</u>*: Tá certo!.*

<u>Mediador</u>*: Especifique melhor o ponto onde ela é crescente ou decrescente.*

<u>Aluno 4</u>*: Antes do 2 ela é decrescente e depois do 2 ela é crescente.*

<u>Mediador</u>*: O que você quer dizer com antes e depois do 2?*

<u>Aluno 4</u>*: Quero dizer que ela é decrescente para os números menores que 2 e ela é crescente para os números maiores que 2.*

Outra questão: Determine a imagem da função representada pelo gráfico.

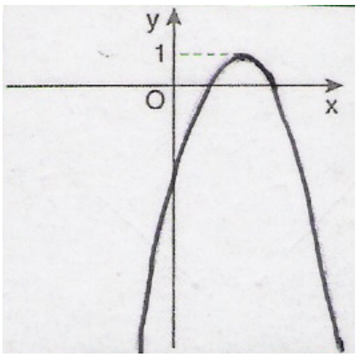


Figura 25: Exemplo de atividade do jogo Pino Vivo

<u>Aluno 1</u>*: É pra determinar a imagem deste gráfico. Onde a gente vê a imagem?*

<u>Mediador</u>*: A imagem está relacionada com o eixo y.*

<u>Aluno 2</u>: A imagem seriam os reais.

<u>Mediador</u>: Não porque este gráfico não abrange todos os números, analisem como o gráfico está formado.

<u>Aluno 1</u>: Ela tá do 1 para baixo, então a imagem seriam todos os números menores que 1.

<u>Mediador</u>: Isso mesmo.

No jogo Pino Vivo, foi possível rever e desenvolver conceitos referentes ao conteúdo de função. Os alunos apresentaram muitas dificuldades quanto à visualização do domínio e imagem nos gráficos. Este fato evidencia-se no comentário realizado pelo Aluno 1 no segundo gráfico apresentado, quando a mesma questiona sobre onde se vê a imagem no gráfico de uma função.

Conforme Tall (1992), em relação à complexidade do conceito de função, ocorrem avanços se houver uma melhora na compreensão das habilidades na solução de problemas em áreas específicas do conceito de função, mas nenhum parece ser uma panacéia universal. O autor enfatiza que a idéia de função, como um processo, pode fornecer uma raiz cognitiva apropriada para o conceito formal.

Muitas vezes os conteúdos são constituídos desvinculados da realidade, são ensinados de uma forma na qual o professor expõe e o aluno escuta. Como não ocorrem debates e discussões, os estudantes passam a resolver as questões de forma mecânica, sem terem entendimento sobre o que estão realizando, apenas seguindo exemplos semelhantes usados como modelos.

Constatamos que, em relação ao conteúdo de Função, muitos aspectos são trabalhados, mas nem todos são compreendidos. Neste sentido, Dubinsky (1990) apud Tall (1992), coloca que, ao enfatizar muitas representações do conceito de função: a fórmula, gráfico, relacionamento variável e assim por diante, a idéia central de função como um processo é negligenciada freqüentemente. Embora os gráficos sejam representados como uma maneira excelente de pensar em uma função, poucos estudantes parecem relacionar o gráfico ao processo funcional subjacente. Em vez disto os estudantes vêem um gráfico simplesmente como um objeto: uma curva estática. Evidenciamos este fato no primeiro questionamento do jogo Pino Vivo (7.7.2), quando o Aluno 2 argumenta que o gráfico é uma parábola crescente, neste caso torna-se evidente as imagens conceituais conflitantes que esta estudante possui.

No decorrer das atividades que foram desenvolvidas, foi possível perceber e analisar as imagens conceituais que os discentes possuem em relação ao conteúdo de função. A compreensão deste conteúdo vai muito além de gráficos e tabelas, mas envolvem também outros aspectos importantes que permitem a resolução exata de uma função, como o entendimento de operações envolvendo números inteiros, frações e entendimento de termos como duplicar, triplicar, entre outros. Entre as dificuldades apresentadas pelos estudantes, salientamos as dúvidas em relação ao cálculo do zero da função, do vértice e a colocação destes pontos no gráfico.

Os discentes também demonstraram não possuir uma compreensão clara sobre a construção de leis de função a partir de problemas, revelando a dificuldade para evocar imagens conceituais convenientes para a criação das leis, bem como dificuldades em relação à composição de funções envolvendo representações numéricas. Observamos também, assim como Tall (2005), que os educandos apresentam maior facilidade em relação aos diagramas do que com expressões e gráficos, sugerindo que esta possa ser uma imagem favorecida pela prática escolar cotidiana destes alunos.

Tall (2000-a), ao realizar uma pesquisa, analisou que o conceito próprio de função é raramente um conceito de estudo. Para tais razões, nós vemos um papel importante para a máquina de função como uma raiz cognitiva antes de considerar tipos específicos de função. A máquina de função conforme Tall (2000-b), é um conceito significativo aos estudantes. Ela foi introduzida como uma representação visual para o conceito de função visto como um processo de entrada e saída, em que, para cada elemento específico da entrada, há uma única saída para essa entrada.

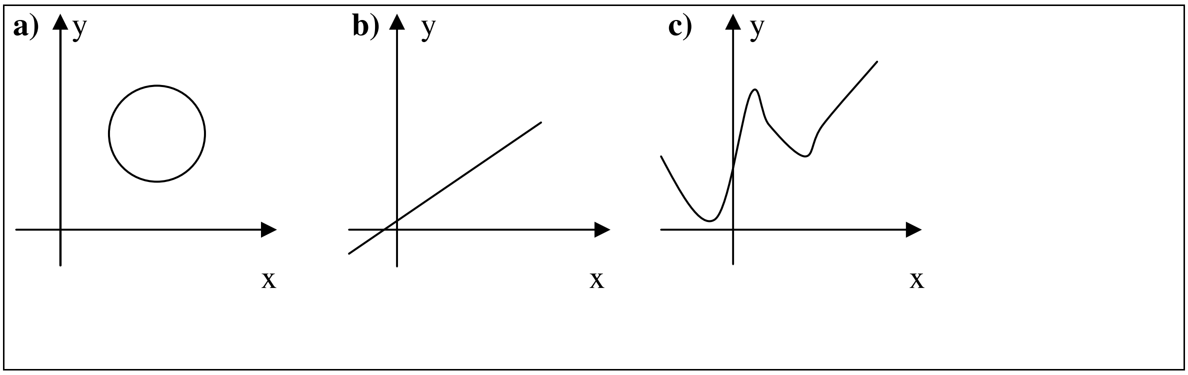
Constatamos que, com a utilização de jogos matemáticos envolvendo o conceito de função, muitas dificuldades e dúvidas puderam ser sanadas. A prática de atividades diferenciadas provou ser um recurso motivador, o qual colaborou na aquisição de novas aprendizagens por parte dos estudantes.

8 PRÉ-TESTE E PÓS-TESTE

Neste capítulo dissertaremos sobre os resultados obtidos no pré-teste, no início da pesquisa sobre Funções, e de um pós-teste ao término da pesquisa. As questões presentes no teste (em anexo) serão analisadas individualmente, sendo colocadas respostas obtidas pelos alunos no pré-teste e no pós-teste, fazendo um comparativo sobre as mesmas e revelando transformações nas imagens conceituais dos discentes. No total dezessete alunos participaram da pesquisa. Nas justificativas apresentadas pelos estudantes nos questionamentos, os números destacados entre parênteses, representam a quantidade de alunos que responderam de maneira semelhante cada questão. Torna-se importante salientarmos que, apesar de sabermos qual é o conceito de função, no contexto da pesquisa nos satisfazemos com as respostas que revelem imagens conceituais mais completas no pós-teste que no pré-teste.

- **Questões:**

1) Os gráficos abaixo representam funções? Justifique.



Respostas da primeira questão:

a) No pré-teste realizado treze alunos responderam que o gráfico não representava uma função, três alunos disseram que representava e um aluno não respondeu.

Dentre as justificativas utilizadas pelos alunos estavam:

- Não é função porque não passa pelo eixo (2);
- Não é função porque não é reta (1);

- É função porque é apresentado por gráfico (1).

Podemos observar que apesar da maioria dos alunos terem colocado corretamente que o gráfico não se tratava de uma função, quatro estudantes demonstraram dúvidas sobre o que afirmavam.

No pós-teste, realizado ao término da pesquisa a qual utilizou jogos matemáticos para desenvolver o conceito de Função, dezesseis alunos responderam que o gráfico em questão não era a representação de uma função, enquanto apenas um aluno respondeu que era uma função.

Os comentários sobre o gráfico foram os seguintes:

- Não é função porque encontra mais de um ponto (6);
- É função porque passa por um ponto (1).

Quando os alunos colocam que o gráfico “Não é função porque encontra mais de um ponto”, percebemos que se trata do traçado de uma reta vertical conduzida pelo eixo (x,0), que encontrará o gráfico em dois pontos.

Na realização do pós-teste, pudemos verificar que a maioria dos estudantes respondeu que o gráfico não representava uma função, demonstrando que houve uma mudança em relação ao conceito de função, embora nem todas as justificativas elaboradas estejam coerentes.

Observamos que não ocorrem no pós-teste, respostas como “Não é função porque não é uma reta”, como ocorreu no pré-teste, uma resposta decorrente de uma imagem conceitual vinculada ao protótipo da reta.

Analisando este questionamento, observamos as imagens conceituais dos estudantes à cerca do gráfico apresentado, na qual um dos alunos justificou não ser uma função porque não era reta. Isto demonstra os protótipos mentais que alguns educandos possuem.

b) No pré-teste realizado dezesseis alunos responderam que o gráfico representa uma função e um aluno não respondeu.

As justificativas descritas pelos alunos foram:

- Sim porque está apresentado por gráfico (1);
- Sim porque é linha reta (1);
- Sim porque passa pelo eixo x e y (1);
- Sim porque passa em dois eixos (1).

No pós-teste dezesseis alunos responderam que o gráfico representava uma função e um estudante respondeu que não.

As respostas dos alunos para explicitar seus pensamentos foram:

- É função porque encontra somente um ponto (8);
- É função, pois ela tem somente dois pontos e é uma reta (1);
- É função porque passa pelo y (1);
- É função porque tem uma entrada e uma saída (1);
- Não é função porque não passa por duas raízes (1).

Quando os alunos colocam que, "É função porque encontra somente um ponto", eles estão fazendo referência que para representar uma função se traçarmos uma reta vertical em qualquer ponto do eixo x, ele deverá estabelecer somente um ponto de intersecção com o gráfico representado.

c) No pré-teste doze alunos responderam que o gráfico não representa uma função, quatro alunos responderam que o gráfico representa uma função e um aluno não respondeu ao questionamento.

Dentre as justificativas estavam:

- É uma função porque ela tem raízes e um ponto máximo (1);
- É função porque é apresentado por gráfico (1);
- Não é função porque não é reta (1);
- Não é função porque não passa pelo eixo (1).

Na realização do pós-teste onze alunos responderam que o gráfico é uma função e seis alunos responderam que não é uma função.

Os comentários dos alunos em relação a este questionamento foram:

- É função, pois tem dois pontos correspondentes, e tem pontos crescentes e decrescentes (1);
- É função porque passa por um ponto só (2);
- Não, porque não passa por duas raízes (1);
- Não é função porque encontra mais de um ponto (1).

Ao colocar que o gráfico representa uma função porque passa por um ponto só, ou que não é função porque encontra mais de um ponto, os alunos se referem que para representar uma função, se traçarmos uma reta vertical em qualquer ponto do eixo x, ele deverá estabelecer somente um ponto de intersecção com o gráfico representado.

Analisando os resultados obtidos pelos alunos, bem como as justificativas utilizadas, percebemos que ocorreu uma evolução conceitual dos alunos em relação ao conceito de função.

Resumimos as respostas dos itens **a**, **b** e **c** na tabela um.

Tabela 1

Representação de funções através de gráficos

		Representa função	**Não representa função**	**Não respondeu**
Questão	Pré-teste	03	13	01
A	Pós-teste	01	16	-
Questão	Pré-teste	16	-	01
B	Pós-teste	16	01	-
Questão	Pré-teste	04	12	01
C	Pós-teste	11	06	-

Fonte: Pesquisa

Analisando as respostas apresentadas pelos alunos, constatamos algumas observações que entram em consonância com uma pesquisa desenvolvida por Tall (1992), onde o mesmo questiona os educandos sobre o que eles pensavam sobre as funções. Entre as respostas sugeridas pelos alunos estavam que são correspondências entre duas variáveis, uma regra de correspondência, uma fórmula ou um gráfico.

Um posicionamento importante que deve ser analisado ocorre no primeiro gráfico, onde um dos alunos, no pré-teste coloca que o gráfico não é função porque não é uma reta. Segundo Tall (1992) normalmente os alunos evocam a representação de uma função como sendo uma linha reta, permitindo somente uma função porque “dois pontos podem ser conectados por somente uma linha reta”. Ele acredita que esta concepção de função como linear parece ser influenciado pela geometria, a qual os discentes aprendem juntamente com a álgebra, e também pelo tempo gasto no currículo somente com funções de 1º grau. Percebemos que isto não torna a ocorrer no pós-teste.

No terceiro questionamento, temos o desenho de uma curva irregular para que os alunos respondessem se o gráfico representava uma função ou não, no pré-teste a maioria dos alunos respondeu que não, isso se deve a concepção que os alunos têm que o gráfico de uma função deve ser uma linha reta, este fato como já foi dito no parágrafo anterior, é ilustrado em um artigo realizado por Bakar e Tall (1991), no qual um dos estudantes pesquisados coloca que os gráficos de funções são geralmente lisos, uma linha reta ou curva, não uma combinação dos dois.

Normalmente ocorrem dúvidas nas representações gráficas de funções porque muitas vezes os gráficos não combinam com os protótipos mentais que os estudantes têm em relação ao conceito de função. Conforme Bakar e Tall (1991), as experiências dos alunos estão geralmente ligadas nos termos dos gráficos dados por uma fórmula que tenda a ter uma fórmula reconhecível, seus protótipos tendem “a ser dados por uma fórmula”, têm um gráfico “liso”, parecem regulares e assim por diante.

Observamos que este fato acontece no pré-teste, mas não no pós-teste, isto nos dá indício de que o trabalho desenvolvido com jogos possa ter contribuído para o enriquecimento das imagens conceituais acerca de funções.

2) O que é uma função?

Quando perguntamos aos alunos o que é uma função, as respostas obtidas no pré-teste foram:

- Quando os números formam uma imagem (1);
- É uma lei que estuda os gráficos (1);
- É uma reta (1);
- Quando existem raízes (1);
- É um modo de aplicar um produto a um gráfico (1);
- É quando a reta passa em dois eixos ou mais (4);
- É uma lei que representa a função da conta, como y = 30x + 10 é uma função (1);
- É um gráfico com ponto de partida e chegada (1).

No pós-teste as respostas fornecidas pelos alunos foram:

- É quando existem duas raízes, uma para cada eixo (1);
- É quando para cada entrada existe uma única saída (7);
- É quando há uma entrada e uma saída e só passa por um ponto (1);
- É quando os pontos passam apenas uma vez pela reta (1);
- Função pode ser comparada com uma máquina onde tem uma só entrada e uma só saída (3);
- É quando o gráfico encosta em um ponto só (1);
- É quando um elemento do conjunto A tem apenas um correspondente no conjunto B (1).

No momento que os estudantes colocam que, "só passa por um ponto", ou que "os pontos passam uma vez pela reta", eles se referem que para representar uma função se traçarmos uma reta vertical em qualquer ponto do eixo x, ele deverá estabelecer somente um ponto de intersecção com o gráfico representado.

Sintetizamos as respostas do segundo questionamento na tabela dois.

Tabela 2

Análise sobre o que os alunos pensam acerca de função

	Respondeu corretamente	**Respondeu incorretamente**	**Não respondeu**
Pré-teste	01	11	05
Pós-teste	14	01	02

Fonte: Pesquisa

Através deste questionamento, podemos observar como as respostas dos alunos diferem do pré para o pós-teste. Em uma pesquisa desenvolvida por Bakar e Tall (1991), foi solicitado aos estudantes que explanassem sobre o conceito de função, dentre as respostas estavam que uma função é como uma equação que tem entradas variáveis, onde ao processar um número na entrada você terá uma saída, outros colocaram que uma função é uma equação que descreve o caminho de uma curva em um gráfico.

Analisando as observações realizadas pelos estudantes no pré-teste sobre o que pensavam ser uma função, constatamos que os mesmos utilizam protótipos mentais para responder a este questionamento, relacionando o conceito de função a representação de gráficos. Em uma das respostas um aluno argumenta que função é uma reta, neste momento torna-se importante retomarmos a questão anterior onde examinamos que os educandos possuem imagens conceituais nas quais as funções compreendem linhas retas e estáticas. É interessante observarmos que o estudante que escreveu que uma função é uma reta, no primeiro exercício identificou como sendo uma função, somente o gráfico com uma reta, acreditando que o gráfico “c” por apresentar linhas curvas não representava uma função. Desta forma, podemos analisar as imagens conceituais equivocadas que os discentes possuem acerca do conteúdo de função.

Bakar e Tall (1991), realizaram uma pesquisa com estudantes na qual solicitavam que explicassem em uma sentença o que eles pensavam ser uma função. Entre as respostas estavam: “Uma função é como uma equação que tenha entradas variáveis, coloque o número na entrada e dê uma saída”, “Um formulário da equação que descreve o caminho de uma curva em um gráfico”, ou ainda que função é “Uma ordem que traça uma curva ou uma linha reta em um gráfico”.

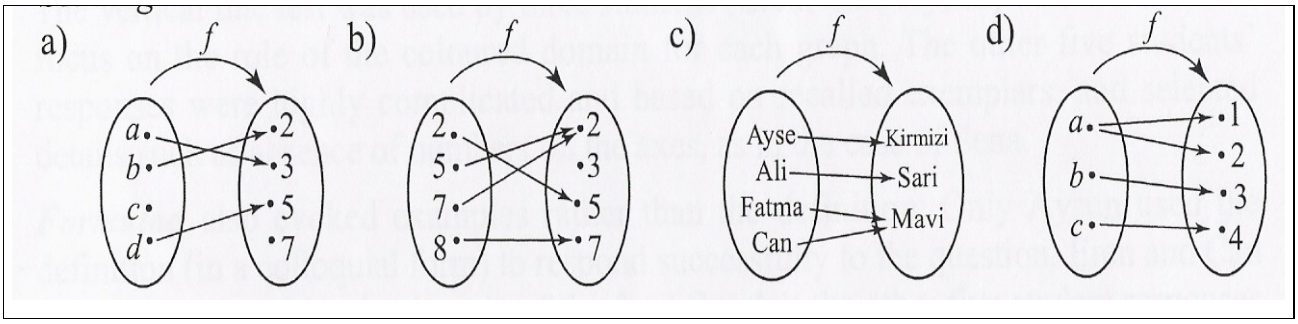
Dentre as respostas apresentadas pelos alunos na pesquisa que realizamos sobre o que é uma função estavam: “É uma reta”, “É quando a reta passa em dois eixos ou mais”, ou ainda “Quando existem raízes”. Comparando as respostas apresentadas pelos estudantes nas pesquisas realizadas, percebemos que as imagens conceituais a cerca do conceito de função, demonstradas pelos discentes não diferem muito entre si.

Conforme Bakar e Tall (1991), é importante constatar que muitos estudantes têm alguma idéia do aspecto processual da função, fazendo exame de algum tipo de entrada e realizando algum procedimento para produzir uma saída, mas nenhuma resposta menciona que o processo pode somente ser aplicado a um determinado domínio da entrada, e faz exame de uma escala dos valores, apesar do fato de que estas definições lhes tinham sido dadas mais cedo em seus estudos. Tall evidencia as palavras técnicas que foram utilizadas, tais como os termos: seqüência, série, jogo e assim por diante.

Muitos estudantes construíram ao longo da pesquisa que realizamos uma imagem conceitual sobre o conceito de função, visualizando uma função como uma máquina que possui uma entrada e uma saída. Este fato é demonstrado através das justificativas apresentadas pelos estudantes no pré e no pós-teste. No pré-teste observamos que as respostas dos alunos eram muito superficiais, como ao colocar que uma função é uma reta, ou que é quando os números formam uma imagem. No pós-teste, analisamos que as justificativas estavam mais perto da idéia de função, como ao colocar que uma função é quando para cada entrada existe uma única saída.

Observamos, claramente, que no pós-teste os estudantes recorreram a imagens conceituais vinculadas ao protótipo do jogo Máquina de Função. Reconhecemos que, esta ainda não está tão próxima da definição formal, mas percebemos que é uma imagem diferente das anteriores, ou seja, é possível afirmar que esta foi adicionada ao rol dos protótipos mentais destes alunos.

3) Os diagramas abaixo representam funções? Justifique:



Respostas do questionamento três:

a) Em relação a esta questão, no pré-teste onze alunos responderam que o diagrama não representa uma função, três alunos responderam que o diagrama representa uma função e três alunos não responderam.

Entre as justificativas enunciadas pelos alunos estão:

- Não é função porque não podem sobrar números no diagrama (1);
- Não é função porque o domínio não pode ser ligado a duas imagens (1);
- Sim porque todos têm representantes (1).

No pós-teste todos os alunos responderam que o diagrama não representa uma função.

Em suas justificativas todos os alunos responderam de forma equivalente dizendo que o diagrama não representa uma função porque nem todos os elementos da entrada têm correspondentes na saída.

b) Na segunda questão no pré-teste cinco alunos responderam que o diagrama representa uma função, nove alunos responderam que o diagrama não representa uma função e três alunos não responderam.

Em relação a esta questão não houve justificativas.

No pós-teste doze alunos responderam que o diagrama representa uma função e cinco alunos disseram que não.

Dentre as justificativas estão:

- É função porque todos têm uma saída (2);
- É função porque todos têm correspondentes (1);
- Não é função porque não pode sobrar e nem doar dois ao mesmo tempo (1).

Observamos através deste questionamento um aumento significativo dos estudantes que responderam corretamente a esta interrogação. Nas justificativas relacionadas, é demonstrado que muitos alunos não possuem uma compreensão preconizada sobre o conceito de função. Analisando as questões apresentadas, constatamos que os estudantes obtiveram mudanças em relação as suas imagens conceituais a cerca do conceito de função, no desenvolvimento do pós-teste demonstrando que a pesquisa realizada utilizando jogos matemáticos contribuiu para que estas mudanças se tornassem possíveis.

Conforme Bakar e Tall (1991), o conceito de função é uma idéia extremamente complexa, sendo que quando o conceito é ensinado com exemplos, como no currículo atual conduzimos os alunos aos protótipos mentais os quais dão impressões errôneas da idéia geral de uma função. Mesmo entre os estudantes que recebem alguma instrução na noção de uma função, somente uma minoria responde coerentemente e consistentemente.

c) Na terceira questão no pré-teste sete alunos responderam que o diagrama representa uma função, sete responderam que o diagrama não representa uma função e três alunos não responderam.

Os estudantes não justificaram suas respostas.

No pós-teste doze alunos responderam que o diagrama representa uma função, cinco alunos responderam que não.

As justificativas que os estudantes utilizaram foram:

- É função porque todos têm uma saída (1);
- É função porque todos têm entrada e saída (1);
- Não é função porque não pode sair dois pontos de um só (1).

d) Na quarta questão no pré-teste, cinco alunos responderam que o diagrama representa uma função, nove alunos responderam que o diagrama não representa uma função e três alunos não responderam.

As fundamentações realizadas pelos alunos foram:

- Sim todos têm representantes (1);
- É função porque deu certa a conta e não sobrou (1);
- Não é função porque o domínio não pode ser ligado a duas imagens (1).

No pós-teste dezesseis alunos responderam que o diagrama não representa uma função e um aluno respondeu que sim.

As justificativas foram:

- Não é função porque saíram duas flechas do mesmo ponto (3);
- Não é porque tem duas saídas (1).

Resumimos as respostas deste questionamento na tabela três.

Tabela 3

Representação de funções através de diagramas

		Representa função	**Não representa função**	**Não respondeu**
Questão	Pré-teste	03	11	03
A	Pós-teste	-	17	-
Questão	Pré-teste	05	09	03
B	Pós-teste	12	05	-
Questão	Pré-teste	07	07	03
C	Pós-teste	12	05	-
Questão	Pré-teste	05	09	03
D	Pós-teste	01	16	-

Fonte: Pesquisa

Através da análise das respostas desenvolvidas pelos estudantes observamos que os alunos obtiveram um melhor desempenho no pós-teste que foi realizado. A maioria dos alunos respondeu corretamente as questões sugeridas, desenvolvendo observações mais coesas e consistentes.

A idéia de função como um processo, segundo Tall (1992), pode provar ser uma raiz cognitiva apropriada para o conceito formal, mas ao longo da linha do desenvolvimento cognitivo há obstáculos a serem superados, incluindo o processo como um único conceito e de relacionar-se este conceito a suas muitas e variadas alternativas de representação. Remanesce um esquema grande e complexo das idéias que requerem uma escala larga da experiência em fortalecer a generalização do todo.

Em um artigo de Tall (2005), ele desenvolveu uma pesquisa relacionada ao conceito de função, na qual através de entrevista foi possível compreender que os estudantes eram mais bem sucedidos com diagramas de correspondência do que com gráficos e expressões.

Analisando as respostas fornecidas pelos educandos, podemos observar que eles possuem mais facilidade com diagramas, pelo fato de que alguns gráficos apresentam curvas e irregularidades que contrariam as imagens conceituais que os estudantes possuem, onde as funções são caracterizadas por linhas retas e estáticas. Alguns estudantes ao analisarem os gráficos e diagramas apresentaram as mesmas justificativas para denominar como função as figuras representadas, como ao colocar que é função por ter uma entrada e uma saída.

4) Uma maneira de se pensar numa função é imaginá-la como uma máquina com uma entrada e uma saída.

a) **Qual deve ser a saída nesta situação:**

Entrada	**Função**	**Saída**
4	**Triplica e depois soma 2**	**?**

No pré-teste dez alunos responderam corretamente e sete responderam errado.

No pós-teste doze alunos responderam corretamente e cinco alunos responderam de modo errôneo.

Neste questionamento alguns alunos apresentaram dificuldades com relação ao termo “triplicar”, pois ao invés de multiplicar por três, elevaram o número na terceira potência, enquanto outros não adicionaram o número dois ao resultado encontrado. Acreditamos que em alguns casos houve dificuldade quanto ao termo utilizado, mas a maioria dos erros ocorreu pela falta de atenção por parte dos alunos.

b) Qual é a função presente nesta situação:

Entrada	**Função**	**Saída**
3	**?**	**12**

No pré-teste quatro alunos responderam corretamente, doze alunos responderam incorretamente colocando na função somente o número 4 ou 9, e um aluno não respondeu.

Entre as funções corretas sugeridas pelos alunos estão:

- Triplica e soma 3;
- Multiplica por 4;

Muitos alunos colocaram na função somente o número 4 e alguns o número 9, mas não colocaram a operação que estava inserida nestes números.

No pós-teste dez alunos responderam corretamente e sete responderam erroneamente.

Sintetizamos as repostas dos alunos na tabela quatro.

Tabela 4

Análise dos alunos sobre a máquina de função

		Respondeu corretamente	**Respondeu incorretamente**	**Não respondeu**
Questão	Pré-teste	10	07	-
A	Pós-teste	12	05	-
Questão	Pré-teste	04	12	01
B	Pós-teste	10	07	-

Fonte: Pesquisa

Analisando este questionamento, percebemos que ele diferentemente das questões até aqui apresentadas, às quais visavam que os estudantes respondessem se as questões representavam ou não funções, esta buscava a criação de leis de função através de entradas e saídas determinadas e também da descoberta da saída quando lhes eram dadas uma entrada e uma lei de função. Desta forma, as atividades desenvolvidas com os alunos no decorrer da pesquisa, como a máquina de função, buscaram promover nos estudantes conhecimentos para a solução destas questões, entre outras.

Com a intenção de promover uma evolução na imagem conceitual à cerca de conteúdo de função, utilizamos variados jogos matemáticos, estando entre eles à máquina de função a qual segundo Tall (2000-b) permite aos estudantes terem uma imagem mental de uma caixa de entrada e saída que pode ser usada freqüentemente para descrever e nomear vários processos sem a necessidade de ter um processo explícito definido.

Ao fazermos uso da máquina de função, nosso propósito era fomentar nos educandos a capacidade de responder satisfatoriamente a questões como a descrita aqui. Através do jogo máquina de função, os estudantes eram confrontados com variadas situações onde lhes era apresentada uma entrada e uma saída e os mesmos tinham que calcular o valor da saída com base na função proposta na atividade.

Através das atividades desenvolvidas, a máquina de função demonstrou ser uma importante ferramenta de aprendizagem, promovendo o debate em grupo e o confronto das imagens conceituais que os estudantes possuíam em relação ao conteúdo de função.

Conforme Tall (2000-b) a máquina de função é uma raiz cognitiva importante a qual fornece uma fundação que propicia o desenvolvimento do conceito de função pelos educandos.

5) Constrói os gráficos das funções:

a) y = x + 2

Na realização do pré-teste, oito alunos construíram o gráfico corretamente, três alunos não construíram, quatro alunos construíram de maneira incorreta a tabela correspondente e dois alunos fizeram a tabela corretamente, mas fizeram o gráfico de forma errada.

Neste questionamento alguns alunos desenvolveram de maneira errônea os pares ordenados inseridos nesta função. Um estudante ao atribuir ao x o valor 2, quando substituiu este número na função $y = x + 2$ obteve como resposta $y = -2$.

No pós-teste treze alunos construíram corretamente o gráfico da função, um aluno não respondeu, um aluno construiu o gráfico de forma errada por ter calculado de forma equivocada a imagem da função e dois alunos acertaram a construção da tabela correspondente, mas construíram o gráfico de forma errada.

b) $y = x^2 + 2x - 3$

No pré-teste dois alunos construíram o gráfico da função corretamente, quatro alunos não responderam, cinco alunos erraram e seis alunos acertaram a construção do gráfico em parte, pois alguns esqueceram do vértice e outros desenvolveram de maneira equivocada o gráfico.

No pós-teste quatro alunos construíram corretamente o gráfico da função, um aluno não respondeu, dois alunos responderam erroneamente e dez alunos acertaram a questão em parte, pois alguns erraram o gráfico da função, outros cometeram equívocos no cálculo do zero e do vértice da função.

Neste questionamento foi possível observar a grande dificuldade que os alunos apresentam na construção de gráficos de funções. Apesar de normalmente o estudo de funções ser realizado com excessivos exercícios onde os alunos têm que construir gráficos muitos deles não conseguem nem ao menos colocar os pontos no plano cartesiano.

Nas questões anteriores, nos foi possível analisar as imagens conceituais que os estudantes possuem em relação ao conteúdo de função e verificar suas dificuldades em definir se um gráfico ou diagrama representava ou não uma função. No momento em que os educandos deveriam construir os gráficos das funções do 1º e do 2º grau, evidenciou-se a falta de compreensão em relação a este conteúdo. Isto demonstra que os conceitos que envolvem o conteúdo de função são muito amplos, e não podem ser caracterizados apenas pela presença de gráficos.

Acreditamos que quando os educandos compreenderem os conceitos envolvidos neste conteúdo, a resolução de funções se tornará mais clara e consistente.

Com a realização do pré e do pós-teste, foi possível observar muitos aspectos importantes ao desenvolvimento de nossa pesquisa. Analisamos que ocorreu uma evolução na imagem conceitual em relação ao conteúdo de função por parte dos estudantes. Aplicamos o pré-teste com a intenção de conhecer as concepções que os estudantes tinham sobre o conceito de função. Com base nas respostas obtidas, iniciamos um trabalho diferenciado com os mesmos, buscando constituir uma aprendizagem consistente através da utilização de jogos matemáticos. Os jogos foram desenvolvidos para que fossem trabalhados os conceitos envolvidos no conteúdo de Função do 1º e do 2º grau.

Os resultados comprovados através da realização do pós-teste corroboram com a concepção de que, pelo intermédio de atividades práticas, e em especial o uso de jogos matemáticos, podemos alcançar melhores resultados em relação à aquisição de conhecimentos por parte dos educandos, pois desta forma os mesmos se sentem motivados a buscar e a adquirir novas aprendizagens a cada dia, desde que se tenha acesso aos jogos, disponibilidade e interesse por parte da escola.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização dessa dissertação nos proporcionou a oportunidade de desenvolvermos junto aos educandos o conceito de Função através de um trabalho lúdico e diferenciado. Subsidiados por um referencial de autores, como Tall, Vinner, entre outros, nos foi possível fortalecer nossas convicções.

As dificuldades encontradas por alunos e professores no processo de ensino-aprendizagem da Matemática são bastante conhecidas. Desta forma, um bom caminho para que estes obstáculos sejam superados é através do emprego do lúdico. O professor deve buscar a avaliação constante do grau de interesse que cada jogo terá para cada criança, ficando atento se eles levarão ou não ao desenvolvimento do raciocínio e da cooperação.

Constatamos por intermédio da pesquisa realizada, que em relação ao conteúdo de Função muitos aspectos são trabalhados, como a fórmula, o gráfico, mas nem todos são compreendidos. A idéia central de Função, bem como os conceitos que estão envolvidos são negligenciados com freqüência. Os educandos não conseguem observar a relação existente entre o gráfico e o processo funcional subentendido. Isto ocorre porque muitas representações gráficas de funções não conciliam com os protótipos mentais que os discentes possuem. Desta forma, os estudantes percebem o gráfico da função como sendo um objeto sem movimento e sem relação com seu aprendizado.

A máquina de função foi introduzida como uma representação visual para o conceito de função tornando a aprendizagem mais expressiva, pois ela opera como um processo de entrada e saída, onde para cada elemento da entrada há uma única saída para ser relacionada. Neste sentido, geramos uma série de jogos para o ensino de matemática, os quais trabalhavam com os educandos diferentes conceitos a cerca do conteúdo de Função.

Através da realização desta pesquisa, foi possível verificar que a máquina de função é uma ferramenta importante que permite aos educandos a obtenção de uma compreensão mais abrangente sobre os conceitos envolvidos no conteúdo de Função. Podemos visualizar a eficácia deste instrumento, analisando os resultados positivos obtidos pelos estudantes na aplicação do pós-teste.

A partir dos resultados obtidos no pré e no pós-teste, verificamos que muitos aspectos importantes referentes a nossa pesquisa obtiveram resultados satisfatórios. Observamos que houve uma evolução conceitual em relação ao conteúdo de Função por parte dos estudantes.

Durante a realização da pesquisa, foi possível constatar as dúvidas e dificuldades dos estudantes em relação ao conteúdo de função. Observamos que os mesmos possuem um maior entendimento com diagramas, e apresentam dificuldades na interpretação de expressões e construção de gráficos.

Com a utilização de jogos matemáticos, os estudantes construíram uma imagem conceitual, visualizando uma função como uma máquina de entrada e saída.

Embora os alunos tenham trabalhado com o conceito de função através de dinâmicas diferenciadas, as dificuldades apresentadas em relação a conteúdos ligados ao conceito de função como números inteiros, frações, entre outros, interferem no pleno entendimento deste assunto.

Acreditamos que através das atividades realizadas ocorreu uma evolução nas imagens conceituais que os discentes possuem em relação ao conteúdo de função; gráficos, expressões, diagramas de correspondência, puderam ser analisadas e discutidas, permitindo que imagens como a de que toda função é representada por gráficos e por linhas retas, pudessem ser modificados.

Esperamos que esta dissertação possa contribuir para futuras pesquisas relacionadas à evolução das imagens conceituais que os discentes possuem em relação ao conteúdo de função e de outros assuntos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AKKOÇ, Hatice; TALL, David. (2002). *The simplicity, complexity and complication of the function concept.* In Anne D. Cockburn & Elena Nardi (Eds), *Proceedings of the 26th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (Norwich, UK).

AKKOÇ, Hatice; TALL, David. (2005). *A Mismatch between Curriculum Design and Student Learning: The Case of the Function Concept*. To be presented at the *British Colloquium of Mathematics Education*, Warwick.

ALMEIDA, Paulo Nunes de. *Dinâmica Lúdica: Jogos Pedagógicos.* São Paulo: Loyola, 1984.

ANDRETTA, Maria; GRASSESCHI, Maria; SILVA, Aparecida. *PROMAT: Projeto oficina de matemática – 8ª série*. São Paulo: FTD, 2002.

ANDRINI, Álvaro; VASCONCELLOS, Maria. *Novo Praticando Matemática – 8ª série.* São Paulo: Editora do Brasil, 2002.

BAKAR, Md Nor; TALL, David. *Students' Mental Prototypes for Functions and Graphs*. Int. J. Math Ed Sci & Techn, 1991.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação Fundamental. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Matemática. Brasília, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. *Parâmetros Curriculares Nacionais:* Ensino Médio. Brasília, 1999.

DANTE, Luiz Roberto. *Tudo é Matemática – 8ª série.* São Paulo: Ática, 2002.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela. *Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática.* Boletim SBEM – SP, Ano 4, nº 7, 1990.

GOLBERT, Clarissa S. *Novos rumos na aprendizagem de matemática*. Porto Alegre: Mediação, 2002.

GOLDENBERG, Mirian. *A arte de pesquisar: como fazer pesquisa qualitativa em Ciências Sociais.* – 8ª ed. – Rio de Janeiro: Record, 2004.

GRANDO, Regina Célia. *O Jogo suas Possibilidades Metodológicas no Processo de Ensino-Aprendizagem da Matemática.* Dissertação (Mestrado em Educação) – UNICAMP, Campinas, 1995.

GROSSI, Esther Pillar. *Novo jeito de ensinar Matemática: começando pela divisão.* Brasília: Centro de Documentação e Informação, 2000.

HUIZINGA, Johan. *Homo Ludens.* Editora Perspectiva S.A. São Paulo: 1999.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; DEGENSZAJN, David e PÉRIGO, Roberto. *Matemática: volume único – 2º grau.* São Paulo: Atual, 1997.

IEZZI, Gelson; DOLCE, Osvaldo; MACAHDO, Antonio. *Matemática e realidade: 8ª série.* – 4ª ed. reform. – São Paulo: Atual, 2000.

KAMII, Constance e DEVRIES, Retha. *Jogos em grupo na educação infantil: Implicações da Teoria de Piaget*. Tradução Marina Célia Dias Carrasqueira. São Paulo: Trajetória Cultural, 1991.

KISHIMOTO, Tizuko M. (org.). *Jogo, brinquedo, brincadeira e a Educação*. 2ª ed.,S.P.: Cortez, 1997.

LARA, Isabel Cristina Machado de. *Jogando com a Matemática.* - 1.ed – São Paulo: Rêspel, 2003.

MACEDO, Lino de; MACEDO, Ana Lúcia S. P.; PASSOS, Norimar Christe. *Aprender com jogos e situações-problema.*Porto Alegre: Artes Médicas Sul, 2000.

RIZZO, Gilda. *Jogos Inteligentes. A Construção do raciocínio na Escola natural.* RJ.: Bertrand Brasil, 1996.

TALL, David. *The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof*. Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: NCTM, 1992.

TALL, David; McGOWEN, Merecedes; DeMAROIS, Phil. *The Function Machine as a Cognitive Root for building a rich concept image of the Function Concept.* Proceedings of PME-NA, 2000-a.

TALL, David; McGOWEN, Merecedes; DeMAROIS, Phil. *Using the Function Machine as a Cognitive Root*. Proceedings of PME-NA, 2000-b.

TALL, David; DeMAROIS, Phil. *Facets and Layers of the Function Concept.* Proceedings of PME 20, Valencia, 1996, vol. 2, 297– 304.

TALL, David. *Concept Image and Concept Definition*. Senior Secondary Mathematics Education, (ed. Jan de Lange, Michiel Doorman), OW&OC Utrecht, 1988, 37– 41.

TALL, David; VINNER, Shlomo. *Concept Image and concept* definition *in Mathematics, with special reference to limits and continuity.* Educational Studies in Mathematics,1981.

APÊNDICE A – Instrumento da Entrevista com alunos do Ensino Médio

ENTREVISTA COM ALUNOS DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

1) Quantos anos você tem?

____

2) Quais são as suas expectativas em relação à disciplina de Matemática?

____

3) Na sua opinião as aulas de Matemática motivam os alunos a buscarem novos conhecimentos?

____

4) Como as aulas de Matemática costumam ser ministradas?

( ) aula expositiva e dialogada
( ) utilização de recursos didáticos
( ) trabalhos individuais ou em grupos
( ) utilizando material impresso ou mimeografado

5) Você costuma estudar além do que lhe é ensinado em aula?

____

6) Quais são os tipos de jogos de sua preferência?

( ) trilha ( ) bingo ( ) quebra-cabeça
( ) baralho ( ) tabuleiro ( ) dominó
( ) outros: ______________________________

7) Dentre os jogos citados abaixo, assinale os que você aprecia:

( ) Banco Imobiliário ( ) Palavras Cruzadas ( ) Detetive
( ) Rebote ( ) War ( ) Imagem e Ação
( ) Perfil ( ) Reversi ( ) Batalha Naval
( ) Master ( ) Damas ( ) Xadrez
( ) Outros: ____________________________

8) Na sua opinião, o uso de jogos matemáticos o motivaria e o ajudaria no estudo da matemática? Justifique a sua resposta.

( ) sim ( ) não ( ) não sei

____

9) Nas suas aulas de Matemática, são utilizados jogos e desafios?

( ) sim ( ) não

10) Com que regularidade?

( ) semanalmente ( ) mensalmente ( ) trimestralmente

11) Você considera importante o uso de jogos e desafios matemáticos nas suas aulas? Por quê?

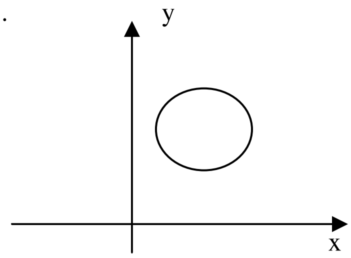
____

APÊNDICE B – Pré-teste e Pós-teste realizado com os alunos

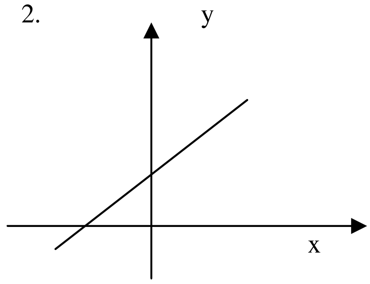
TESTE DE FUNÇÕES

1) Os gráficos abaixo representam funções? Justifique.

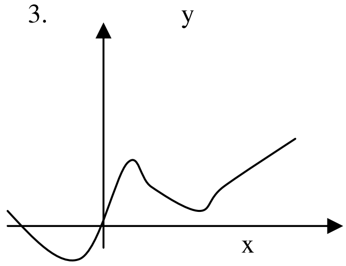
1.



2.



3.

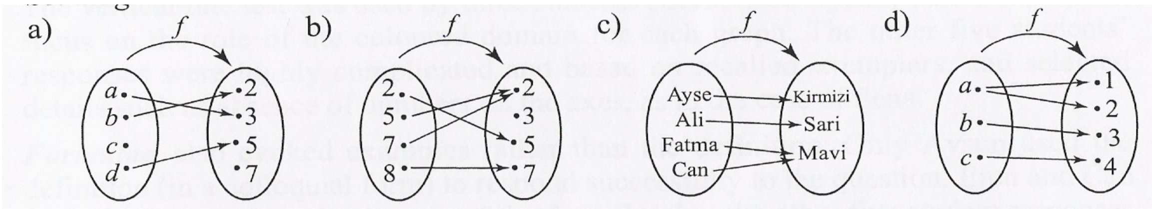


2) O que é uma função?

____

____

3) Os diagramas abaixo representam funções? Justifique.



4) Uma maneira de se pensar numa função é imaginá-la como uma máquina com uma entrada e uma saída.

a) Qual deve ser a saída nesta situação:

Entrada	**Função**	**Saída**
4	Triplica e depois soma 2	?

b) Qual é a função presente nesta situação:

Entrada	**Função**	**Saída**
3	?	12

5) Construa os gráficos das funções:

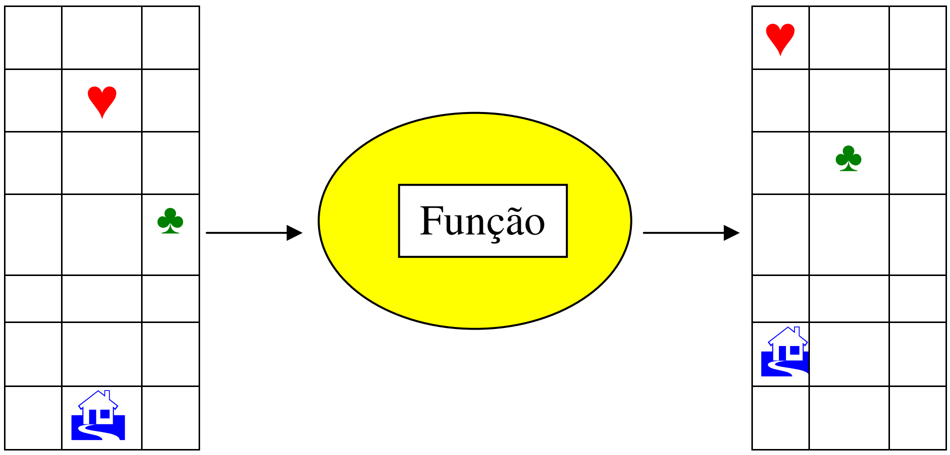
a) $y = x + 2$ b) $y = x^2 + 2x - 3$

APÊNCICE C – Exemplos de exercícios utilizados nos jogos

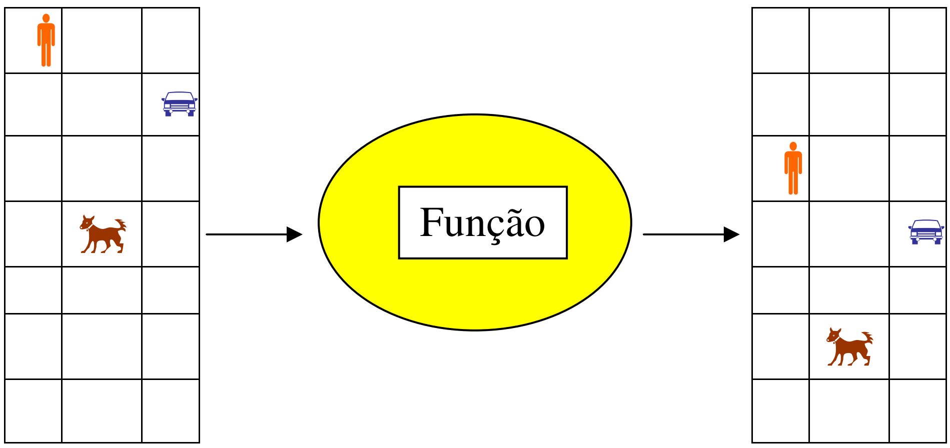
- **Exercícios do jogo: Máquina de Função (desenhos)**

Os exercícios utilizados neste jogo foram criados pela pesquisadora.

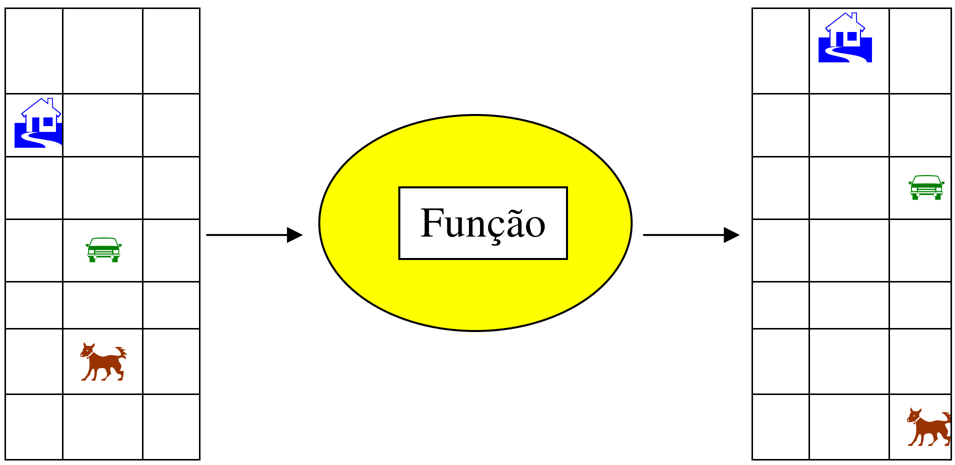
1)



2)



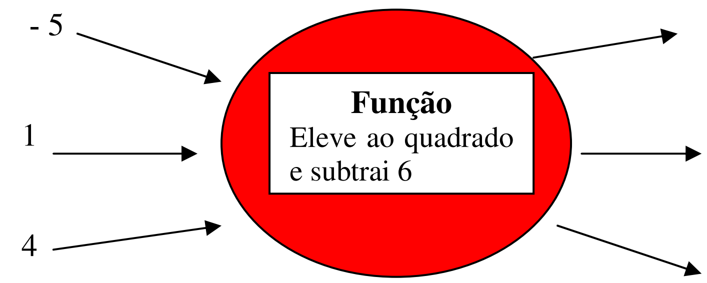
3)



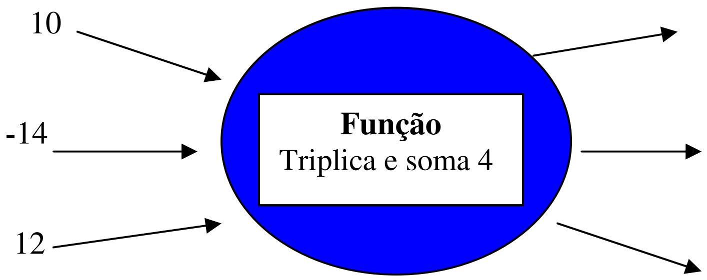
- **Exercícios do jogo: Máquina de Função (descubra a saída)**

Os exercícios utilizados neste jogo foram criados pela pesquisadora.

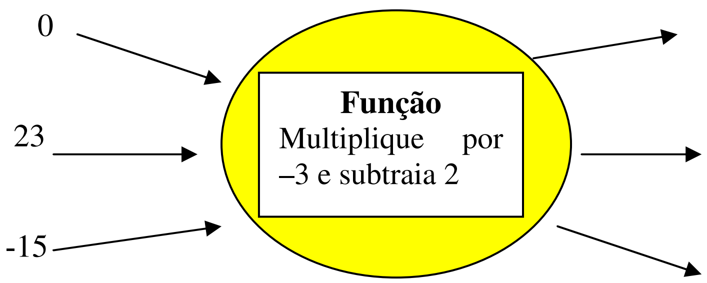
1)



2)

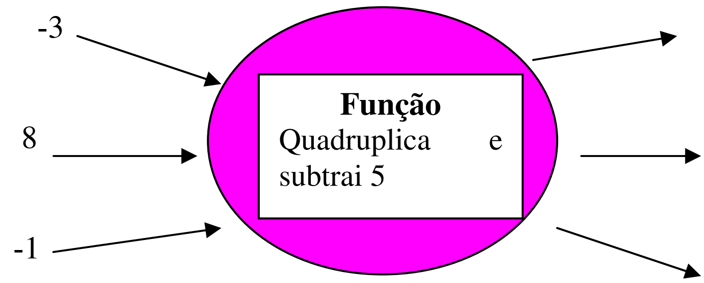


3)

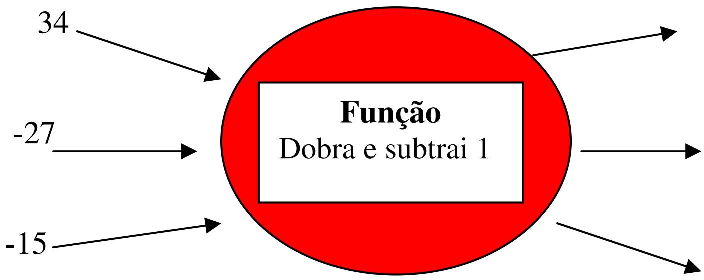


4)

5)


-3
8
-1
Função
Quadruplica e subtrai 5

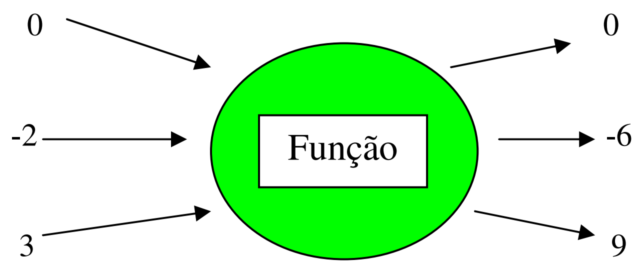
6)


34
-27
-15
Função
Dobra e subtrai 1

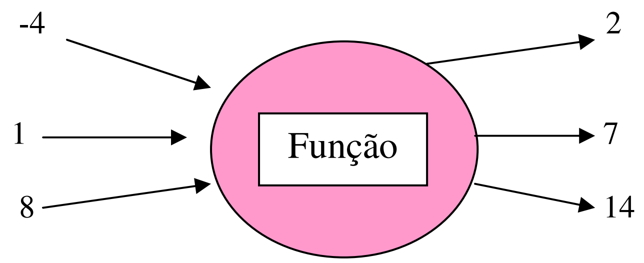
- **Exercícios do jogo: Máquina de Função (descubra a função)**

Os exercícios utilizados neste jogo foram criados pela pesquisadora.

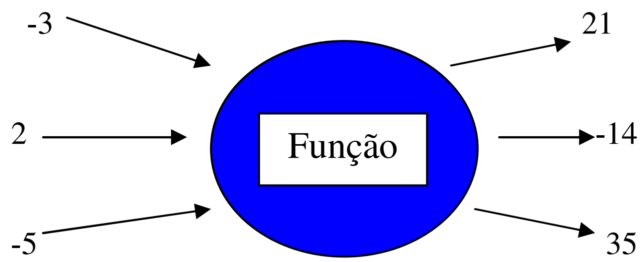
1)



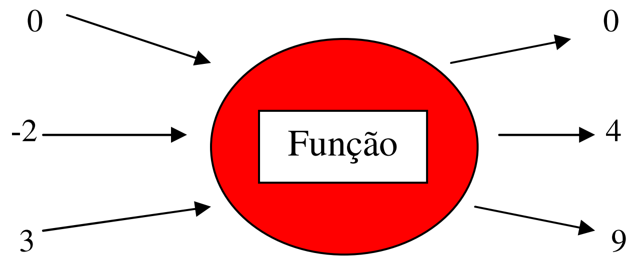
2)



3)



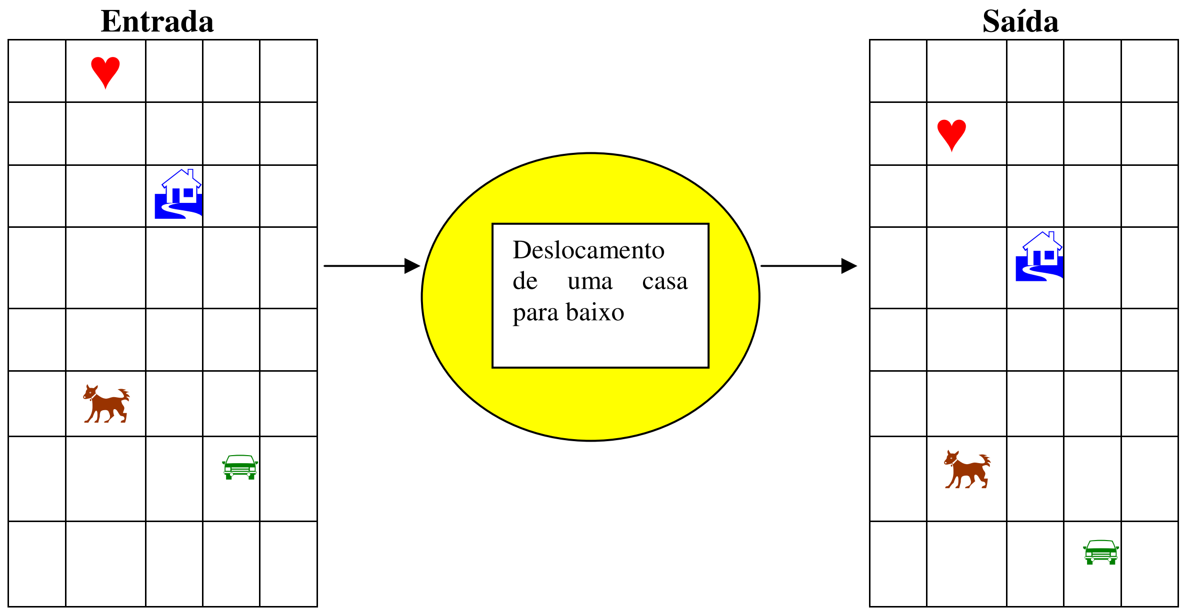
4)



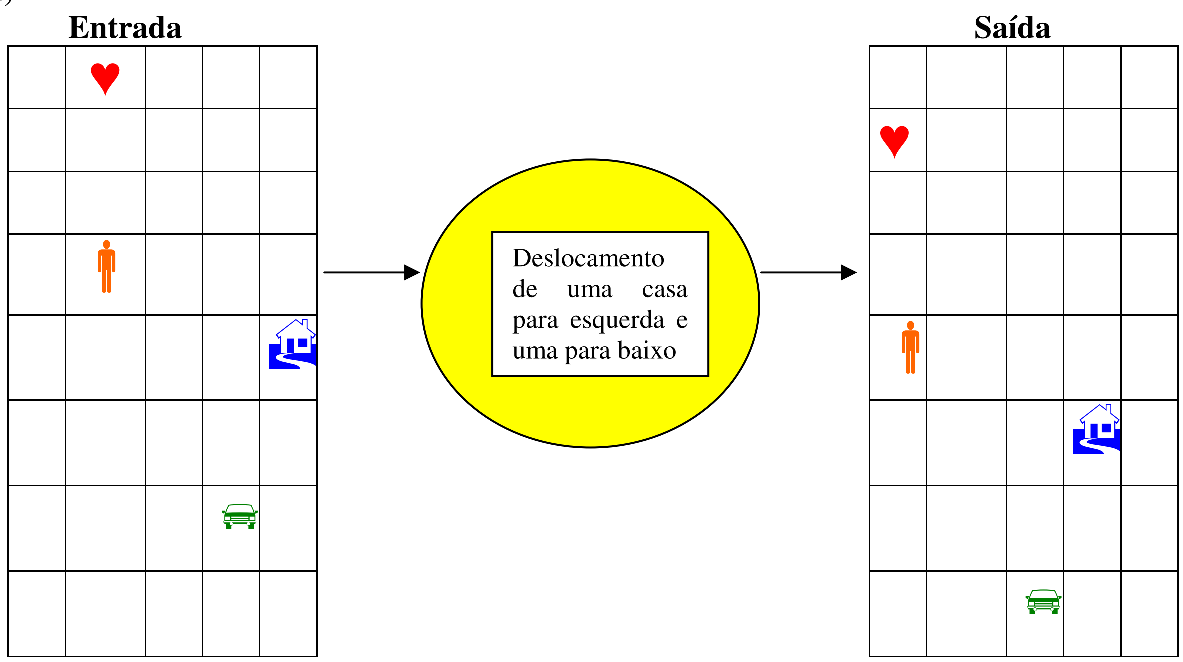
- **Exercícios do jogo: Encaixe Matemático (desenhos)**

Os exercícios utilizados neste jogo foram criados pela pesquisadora.

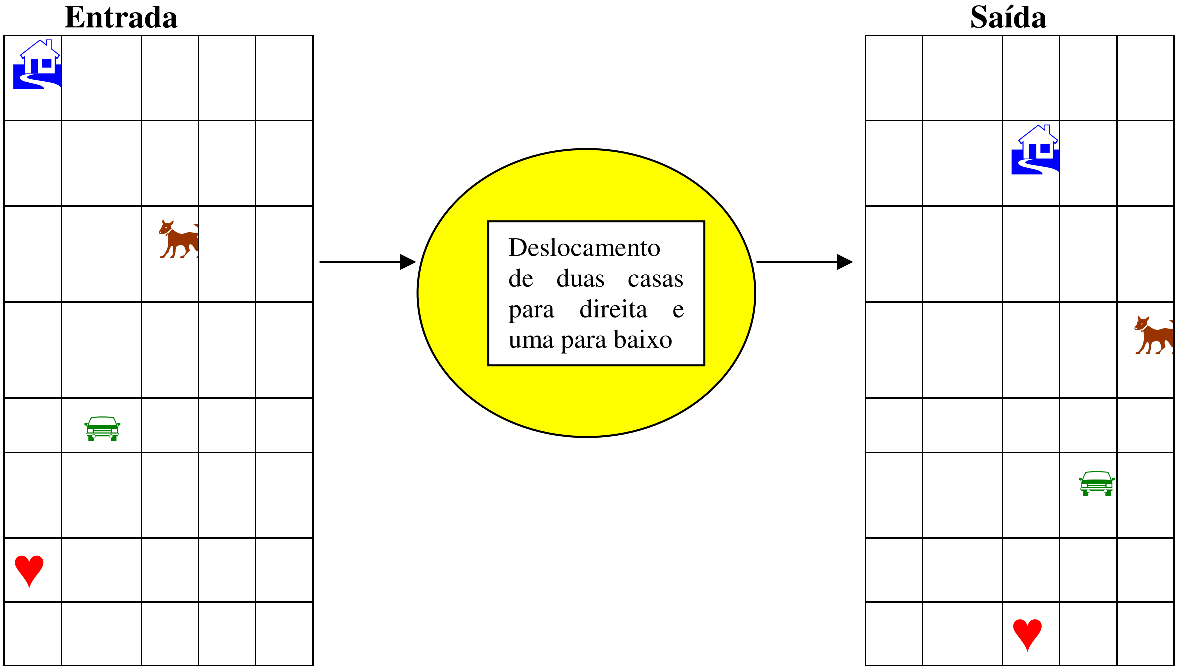
1)



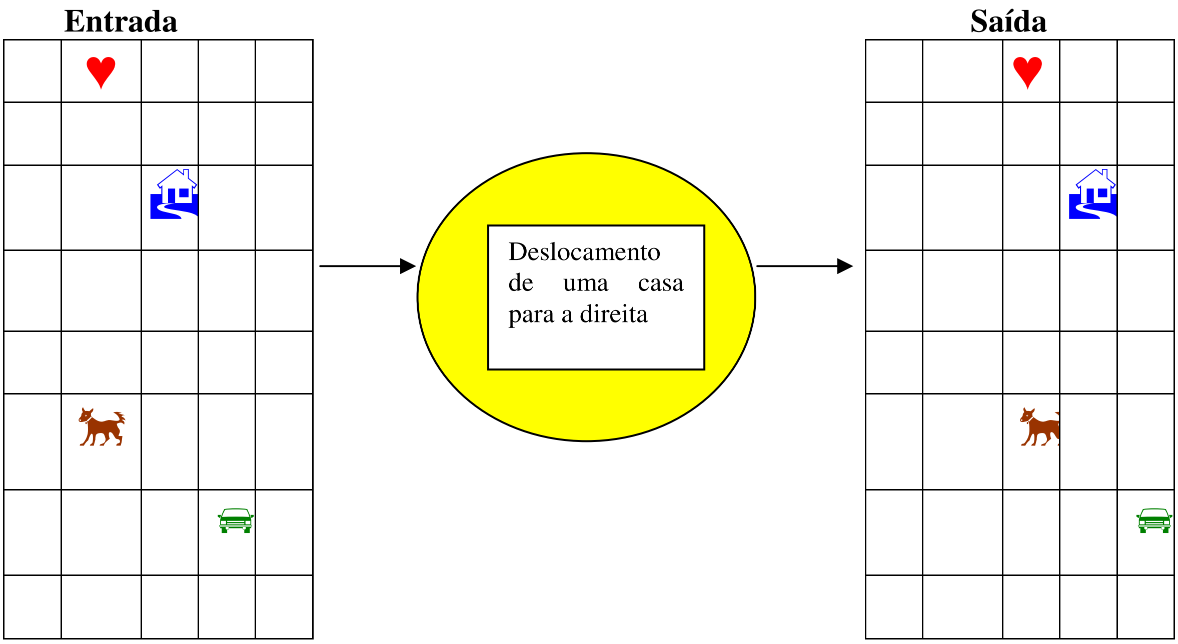
2)



3)


Entrada
Deslocamento de duas casas para direita e uma para baixo
Saída

4)


Entrada
Deslocamento de uma casa para a direita
Saída

- **Exercícios do jogo: Encaixe Matemático (descubra a saída)**

Os exercícios utilizados neste jogo foram criados pela pesquisadora.

1)

Entrada	**Função**	**Saída**
7		19
12	Multiplica por 2 e adiciona 5	29
-3		-1
5		15

2)

Entrada	**Função**	**Saída**
1		-7
0	Eleva ao quadrado e subtrai 8	-8
8		56
15		217

3)

Entrada	**Função**	**Saída**
25		2
36	Coloca na raíz quadrada e subtrai 3	3
9		0
121		8

4)

Entrada	**Função**	**Saída**
-43		-254
½	Multiplica por 6 e adiciona 4	7
4		28
9		58

- **Exercícios do jogo: Encaixe Matemático (descubra a função)**

Os exercícios utilizados neste jogo foram criados pela pesquisadora.

1)

Entrada	Função	Saída
0		4
3	Dobra e adiciona 4	10
2		8
6		16

2)

Entrada	Função	Saída
-1		-4
2	Eleva ao quadrado e subtrai 5	-1
4		11
7		44

3)

Entrada	Função	Saída
-5		-1
0	Triplica e adiciona 14	14
3		23
-1		11

4)

Entrada	Função	Saída
-7		57
0	Eleva ao quadrado e adiciona 8	8
14		204
2		12

- **Exercícios do jogo: Jogo da Velha**

Os exercícios utilizados neste jogo encontram-se nos livros de Andrini (2002) e Dante (2002).

A1	Constrói o gráfico da função: $y = 1 - 5x$
A2	O preço a ser pago por uma corrida de táxi inclui uma parcela fixa, denominada *bandeirada*, e uma parcela que depende da distância percorrida. Se a bandeirada custa R$ 3,44 e cada quilômetro rodado custa R$ 0,86, calcule: a) O preço de uma corrida de 11 Km; b) À distância percorrida por um passageiro que pagou R$ 21,50 pela corrida.
A3	Para produzir um objeto, uma firma gasta R$ 1,20 por unidade. Além disso, há uma despesa fixa de R$ 4000,00, independente da quantidade produzida. O preço de venda é de R$ 2,00 por unidade. Qual o número de unidades que o fabricante deve vender para não ter lucro nem prejuízo?
A4	Constrói o gráfico da função: $y = x^2 - 4x - 12$
B1	Determine o vértice da função: $y = x^2 - 4x + 3$
B2	Em uma promoção, uma editora está vendendo vários livros a R$12,00 cada um, e cobrando uma taxa de R$5,00 pela entrega.Dessa forma, a expressão $P = 12x + 5$ permite calcular o preço a ser pago P, em reais, pela compra de x unidades desses livros. Se uma pessoa pagou R$137,00 pela compra de livros dessa promoção, quantos livros ela comprou?
B3	Constrói o gráfico da função: $y = 2x - 4$
B4	Determine o zero da seguinte função: $y = -x + 10$
C1	Constrói o gráfico da função: $y = x + 3$
C2	Determine o zero da seguinte função: $y = 2x + 3$
C3	Determine o zero da seguinte função: $y = 5x$
C4	Constrói o gráfico da função: $y = x^2 + 2x + 6$
D1	Constrói o gráfico da função: $y = x^2 - 10x + 9$
D2	Constrói o gráfico da função: $y = x^2 + 6x$
D3	Determine o vértice da função: $y = x^2 - 8x + 15$
D4	Constrói o gráfico da função: $y = -3x + 2$

- **Exercícios do jogo: Trevo da Sorte**

Os exercícios utilizados neste jogo encontram-se nos livros de Andretta (2002) e Iezzi (2000).

1) Ângelo é digitador e recebe R$ 0,35 por página digitada.
a) Escreva a lei de formação da função que representa o salário de Ângelo.
b) A despesa fixa mensal de Ânelo é de R$ 195,30. Quantas páginas ele precisa digitar para cobrir essas despesas?

2) Laércio tem um trator e presta serviço a R$ 25,00 por hora trabalhada. O custo fixo mensal com o salário do tratorista é de R$ 300,00.
a) Escreva a lei de formação da função que representa quanto Laércio fatura menslmente em função do número de horas trabalhadas.
b) Quantas horas por mês o trator precisa ser alugado para pagar o salário do tratorista?

3) Celisa é gerente de um cinema e uma vez por mês oferece como brinde os 10 primeiros ingressos vendidos em cada sessão. O valor de cada ingresso é de R$ 4,00. Escreva a lei de formação dessa função que representa o faturamento do cinema com a quantidade dos ingressos vendidos.

4) Para encher o tanque de certo automóvel são necessários 52 litros de combustível. O preço de cada litro é de R$ 0,60.
a) Quanto se paga para encher o tanque, estando ele vazio?
b) Qual é a quantia y em reais a ser paga quando se colocam x litros de combustível no tanque?

5) Na confecção de certo produto, a fábrica MGO Ltda. Tem o custo fixo de R$ 100 000,00 e mais um custo de R$ 50,00 por undade produzida.
a) Qual é a fórmula do custo y (em reais) para produzir unidades?
b) Qual é o custo para produzir 10 000 unidades?

6) Numa prova, um aluno deve responder a 50 testes do tipo verdadeiro ou falso. Para cada teste respondido corretamente o aluno vai ganhar 3 pontos, e para cada teste que errar vai perder 1 ponto. A nota do aluno é função do número de testes que ele acertar. Escreva a fórmula dessa função.

7) Os participantes de uma gincana recebem 7 pontos para cada tarefa cumprida. Há ainda um bônus de 20 pontos pela participação na gincana. O total de pontos é dado em função do número de tarefas cumpridas. Escreva a lei de formação dessa função.

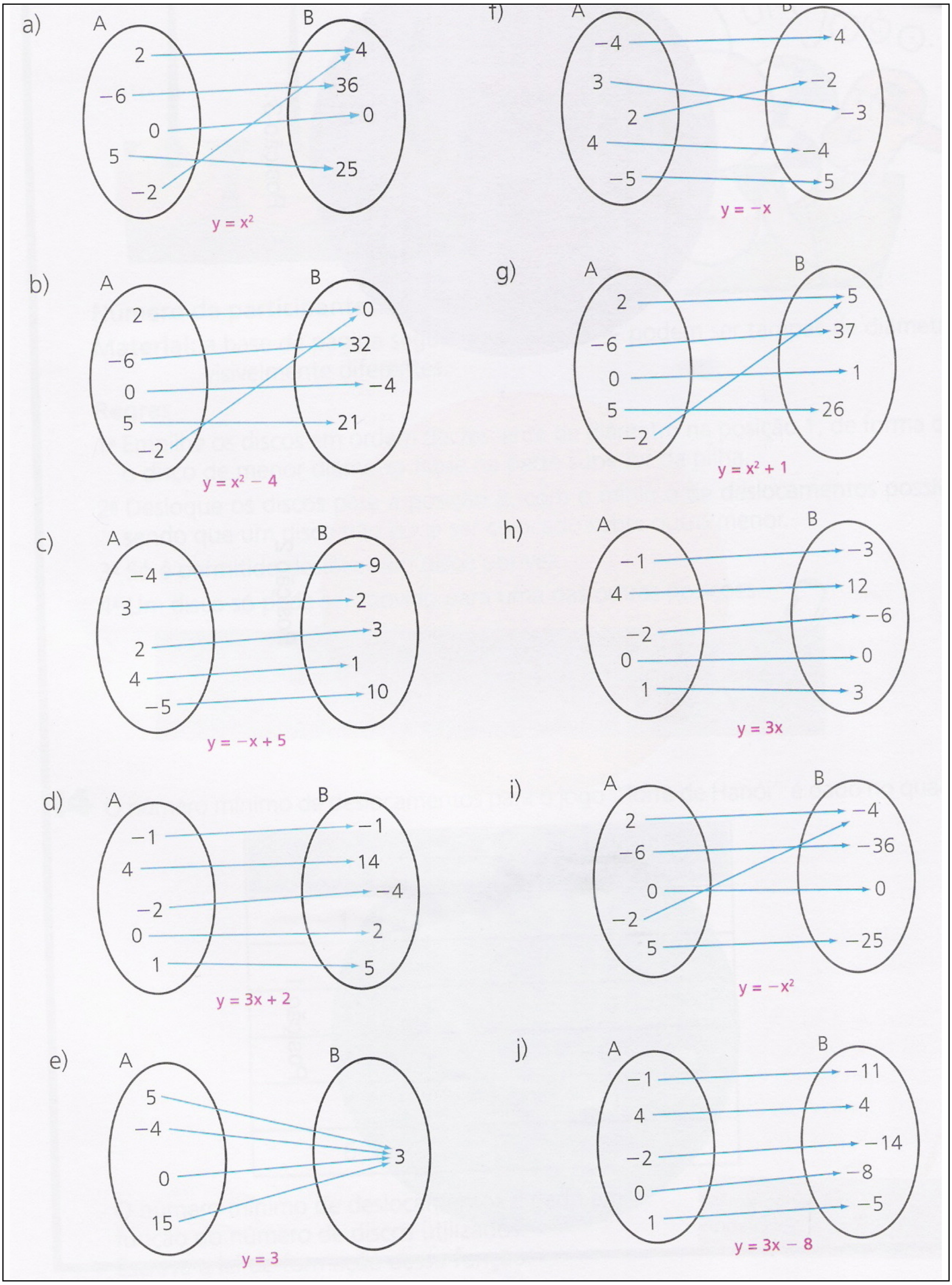
- **Exercícios do jogo: Dorminhoco Matemático**

Os exercícios utilizados neste jogo foram criados pela pesquisadora.

FUNÇÃO	ZERO DA FUNÇÃO	GRÁFICO
$y = x + 5$	-5	
$y = -3x + 1$	1/3	
$y = x^2 - 4x$	0 e 4	
$y = x^2 - 2x - 3$	3 e -1	

- **Exercícios do jogo: Envelopes Matemáticos**

Os exercícios utilizados neste jogo encontram-se no livro de Andretta (2002).



- **Exercícios do jogo Pino Vivo**

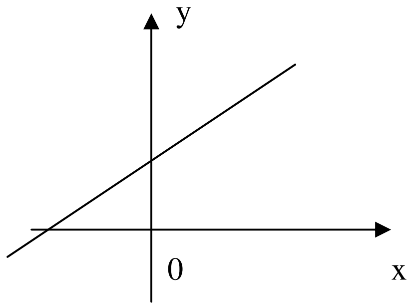
Os exercícios utilizados neste jogo encontram-se no livro de Iezzi (1997).

- Nível fácil

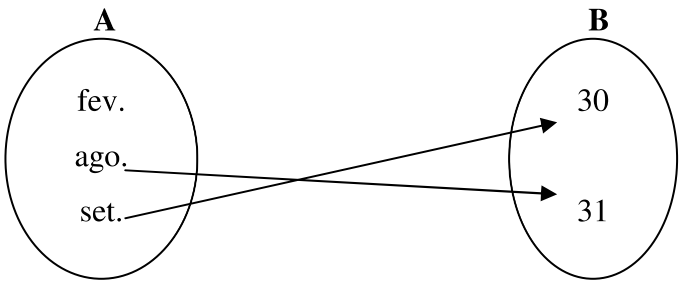
1) Escreva a expressão que relaciona as variáveis x e y:

x	**y**
3	5
4	7
6	11
10	19
15	29

2) O gráfico representa uma função?



3) O diagrama representa uma função de A em B?



- Nível médio

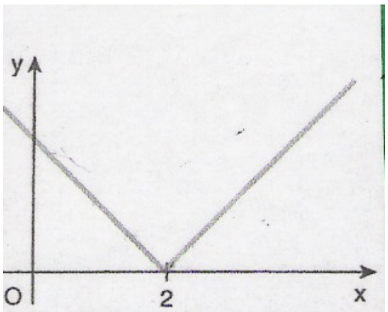
1) Dada à função $y = x^2 - 4$, determine o valor de y para $x = -8$.

2) Qual é o domínio da função: $f(x) = 5x + 1$.

3) Considerando a função $y = 1 - 2x$, para que valor de x se tem $y = -15$?

- Nível difícil

1) Especifique os intervalos em que a função é crescente, decrescente ou constante.



2) Qual o domínio da função:

$$f(x) = \frac{1}{x-1}$$

3) Determine a imagem da função representada pelo gráfico.