

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
DIRETORIA ACADÊMICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA



DOUGLAS FONSECA MACHADO

O APRENDIZADO DE ISOMETRIAS COM A
CONSTRUÇÃO DE MOSAICOS

Canoas, 2025

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
DIRETORIA ACADÊMICA

PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E
MATEMÁTICA



DOUGLAS FONSECA MACHADO

O APRENDIZADO DE ISOMETRIAS COM A CONSTRUÇÃO DE MOSAICOS

Dissertação apresentada no Programa de Pós- Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientador: Agostinho Iaquan Ryokiti Homa

Canoas, 2025

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

M149a

Machado, Douglas Fonseca

O aprendizado de isometrias com a construção de mosaicos. / Douglas Fonseca Machado. – Canoas, 2025.
129 p. : il.

Dissertação (Mestrado) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Pró-Reitoria Acadêmica, Universidade Luterana do Brasil.

Orientador: Prof. Dr. Agostinho Iaquan Ryokiti Homa

1. Educação. 2. Matemática - Ensino. 3. Geometria.
4. Transformações (Matemática). 5. Isometria (Matemática).
I. Homa, Agostinho Iaquan Ryokiti. II. Título.

CDD 23. ed. 372.76

Ficha elaborada pela bibliotecária Anamaria Ferreira CRB 10/1494

DOUGLAS FONSECA MACHADO

O APRENDIZADO DE ISOMETRIAS COM A CONSTRUÇÃO DE MOSAICOS

Dissertação apresentada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Data de Aprovação:

BANCA EXAMINADORA

Prof(a). Dr(a). Claudia Lisete Groenwald
Universidade Luterana do Brasil - ULBRA

Prof(a). Dr(a). Carmen Teresa Kaiber
Universidade Luterana do Brasil - ULBRA

Prof(a). Dr(a). Fabiana Caldeira Damasco
Universidade Luterana do Brasil - ULBRA

Prof(a). Dr(a). Agostinho Iaquan Ryokiti Homa (Orientador(a))
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA

DEDICATÓRIA

Dedico o presente trabalho à minha Mãe, que me forneceu suporte para me dedicar aos estudos e sempre valorizou e incentivou a minha busca pelo conhecimento; aos professores que atuam diariamente na linha de frente da educação, sempre buscando possibilitar o acesso ao conhecimento de forma democrática.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus, por me proteger e abençoar minha família durante o percorrer de minha trajetória acadêmica.

A minha mãe, que me incentivou a buscar o aprofundamento de meus conhecimentos na área da Educação Matemática, que sempre me interessou desde jovem.

Ao Programa de Pós-graduação de Ensino em Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil, que possibilitou a realização de minha pesquisa. Especificamente ao Professor Dr. Agostinho Iaquan Ryokiti Homa, pela sua orientação e auxílio na organização e elaboração desta pesquisa.

Sou grato aos membros da banca examinadora desta pesquisa, Dra. Claudia Lisete Groenwald, Dra. Carmen Teresa Kaiber e Dra. Fabiana Caldeira Damasco, que, com suas colocações pertinentes, favoreceram a pesquisa auxiliando em sua estruturação.

Sou grato aos membros do programa de pós-graduação por proporcionarem, além de informações importantes para pesquisa, momentos felizes que auxiliaram a tornar o trajeto acadêmico mais leve e agradável. Em particular aos colegas: Ana Carolina, Lucca e Luiza, que me apoiaram sempre que foi preciso.

EPÍGRAFE

“Muitas coisas não ousamos empreender por parecerem difíceis; entretanto, são difíceis porque não ousamos empreendê-las.”

Sêneca.

RESUMO

Esta pesquisa investiga as contribuições de uma sequência didática envolvendo tesselações e mosaicos para o aprendizado de isometrias no Ensino Fundamental. Fundamentada na Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau, a investigação caracteriza-se como estudo de caso qualitativo, realizado com estudantes do 8º ano de uma escola pública de Porto Alegre, Rio Grande do Sul. A coleta de dados ocorreu mediante observação das interações dos alunos com o meio didático e análise de suas produções escritas durante quatro atividades progressivas. O referencial teórico articulou a TSD com aspectos da sequência didática propostos por Zabala, considerando conteúdos conceituais, procedimentais e atitudinais. Os resultados indicam que a estruturação do meio didático favoreceu o desenvolvimento de situações adidáticas (ação, formulação e validação), permitindo aos estudantes a construção de significados para as isometrias, transitando da linguagem coloquial para a formalização matemática durante a institucionalização. A manipulação de materiais concretos, como peças de acetato transparente contendo módulos de mosaicos, revelou-se elemento significativo para proporcionar retroações do meio educacional. A análise das produções dos estudantes evidenciou que, mesmo sem formação matemática prévia sobre isometrias, eles foram capazes de desenvolver algoritmos de construção de mosaicos, identificando e descrevendo os movimentos necessários antes mesmo da formalização dos conceitos. O estudo demonstra o potencial da organização sistemática de situações didáticas no ensino de transformações geométricas quando contextualizado por meio de elementos visuais e artísticos.

Palavras-chaves: Isometrias; Mosaicos; Teoria das Situações Didáticas; Ensino de Geometria; Transformações Geométricas

ABSTRACT

This research investigates the contributions of a didactic sequence involving tessellations and mosaics for learning isometries in Elementary Education. Based on Brousseau's Theory of Didactical Situations (TDS), the investigation is characterized as a qualitative case study, conducted with 8th grade students from a public school in Porto Alegre, Rio Grande do Sul. Data collection occurred through observation of student interactions with the didactic environment and analysis of their written productions during four progressive activities. The theoretical framework articulated TDS with aspects of the didactic sequence proposed by Zabala, considering conceptual, procedural, and attitudinal contents. Results indicate that structuring the didactic environment favored the development of didactical situations (action, formulation, and validation), allowing students to construct meanings for isometries, transitioning from colloquial language to mathematical formalization during institutionalization. The manipulation of concrete materials, such as transparent acetate pieces containing mosaic modules, proved to be a significant element in providing feedback from the educational environment. Analysis of student productions showed that, even without prior mathematical training on isometries, they were able to develop algorithms for constructing mosaics, identifying and describing the necessary movements before the formalization of concepts. The study demonstrates the potential of systematic organization of didactic situations in teaching geometric transformations when contextualized through visual and artistic elements.

Keywords: isometries; mosaics; Theory of Didactical Situations; geometry teaching; geometric transformations.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - BNCC Matemática - Objetos de Conhecimento e Habilidades.	18
Figura 2 - Critério para o levantamento das pesquisas com a temática	20
Figura 3 - Resultados da busca.....	20
Figura 4 - Trabalhos Selecionados para a Revisão.....	21
Figura 5- Estrutura hierárquica das situações didáticas	35
Figura 6 - Situação de Ação	36
Figura 7 - Situação de Formulação	37
Figura 8 - BNCC Matemática - Objetos de Conhecimento e Habilidades.	40
Figura 9 - Representação Figural da Reflexão.....	41
Figura 10 - Reflexão de Figura Geométrica	42
Figura 11 - Demonstração da Simetria de Translação	42
Figura 12 - Isometria de Translação.....	43
Figura 13 - Rotação de X	43
Figura 14 - Rotação de Figura a partir de seu centro – Antes e Depois.....	44
Figura 15 - BNCC Artes: Objetos de Conhecimentos e Habilidades	45
Figura 16 - Repteis Escher.....	47
Figura 17 - Construção Mosaico Por Translação	48
Figura 18 - Figuras Espelhadas para construção de Mosaico.....	48
Figura 19 - Rotação do Módulo X em 120°	49
Figura 20 - Tentativa de Mosaico com Pentágono.	50
Figura 21 - Molde para recorte das peças de acetato.	55
Figura 22 - Padrões geométricos utilizados na atividade	58
Figura 23 - Questões no final da atividade	59
Figura 24 - Mosaicos da Atividade 2	60
Figura 25 - Primeira Parte da Atividade	62
Figura 26 - Exemplo de Algoritmo	63
Figura 27 - Seções complementares do Livro	69
Figura 28 - Conceito das isometrias apresentado pelo livro.....	70
Figura 29 - Atividades do Livro Didático.....	70
Figura 30 - Ações Realizadas pelos Estudantes	72
Figura 31 - Atividade 1: Estratégias do Estudante A	74
Figura 32 - Atividade 1: Estratégias do Estudante B	75

Figura 33 - Manipulação das Peças de Acetato	79
Figura 34 - Algoritmo Construído – Estudante A	81
Figura 35: - “Reflexão” apresentada pelo estudante A.....	81
Figura 36 - Algoritmo de Movimentos do Estudante E	82
Figura 37 - Mudança de linguagem (Estudante A).....	86
Figura 38 - Comparação Estudante D.....	89
Figura 39 - Transformações de Rotação do Estudante D.	90

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	14
2	A PESQUISA: ASPECTOS BÁSICOS.....	17
2.1	OBJETIVO GERAL	19
2.1.1	Objetivos Específicos	19
3	REVISÃO DE LITERATURA	20
4	SEQUÊNCIAS DE ENSINO APRENDIZAGEM E A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS.....	30
4.1	A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS DE GUY BROSSEAU.....	32
4.2	DEFINIÇÃO E ABORDAGEM PEDAGÓGICA SOBRE AS ISOMETRIAS..	39
4.3	INTEGRAÇÃO DA MATEMÁTICA COM ARTES.....	44
4.3.1	Tesselações e Mosaicos	46
5	MATERIAIS E MÉTODO	52
5.1	AS ATIVIDADES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA.....	56
5.1.1	Primeira Atividade: Introdução aos Mosaicos.....	57
5.1.2	Segunda Atividade: Repetição de Padrões	59
5.1.3	Terceira Atividade: Formalização das Isometrias	62
5.1.4	Quarta Atividade: Formalização e Avaliação dos Conceitos	64
6	RESULTADOS E DISCUSSÃO.....	66
6.1	ABORDAGEM DAS ISOMETRIAS NO LIVRO DIDÁTICO	68
6.2	PRIMEIRA ATIVIDADE E O RECONHECIMENTO DAS REGRAS DE FORMAÇÃO DE PADRÕES GEOMÉTRICOS REGULARES	71
6.3	SEGUNDA ATIVIDADE E ORGANIZAÇÃO DOS ALGORITMOS DE CONSTRUÇÃO DOS PADRÕES GEOMÉTRICOS	78
6.4	TERCEIRA ATIVIDADE E A TRANSFORMAÇÃO DA LINGUAGEM NATURAL PARA A LINGUAGEM MATEMÁTICA.....	84
6.5	QUARTA ATIVIDADE E CONSOLIDAÇÃO DOS CONCEITOS DE ISOMETRIA.....	88
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	92
	APÊNDICES	100
	APÊNDICE A – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA.....	101
	APÊNDICE B – FOLHA DE ATIVIDADES: PRIMEIRA ATIVIDADE	104
	APÊNDICE C – FOLHA DE ATIVIDADES: SEGUNDA ATIVIDADE	106
	APÊNDICE D – FOLHA DE ATIVIDADES: TERCEIRA ATIVIDADE	110

APÊNDICE E – FOLHA DE ATIVIDADES: QUARTA ATIVIDADE	113
APÊNDICE F – MOLDES DE IMPRESSÃO EM ACETATO	117
APÊNDICE G – PRIMEIRA ATIVIDADE: TESSELAÇÕES PARA RECORTAR	120
APÊNDICE H – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	122
TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	122
APÊNDICE I – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO	125
ANEXOS	127

1 INTRODUÇÃO

A aplicação da matemática sem contextualização é uma realidade comum de se observar em sala de aula. Ausência que é aparente no ensino de Geometria no ensino básico, no qual o foco recai nos cálculos e manipulações algébricas (Vicente, 2022) desconsiderando sua aplicação. Os estudos de Pavanello (1993) já documentavam o gradual abandono do ensino da geometria nas escolas brasileiras, muitos professores, sentindo-se inseguros para trabalhar com a geometria, optavam por não a incluir em suas programações ou a relegavam ao final do ano letivo, frequentemente não conseguindo abordá-la por "falta de tempo". Este cenário, embora observado há décadas, lançou bases para compreender desafios que ainda encontramos no ensino atual.

Contudo, quando presente, a geometria era frequentemente apresentada apenas como "um conjunto de definições, propriedades, nomes e fórmulas, desligado de quaisquer aplicações ou explicações de natureza histórica ou lógica" (Lorenzato, 1995, p.4). Essa percepção muitas vezes é transposta devido a própria percepção do docente quanto a geometria, pela sua falta de preparo nos conceitos, não vê a importância da geometria para formação do discente.

A implementação da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018) representou um avanço significativo ao reafirmar a importância da geometria no currículo escolar. Ela estabelece diretrizes que enfatizam o desenvolvimento do pensamento crítico e analítico dos estudantes. Na BNCC, para o ensino da Geometria é recomendado que os professores proporcionem caminhos para que os estudantes desenvolvam o seu pensamento geométrico de forma com que possam identificar padrões, reconhecer propriedades, figuras geométricas e desenvolver argumentações lógicas convincentes (Brasil, 2018).

Ainda assim, apesar desses avanços curriculares, pesquisas recentes como a de Frantz e Bisognin (2022) demonstram que os desafios persistem na prática docente. Apesar do caráter normativo da BNCC, seu estudo também documenta relatos de professores que ainda encontram dificuldades para transmitir a Geometria de forma adequada ao currículo. Entende-se que, mesmo com as novas diretrizes, a presença e contextualização da geometria continua sendo um desafio no cenário atual. Assim conclui-se que a partir dos indícios sobre o ensino de geometria, implica-

se que são necessárias pesquisas e abordagens diferentes que busquem alternativas para o processo de ensino e aprendizagem da Geometria.

Dessa forma, a partir de estudos anteriores à atual dissertação, percebe-se como alternativa o desenvolvimento da Geometria de forma integrada e contextualizada. Essa abordagem se concretiza pela apresentação desses conceitos incorporados às Artes, considerando o viés histórico onde ambas as áreas tradicionalmente seguem unidas. Fainguelernt e Nunes, (2006) apontam que essa integração possibilita deixar de lado a aprendizagem da Geometria a partir da repetição de técnicas e desenvolver o aprendizado desses conceitos a partir da criação.

O presente estudo visa investigar as contribuições de uma sequência didática envolvendo mosaicos para o aprendizado das isometrias. (transformações geométricas de translação, reflexão e translação), acredita-se que a integração de atividades com mosaicos, para o aprendizado das isometrias, possa promover um ensino contextualizado, significativo e motivador, contribuindo efetivamente para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes. Dessa forma, o objetivo desta dissertação é o de investigar as contribuições de uma sequência didática envolvendo tesselações e mosaicos para o aprendizado dos conceitos de isometrias.

Mosaicos são criações artísticas que utilizam da repetição de padrões para a construções de figuras. Muitos mosaicos são desenvolvidos estabelecendo tipos de um padrão e utilizando de uma ou mais isometrias para a sua construção (Imenes; Lellis, 2000). Um dos pioneiros na utilização das isometrias em suas obras é Maurits Cornelius Escher, artista que inspirado pelas artes geométricas árabes, utilizou de seus conhecimentos matemáticos para construir diversos mosaicos.

Presume-se então que abordar conceitos geométricos por meio da Arte propicia não apenas o desenvolvimento de habilidades matemáticas específicas, mas também o cultivo da percepção estética, do imaginário, da capacidade de simbolizar e do repertório imagético dos estudantes, conforme preconizado pela BNCC para a área de Artes (Brasil, 2018). Essa abordagem interdisciplinar possibilita a contextualização dos conhecimentos geométricos, podendo torná-los atraentes e significativos.

A partir dessas premissas, se desenvolve o objetivo desta dissertação, que é o de investigar as contribuições de uma sequência didática, combinando Matemática e Artes Visuais para a aprendizagem das isometrias (reflexão, translação e rotação)

por meio da construção e análise de mosaicos, esta abordagem busca não apenas a compreensão conceitual das isometrias, mas também sua apreciação estética e aplicação prática.

Para a elaboração da sequência didática foi realizado um levantamento sistemático de pesquisas sobre o ensino das isometrias no contexto educacional brasileiro. A partir da análise de trabalhos recentes que integravam Matemática e Arte no ensino de transformações geométricas, foram identificadas abordagens metodológicas significativas e recursos didáticos potencialmente eficazes. Este processo investigativo fundamentou a construção de atividades que incorporam elementos artísticos, manipulação de materiais concretos e visualização geométrica, seguindo princípios da Teoria das Situações Didáticas (TSD). A escolha deste referencial teórico possibilita avaliar o desenvolvimento da aprendizagem ao proporcionar situações desafiadoras e instigantes, nas quais os estudantes são estimulados a construir ativamente seu conhecimento matemático através de interações significativas com o meio didático.

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (2008) fundamenta metodologicamente a sequência didática proposta nesta pesquisa. Para Zabala, (1998, p. 18), sequências didáticas podem ser compreendidas como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos". Esta abordagem teórica oferece um modelo estruturado que contempla diferentes momentos do processo de aprendizagem. Ao adotar este referencial, busca-se criar um ambiente educacional onde o saber matemático emerge das interações dos estudantes com meios didáticos cuidadosamente planejados, favorecendo o desenvolvimento da autonomia intelectual e do pensamento geométrico.

A presente dissertação está estruturada com o segundo capítulo detalhando os aspectos básicos da pesquisa e apresenta a proposta da sequência didática. O terceiro capítulo trata de uma revisão bibliográfica sobre os principais estudos voltados para o ensino e aprendizagem de isometrias e integrando a Matemática e as Artes. O quarto capítulo apresenta o referencial teórico que fundamenta a pesquisa. O quinto capítulo apresenta a metodologia a ser adotada na pesquisa. O sexto e sétimo capítulo fornecem respectivamente os dados sobre a pesquisa e as considerações finais.

2 A PESQUISA: ASPECTOS BÁSICOS

Neste tópico são apresentadas as informações referentes a pesquisa que visa analisar o processo de ensino aprendizagem das isometrias (reflexão, translação e rotação), que são conceitos estudados na Geometria em todos os Anos Finais do Ensino Fundamental. Como uma das grandes áreas da Matemática, a Geometria tem atenção específica na Base Nacional Comum Curricular (BNCC), área responsável pela formação de conjecturas e processos que são necessários para resolução de problemas do mundo físico (Brasil, 2018). Entretanto, a forma com que a Geometria é abordada na educação costuma possuir enfoque na abstração simples dos seus tópicos, sem contextualização aprofundada sobre estes assuntos, abordando registros algébricos e numéricos e dificilmente desenvolvendo o pensamento geométrico nestas abordagens,

[...] o ensino de Geometria vem sendo arrimado quase que exclusivamente em cálculos, deixando esse conteúdo preso em fórmulas e aplicações a resoluções de exercícios sobre área, perímetro e volume (Vicente, 2022, p.45).

É compreendido que na Geometria utiliza-se a Álgebra e Aritmética na resolução de atividades que auxiliam a sua compreensão durante Ensino Básico mas

[...] a Geometria não pode ficar reduzida a mera aplicação de fórmulas de cálculo de área e de volume nem a aplicações numéricas imediatas de teoremas sobre relações de proporcionalidade em situações relativas a feixes de retas paralelas cortadas por retas secantes ou do teorema de Pitágoras (Brasil, 2018, p. 272)

A BNCC estabelece que o ensino de Matemática deve contemplar cinco unidades temáticas durante o Ensino Fundamental: Números, Álgebra, Geometria, Grandezas e Medidas, e Probabilidade e Estatística (Brasil, 2018). Especificamente em relação à Geometria, a Base destaca que seus objetos de conhecimento e habilidades devem ser desenvolvidos de forma integrada e contextualizada com os estudantes do Ensino Básico, conforme apresentado na Figura 1.

Figura 1 - BNCC Matemática - Objetos de Conhecimento e Habilidades

Ano do Ensino Básico	Objeto de Conhecimento	Habilidades
6º Ano – Anos Finais	Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados.	(EF06MA18) Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. (EF06MA19) Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos.
7º Ano – Anos Finais	Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem	(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro. (EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
	Simetrias de translação, rotação e reflexão	(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros
8º Ano – Anos Finais	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica

Fonte: Brasil, (2018)

Observa-se então múltiplas habilidades voltadas para o pensamento geométrico que devem ser desenvolvidas pelos estudantes no prosseguir de sua carreira escolar, como a capacidade de reconhecer padrões de figuras e as transformações geométricas, com destaque nas simetrias (Brasil, 2018).

Considera-se que no desenvolvimento destas habilidades há o risco que se entre no aspecto axiomático da geometria sem contextualização. Para isso podem ser utilizadas diversas formas para abordar esses aspectos geométricos, um destes envolve a utilização da interdisciplinaridade entre Matemática e Arte.

A construção de mosaicos possibilita que se explore situações para o desenvolvimento da compreensão de figuras geométricas devido suas especificidades. Suas construções também contribuem para a criatividade, visto que “[...] a construção de mosaicos oferece a possibilidade dos estudantes se

expressarem criativamente e, por que não, perceberem relações entre Matemática e Arte” (Vicente, 2022, p.45)

Considerando que a construção de mosaicos possibilita explorar situações para o desenvolvimento da compreensão de figuras geométricas e contribui para a criatividade dos estudantes, formula-se a pergunta de pesquisa: Quais são as contribuições de uma sequência didática envolvendo tesselações e mosaicos para a aprendizagem das isometrias?

2.1 OBJETIVO GERAL

Para responder à pergunta de pesquisa delineia-se o objetivo de investigar as contribuições metodológicas de uma sequência didática envolvendo tesselações e mosaicos para o aprendizado dos conceitos de isometrias.

2.1.1 Objetivos Específicos

- Investigar atividades matemáticas para a aprendizagem das isometrias, reflexão, translação e rotação envolvendo mosaicos e outras representações artísticas;
- Elaborar uma sequência didática com atividades para aprendizagem das isometrias aliada às Artes;
- Aplicar a sequência didática com estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental;
- Analisar as contribuições da sequência didática para o aprendizado das isometrias através da observação das interações dos estudantes e análise de suas produções;
- Validar a sequência didática por meio de um experimento com alunos do ensino básico.

3 REVISÃO DE LITERATURA

Para a pesquisa foi realizada a procura no Catálogo de Teses e Dissertações da CAPES, para compreender os limites e potenciais pedagógicos do estudo de polígonos e transformações geométricas utilizando os mosaicos como ferramenta para a aprendizagem. As palavras-chave utilizadas foram: Educação Matemática, Mosaicos, Geometria Plana, Geometria, Matemática e Arte e Tarefas. Os critérios para a busca são apresentados na Figura 2.

Figura 2 - Critério para o levantamento das pesquisas com a temática

Período	2018 a 2023
Idioma	Português
Palavras-chave	Geometria Transformações Geométricas Mosaicos Isometrias Educação Matemática Matemática e Arte Sequência Didática
Strings de busca	Transformações geométricas AND mosaicos Transformações geométricas AND sequência didática Transformações geométricas AND pavimentações Transformações geométricas AND ensino fundamental
Base de Dados	Catálogo de Teses e dissertações da Capes

Fonte: elaborado pelo autor.

Foi percebido que a utilização da *string* “mosaicos” na busca de trabalhos, resultou na obtenção de uma variedade de conteúdos que, embora relacionados ao termo, não correspondiam ao contexto desejado de artes visuais. Isso levou a uma ampla gama de trabalhos sendo sugeridos como relevantes pelo site de busca, apesar de não estarem diretamente ligados ao foco da pesquisa original. Na Figura 3 é apresentado a quantificação de teses e dissertações obtidas pelas diferentes combinações das palavras chaves utilizadas na busca.

Figura 3 - Resultados da busca

String	Resultados
Transformações geométricas AND mosaicos	2
Transformações geométricas AND sequência didática	11
Transformações geométricas AND pavimentações	3
Transformações geométricas AND ensino fundamental	51

Fonte: elaborado pelo autor.

Com os resultados levantados foram determinados critérios de exclusão para a seleção das literaturas de acordo com a temática da pesquisa, que são: trabalhos que

não abrangem a temática mosaicos ou isometrias nos Anos Finais do Ensino Fundamental ou Médio e trabalhos que não estão disponíveis de forma gratuita. Utilizando os critérios estabelecidos e observando a relevância dos trabalhos levantados foram escolhidos trabalhos para a análise e reflexão do conteúdo observado (Figura 4).

Figura 4 - Trabalhos Selecionados para a Revisão

Nº	Título	Autor/Ano	Tipo	Palavras-Chave
(1º)	Estudo de figuras geométricas planas com arte: uma experiência com alunos de sexto e sétimos anos do Ensino Fundamental de uma escola pública	Costa (2023)	Mestrado Profissional	Arte; Piet Mondrian; Mosaicos; Geometria Plana; COVID-19.
(2º)	Transformações Geométricas no Plano: Uma Abordagem Inspirada em Escher.	Esquerdo (2018)	Mestrado Profissional	Matemática; Geometria; Escher; Sequência Didática; Interdisciplinaridade.
(3º)	Transformações geométricas: um olhar matemático nos flocos de neve usando o origami e o GeoGebra	Chihaya (2022)	Mestrado Profissional	Isometria; simetria; rotação; translação; dobraduras; kirigami; matemática dinâmica.
(4º)	Transformações geométricas: ações e aplicações nos anos Finais do ensino fundamental	Casarin (2023)	Mestrado Profissional	Transformações. Geometria. Rotação. Translação. Reflexão.
(5º)	Transformações geométricas: fazendo arte na aula de matemática	Sanches (2021)	Mestrado Profissional	Geometria; Simetria; Arte
(6º)	Matemática, Tecnologia e Arte: uma proposta de ensino de Isometrias para a Educação Básica	Canella (2021)	Mestrado Profissional	Isometria; tecnologia digital; arte-matemática; ensino por atividades
(7º)	Transformações geométricas no contexto escolar: uma experiência de aprendizagem no 8º ano do ensino fundamental	Silva (2017)	Mestrado	transformações geométricas, ensino-aprendizagem, Ensino Fundamental.
(8º)	Transformações geométricas: linguagens híbridas e Interações para promover aprendizagens de Estudantes no ensino remoto	Izar (2023)	Doutorado	Transformações Geométricas. Pesquisa de Intervenção. Linguagens Híbridas. Visualização. Ensino Fundamental. Ambiente Virtual de Aprendizagem.

Fonte: elaborado pelo autor.

A Dissertação de Mestrado Profissional de Costa, (2023) consiste em observar como atividades envolvendo Arte e Matemática ao estudar figuras geométricas planas contribuem para o processo de ensino aprendizagem e socialização de estudantes dos anos finais do Ensino Fundamental. A pesquisa consta com 17 participantes, alunos do sexto e sétimo ano que compareciam e realizavam as aprendizagens no Laboratório de Aprendizagem em Matemática de um Centro de Educação Pública Transformadora (CEPT), no Município de Maricá, RJ em 2022.

Nesse ambiente, as atividades aplicadas por Costa (2023), eram realizadas a partir da utilização de material manipulável feito de E.V.A(Etil, Vinil e Acetato) para a construção de mosaicos. Outras atividades visavam o estudo de formas geométricas planas a partir de obras de arte do pintor Piet Mondrian. Durante a aplicação das atividades Costa (2023) menciona perceber uma melhora significativa dos estudantes na interação social entre eles e com o professor. Além disto, Costa (2023) aponta que os estudantes puderam perceber conexões no estudo das formas geométricas a partir das Artes, e discorre sobre a importância de que os estudantes à percebam, visto que:

apesar da grande riqueza entre as realizações humanas e a Matemática, nem sempre encontramos um estudante que tenha percepção das ideias matemáticas contidas nas mais belas elaborações artísticas. (Costa, 2023, p. 17).

Além das contribuições da utilização das Artes para o estudo das figuras planas, Costa (2023) aponta que a manipulação de material concreto pelos estudantes durante as atividades possibilitou uma percepção concreta sobre o que se estava sendo estudado, que cotidianamente o autor menciona serem desenvolvidos a partir de forma expositiva. Ainda assim, Costa (2023) menciona que a utilização de material concreto não deve ser o único recurso para se desenvolver a aprendizagem destes conceitos, é necessário utilizar de diferentes recursos e representações para que seja alcançado o objetivo educacional determinado.

A abordagem da Matemática em conjunto das Artes não se limita a um artista, visto que estas andam em conjunto desde os tempos antigos (Fainguelernt; Nunes, 2006). Aliada a essa perspectiva, o Mestrado Profissional de Esquerdo, (2018) apresenta um olhar à Matemática, por meio dos mosaicos e tesselações de Maurits Cornelius Escher, artista esse conhecido por suas tesselações surrealistas. O objetivo da dissertação é apresentar uma sequência de atividades ordenadas que seguem a

temática dos trabalhos de Escher para efetuar o aprendizado das transformações geométricas.

O trabalho de Esquerdo, (2018) se empenha na utilização das Tecnologias Digitais para o processo de aprendizagem, durante a sequência didática existem diversas atividades em sua totalidade que utilizam um *software* de Geometria Dinâmica chamado *GeoGebra*. A sua utilização começa com tarefas simples de familiarização com o programa, e segue progredindo sua dificuldade no decorrer da sequência. Sua utilização se dá devido a um dos objetivos da sequência seria o que os estudantes consigam replicar algumas obras de Escher usando as suas ferramentas de transformação geométrica. Adotando uma ordenação lógica que começa na construção de recobrimentos do plano euclidiano utilizando polígonos regulares, seguindo para polígonos irregulares e então algumas obras do artista.

Não consta na dissertação se a sequência didática foi aplicada em experimento para validar a sua efetividade educacional, entretanto, Esquerdo, (2018) apontam que a escolha do uso da Matemática e Arte seria uma tentativa de atrair a atenção dos alunos e o uso de Escher como referência se deu devido ao embasamento geométrico que o artista possui em suas obras, que utiliza de alguns destes conceitos para construir ilusões de ótica, entre outras figuras.

O embasamento em artistas e suas obras como temática para o aprendizado de tópicos de geometria possui potencial nessa perspectiva de integração da Matemática com as Artes, além disso, a utilização de diferentes técnicas de culturas diferentes também podem desempenhar um papel de amplo potencial na tentativa de ensinar geometria de forma lúdica e contextualizada. A dissertação de Mestrado Profissional de Chihaya, (2022), objetiva justamente isso, empregar a arte das dobraduras de papel como o origami/kirigami, integrada ao *software* GeoGebra no ensino de transformações geométricas. A utilização do origami será para a construção e análise dos conceitos geométricos advindos dos flocos de neve.

O trabalho consiste na elaboração de sequências de atividades que integram a temática mencionada para a aprendizagem da transformação geométrica, visto que, para Chihaya, (2022) os estudantes quando entram em contato com conceitos de geometria plana, encontram dificuldade, que em conjunto de uma falta de contextualização pode acarretar desinteresse pelo assunto. Assim, como forma de evitar que o desinteresse dos estudantes, Chihaya, (2022) se apoia na utilização de

materiais manipulativos e as Tecnologias Digitais, contextualizando o aprendizado das transformações geométricas e o apresentando de forma lúdica.

A autora afirma o potencial na utilização de origamis, kirigamis e flocos de neve para a aprendizagem de conceitos geométricos, devido a perspectiva lúdica que pode ser interessante aos discentes. Além disso aponta que outros tópicos de Geometria Plana além das transformações geométricas podem ser abordados utilizando essa temática.

Casarin (2023) durante sua Dissertação de Mestrado Profissional visa observar a inferência dos conceitos de transformação geométrica no desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes. Este elaborou pesquisas bibliográficas de obras alinhadas e atividades alinhadas a tecnologias digitais e artes. Uma de suas motivações para realizar esse estudo se dá a falta de preparo de docentes ao elaborar essas práticas em sala de aula, que devido à falta de domínio desses conceitos não vem a ser abordado.

No estudo de Casarin, (2023) este desenvolveu sequências de atividades para 6º e 7º ano para turmas do Ensino Fundamental de uma escola do interior do Rio Grande do Sul. As atividades voltadas para o 6º ano abordavam o uso das homotetias alinhadas ao uso das tecnologias digitais, utilizando o software *GeoGebra*. Enquanto o 7º ano, as transformações geométricas de translação, rotação e reflexão utilizando as tecnologias digitais alinhadas a criações artísticas como as de Escher. Essas escolhas se dão devido a Base Nacional Comum Curricular, que recomenda a utilização desses recursos quando desenvolvendo estes conceitos.

As atividades eram acompanhadas de um passo a passo de como utilizar as ferramentas do *GeoGebra* para auxiliar a familiarização com o software. No sétimo ano após a visualização das transformações, os estudantes tentaram reconstruir alguns mosaicos utilizando essas isometrias trabalhadas no software. Casarin, (2023) aponta que a utilização desses meios para o aprendizado das transformações geométricas, se torna atrativo aos estudantes, devido ao viés interativo que a utilização do *GeoGebra* traz para a sala de aula. Por fim, Casarin, (2023) aponta que a utilização desses conceitos permite que os estudantes possam compreender outros conceitos de Geometria, voltados para congruência e semelhança e algumas relações trigonométricas.

O trabalho de Sanches, (2021) foi realizado em uma turma de 8º ano do Ensino Fundamental durante o período pandêmico de COVID-19, as aulas foram

realizadas por meio de encontros online que eram ministradas por apresentações em PowerPoint e realização de atividades. A partir das atividades realizadas por Sanches, era monitorada a aprendizagem dos estudantes, as observações eram realizadas a partir da análise dos erros e acertos dos estudantes.

O trabalho desenvolvido por Sanches, (2021) está alinhado as determinações das habilidades e competências da Base Nacional Comum Curricular e recomendações dos Parâmetros Curriculares Normativos. Estudantes, além dos benefícios que o estudo da Geometria auxilia no estudo e compreensão de atividades do cotidiano. Sanches, (2021) como outros atores supracitados apontam a pouca presença da Geometria em atividades em que poucas vezes é ensinada no 8º ano.

O ensino das simetrias leva o aluno a desenvolver a capacidade de visualização, proporcionando o desenvolvimento de habilidades de criação, manipulação e imaginação, desde que sistematicamente construídas e exercitadas(Sanches, 2021, p.19)

Dessa forma Sanches, (2021) ordena suas atividades de forma com que os estudantes percebam os conceitos das transformações geométricas associada às obras artísticas de M.C. Escher. O experimento foi aplicado em uma Escola de Ensino Fundamental de 8º ano da rede pública do 8º ano. As aulas seguiam um viés expositivo onde se era apresentado os conceitos das isometrias, em seguida eram realizadas atividades que deveriam ser respondidas pelos estudantes, Sanches, (2021), apresentou dificuldades na coleta de dados devido a necessidade dos estudantes de possuírem impressoras para imprimir as atividades propostas. Ainda assim, sobre os resultados obtidos, aponta que os estudantes conseguiram compreender os conceitos de transformações geométricas.

A partir das análises, Sanches, (2021) menciona que a aprendizagem pode ocorrer por meio dos encontros virtuais ao utilizar os encontros remotos, também menciona que a conexão desses tópicos matemáticos alinhados a um contexto real, pode auxiliar ainda mais os estudantes a perceber as conexões do conceito trabalho com a sua realidade. Entretanto, ressalta que a aprendizagem pode ter sido dificultada devido as diferentes condições dos estudantes em relação ao acesso das mídias digitais.

A Dissertação de Mestrado Profissional de Canella, (2021) foi estruturado como uma proposta de ensino das transformações geométricas utilizando as tecnologias e artes em conjunto. A atividade foi realizada com alunos de uma escola

particular do Rio de Janeiro. A escolha das artes integradas as tecnologias segundo Canella, (2021) se dá devido as novas perspectivas que estas podem trazer ao processo de ensino aprendizagem, além da sua contextualização com o cotidiano.

As atividades elaboradas por Canella, (2021), iniciam com questionamentos sobre o que os estudantes entendem sobre o conceito de transformação geométrica e a partir desta questão norteadora, os conceitos são desenvolvidos pelo professor assistido por uma apresentação de *slides*. Em seguida esses conceitos eram aplicados em outras atividades como o desenvolvimento de mandalas no *GeoGebra* e depois construir mandalas com bordados.

Após as atividades aplicadas, Canella, (2021) estruturou um questionário para os estudantes responderem, tal questionário abordava assuntos como o que os estudantes acharam sobre as atividades realizadas e como eles se sentiram durante a realização. Canella, (2021) concluiu a partir do feedback dos estudantes ao responderem o questionário que o feedback recebido foi positivo e que a atividade promoveu a fixação dos conceitos.

A Dissertação de Silva, (2017) visava identificar as possíveis contribuições ao processo de ensino e aprendizagem das transformações geométricas nos Anos Finais do Ensino Fundamental. Para atingir o objetivo foi estruturado uma sequência de atividades de transformações geométricas, aplicada em estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental. As atividades foram estruturadas com auxílio de materiais manipulativo e tecnologias digitais.

Foram estruturados para o experimento de Silva (2017) 14 encontros, nos quais eram construídos os conceitos das isometrias de reflexão, translação de rotação aliados à contextualização desses conceitos em obras de arte, utilização de materiais manipuláveis (Geoplano, dobraduras de papel e outros materiais) e tecnologias digitais (*software* de Geometria Dinâmica como o *GeoGebra*).

Assim, de acordo com Silva (2017), as utilizações destas ferramentas contribuíram para o processo de aprendizagem dos estudantes devido ao fato de ser uma novidade para os discentes, a manipulação do material disponibilizado possibilitou a formação de hipóteses e visualização interativa sobre os conceitos apresentados ao realizar as atividades. Outro aspecto que contribuiu positivamente na aprendizagem dos estudantes foi a utilização do *software GeoGebra*, que permitiu uma manipulação dinâmica das figuras geométricas.

A Tese de Doutorado de Izar (2023) visa observar as inferências das transformações geométricas na visualização da congruência e semelhança de figuras geométricas. Esta pesquisa ocorreu durante a pandemia de COVID-19 com estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental, onde foram elaboradas atividades síncronas e assíncronas com variados recursos utilizando as tecnologias digitais voltados para o ensino das homotetias e isometrias.

As atividades estruturadas por Izar (2023) tiveram cuidado de contextualizar os estudantes com a utilização das tecnologias, iniciando com um processo de familiarização dos estudantes com as plataformas digitais utilizadas para em seguida começar com as atividades do ensino remoto. Essas atividades foram ordenadas e elaboradas de forma variada, assistidas por diversos recursos digitais como vídeos, softwares de geometria dinâmica, videoconferências com os estudantes, planilhas dinâmicas entre outros.

Izar (2023) conclui que a utilização dessa abordagem auxiliou o processo de ensino aprendizagem, visto que quando aliado a meios convencionais de ensino, como quadro e giz, estes não são favoráveis para o desenvolvimento do raciocínio geométrico. A sua pesquisa utilizando dos recursos digitais limitando-se a encontros síncronos e assíncronos contribuiu de forma eficiente para grande parte dos estudantes. Izar (2023) também menciona a importância da participação ativa dos estudantes, que permitiu uma melhor compreensão das transformações.

A partir dos trabalhos analisados, observa-se que a integração entre Matemática e Arte tem se mostrado uma estratégia eficaz para o ensino de conceitos geométricos. Os estudos de Costa (2023), Esquerdo (2018), Chihaya (2022), Casarin (2023), Sanches (2021), Canella (2021), Silva (2017) e Izar (2023) apresentam pontos em comum que merecem ser destacados.

Verifica-se que a utilização de obras de artistas como Piet Mondrian e M.C. Escher, bem como técnicas como origami/kirigami e construção de mandalas, contribuem significativamente para despertar o interesse dos estudantes e facilitar a visualização dos conceitos geométricos, especialmente as transformações geométricas. Essa abordagem contextualizada permite que os estudantes percebam conexões entre a Matemática e outros campos do conhecimento, como apontado por Costa (2023).

Outro aspecto recorrente é a utilização de recursos tecnológicos, principalmente o *software GeoGebra*, mencionado em diversos estudos como uma

ferramenta que potencializa a compreensão das transformações geométricas. A natureza dinâmica e interativa desse recurso permite que os estudantes manipulem figuras e observem propriedades invariantes durante as transformações, representando um diferencial importante quando comparado aos métodos tradicionais de ensino.

A importância dos materiais manipuláveis também se destaca nos trabalhos analisados. Como apontado por Costa (2023) e Silva (2017), estes recursos proporcionam experiências concretas antes da abstração dos conceitos. A alternância entre diferentes representações parece favorecer a construção do conhecimento geométrico, não devendo, entretanto, ser o único recurso utilizado, como menciona Costa (2023).

Quanto aos resultados, os estudos convergem ao indicar melhoras na aprendizagem, no engajamento e na socialização dos estudantes. Costa (2023) aponta uma melhora significativa na interação social entre os estudantes e com o professor. Casarin (2023) menciona o caráter atrativo das atividades devido ao viés interativo proporcionado pelo GeoGebra. Canella (2021) aponta que o feedback dos estudantes foi positivo e as atividades promoveram a fixação dos conceitos.

Algumas limitações foram observadas, especialmente nos estudos realizados durante a pandemia de COVID-19. Sanches (2021) teve dificuldades na coleta de dados devido à necessidade de impressoras para as atividades propostas, enquanto Izar (2023) precisou adaptar sua abordagem para o formato remoto.

Observa-se ainda uma predominância de pesquisas oriundas de Mestrados Profissionais, havendo uma carência de estudos advindos de programas de Mestrado Acadêmico na área. Essa limitação pode restringir abordagens teóricas mais aprofundadas sobre o tema. Alguns dos estudos analisados, como o de Esquerdo (2018), propõem sequências didáticas ou atividades que não foram efetivamente aplicadas, não gerando assim dados empíricos que permitam uma análise mais robusta sobre sua eficácia no processo de ensino e aprendizagem. A falta desses dados dificulta a avaliação concreta do impacto dessas propostas pedagógicas no desenvolvimento dos conceitos geométricos pelos estudantes. Esta lacuna na literatura influencia diretamente a escolha metodológica da presente pesquisa, que se propõe a elaborar uma sequência didática envolvendo mosaicos e analisar empiricamente suas contribuições para a aprendizagem das isometrias, buscando

assim gerar dados concretos que possam enriquecer o campo de estudos sobre o ensino de transformações geométricas.

Os trabalhos analisados estão alinhados com as diretrizes da BNCC, que recomenda a utilização de recursos tecnológicos e contextualizações no ensino da geometria (Brasil, 2018). Isso sugere uma tendência positiva na educação matemática brasileira, que busca superar o ensino tradicional, apontado frequentemente como insuficiente para o desenvolvimento do raciocínio geométrico, como observado por Izar (2023).

Em síntese, esta revisão aponta para as possibilidades da integração entre Arte, Matemática e Tecnologia no ensino das transformações geométricas. Os estudos sugerem que abordagens que combinam esses elementos tendem a promover uma aprendizagem mais significativa e engajadora, contribuindo para a superação das dificuldades comumente relatadas no ensino de geometria. Essas perspectivas forneceram uma base para o desenvolvimento da presente pesquisa, que se propôs a observar as contribuições de uma sequência de atividades com a temática de mosaicos para o ensino das isometrias.

4 SEQUÊNCIAS DE ENSINO APRENDIZAGEM E A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS

O conceito de sequência didática tem sido objeto de diferentes interpretações no campo educacional, apresentando variações tanto em sua definição quanto em seus processos metodológicos. Esta diversidade de abordagens reflete a complexidade do processo de ensino e aprendizagem e as diferentes perspectivas pedagógicas desenvolvidas ao longo do tempo.

Para fundamentar este trabalho, adota-se a definição proposta por Zabala, (1998, p. 16), que compreende sequências didáticas como "um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais". Esta escolha se justifica pela forma como o autor integra aspectos teóricos do planejamento com a prática docente, oferecendo subsídios concretos para a elaboração e análise de sequências didáticas.

Compreende-se que a organização e planejamento de uma sequência didática precisa ser meticulosa quanto ao que será apresentado, Zabala (1998), aponta que:

A maneira de organizar a aula, o tipo de incentivos, as expectativas que depositamos, os materiais que utilizamos, cada uma destas decisões veicula determinadas experiências educativas, e é possível que nem sempre estejam em consonância com o pensamento que temos a respeito do sentido e do papel que hoje em dia tem a educação. (p.36)

A organização e planejamento de uma sequência didática requerem atenção a diversos elementos fundamentais que contribuem para sua efetividade no processo de ensino e aprendizagem. Zabala (1998) ressalta que cada decisão tomada durante este planejamento - desde a organização das atividades até os materiais utilizados - carrega consigo experiências educativas que precisam estar alinhadas aos objetivos propostos.

Uma sequência didática precisa contemplar diferentes momentos do processo educativo. O primeiro deles é o diagnóstico inicial, que permite identificar os conhecimentos prévios dos estudantes e adequar as atividades ao seu nível de desenvolvimento. Em seguida, é fundamental estabelecer uma progressão clara das atividades, onde cada etapa se conecta com as anteriores e prepara o terreno para as posteriores, criando um encadeamento significativo de aprendizagens.

Neste processo de estruturação, é essencial considerar os diferentes tipos de conteúdo que serão trabalhados. Zabala (1998) os categoriza em três dimensões: conceituais, procedimentais e atitudinais.

Os conteúdos conceituais referem-se à compreensão e apropriação dos conceitos e suas relações, estes conceitos segundo Zabala (1998, p. 56), se trata de um “conjunto de fatos, objetos ou símbolos que têm características comuns”. A apreensão destes conhecimentos não se dá somente quando o estudante conhece o conceito, mas sim pode utilizá-lo para interpretação, compreensão ou exposição de fenômenos (Zabala, 1998).

Já os procedimentais envolvem o desenvolvimento de habilidades e técnicas específicas, estão associados a ações ou conjunto de ações que possuem características distintas, podendo estar associado à: linha contínua motor/cognitivo; número de ações; algoritmo (Zabala, 1998). Esses conteúdos a procedimentos, que a partir da prática e execução, os estudantes o integram ao seu repertório de conhecimentos internos. Na Matemática, podem estar associados aos procedimentos necessários para realizar uma soma, ou até a resolução de uma equação.

Por fim, os conteúdos atitudinais relacionam-se com a formação de valores e atitudes frente ao conhecimento (Zabala, 1998). Esse tipo de conteúdo se aprende quando o indivíduo “pensa, sente e atua de uma forma mais ou menos constante frente ao objeto concreto a quem dirige essa atitude” (Zabala, 1998, p. 63).

Para avaliar a efetividade de uma sequência didática, alguns questionamentos são fundamentais. Entre eles, destacam-se: a adequação das atividades ao nível de desenvolvimento dos alunos, a capacidade de promover conflitos cognitivos produtivos, a motivação gerada para a aprendizagem e o desenvolvimento da autonomia no processo de construção do conhecimento (Zabala, 1998).

A avaliação deve ser considerada em diferentes momentos do processo, sendo diagnóstica inicialmente, formativa durante o desenvolvimento e integradora ao final. Como destaca Zabala (1998, p. 200), “a avaliação tem que ajudar a conhecer o progresso de cada um dos alunos ao longo de seu processo de aprendizagem, ao mesmo tempo que permite avaliar a pertinência das atividades e a própria intervenção.”

Considerando estes diferentes elementos que compõem uma sequência didática - desde sua estruturação até sua avaliação - compreende-se que sua elaboração pode seguir diversas perspectivas metodológicas, utilizando diferentes

tipos de abordagens, desde que se mantenha a clareza nos objetivos a serem alcançados nas situações de ensino e aprendizagem desenvolvidas."

4.1 A TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS DE GUY BROUSSEAU

A Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau oferece uma estrutura teórica para compreender e estruturar o processo de ensino e aprendizagem em matemática. Esta seção explorará os principais conceitos e componentes da TSD. O processo de aprendizagem de um novo conceito matemático inicia-se quando um professor estrutura intencionalmente situações para que os estudantes adquiram novos saberes. Para concretizar esta intenção didática, é estabelecido um meio educacional específico que possibilite ao estudante a construção deste novo saber (Brousseau, 2006).

Neste contexto educacional, estabelece-se a TSD, que se constitui como uma teoria de ensino fundamentada nas interações entre os estudantes, o meio educacional e o novo saber a ser construído (Oliveira, 2018).

[...] a Teoria das Situações Didáticas é um modelo teórico, segundo o qual, considerando o ensino como projeto e ação social em que o aprendiz se apropria de um saber constituído ou em constituição, a didática da matemática se transforma numa ciência das condições de transmissão e apropriação dos conhecimentos matemáticos. (Passos; Teixeira, 2011, p. 7)

Para o aprendizado de um estudante, apenas a transmissão de saberes não é suficiente. O desenvolvimento do aprendizado necessita do funcionamento e modelagem de situações que proporcionam a aprendizagem. Essas situações são formuladas *a priori* pelo professor durante o seu planejamento e devem ser realizadas com cuidado na sua escolha de abordagem e material didático.

Na estruturação dessas situações didáticas, é fundamental considerar que o aprendizado ocorre quando "o aluno aprende adaptando-se a um meio que é fator de contradições, dificuldades e desequilíbrios (Brousseau, 2008, p. 34). Essa condição associa ao meio educacional, que será desenvolvido a diante no texto, um papel de antagonista ao aprendizado do estudante, de forma que ao desafiar o estudante e causar desequilíbrios, o estudante pode se motivar a aprofundar seu conhecimento sobre um conceito.

As situações matemáticas devem ser concebidas de maneira a provocar o aparecimento de conhecimentos como respostas espontâneas às condições apropriadas, porém, elas não devem ter

relação visível para o aluno e devem possuir uma única intenção didática prevista, fora de toda intervenção complementar. (Passos; Teixeira, 2011, p. 10)

Uma *situação* é o “modelo de interação de um sujeito com um meio específico que determina um certo conhecimento (Brousseau, 2008, p. 19)” e uma *situação didática* se estabelece quando existe uma série de interações entre estudante, professor e um saber onde se estabelece um “[...] jogo de interações do aluno com os problemas do professor (Almouloud, 2007, p. 34).

Enquanto a *situação didática* envolve a tríade professor-aluno-saber, a *situação adidática* caracteriza-se como um sistema específico de interações onde o estudante relaciona-se com o meio sem a intervenção direta do professor. Neste contexto, o estudante assume um papel autônomo, apropriando-se do problema proposto como seu (Brousseau, 2008). Ela define um ambiente onde as interações do estudante com o meio educacional propiciem que ele possa adquirir conhecimentos sem estar ciente da intenção de ensino. Essa argumentação é reforçada por Almouloud (2007, p.33) que caracteriza a situação adidática como “uma situação na qual a intenção de ensinar não é revelada ao aprendiz, mas foi imaginada, planejada e construída pelo professor para proporcionar condições favoráveis para a apropriação do novo saber que deseja ensinar”, reforçando o papel do docente na estruturação de um meio educacional.

O papel do professor na situação adidática está associada ao planejamento da interação entre estudante e meio. Visto que, por mais que não explicitada a intenção de ensino aos estudantes, ela foi desenvolvida e imaginada pelo docente, que elaborou formas de propiciar a aprendizagem de um novo saber (Almouloud, 2007). A situação adidática representa um dos aspectos centrais da TSD, pois é neste contexto que ocorre a construção efetiva do conhecimento pelo estudante. Ao estar em uma situação adidática, o discente aceita o papel de responsável pela sua educação, e compreende que ao interagir com o meio, receberá mensagens do próprio que o auxiliarão nesse processo.

Na perspectiva de Brousseau (2008), o meio (*milieu*) constitui-se como o ambiente educacional complexo que envolve o estudante, incluindo objetos materiais, sistemas simbólicos, regras de interação, contextos sociais e todas as condições que influenciam o processo de aprendizagem. Este meio não se limita aos recursos pedagógicos selecionados pelo professor, mas abrange toda a rede de relações e

elementos que proporcionam retroações ao estudante durante sua construção do conhecimento.

O meio pode ser interpretado como um conjunto de elementos selecionados pelo professor para composição das suas situações didáticas, estes elementos podem ser compostos por situações problemas, ferramentas e outros materiais didáticos. Além disso, o meio também envolve as práticas sociais do estudante quando em contato com uma situação didática (Nunes; Nunes, 2019).

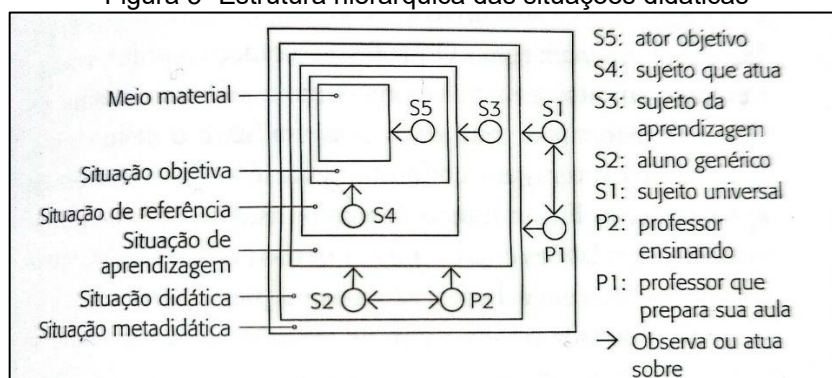
O meio didático atua como um sistema retroativo que fornece informações contínuas ao estudante sobre suas ações, permitindo-lhe elaborar hipóteses, formar conjecturas e desenvolver estratégias sem depender da validação constante do professor (Brousseau, 2008). O caráter adidático não significa ausência de intencionalidade pedagógica, mas sim que esta intencionalidade permanece implícita para o estudante.

A interação do estudante com o meio proporciona *feedback* sobre seu aprendizado. Isso permite que o aluno elabore hipóteses e forme conjecturas, desenvolvendo assim seus saberes (Brousseau, 2002). Dessa forma, o meio é compreendido como um agente antagonista do conhecimento do estudante, pois a partir das interações do estudante com ele, o *feedback* recebido capacitará o estudante a refletir sobre sua aprendizagem. (Brousseau, 2008)

Assim, as interações de um estudante com o meio podem seguir três possíveis caminhos: “troca de informações não codificadas ou sem linguagem (ações e decisões); troca de informações codificadas em uma linguagem (mensagens); troca de opiniões (sentenças referentes a um conjunto de enunciados que exercem o papel de teoria)” (Brousseau, 2008, p. 27).

A complexidade das situações didáticas pode ser compreendida através da estrutura apresentada por Brousseau (2008), que apresentam uma ordenação hierárquica da forma que são organizadas no processo educacional (Figura 5).

Figura 5- Estrutura hierárquica das situações didáticas



Fonte: Brousseau (2008, p.57)

O meio material da imagem representa o elemento central em torno do qual se organizam os demais níveis situacionais. Brousseau (2008) explicita que o meio objetivo é mobilizado durante uma situação de ação, que será explanada adiante na literatura. Em suma, trata-se do momento no qual o aluno atua sobre um meio efetivo ou mesmo fictício, onde o estudante realiza previsões sobre como a utilização do meio material o auxiliaria a responder às questões propostas.

A partir dos meios de referência nos quais o aluno se encontra, ele passa a assumir o papel de sujeito da aprendizagem (S3), desenvolvendo sua capacidade de construção de conhecimentos através das situações vivenciadas. Ou seja, ao refletir sobre suas ações em relação ao meio material, ele adquire a possibilidade de desenvolver seu aprendizado, corrigindo suas ações e antecipando seus efeitos (Brousseau, 2008).

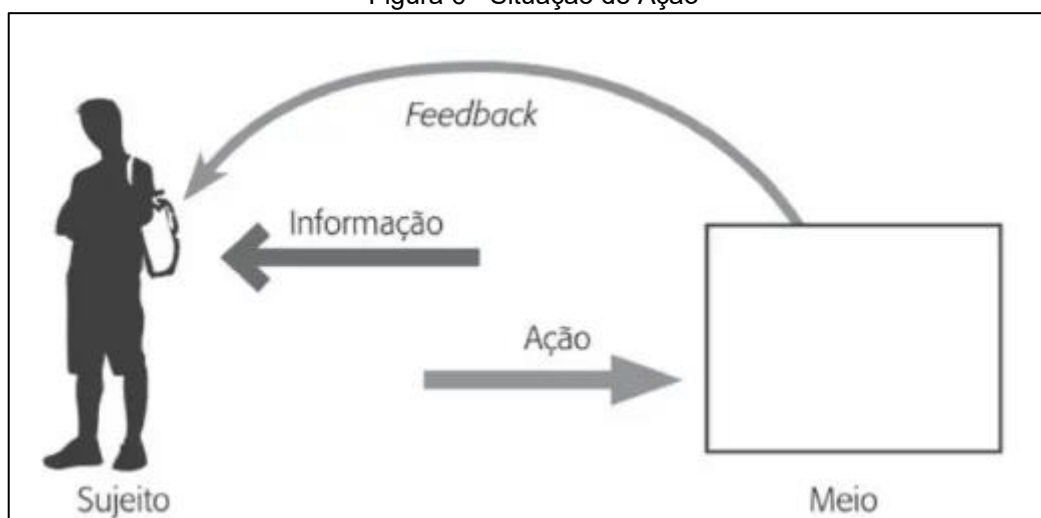
A partir da situação de aprendizagem, com as formulações desenvolvidas pelos discentes, o professor assume o papel de aquele que ensina (P2) enquanto o aluno se posiciona como um aluno genérico (S3). Dessa forma, estabelecem-se as situações didáticas, onde professor e aluno interagem conjuntamente para desenvolver conhecimentos e estabelecer relações entre aquilo que foi construído e o objeto de conhecimento proposto (Brousseau, 2008).

Por fim, a situação metadidática transcende a prática imediata de sala de aula, constituindo o momento em que o professor, na posição de "professor que prepara sua aula" (P1), reflete sobre as situações didáticas e revisa suas decisões de planejamento. É nesse nível que ele analisa o comportamento dos alunos e as interações estabelecidas com o meio material, estruturando as condições para futuras situações didáticas (Brousseau, 2008).

A TSD a partir dos conceitos de situação didática e adidática determinam que uma situação didática e as interações dos estudantes com o meio estão segmentados em etapas de *ação*, *formulação*, *validação* e *institucionalização*. Essas situações são classificadas a partir do que se é percebido das interações do estudante com o meio educacional (Brousseau, 2008).

A *situação de ação* ocorre quando a partir das interações do sujeito com o meio, este devolve um feedback para o estudante, que são informações obtidas a partir da interação do estudante com o meio, este *feedback* auxilia o estudante a desenvolver uma nova percepção sobre o meio que está interagindo. Quando o meio apresenta essas informações ao estudante de forma contínua, o estudante pode começar a implicitamente antecipar suas respostas e considerar nas suas próximas decisões (Brousseau, 2008).

Figura 6 - Situação de Ação



Fonte: Brousseau (2008, p. 28)

As interações do estudante com o meio nas situações de ação estão fortemente associadas a utilização de procedimentos imediatos para a resolução de um problema proposto, desenvolvendo um conhecimento experimental a partir de suas interações (Machado Bragança; Rachelli, 2023). A situação de ação deve promover uma aprendizagem adaptativa ao estudante, de forma que devido a retroação do meio, o estudante pode melhorar ou abandonar suas estratégias de resolução de problema sem a intervenção docente (Almouloud, 2007).

Como se trata de uma situação adidática, o papel do professor durante a situação de ação é um agente da mediação do conhecimento. Assim, durante esta situação, “[...] o professor prepara e estrutura a atividade, tendo controle sobre ela e

não sobre o saber, com o objetivo de que o aluno possa vivenciá-lo (Cavalcanti, 2013, p. 6)”.

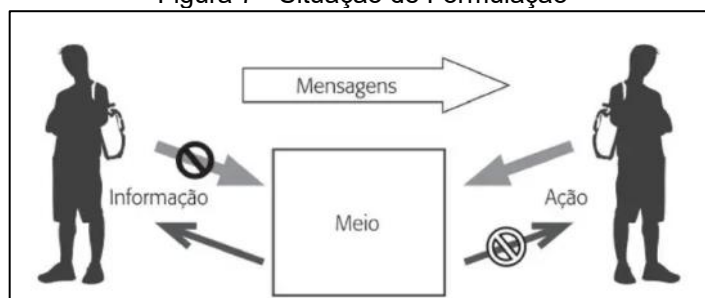
Dessa forma, a situação de ação possibilita que o estudante possa desenvolver seus conhecimentos a partir das suas interações com o meio retroativo. Essa situação, proporcionará ao sujeito, um ambiente de aprendizagem em que a partir da utilização de seus conhecimentos prévios, (Oliveira, 2018) consiga desenvolver compreensões necessárias para o início da modelagem *implícita* de estratégias para a resolução de um problema proposto pelo docente.

Pode-se considerar que na situação de ação, os conhecimentos construídos pelos alunos durante suas interações com o meio tendem a permanecer em um estado implícito, servindo como base para suas decisões e estratégias iniciais. No entanto, para que esses conhecimentos possam ser comunicados e debatidos com outros sujeitos, torna-se relevante examinar como ocorre a situação de formulação no processo de ensino e aprendizagem.

A partir dos modelos implícitos estruturados pelo estudante durante a situação de ação, os estudantes podem passar a explicitá-los, quando isso ocorre, se desenvolve uma situação de formulação. O desenvolvimento de uma situação de formulação é possível a partir de um meio que possua interação social, ou seja, um meio com outros alunos inseridos para a formação de ideias (Brousseau, 2008). Assim, possibilitando a explicitação dos modelos anteriormente formulados, por meio da interação entre dois ou mais sujeitos, por meio da linguagem natural ou escrita (Almouloud, 2007).

Uma situação de formulação só pode ser determinada caso ocorra a comunicação e colaboração entre dois interlocutores, de forma que, a partir das interações do outro com o meio, seja possível a transposição das conjecturas formuladas por meio de mensagens (Figura 7).

Figura 7 - Situação de Formulação



Fonte: Brousseau (2008, p. 29)

Dessa forma, a situação de formulação se trata da troca de informação entre dois interlocutores sobre o meio educacional, onde compartilham suas conjecturas formadas previamente na situação de ação, assim possibilitando que a partir desta troca, consigam externar entre si um modelo para fim de desenvolver um conceito ou solucionar um problema. Ainda assim, a situação de formulação pode ocorrer com um sujeito fictício (Brousseau, 2008), sujeito este que ainda assim possa assumir o papel de outro interlocutor, que irá receber as informações percebidas pelo interlocutor primário de forma a auxiliar o estudante a formulação de seu modelo.

É na situação de validação que os discentes analisam seus modelos previamente explicitados e a partir dessa análise verificam se este é adequado para resolução da atividade proposta. Almouloud (2007, p. 39) define situação de validação como:

É a etapa na qual o aprendiz deve mostrar a validade do modelo por ele criado, submetendo a mensagem matemática (modelo da situação) ao julgamento de um interlocutor

É nesse momento que é necessário provar de forma argumentativa as conjecturas e os conhecimentos mobilizados. Por meio da interação social com o outro, estes argumentam entre si assumindo papéis de emissor e receptor para buscar integrar esses conhecimentos desenvolvidos por meio das informações recebidas do meio, aos seus repertórios de saberes (Brousseau, 2008).

A situação mais comum na didática se trata da situação de institucionalização (Brousseau, 2002). A institucionalização é uma etapa onde o professor desenvolve a teoria que estava sendo trabalhada com os estudantes, assim formalizando os conhecimentos que foram desenvolvidos pelos discentes, é a etapa que ocorre a transformação do conhecimento em saber, se trata do momento em que “o professor fixa convencionalmente e explicitamente o estatuto cognitivo do saber ” (Almouloud, 2007, p.40). Essa etapa possui também um papel de retomada, onde o docente pode resgatar as formulações e validações dos discentes realizadas nas situações adidáticas para então a canonização da teoria trabalhada (Brousseau, 2002).

Ainda assim, a utilização das institucionalizações seja de forma antecipada ou atrasada pode ocasionar em condições prejudiciais para o aprendizado dos estudantes, Almouloud (2007, p. 40) aponta as seguintes problemáticas para ambas as situações supracitadas:

- se feita muito cedo, a institucionalização interrompe a construção do significado, impedindo uma aprendizagem adequada e produzindo dificuldades para o professor e os alunos

- quando feita após o momento adequado, ela reforça interpretações inexatas, atrasa a aprendizagem, dificulta as aplicações.

Dessa forma, conclui-se que o modelo de institucionalização é um momento crucial para aprendizagem dos discentes, visto que é nesse momento que a teoria trabalhada por eles nas situações adidáticas de forma implícita, o professor o apresenta como conhecimento matemático definido.

A tipologia de conteúdos proposta por Zabala (1998) estabelece conexões significativas com os componentes do conhecimento apresentados por Brousseau (2008, p.56). Segundo este autor, o conhecimento pode ser decomposto em um componente semântico, "pelo qual o conhecimento mobilizado se relaciona com um campo de situações"; um componente sintático, "que o relaciona a diferentes repertórios (particularmente lógicos e científicos) que regem a manipulação"; e um componente pragmático, "que descreve as características da utilização". Esta articulação entre as perspectivas dos autores oferece uma base teórica para compreender como diferentes dimensões do conhecimento se integram no processo de ensino e aprendizagem das transformações geométricas.

4.2 DEFINIÇÃO E ABORDAGEM PEDAGÓGICA SOBRE AS ISOMETRIAS

O desenvolvimento histórico do ensino de geometria, particularmente das isometrias, tem suas raízes em importantes movimentos de renovação do ensino da matemática. A partir de 1950, discussões sobre a modernização do currículo matemático escolar intensificaram-se, com movimentos que defendiam sua atualização, dando ênfase na teoria dos conjuntos, estruturas algébricas e introdução das transformações geométricas. Estas discussões visavam desenvolver conexões entre a matemática ensinada no Ensino Básico e a que era desenvolvida em pesquisas (Duarte; Silva, 2006).

Estas discussões são conhecidas como o Movimento Matemática Moderna (MMM), movimento que se deu na época de 1960 e fracassou na sua implementação. Todavia, alguns de seus conceitos abordados, são considerados até hoje, como o ensino das transformações geométricas no currículo que pode ser percebido como objetos de conhecimento a serem desenvolvidos pelos estudantes conforme a Base

Nacional Comum Curricular (BNCC) do segundo ciclo do Ensino Fundamental (Brasil, 2018), tópicos este da geometria que só entrou em vigor no ensino devido ao MMM.

É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência. (Brasil, 2018, p. 273)

No início, os conceitos das transformações geométricas estavam associados à movimentação de corpos geométricos sem alteração de tamanho e forma, entretanto, este conceito foi expandido. Assim, as transformações geométricas podem ser definidas em duas grandes áreas, as isometrias (translação, reflexão e rotação) e homotetias (ampliações e reduções).

O ensino das isometrias possui um vigor aprofundado a partir de 2018 devido ao caráter normativo da BNCC e suas implicações sobre o ensino da geometria e desenvolvimento do pensamento geométrico (Brasil, 2018), marcando presença obrigatoriamente nos livros didáticos a partir de 2018, durante etapas do Ensino Fundamental e Médio. A Figura 8 elucida os principais objetos de conhecimento e habilidades na temática das isometrias a serem desenvolvidas durante os anos finais do Ensino Fundamental.

Figura 8 - BNCC Matemática - Objetos de Conhecimento e Habilidades.

Ano do Ensino Básico	Objeto de Conhecimento	Habilidades
7º Ano – Anos Finais	Transformações geométricas de polígonos no plano cartesiano: multiplicação das coordenadas por um número inteiro e obtenção de simétricos em relação aos eixos e à origem	(EF07MA19) Realizar transformações de polígonos representados no plano cartesiano, decorrentes da multiplicação das coordenadas de seus vértices por um número inteiro. (EF07MA20) Reconhecer e representar, no plano cartesiano, o simétrico de figuras em relação aos eixos e à origem.
	Simetrias de translação, rotação e reflexão	(EF07MA21) Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros
8º Ano – Anos Finais	Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica

Fonte: Brasil, (2018)

A obrigatoriedade das isometrias na BNCC está associada fortemente ao uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica com intuito de contextualização dos conceitos apresentados e desenvolvimento do letramento informático (Brasil, 2018). A abordagem das isometrias a sua utilização em sala de aula favorece o desenvolvimento de habilidade voltadas para a percepção espacial, além de auxiliar na compreensão de congruência de figuras planas (Oliveira; Silva, 2019).

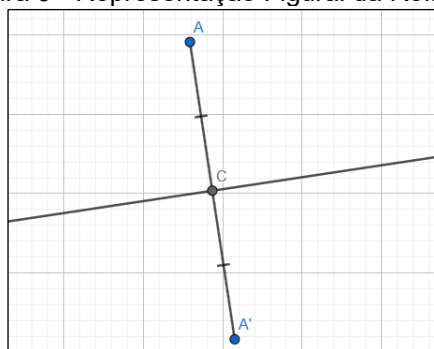
As isometrias são transformações bijetoras de lugares geométricos (retas, pontos e planos) que preservam distâncias entre seus pontos, ou seja, o movimento de figuras que quando movimentadas, não deformam a figura inicial. Na educação básica o enfoque das isometrias está associado as seguintes: translação, reflexão, rotação e reflexão deslizante. Cada uma destas com suas próprias características.

Para representar e demonstrar matematicamente as isometrias, serão utilizadas a seguir como referências as demonstrações apresentadas por Lima (2007) em seu livro sobre as isometrias.

A isometria de reflexão em torno de uma reta r em um mesmo plano π é dada pela função $R_r: \pi \rightarrow \pi$ que, quando estabelecido um ponto A no plano π , a reflexão de A em r pode ocorrer de duas maneiras: caso $A \in r$, isto implica que sua reflexão é o próprio ponto ($R(A) = A$). Entretanto, caso $A \notin r$ isso implica na existência de um ponto A' que é a imagem da função R_r ($R(A) = A'$).

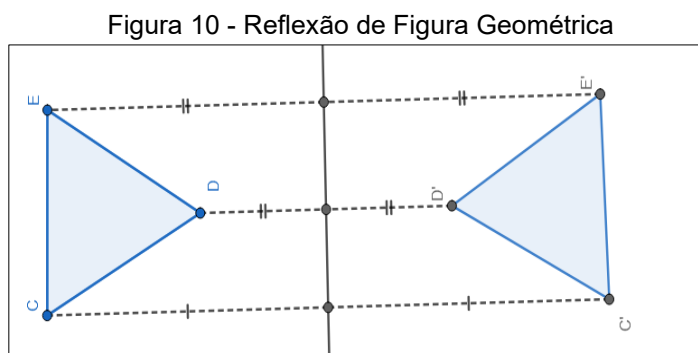
O segmento formado $\overline{AA'}$ terá como mediatriz a própria reta r . Determinando C como intersecção do segmento $\overline{AA'}$ com a reta r , teremos que os segmentos $\overline{AC}$ e $\overline{CA'}$ são equidistantes (Figura 9). Ou seja, quando aplicamos a isometria de reflexão a partir de uma reta em um ponto, o ponto refletido e o ponto original serão equidistantes da reta utilizada para sua simetria.

Figura 9 - Representação Figural da Reflexão



Fonte: elaborado pelo autor

A reflexão de uma figura geométrica qualquer a partir de uma reta, faz com que a transformação supracitada se aplique aos seus vértices e por conseguinte, os segmentos formados entre o vértice original e o vértice refletido, possuem como mediatriz a reta de referência (Figura 10). A reflexão axial, por ser uma isometria, mantém o formato e dimensão de um polígono, entretanto altera seu sentido, assemelhando-se à reflexão em espelhos.

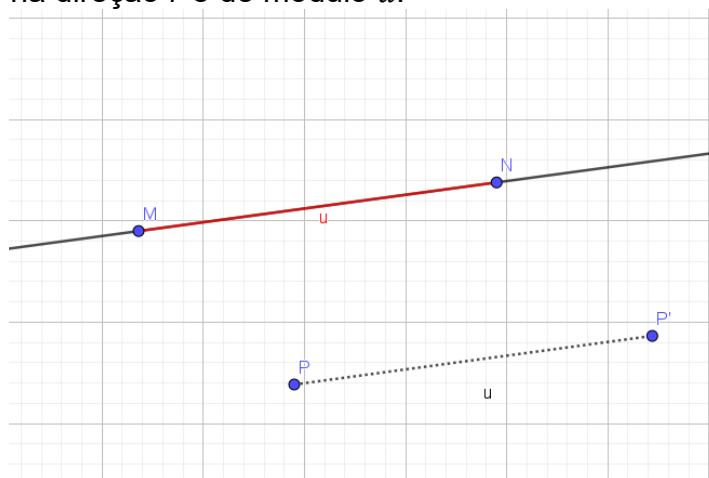


Fonte: elaborado pelo autor

A isometria de translação pode ser definida pela movimentação de uma figura geométrica a partir de uma distância fixa sem alteração de deformações. Para compreensão da translação, (Barbosa, 1993) demonstra geometricamente como ela ocorre no plano euclidiano (Figura 11).

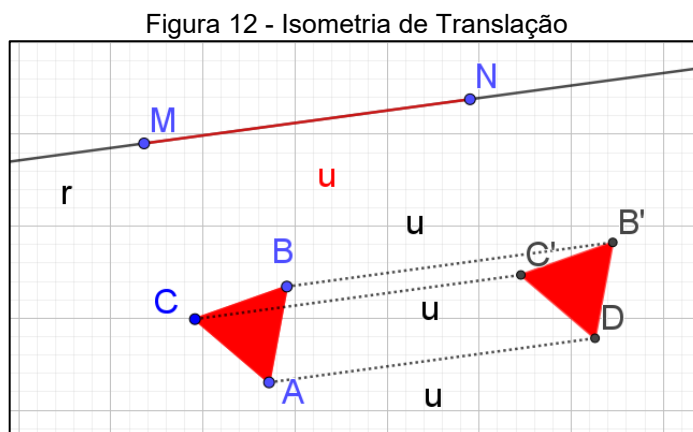
Figura 11 - Demonstração da Simetria de Translação

Dada uma direção por uma reta r e um segmento $\overline{MN}$ de comprimento u considera-se um ponto qualquer P do plano. Construamos um ponto P' tal que $\overline{PP'} \parallel r$ e $\overline{PP'} = \overline{MN}$. Dizemos que P' é simétrico de P por simetria translacional, na direção r e de módulo $\vec{u}$.



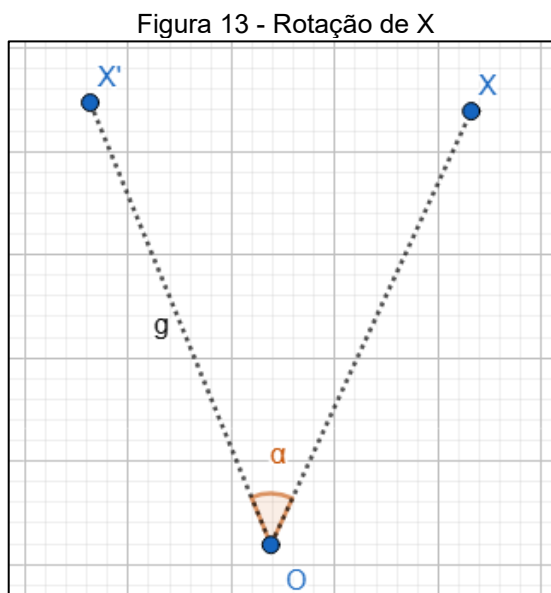
Fonte: Adaptado de Barbosa (1993)

Assim, compreendida a isometria de translação de um ponto, quando aplicada a um polígono qualquer pode se analisar na Figura 12 que a transformação se trata da isometria da translação de um ponto aplicada a todos seus vértices.



Fonte: Elaborado pelo autor

A isometria de rotação (Figura 13), é uma transformação que, quando dado O um ponto em um plano qualquer π e um ângulo $\alpha = \widehat{AOB}$, que é um ângulo do vértice O . Uma rotação de α em X gera um ponto imagem X' ($R_{O,\alpha}(X) = X'$), que quando $X = O$ então $R_{O,\alpha}(X) = O$ e quando $X \neq O$, o ângulo formado entre o ponto rotacionado e sua imagem possui o valor de α ($\widehat{XOX'} = \alpha$).

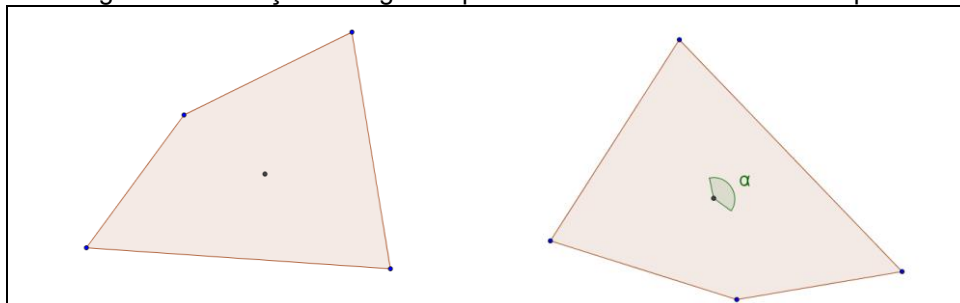


Fonte: Elaborado pelo autor

A isometria de rotação aplicada a uma figura geométrica possui características semelhantes, visto que quando aplicada, seus vértices sofrem a isometria, assim girando a figura. Devido essa característica, caso o ponto de

referência de rotação da figura seja o seu centro, a isometria de rotação fará com que ela gire em torno de seu próprio eixo (Figura 14).

Figura 14 - Rotação de Figura a partir de seu centro – Antes e Depois



Fonte: elaborado pelo autor

Após estabelecer os fundamentos matemáticos das isometrias e sua relevância no desenvolvimento do pensamento geométrico, é importante analisar como estes conceitos são transpostos para o contexto escolar através dos materiais didáticos. Esta investigação permite compreender as escolhas didáticas e metodológicas adotadas na apresentação destes conceitos aos alunos do Ensino Fundamental.

4.3 INTEGRAÇÃO DA MATEMÁTICA COM ARTES

A conexão entre duas áreas do conhecimento (Matemática e Artes), permeiam a possibilidade da contextualização histórica de um objeto de conhecimento abstrato e faz com que estudantes percebam a sua utilização no mundo físico por meio de produções artísticas.

A Matemática e a Arte nunca estiveram em campos antagônicos, pois desde sempre caminharam juntas, aliando razão e sensibilidade. Na verdade, podemos observar a influência mútua de uma sobre a outra desde os primeiros registros históricos que temos de ambas (Fainguelernt; Nunes, 2006, p. 18)

É possível observar a influência que a interação entre Matemática e Artes ocasionou em diversas civilizações conforme o percorrer do desenvolvimento da sociedade: os egípcios e sua construção de pirâmides, o surgimento de representações planas de imagens tridimensionais no Renascimento na Itália (Fainguelernt; Nunes, 2006). Para a realização destas criações o desenvolvimento do pensamento geométrico e aplicação de conceitos axiomáticos da matemática foram necessários.

Essas duas áreas do conhecimento aparecem juntas desde os primeiros registros feitos pelo homem pré-histórico nas cavernas, as

quais abrigavam os grupos de humanos das intempéries e que talvez já prenunciasssem o início da Arquitetura. Ao retratar paisagens e animais e, mais tarde, esculpir em ossos marcas que representavam os animais capturados, o homem primitivo iniciou a busca do seu entorno por meio da Arte e da Matemática (Zaleski Filho, 2013).

A necessidade dessa abordagem das artes visuais associadas a matemática possibilita um ambiente onde os estudantes estejam livres de atividades mecanicistas de repetição, e possam ser capazes de obter uma percepção sobre a matemática de forma com que possam aplicar conceitos matemáticos a outras áreas do conhecimento (Fainguelernt; Nunes, 2006). Ainda assim, tal abordagem possibilita uma nova postura do estudante quando apresentado aos conceitos, já que quando as áreas são integradas, além de auxiliar na compreensão de conceitos matemáticos, também que esses desenvolvam outros aspectos fundamentais para o desenvolvimento do estudante como indivíduo (Oliveira; Silva, 2019).

Visando desenvolver algumas habilidades voltadas para a expressão artística e contextualização cultural-histórica, na área das Linguagens – Artes, a BNCC (Brasil, 2018) apresenta algumas habilidades a serem desenvolvidas por estudantes **Erro! Fonte de referência não encontrada.** dos Anos Finais do Ensino Fundamental (Figura 15).

Figura 15 - BNCC Artes: Objetos de Conhecimentos e Habilidades

Objeto de Conhecimento	Habilidades
Contextos e Práticas	(EF69AR01) Pesquisar, apreciar e analisar formas distintas das artes visuais tradicionais e contemporâneas, em obras de artistas brasileiros e estrangeiros de diferentes épocas e em diferentes matrizes estéticas e culturais, de modo a ampliar a experiência com diferentes contextos e práticas artístico-visuais e cultivar a percepção, o imaginário, a capacidade de simbolizar e o repertório imagético.
Elementos da Linguagem	(EF69AR05) Experimentar e analisar diferentes formas de expressão artística (desenho, pintura, colagem, quadrinhos, dobradura, escultura, modelagem, instalação, vídeo, fotografia, performance etc.).

Fonte: (Brasil, 2018)

Contudo, a partir desta perspectiva das construções artísticas, é possível identificar um potencial para elaboração de uma sequência didática utilizando os mosaicos com o propósito de aprendizado das isometrias.

4.3.1 Tesselações e Mosaicos

O desenvolvimento do pensamento matemático e das expressões artísticas tem se manifestado através de diversas formas ao longo da história. Os mosaicos, presentes desde os tempos antigos, são um exemplo desta interação:

A construção de mosaicos, ainda que não difícil do ponto de vista artesanal em certos casos reflete em seus padrões uma intersecção curiosa e atraente com a imaginação geométrica, às vezes inconsciente, mas de relacionamento matemático não trivial nem fácil. (Barbosa, 1993, p. 1)

Os mosaicos estiveram presentes nas civilizações assíria, babilônica, persa, egípcia, grega, chinesa, entre outras. Muitos destes mosaicos, encontrados em pisos, tetos e painéis de parede de templos ou palácios, demonstram a íntima relação entre determinados padrões e a arte da decoração (Barbosa, 1993)

Na construção dos mosaicos, observam-se dois objetivos distintos e complementares: na perspectiva artística, busca-se encontrar um tipo de simetria ornamental em figuras, cuja repetição e interação formem um todo harmonioso, já na perspectiva matemática, o objetivo é através da busca de simetrias nos padrões ornamentais, ou então a busca de padrões geometricamente possíveis (Barbosa, 1993)

A utilização das Artes como ferramenta para contextualização da Matemática, também permite o resgate histórico de artistas e como foram realizadas suas produções. No século XX, um dos artistas que se destacou pela utilização explícita de conceitos matemáticos em suas obras foi M.C. Escher (1898-1972). Sobre seu trabalho:

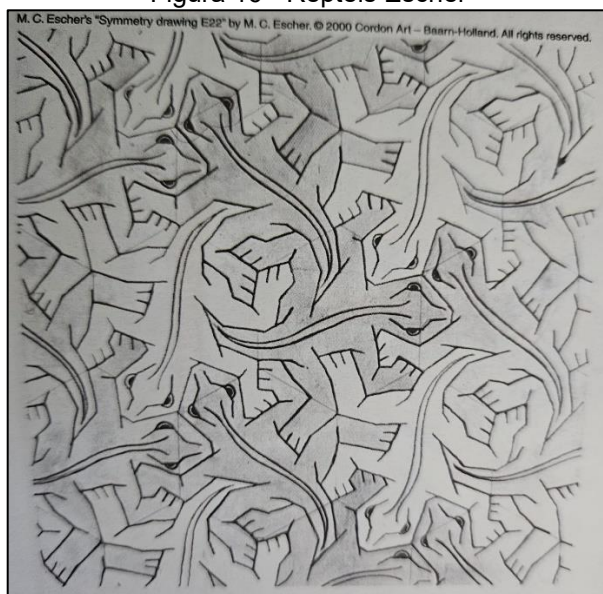
Suas obras expressavam notável combinação de sensibilidade e precisão técnica, e a chave para os surpreendentes efeitos de suas gravuras foi a matemática, especialmente o campo da geometria. Em seus trabalhos, ele demonstrou um grande domínio dos princípios fundamentais dessa disciplina e uma poderosa intuição na compreensão das relações espaciais. (Fainguelernt; Nunes, 2006, p. 23)

Escher utilizava em algumas de suas produções diferentes isometrias (reflexão, reflexão deslizante, translação e rotação) em mosaicos e outras obras (Imenes; Lellis, 2000). As construções gráficas eram utilizadas através da manipulação de um polígono convexo e sua repetição em um plano utilizando de uma das Isometrias (reflexão, translação e rotação).

Uma característica das obras de Escher eram os revestimentos ou pavimentações regular de superfícies através de padrões que se justapunham. Sua inspiração veio de estudos profundos que realizou sobre a arte e cultura árabes e suas propriedades geométricas, que eram repletas de simetrias, translações e padrões de repetição (Fainguelernt; Nunes, 2006).

Diferentemente dos padrões árabes, que se limitavam a figuras abstrato-geométricas, Escher inovou ao usar como elemento-padrão figuras concretas e perceptíveis na natureza, como peixes, aves e répteis (Figura 16).

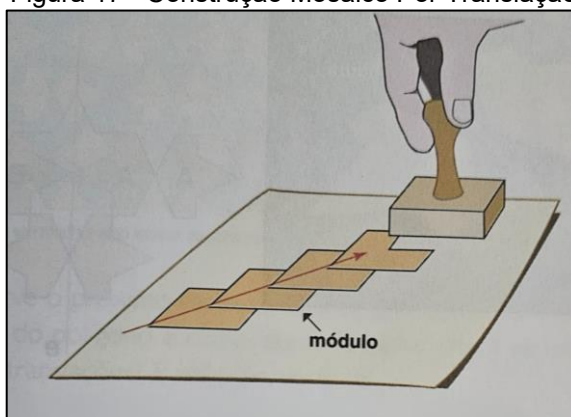
Figura 16 - Repteis Escher



Fonte: Imenes; Lellis, (2000, p. 25)

A construção de mosaicos integrada a artes pode assumir uma perspectiva que auxilie o desenvolvimento do pensamento geométrico, através da utilização das isometrias (translação, rotação e reflexão) nos seus módulos (figuras que formam o todo de um mosaico). Na translação (Figura 17), um mosaico pode ser construído a partir da repetição do módulo seguindo uma direção e sentido, um vetor (Imenes; Lellis, 2000).

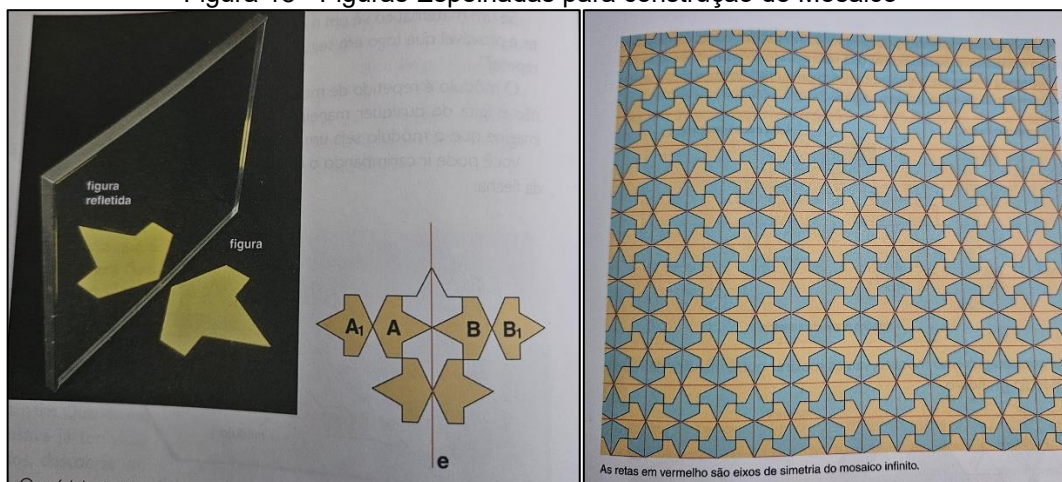
Figura 17 - Construção Mosaico Por Translação



Fonte: Imenes; Lellis, (2000, p. 29)

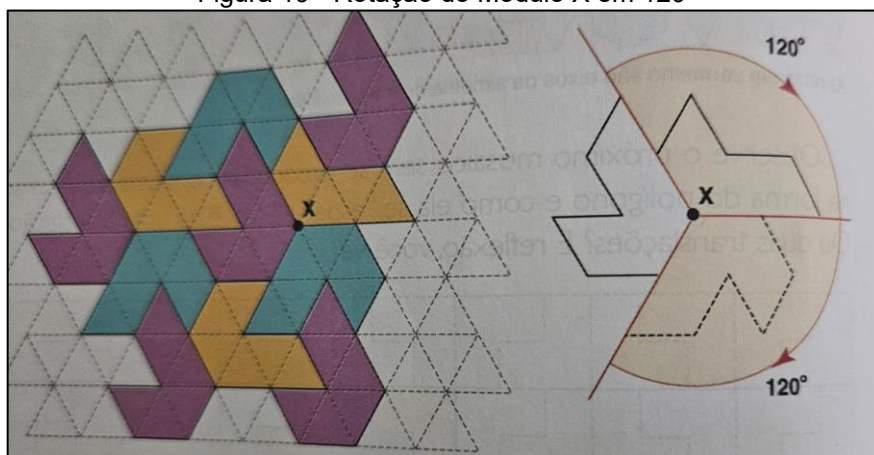
A reflexão o mesmo conceito, repetição de um módulo a partir da simetria, mosaicos construídos pela simetria de reflexão possuem linhas perceptíveis de simetria quando expandidos em todo um plano (Figura 18). Esse eixo de simetria serve para “espelhar” o módulo de forma que ele se repita a partir de toda tesselação (Imenes; Lellis, 2000).

Figura 18 - Figuras Espelhadas para construção de Mosaico



Fonte: Imenes; Lellis, (2000, p. 30,31)

Por fim, ao utilizar a rotação em um módulo também é possível construir diferentes figuras, a rotação do mosaico regular costuma estar associado a um dos vértices da figura, buscando utilizar rotações de diferentes ângulos respeitando o valor máximo de 360° (Imenes; Lellis, 2000). Na Figura 19, é possível verificar um padrão geométrico construído a partir da rotação do Vértice X em 120° de um módulo qualquer.

Figura 19 - Rotação do Módulo X em 120° 

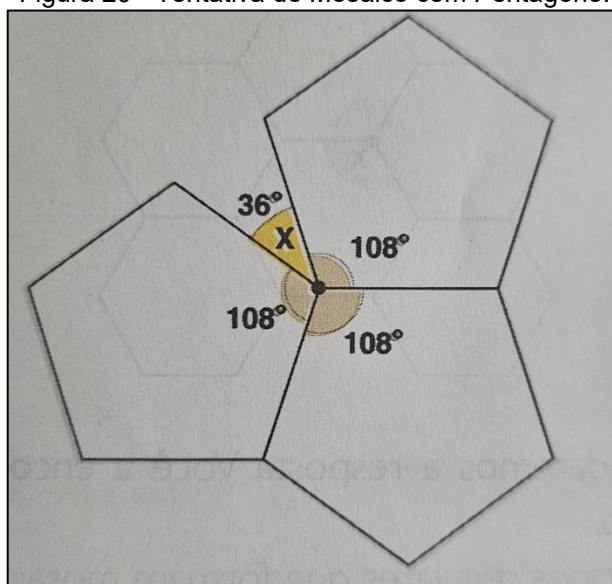
Fonte: Imenes; Lellis, (2000, p. 32)

Ainda assim, a utilização do valor máximo de 360° também possui importância quando ao construir mosaicos com apenas um tipo de polígono regular, visto que é a partir desta rotação que podemos determinar quais os polígonos que podem construir pavimentações no plano de forma lado a lado sem nenhuma sobreposição. Essa lei de formação está associada ao número de ângulos internos do polígono, visto que este deve ser um valor que divisor de 360, dessa forma possibilitando que se complete uma volta completa (Barbosa, 1993).

Devido a tal determinação, percebe-se que apenas três polígonos regulares podem compor um mosaico utilizando tais figuras, sendo eles: o triângulo com ângulos internos de 60° , quadrado com 90° e hexágono com 120° (Imenes; Lellis, 2000). Esses polígonos quando posicionados ao redor de um vértice, conseguem completar uma volta inteira sem sobreposições.

Ao se tratar de outros polígonos cuja soma dos ângulos internos ao redor de um vértice não seja igual à 360° , percebe-se uma situação em que resta espaço entre os polígonos, ou o valor obtido será maior que 360° causando uma sobreposição. É possível observar uma representação visual desse caso na Figura 20, que mostra como seria o posicionamento de pentágonos ao redor de um vértice X, onde nota-se que faltaria 36° para completar um mosaico sem sobreposições.

Figura 20 - Tentativa de Mosaico com Pentágono.



Fonte: (Imenes; Lellis, 2000)

O referencial teórico apresentado fundamenta a elaboração de uma sequência didática para o ensino de isometrias através da integração entre Matemática e Arte, especificamente por meio de mosaicos e tesselações. A articulação entre os diferentes marcos teóricos oferece subsídios tanto para a estruturação metodológica quanto para a análise do processo de ensino e aprendizagem.

A Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008) fornece um arcabouço teórico-metodológico que permite estruturar as interações entre aluno, professor e saber matemático. As etapas de ação, formulação, validação e institucionalização orientam o planejamento das atividades, enquanto o conceito de meio didático fundamenta a escolha dos materiais e recursos pedagógicos. A TSD é particularmente relevante para esta pesquisa pois enfatiza a importância das situações didáticas, nas quais os alunos desenvolvem autonomia na construção do conhecimento - aspecto fundamental quando se trabalha com explorações geométricas através da arte.

A abordagem das isometrias através dos mosaicos, conforme apresentado por Barbosa, (1993) e Imenes e Lellis, (2000), permite contextualizar os conceitos matemáticos em aplicações artísticas significativas. A obra de Escher exemplifica como as transformações geométricas podem ser exploradas criativamente, estabelecendo conexões entre o rigor matemático e a expressão artística. Esta perspectiva interdisciplinar alinha-se às orientações da BNCC (BRASIL, 2018) tanto para o ensino de Matemática quanto para o ensino de Arte.

Os princípios de Zabala (1998) para elaboração de sequências didáticas complementam o referencial ao fornecer critérios para organização e avaliação das atividades. A integração entre conteúdos conceituais (propriedades das isometrias), procedimentais (construção de mosaicos) e atitudinais (apreciação estética) permite desenvolver um trabalho que contempla diferentes dimensões da aprendizagem.

Este referencial teórico sustenta a hipótese de que a integração entre Matemática e Arte, estruturada através de situações didáticas que privilegiam a experimentação e reflexão, pode contribuir significativamente para a aprendizagem das isometrias. A metodologia de pesquisa, apresentada no próximo capítulo, baseia-se nestes fundamentos para investigar como esta abordagem se materializa na prática pedagógica.

5 MATERIAIS E MÉTODO

Para o estudo e validação da sequência didática, a pesquisa usou da abordagem qualitativa, que possibilita que o pesquisador possua uma visão indutiva a partir dos dados coletados. A partir da observação dos estudantes durante o experimento, foi possível coletar os dados para análise das contribuições da sequência didática para o aprendizado das isometrias.

Esta escolha metodológica se justifica pela natureza da investigação, que considera a relação dinâmica entre o mundo real (sala de aula) e os sujeitos (estudantes), reconhecendo que este vínculo não pode ser quantificado. Na pesquisa qualitativa, a interpretação dos fenômenos educacionais e a atribuição de significados às interações e aprendizagens são elementos fundamentais do processo investigativo (Silva; Menezes, 2005), e coleta de dados desses elementos se dá por meio de diferentes protocolos (entrevistas, observações, questionários), assim auxiliando na interpretação do experimento (Creswell, 2010).

Para atender aos objetivos desta pesquisa, foram utilizados os seguintes instrumentos de coleta de dados: avaliação diagnóstica estruturada para identificar os conhecimentos prévios sobre geometria básica dos estudantes, incluindo noções de ângulo e identificação de figuras geométricas; diário de campo para registro sistemático das observações durante a aplicação da sequência didática, documentando interações dos estudantes com as tarefas, entre pares e manifestações de saberes; análise da produção escrita dos estudantes através do exame detalhado das respostas, desenhos, anotações e soluções desenvolvidas pelos discentes nas folhas de atividades da sequência didática; atividades estruturadas da sequência didática para coleta de dados sobre o processo de aprendizagem das isometrias através da construção de mosaicos; e registro fotográfico para documentação visual das ações e estratégias dos estudantes durante a manipulação dos materiais concretos, respeitando os aspectos éticos da pesquisa.

Os instrumentos utilizados estão disponíveis nos apêndices desta dissertação, como as folhas de atividades com os questionários. A triangulação destes instrumentos permitiu uma análise abrangente das contribuições da sequência didática para a aprendizagem das isometrias, fornecendo múltiplas perspectivas sobre o processo educativo investigado.

Considerado como um ambiente único no qual foram coletados dados referentes a comportamentos, interações entre participantes e o contexto no qual eles estavam inseridos, para análise e interpretação dos dados foi utilizado o Estudo de Caso (Yin, 2001). Um Estudo de Caso se trata de uma investigação onde se estuda uma ocorrência específica, na qual sua análise possui forte caráter descritivo, possibilitando uma visão aprofundada de um contexto ou situação (Ponte, 2006).

Pelo caráter analítico da pesquisa, a análise dos dados considerou o contexto específico no qual os estudantes estavam inseridos, reconhecendo que variáveis externas como condição socioeconômica, fatores emocionais decorrentes da situação pós-enchente, infraestrutura do ambiente escolar e defasagem no nível de aprendizagem poderiam influenciar os comportamentos observados durante o experimento. Dessa forma, a escolha do Estudo de Caso permitiu uma análise contextualizada do caso estudado, considerando essas particularidades do ambiente educacional.

Diante das possibilidades interpretativas, o estudo de caso pode contribuir, de modo singular para que o pesquisador consiga compreender problemáticas relacionadas a indivíduos, grupos sociais, organizações, programas, políticas, quando permite realizar análises amplas e significativas sobre o objeto de pesquisa. (Monteiro; Tormes; Moura, 2018, p.19)

Assim, a abordagem qualitativa do tipo estudo de caso apresentou-se como um caminho metodológico apropriado para investigar as contribuições da sequência didática no aprendizado de isometrias, possibilitando um olhar atento às interações, processos e significados construídos pelos estudantes ao longo do experimento.

A pesquisa foi realizada na Escola Estadual de Ensino Fundamental Gonçalves Dias, Porto Alegre no estado do Rio Grande do Sul. O colégio está inserido em um bairro residencial em uma comunidade escolar composta por famílias de classe média-baixa que moram nas proximidades da escola.

Os participantes da pesquisa foram 29 estudantes de duas turmas de 8º ano do Ensino Fundamental com idades entre 13 e 15 anos. O experimento ocorreu durante os períodos regulares de matemática das turmas, em quatro encontros, nos meses de outubro e novembro de 2024. A seleção destes participantes seguiu os critérios éticos estabelecidos, tendo sido incluídos apenas os estudantes que assinaram o Termo de Assentimento e cujos responsáveis assinaram o Termo de Consentimento Livre e Esclarecido, conforme exigido pelo Comitê de Ética. Os demais

alunos participaram normalmente das atividades pedagógicas propostas como parte do currículo regular, mas não tiveram seus dados coletados ou analisados para fins de pesquisa. A pesquisa foi aprovada pelo Comitê de Ética 5349 da Universidade Luterana do Brasil, com Certificado de Apresentação de Apreciação Ética (CAAE) de número 83130524.6.0000.5349 e parecer consubstanciado do CEP de nº 7.106.492.

O contexto educacional no qual a pesquisa foi desenvolvida caracterizou-se por circunstâncias excepcionais ocorridas durante o ano letivo de 2024. O estado do Rio Grande do Sul enfrentou uma catástrofe ambiental com extensas cheias de rios após um período prolongado de chuvas, resultando em enchentes em diversas áreas, inclusive na região metropolitana. Embora o bairro da escola não tenha sido diretamente afetado, as aulas foram suspensas durante o período de 2 meses.

Após a retomada das atividades escolares, houve a saída da professora titular de Matemática, deixando os estudantes aproximadamente dois meses sem aulas da disciplina devido à falta de professores substitutos. Foi neste contexto que o pesquisador ingressou na escola como professor regente, assumindo as turmas de 8º ano para desenvolver esta investigação.

A seleção da escola foi determinada pela oportunidade de desenvolvimento da pesquisa em contexto real de sala de aula, onde o pesquisador assumiu a função de professor regente de Matemática nas turmas de 8º ano da Escola Estadual de Ensino Fundamental Gonçalves Dias. Esta condição possibilitou a aplicação da sequência didática como parte integrante do currículo regular, proporcionando um ambiente autêntico para a investigação das contribuições pedagógicas propostas. As atividades desenvolvidas estão alinhadas com as demandas da BNCC, que estabelece a habilidade EF08MA18 para o oitavo ano, relacionada ao reconhecimento e construção de figuras utilizando as transformações geométricas (Brasil, 2018). Ademais, as atividades se alinharam também com a Matriz de Referência Priorizada encaminhada aos professores destinada às escolas que tiveram suas atividades suspensas durante o período de enchentes em 2024 (Rio Grande Do Sul, 2024), encontrada no Anexo A.

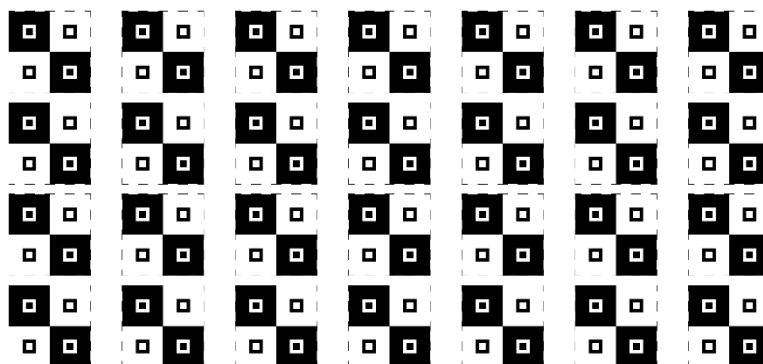
Para desenvolver a pesquisa foi realizada uma avaliação diagnóstica para identificar quais os conhecimentos sobre geometria básica dos estudantes, como a noção de ângulo e identificação das figuras geométricas. Para observar o comportamento dos estudantes e as suas considerações sobre as atividades propostas pela SD, foi realizado um registro detalhado em um diário de anotações

durante o experimento, essa escolha se alinha com a perspectiva de que Creswell, (2010) apresenta sobre a observação em uma pesquisa qualitativa, que se dá por meio de anotações das atividades do experimento. Neste diário foram anotadas suas interações com as tarefas, outros estudantes e seus saberes. As produções escritas pelos discentes também foram analisadas para compreender a adequação das atividades propostas e o objetivo da aprendizagem das isometrias, foi possível observar os desenhos, anotações e soluções desenvolvidas pelos estudantes diante dos problemas propostos durante o experimento.

Os aspectos observados, de acordo com o objetivo da pesquisa, foram analisar a SD em relação às dificuldades e facilidades em realizar as transformações geométricas na construção de mosaicos; como se desenvolveu a formação dos conceitos de isometria; a efetividade do material proposto dentro do contexto das TSD. Também foi observado como os estudantes externam a formação do pensamento geométrico associado às isometrias durante a resolução das atividades, seu progresso ao longo da sequência, e se demonstram interesse e autonomia na realização das tarefas propostas. Além disso, verificou-se como as atividades da sequência didática se adequam à TSD, observando o papel do professor em cada uma das situações – adidáticas e didáticas (Brousseau, 2008).

Como parte das atividades foram desenvolvidos materiais manipuláveis específicos para o estudo das isometrias. Optou-se em utilizar esses materiais devido a possibilidade manipulação e visualização dos conceitos geométricos conforme apontam Costa (2023) e Silva (2017). Foram confeccionadas peças de acetato transparente (Figura 21) contendo os módulos do mosaico, que são figuras que, ao serem organizadas repetidamente, compõem um mosaico completo.

Figura 21 - Molde para recorte das peças de acetato.



Fonte: Elaborado pelo pesquisador

Estas peças foram produzidas pelo próprio pesquisador através de impressão e recorte manual. A escolha do acetato transparente deveu-se à dupla funcionalidade proporcionada pela transparência: permitia a sobreposição das figuras geométricas durante as atividades e facilitava a visualização da reflexão, uma vez que a parte posterior do acetato apresentava o módulo refletido. Os moldes para impressão estão disponíveis no Apêndice F

Este material foi utilizado como suporte na segunda, terceira e quarta atividades da sequência didática, onde os estudantes trabalharam com a reconstrução de mosaicos e identificação das isometrias presentes. O material serviu como elemento mediador entre os conceitos teóricos das transformações geométricas e sua aplicação prática, possibilitando a manipulação física das peças e a visualização concreta das propriedades invariantes de cada isometria. Através da transparência, os estudantes podiam observar diretamente como cada transformação (reflexão, translação e rotação) preserva determinadas características das figuras, como forma, tamanho, ângulos e distâncias entre pontos, facilitando a compreensão destes conceitos geométricos.

As expectativas sobre a sequência didática eram de que as atividades que interagem entre a matemática e artes pudessem ser um motivador para despertar o interesse nos conceitos geométricos. Fainguelernt e Nunes (2006), em sua pesquisa apontam que a utilização de atividades voltadas para esse meio ocasionou em resultados positivos referentes a participação dos estudantes, interesse e confiança na sua capacidade de construir conhecimentos matemáticos.

5.1 AS ATIVIDADES DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A estruturação da sequência didática considerou o contexto educacional específico, marcado pela interrupção prolongada das atividades escolares devido às enchentes e ausência de professor de matemática. Para compreender o nível de conhecimentos geométricos dos estudantes, foi realizada uma avaliação diagnóstica específica sobre Geometria Plana, verificando conhecimentos considerados pré-requisitos para o estudo das isometrias, como propriedades dos polígonos e ângulos. Os resultados desta avaliação serviram como parâmetro para a análise posterior das dificuldades e progressos observados durante a aplicação da sequência didática, permitindo distinguir obstáculos relacionados a conhecimentos prévios daqueles específicos à compreensão das isometrias.

As atividades da sequência didática foram elaboradas para situar os estudantes em problemáticas voltadas à construção de mosaicos a partir da repetição de padrões, levando-os a identificar as isometrias presentes nas tesselações. A estratégia adotada consistiu em propor que os estudantes registrassem sequencialmente as transformações geométricas (movimentos) aplicadas a um polígono (módulo de mosaico) para reconstruir os mosaicos apresentados nas atividades. À medida que os estudantes descreviam esses movimentos em linguagem natural, o professor introduzia progressivamente os conceitos da isometria, e assim seguiria com as atividades apresentando novos mosaicos, mas analisando se os estudantes passaram a reconhecer as isometrias apresentadas. Essas atividades se encontram disponíveis nos Apêndices.

A SD foi estruturada considerando as etapas da TSD, buscando possibilitar momentos em que se fosse possível a partir da interação dos estudantes com o meio educacional, perceber as diferentes situações didáticas: ação, formulação, validação e institucionalização (Brousseau, 2008).

5.1.1 Primeira Atividade: Introdução aos Mosaicos

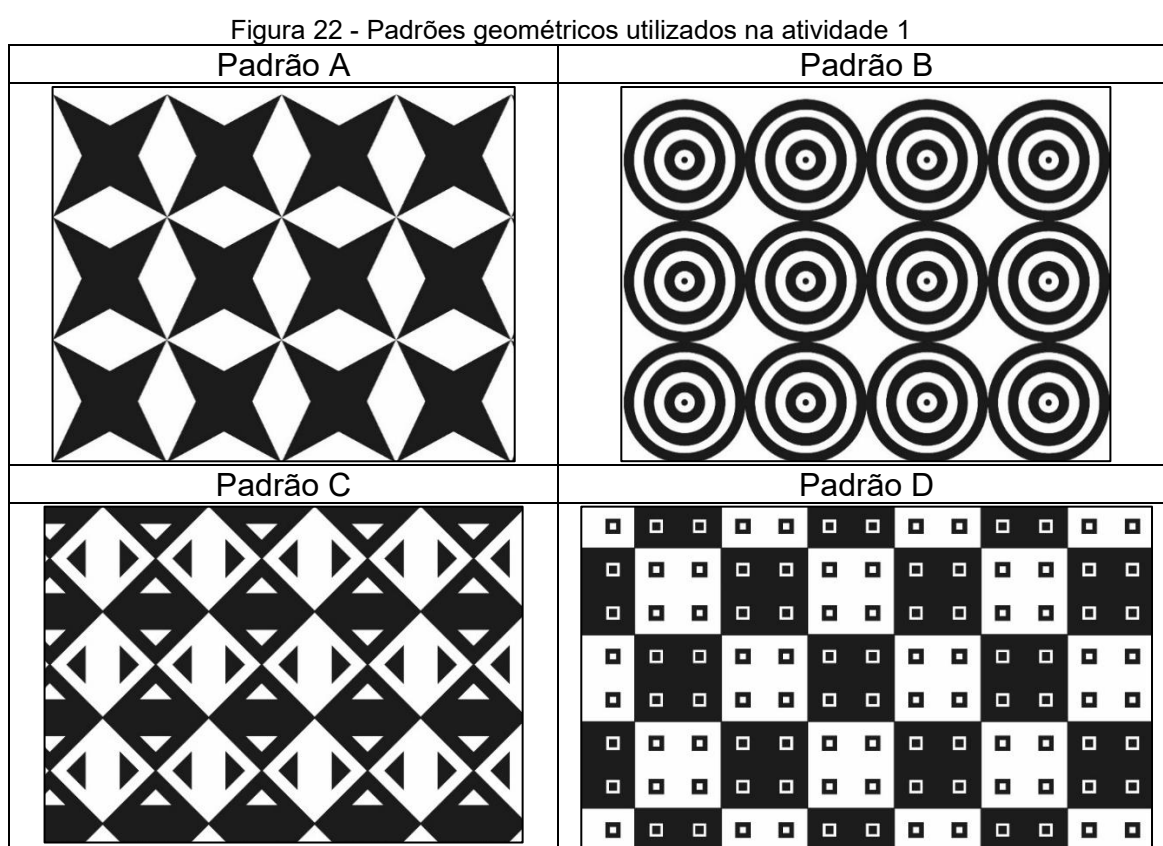
A atividade começa fornecendo aos estudantes mosaicos impressos e solicitado que estes estudantes tentem reconhecer quais figuras formam o módulo que constrói o todo do mosaico. Esta proposta foi elaborada à luz da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau, (2008), buscando analisar como as diferentes situações didáticas se manifestam durante o desenvolvimento da atividade.

O instrumento de coleta de dados foi estruturado com quatro padrões geométricos diferentes (Padrões A, B, C e D), que apresentavam níveis progressivos de complexidade. Aos estudantes, foi solicitada a identificação da menor unidade quadrangular (módulo) que, quando repetida, compunha o padrão completo. Esta tarefa alinha-se com a perspectiva de Barbosa (1993), que destaca a dualidade complementar na construção dos mosaicos: a busca artística de padrões harmoniosos através da repetição e a perspectiva matemática de identificação de simetrias e estruturas geometricamente viáveis.

Também foi disponibilizado folhas maiores com os padrões impressos para que os estudantes pudessem riscar, dobrar e cortar para tentar facilitar a visualização desse menor módulo. Estas estratégias de manipulação direta dos padrões constituem elementos fundamentais da situação de ação na TSD de Brousseau (

2008), onde os estudantes interagem com o meio didático e recebem informações que permitem reformular suas estratégias e aprimorar suas hipóteses sobre a estrutura dos mosaicos.

A atividade contemplou tanto a identificação visual dos módulos quanto a reflexão sobre as estratégias empregadas pelos estudantes. Para esta reflexão, foram propostas questões direcionadas à explicação dos processos utilizados: aspectos inicialmente observados, métodos de exploração, eficácia das estratégias, formulação de hipóteses e dificuldades encontradas durante o processo. A Figura 22 apresenta os quatro padrões geométricos utilizados na atividade introdutória.



Fonte: Elaborado pelo autor

Os padrões foram selecionados considerando diferentes níveis de dificuldade. O Padrão A apresenta uma estrutura simples, com figuras que se assemelham a estrelas, em um primeiro momento podem acreditar que o menor módulo que compõe o mosaico é toda a figura da estrela, entretanto após algumas análises verificam que na realidade são as suas pontas. O Padrão B introduz formas curvilíneas que se conectam, a estratégia para identificação se assemelha ao primeiro padrão. Os Padrões C e D possuem estruturas mais complexas, exigindo maior análise para a identificação do módulo básico.

Ao final da atividade, os estudantes responderam a cinco questões reflexivas (Figura 23):

Figura 23 - Questões no final da atividade

1	Quais partes dos padrões geométricos você observou inicialmente para encontrar os menores módulos?
2	Que métodos você usou para explorar o padrão (recortar, riscar, dobrar)?
3	Os métodos que você utilizou, ajudaram ou dificultaram sua busca? Por quê?
4	Quais foram suas hipóteses iniciais sobre o menor quadrado que compõe o padrão? Essas hipóteses mudaram? Se mudaram, por quê?
5	Você encontrou dificuldades em encontrar o menor quadrado que compõe os padrões? Quais?

Fonte: Elaborado pelo autor.

Durante o desenvolvimento da atividade, se objetiva observar as diferentes situações didáticas propostas por Brousseau (2008): a situação de ação, quando os estudantes manipulavam os padrões diretamente; a situação de formulação, ao verbalizarem suas estratégias e descobertas; e a situação de validação, quando justificavam suas conclusões. Posteriormente, na discussão coletiva, realizou-se a institucionalização dos conceitos relacionados aos módulos dos mosaicos.

Os dados coletados foram analisados segundo a perspectiva qualitativa do estudo de caso (Yin, 2001), considerando as respostas escritas dos estudantes como evidências do processo de construção do conhecimento. Esta análise buscou identificar padrões de raciocínio, estratégias e dificuldades recorrentes, fornecendo subsídios para compreender as contribuições desta atividade no desenvolvimento do pensamento geométrico.

A atividade está alinhada com a habilidade EF08MA18 da Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), que preconiza o reconhecimento e construção de figuras obtidas por composições de transformações geométricas. Ademais, responde aos objetivos específicos da pesquisa ao promover um primeiro contato com os fundamentos necessários para a aprendizagem das isometrias por meio dos mosaicos.

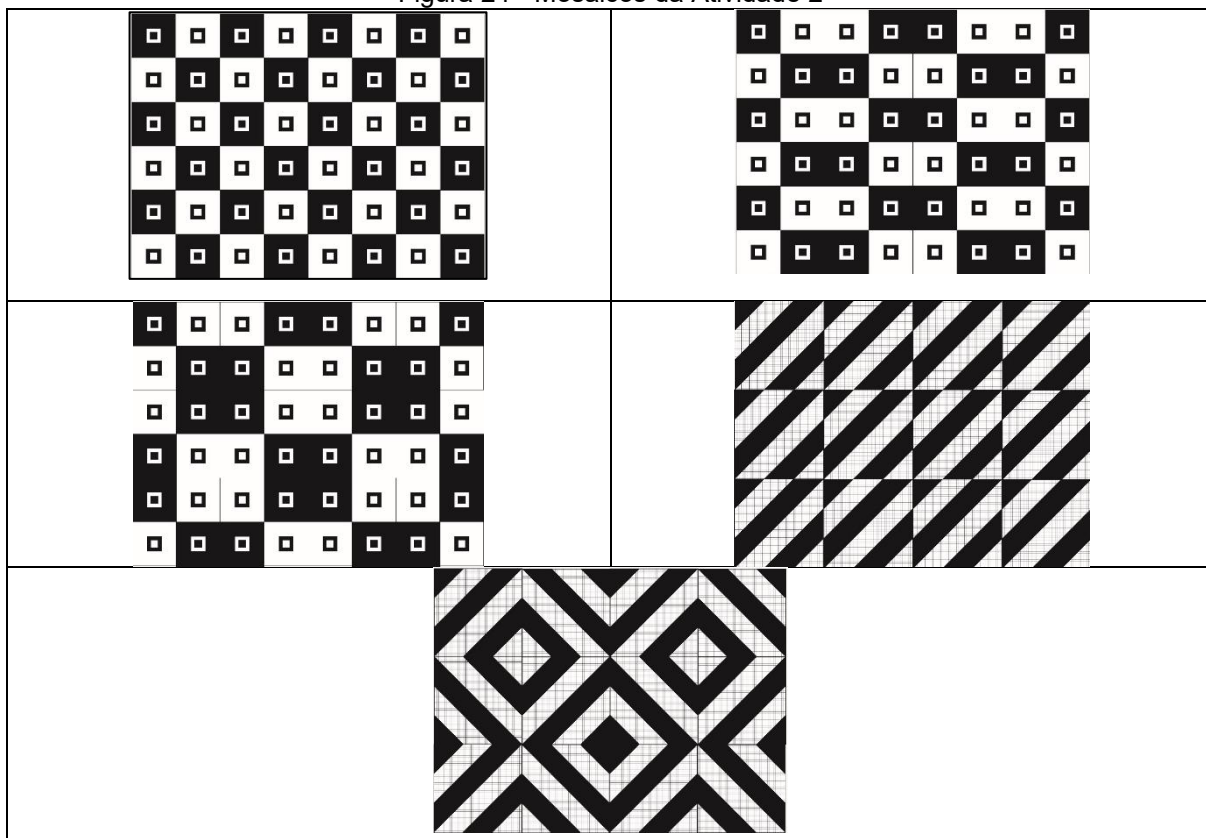
5.1.2 Segunda Atividade: Repetição de Padrões

A segunda atividade da sequência didática foi elaborada com o propósito de introduzir as transformações geométricas através da manipulação direta de módulos para a reconstrução de mosaicos. Esta atividade se fundamenta na continuidade da experiência proporcionada pela primeira atividade, avançando para a exploração dos movimentos necessários para a construção de padrões geométricos.

O instrumento de coleta de dados apresentava cinco diferentes mosaicos, cada um exigindo uma sequência específica de movimentos para sua reconstrução. Para a realização desta atividade, foram fornecidas aos estudantes peças de acetato transparente contendo os módulos básicos dos mosaicos, permitindo que eles manipulassem essas peças sobre os padrões impressos e identificassem os movimentos necessários para replicá-los. Esta abordagem com as artes visuais associadas à matemática visa proporcionar um ambiente onde os estudantes estejam livres de atividades mecanicistas de repetição, conforme apontam (Fainguelernt; Nunes, 2006)

A Figura 24 apresenta os cinco mosaicos utilizados na atividade, selecionados para proporcionar experiências com diferentes tipos de transformações geométricas.

Figura 24 - Mosaicos da Atividade 2



Fonte: Elaborado pelo autor

A atividade foi estruturada considerando a sequência completa das situações didáticas propostas por Brousseau, (2008). Na situação de ação, os estudantes interagiram diretamente com os materiais manipuláveis, movimentando as peças de acetato sobre os mosaicos impressos e recebendo feedback visual imediato sobre a correção de seus movimentos. Na situação de formulação, ao registrarem os

movimentos realizados e compartilharem com os colegas, os estudantes explicitariam os modelos desenvolvidos durante a manipulação, verbalizando suas estratégias.

A situação de validação foi planejada para ocorrer quando os estudantes conferissem com outros colegas se os movimentos elencados estavam corretos, confrontando suas sequências de transformações e verificando coletivamente se estas efetivamente reproduziam o padrão original. Por fim, na situação de institucionalização, foi previsto que o professor formalizasse os conceitos matemáticos subjacentes aos movimentos realizados, introduzindo a terminologia específica das isometrias (translação, reflexão e rotação)

Os padrões foram selecionados para proporcionar aos estudantes experiências com diferentes possibilidades de construção de mosaicos. A diversidade de padrões apresentados visava criar oportunidades para que os estudantes descrevessem, em linguagem natural, os movimentos observados durante a manipulação das peças. Não havia respostas consideradas certas ou erradas, pois o objetivo era que os estudantes expressassem livremente suas percepções sobre os movimentos necessários para recompor os padrões. Esta diversidade buscou proporcionar contato com os diferentes tipos de isometrias descritos por Imenes e Lellis, (2000) em suas explanações sobre a construção de mosaicos e se aproximando aos conceitos apresentados no livro didático de Giovanni JR (2022) que aborda as figuras formadas por composição de transformações.

A utilização de peças de acetato transparente como recurso didático foi pensada especialmente para a percepção da isometria de reflexão, facilitando a compreensão da inversão característica desta transformação. Este material foi selecionado como parte do meio didático, considerando que este é organizado a forma de promover de forma mais adequada a interação do estudante no processo de aprendizagem (Almouloud, 2007).

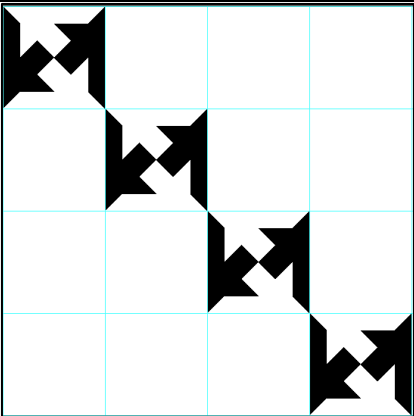
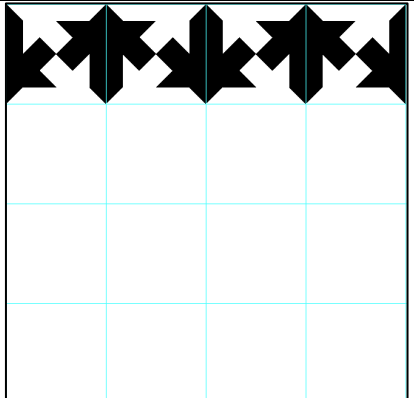
Após a manipulação das peças e registro dos movimentos, os estudantes foram convidados a responder sete questões reflexivas sobre o processo presentes no fim da folha de atividades. Estas questões não constituíam parte central da atividade no contexto das situações didáticas, mas foram incluídas como instrumento complementar para coleta de dados que serviriam como argumento na análise posterior das atividades.

5.1.3 Terceira Atividade: Formalização das Isometrias

A terceira atividade da sequência didática foi elaborada para aprofundar o conhecimento dos estudantes sobre as transformações geométricas, agora com a introdução formal dos conceitos de isometrias. Após as experiências iniciais de identificação de módulos e descrição de movimentos em linguagem natural, esta atividade buscou avançar para a utilização da terminologia específica das transformações geométricas: translação, reflexão e rotação.

O instrumento de coleta de dados foi estruturado em duas partes. Na primeira parte, foram apresentadas duas figuras geométricas onde os estudantes deveriam identificar quais transformações ocorreram para que a figura fosse construída. Cada figura apresentava um conjunto de transformações e os estudantes deveriam indicar, em uma tabela, não apenas o tipo de transformação (translação, reflexão ou rotação), mas também especificar o movimento e a quantidade/referência relacionada a cada transformação (Figura 25).

Figura 25 - Primeira Parte da Atividade

		Transformação Geométrica (Translação, Reflexão e Rotação)	
	Nº	Movimento	Quantidade Referência
	1º		
	2º		
	3º		
	4º		
	5º		
	6º		
	Nº	Movimento	Quantidade Referência
	1º		
	2º		
	3º		
	4º		
	5º		

Fonte: Elaborado pelo Autor

Na segunda parte da atividade, assim como na atividade anterior, os estudantes manipulavam peças de acetato para replicar quatro diferentes mosaicos, mas agora deveriam registrar especificamente as transformações geométricas utilizadas, nomeando-as corretamente como translação, reflexão ou rotação. Um exemplo preenchido foi fornecido para orientar os estudantes, ilustrando como deveriam registrar suas observações (Figura 26).

Figura 26 - Exemplo de Algoritmo

		
Nº	TRANSFORMAÇÃO-GEOMÉTRICA	QUANTIDADE/REFERÊNCIA
1º	TRANSLAÇÃO-2x	DIREITA-1-QUADRADO
2º	TRANSLAÇÃO-FILEIRA-1	BAIXO-1-QUADRADO
3º		
4º		
5º		
6º		
7º		
8º		
9º		
10º		

Fonte: Elaborado pelo Autor

O foco principal desta atividade não estava na elaboração de um algoritmo preciso para reprodução dos padrões, mas sim na identificação das isometrias presentes. A atividade foi estruturada para proporcionar o reconhecimento das diferentes transformações geométricas (translação, reflexão e rotação) quando aplicadas em contextos variados. A precisão na sequência de transformações era considerada secundária em relação à correta identificação dos tipos de transformações envolvidas.

A utilização das peças de acetato continuou sendo um recurso importante, permitindo aos estudantes visualizarem concretamente os efeitos das transformações geométricas. Esta atividade está alinhada com a abordagem que Imenes e Lellis, (2000) apresentam sobre as isometrias na construção de mosaicos, onde diferentes

transformações geométricas são aplicadas a um módulo básico para gerar padrões complexos.

A atividade foi concebida como preparação para a etapa final da sequência didática, proporcionando uma consolidação dos conceitos de isometrias antes que os estudantes fossem desafiados a aplicá-los de maneira mais criativa e autônoma.

5.1.4 Quarta Atividade: Formalização e Avaliação dos Conceitos

A quarta e última atividade da sequência didática foi elaborada com dois propósitos: formalizar os conceitos de isometrias que vinham sendo construídos e avaliar a compreensão dos estudantes após o percurso realizado. Diferentemente das atividades iniciais, que seguiam a estrutura da Teoria das Situações Didáticas, esta etapa final funcionou como exercício de aplicação dos conceitos já institucionalizados.

O instrumento de coleta de dados seguiu o formato de identificação das transformações geométricas em figuras dadas. Foram apresentadas inicialmente duas figuras simples, seguidas por cinco mosaicos com diferentes níveis de complexidade. Em cada caso, solicitava-se a identificação dos tipos de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação) presentes, com espaço para registro do movimento específico e sua referência.

Os mosaicos selecionados para esta atividade apresentavam uma progressão do simples ao complexo. Os primeiros mosaicos tinham padrões mais regulares, onde as transformações eram facilmente identificáveis. Posteriormente, foram introduzidos mosaicos com combinações de isometrias que exigiam análise mais detalhada. Esta abordagem está alinhada com a concepção de Zabala (1998) sobre a organização progressiva de atividades em uma sequência didática.

O papel desta atividade no contexto da sequência didática foi fechar o ciclo de aprendizagem. As atividades iniciais exploravam a descoberta e construção dos conceitos (seguindo as etapas da TSD de Brousseau (2008), enquanto esta última atividade proporcionou um momento de aplicação dos conhecimentos.

A relação entre esta atividade final e as anteriores mostra a progressão pedagógica: da identificação de módulos (primeira atividade), passando pela exploração dos movimentos (segunda atividade), seguida pela nomeação formal das transformações (terceira atividade), até a aplicação dos conceitos em contextos variados (quarta atividade).

Ao final do instrumento, foram incluídas questões sobre a percepção dos estudantes quanto ao processo de aprendizagem. Estas perguntas buscavam coletar dados para análise das contribuições motivacionais da abordagem interdisciplinar entre Matemática e Arte. Questões como "A forma de aprender os conceitos de transformações geométricas foram diferentes das outras aulas de matemática?" e "Você gostou desse formato de aula?" visavam identificar aspectos afetivos e motivacionais.

As questões reflexivas permitem investigar a dimensão subjetiva da experiência de aprendizagem. Fainguelernt e Nunes (2006) apontam que a abordagem das artes visuais associadas à matemática "possibilita um ambiente onde os estudantes estejam livres de atividades mecanicistas de repetição". As perguntas verificavam essa perspectiva, coletando impressões sobre como a abordagem interdisciplinar influenciou a percepção dos estudantes.

Do ponto de vista metodológico, esta atividade proporcionou dados para a análise qualitativa proposta no estudo de caso. Como aponta Yin (2001) o estudo de caso permite uma investigação que preserva as características dos eventos da vida real, como os processos educacionais. Os registros escritos sobre a identificação das transformações, junto com as respostas às questões reflexivas, oferecem material para analisar as contribuições da sequência didática para a aprendizagem das isometrias por meio dos mosaicos.

6 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Neste segmento da dissertação serão apresentadas as análises das quatro atividades realizadas pelos discentes, além da interpretação perante os seus comportamentos conforme realizam as atividades. Para auxiliar a compreensão e análise dessa sequência, foi realizada uma avaliação diagnóstica sobre os conhecimentos de geometria dos estudantes. Para isso, a avaliação diagnóstica foi estruturada com questões abertas sobre a noção conceitual dos estudantes sobre ângulos, além da classificação e identificação de ângulos e polígonos, a avaliação diagnóstica estará disponível nos apêndices.

Analizando as respostas à avaliação diagnóstica, é possível identificar lacunas significativas no conhecimento geométrico dos estudantes do oitavo ano. As concepções sobre ângulos indícios apontam respostas fragmentadas, com respostas como "ângulo é o grau de algo", "medida dos graus" ou "ângulo é uma inclinação"; indicando que, embora alguns discentes possuísem noções parciais do conceito, a compreensão não estava consolidada para a maioria da turma, como evidenciado pela frequência de respostas como "não lembro" ou "não sei".

A dificuldade em classificar os ângulos apresentados corrobora essa percepção, já que muitos estudantes não responderam ou apenas tentaram adivinhar as classificações. Em relação aos polígonos, observou-se um padrão similar de respostas imprecisas ou incompletas, demonstrando conhecimento superficial sobre estes objetos geométricos. Durante a identificação de polígonos específicos, percebeu-se que os estudantes conseguiam reconhecer e nomear as figuras apresentadas, porém não dominavam conceitos como o número de diagonais, evidenciando uma aprendizagem baseada mais no reconhecimento visual do que na compreensão das propriedades geométricas.

Estas observações são consistentes com os estudos de Pavanello (1993) e Lorenzato (1995), que documentaram o abandono gradual do ensino da geometria nas escolas brasileiras e suas consequências para a formação matemática dos estudantes. Os resultados da avaliação diagnóstica também se alinham com as constatações de Frantz e Bisognin (2022), que apontam a persistência de dificuldades no ensino da geometria mesmo após a implementação da BNCC.

A combinação entre a histórica dificuldade no ensino de geometria e a descontinuidade educacional enfrentada pelos discentes explica, em grande parte, os

resultados obtidos na avaliação diagnóstica. Como apontam Pavanello (1993) e Lorenzato (1995), muitos professores, sentindo-se inseguros para trabalhar com geometria, optam por relegá-la ao final do ano letivo, frequentemente não conseguindo abordá-la adequadamente. Esta realidade, somada às interrupções das aulas, intensificou o problema da defasagem no aprendizado dos conceitos geométricos básicos.

A identificação destes conhecimentos prévios possibilitou uma melhor compreensão dos possíveis erros durante a realização das atividades propostas na sequência didática. As lacunas conceituais em geometria elementar, como noções de polígonos e diagonais, embora não estejam diretamente relacionadas às transformações geométricas, poderiam influenciar o desempenho dos discentes durante o experimento.

Os resultados da avaliação diagnóstica orientaram ajustes pedagógicos durante a aplicação da sequência didática. Embora não tenham sido realizadas atividades preparatórias específicas antes do início da sequência, as lacunas identificadas, especialmente relacionadas à noção de ângulos, demandaram uma abordagem diferenciada durante a formalização dos conceitos. Na terceira e quarta atividade, durante a situação de institucionalização, o conceito de rotação recebeu tratamento ampliado em comparação às isometrias de translação e reflexão, incluindo a retomada das noções de ângulos notáveis, para que os estudantes compreendessem adequadamente os movimentos realizados. Esta diferenciação no tempo e profundidade dedicados a cada isometria exemplifica como a avaliação diagnóstica orientou decisões pedagógicas responsivas às necessidades identificadas.

Assim, esta avaliação diagnóstica cumpriu dupla função: serviu como parâmetro para interpretar as dificuldades observadas durante a aplicação da sequência didática e orientou ajustes pedagógicos responsivos às necessidades identificadas. A opção metodológica de não realizar atividades preparatórias específicas para sanar as lacunas identificadas baseou-se no objetivo central da pesquisa, que visa investigar as contribuições da sequência didática envolvendo mosaicos para a aprendizagem das isometrias no contexto real de sala de aula. Considerou-se que intervenções prévias à aplicação da sequência poderiam alterar artificialmente as condições naturais do ambiente educacional investigado, comprometendo a autenticidade dos dados coletados sobre como os estudantes

interagem com a proposta didática em suas condições reais de conhecimento. Desta forma, a sequência didática foi aplicada considerando o nível de conhecimento efetivo dos estudantes, permitindo observar tanto as potencialidades quanto as limitações da proposta em um contexto educacional autêntico.

No próximo segmento da dissertação, se encontra a análise de o capítulo de isometrias no livro didático das turmas que participaram do experimento. A escolha desse livro para análise possibilitou realizar uma comparação entre o que é esperado que os estudantes aprendam sobre isometrias e o que estava sendo trabalhado na sequência didática. Sendo possível identificar quais as contribuições que as atividades realizadas proporcionam à aprendizagem do que é abordado na literatura.

6.1 ABORDAGEM DAS ISOMETRIAS NO LIVRO DIDÁTICO

A fundamentação teórica apresentada sobre as isometrias e sua relevância no desenvolvimento do pensamento geométrico serve como base para a análise de como este conteúdo é abordado em um livro didático do 8º ano. Esta investigação permite identificar as escolhas didáticas e metodológicas utilizadas na transposição destes conceitos para o contexto escolar.

A escolha do livro se deu por ser a literatura didática oficialmente adotada pela Escola Estadual de Ensino Fundamental Gonçalves Dias para os oitavos anos, constituindo o material de referência utilizado pelos estudantes participantes da pesquisa. Esta opção metodológica permitiu estabelecer uma comparação direta entre a abordagem das isometrias presente no material didático oficial da escola e a proposta desenvolvida na sequência didática, possibilitando identificar convergências e contribuições específicas da abordagem através de mosaicos em relação ao que é esperado pelo currículo formal.

O livro *A Conquista: Matemática*, (Giovanni JR, 2022), publicado pela editora FTD, integra a coleção destinada aos Anos Finais do Ensino Fundamental. Aprovado pelo Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) de 2024 a 2027, a obra organiza-se em 9 unidades, totalizando 350 páginas. O livro possui um Manual do Professor, com a proposta de orientar o docente em sua prática educativa, nele constam orientações pedagógicas e justificativas pelas abordagens metodológicas indicadas pelo livro.

A estrutura do livro segue um padrão que inclui: abertura de capítulo com situações contextualizadas, desenvolvimento teórico, atividades resolvidas e propostas, e seções complementares (Figura 27).

Figura 27 - Seções complementares do Livro

Seção Complementar	Descrição
Saiba Que	Traz informações complementares importantes que podem ser consultadas de maneira prática ao longo dos capítulos
Tratamento de Informação	Traz guias de como a organização de dados facilitam o entendimento de informações
Educação Financeira	Para desenvolver conceitos de educação financeira
Tecnologias	Sugere possíveis meios tecnológicos alternativos para resolver e elaborar problemas
Por toda parte	Contextualização da Realidade com a Matemática
Pense e Responda	Atividades diversificadas objetivando o desenvolvimento do raciocínio lógico matemático
Fórum	Traz reflexões e questões para debate entre colegas
Glossário	Traz o significado de algumas palavras desconhecidas
Descubra Mais	Indicações de livros e outros conteúdos físicos ou digitais para aprofundar os conteúdos estudados.
Retomando o que aprendeu	Exercícios de Fixação
Um novo olhar	Momento proposto para reflexão sobre os conceitos desenvolvidos no capítulo/unidade.

Fonte: Giovanni JR (2022)

Metodologicamente, os autores propõem a aprendizagem de matemática através das perspectivas da didática da matemática e suas tendências, sendo elas o letramento matemático, modelagem matemática, uso de tecnologias digitais, resolução de problemas, entre outros.

O conteúdo de isometrias, é introduzido através de uma explanação expositiva, isso se dá devido ao pressuposto do autor que os estudantes já foram expostos àquele conceito, então parte do capítulo é somente para retomar os conceitos.

Os estudantes, provavelmente, estudaram o conteúdo de transformações no plano; então, vamos aproveitar este momento para retomar os conceitos e tirar eventuais dúvidas. Se considerar necessário que os estudantes realizem as situações apresentadas nestas páginas, pedir a eles que providenciem régua, compasso e papel quadriculado. (Giovanni JR, 2022, p. 204)

Nas duas primeiras páginas, o capítulo inicia apresentando inicialmente o conceito de reflexão, apresentando uma representação visual da isometria acompanhada de um texto-legenda e em seguida uma unidade com a definição do

conceito (Figura 28). Essa abordagem se mantém para a translação e sofrendo alterações na explanação da rotação, onde o livro busca exemplificar de forma detalhada.

Figura 28 - Conceito das isometrias apresentado pelo livro.

Translação	Rotação	Reflexão
A translação é a transformação no plano em que todos os pontos de uma figura são deslocados na mesma direção e no mesmo sentido, preservando as dimensões originais.	A transformação geométrica rotação, consiste em girar determinada figura em torno de um ponto do plano, mantendo o ângulo de deslocamento.	Quando duas imagens são reflexo uma da outra, e esse reflexo se dá em relação a uma linha, dizemos que há simetria de reflexão, ou simetria axial, e a linha é o eixo de reflexão, ou eixo de simetria.

Fonte: Adaptado de Giovanni JR (2022, p. 204)

Em seguida, o livro apresenta as isometrias compostas, que figuras geométricas que passam pela transformação de duas ou mais isometrias. Essa seção do capítulo possui apenas uma página, seguindo para as atividades.

Para o desenvolvimento das atividades (Figura 29), o livro propõe exercícios que envolvem o uso das isometrias em polígonos, reconhecimento das isometrias aplicadas em diferentes figuras geométricas, atividades de reconstrução das imagens utilizando as transformações e uma atividade contextualizada apresentando as isometrias em obras de artes.

Figura 29 - Atividades do Livro Didático

6. Escher (1898-1972), artista holandês de grande renome, utilizou duas transformações no plano para compor a obra a seguir.



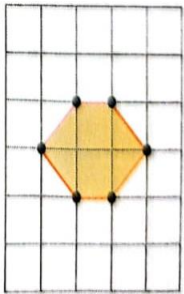
► ESCHER, Maurits Cornelis. **Pássaros/Peixes (nº 22)**. 1941. Impressão em papel. 34 cm × 45 cm.

Que transformações você identifica nessa obra? *Espera-se que os estudantes identifiquem a translação.*

4. Copie as figuras a seguir em uma folha de papel quadriculado. Em seguida, faça a translação de cada uma delas, de acordo com as instruções.

a) Deslocar a figura quatro quadradinhos para a direita.

Respostas na seção Resoluções comentadas deste Manual.



Fonte: Giovanni JR (2022, p. 207)

Por fim, a obra de Giovanni JR (2022), dedica suas últimas páginas para a utilização das tecnologias digitais. Nesta seção o livro apresenta uma situação em que

duas pessoas vão realizar a construção de um padrão geométrico utilizando algumas ferramentas do aplicativo de geometria dinâmica GeoGebra.

6.2 PRIMEIRA ATIVIDADE E O RECONHECIMENTO DAS REGRAS DE FORMAÇÃO DE PADRÕES GEOMÉTRICOS REGULARES

A primeira atividade da sequência didática foi implementada seguindo os pressupostos da Teoria das Situações Didáticas (Brousseau, 2008). Iniciou-se com uma etapa de contextualização, onde os estudantes foram questionados sobre onde poderiam ter observado padrões geométricos repetitivos em seu cotidiano. Como esperado, alguns estudantes mencionaram azulejos, estabelecendo uma conexão imediata com a proposta da atividade. Para fortalecer esta percepção, foram apresentadas algumas tesselações impressas formadas por azulejos, fornecendo um elemento concreto para a discussão.

Esta abordagem inicial serviu como preparação para a atividade central, alinhando-se com a perspectiva de Zabala (1998) sobre a importância de estabelecer vínculos entre conhecimentos prévios e novos conteúdos. Diferentemente da abordagem expositiva presente no livro didático analisado (Giovanni JR, 2022), que inicia diretamente com a definição formal das transformações geométricas, optou-se por uma introdução contextualizada e exploratória.

Após esta introdução, apresentou-se aos estudantes o desafio principal: identificar o menor "azulejo" quadrado que, quando repetido, formaria cada um dos padrões geométricos apresentados. Os materiais foram distribuídos - folhas de atividades contendo os quatro padrões em tamanho reduzido e os mesmos padrões impressos em folhas inteiras para manipulação.

Seguindo os princípios da TSD, os estudantes foram encorajados a organizarem-se livremente e escolherem suas próprias estratégias para resolver o problema proposto, configurando assim o meio (milieu) para o desenvolvimento das situações adidáticas (Brousseau, 2008).

Após a apresentação da proposta, os estudantes organizaram-se livremente para realizar a atividade, formando grupos, duplas ou trabalhando individualmente. Durante o desenvolvimento da atividade, foi percebido que se estabeleceu uma situação de ação. Os estudantes, ao interagir com os padrões geométricos, recebiam respostas do meio (retroação) que auxiliavam na elaboração de estratégias para resolver o problema proposto (Brousseau, 2008). Foram identificadas várias

abordagens (Figura 30): alguns dobravam as folhas para obter novas perspectivas do padrão; outros recortavam partes do papel para tentar identificar peças que poderiam compor toda a figura; porém, a estratégia mais utilizada foi o uso de lápis ou caneta para riscar o padrão, marcando possíveis quadrados mínimos. Os estudantes começavam riscando uma figura que imaginavam ser o módulo básico, e depois dividiam-na em partes menores, procurando identificar padrões mais simples.

Figura 30 - Ações Realizadas pelos Estudantes



Fonte: a pesquisa.

O uso frequente da estratégia de marcação com lápis ou caneta apresenta um sinal de situações de formulação e validação emergentes. Segundo Brousseau (2008), a situação de formulação é caracterizada pelo momento em que os estudantes explicam suas conjecturas aos colegas. Foi observado que, ao encontrar uma possível estratégia, vários estudantes a compartilhavam com quem estava próximo, explicando seus raciocínios e mostrando suas marcações. Por sua vez, os colegas que recebiam essas informações participavam de uma situação de validação, testando se a estratégia proposta funcionava para os diferentes padrões apresentados. Este processo de comunicação e verificação coletiva corresponde ao que Almouloud (2007) descreve como o julgamento da validade de um modelo por um interlocutor.

Um aspecto importante observado durante o experimento foi o papel do professor-pesquisador. Apesar da TSD indicar que o professor não deve ser considerado parte do meio educacional durante as situações adidáticas, já que as

interações do estudante com o meio fazem parte de um contrato onde o aluno se torna responsável por sua própria aprendizagem (Brousseau, 2008), foi notado que os estudantes frequentemente procuravam o docente. Eles faziam isso tanto para tirar dúvidas quanto, principalmente, para buscar aprovação das estratégias adotadas.

Este comportamento pode ser analisado por duas hipóteses complementares relacionadas ao contexto específico da turma: a primeira está ligada à interrupção pedagógica enfrentada pelos estudantes devido às enchentes e à falta de professor de matemática por cerca de dois meses, situações que podem ter enfraquecido sua confiança para realizar atividades matemáticas mais elaboradas sem supervisão constante. A segunda hipótese relaciona-se ao possível contrato didático anteriormente estabelecido com o professor anterior, sugerindo que os estudantes estavam acostumados a um modelo de validação externa, onde o docente assumia o papel de avaliador contínuo das produções.

Esta busca pela validação do professor revela um aspecto importante para a análise da sequência didática: a necessidade de considerar e, aos poucos, redefinir o contrato didático, dando maior autonomia na construção do conhecimento. Como diz Brousseau (2002), a mudança no contrato didático é um processo que precisa de tempo e adaptações tanto por parte dos estudantes quanto do professor.

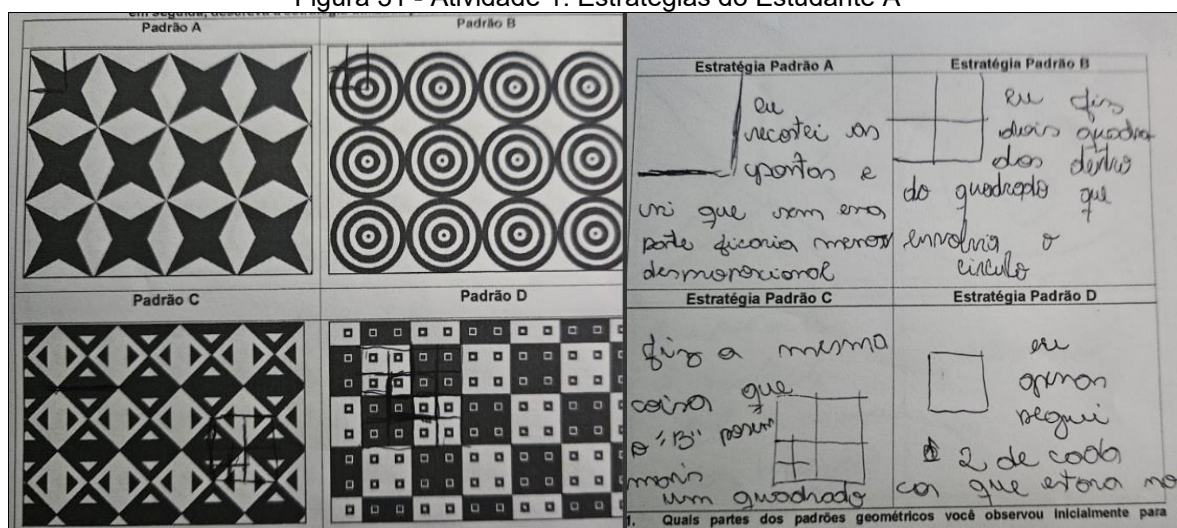
A partir das ações dos estudantes, foi possível observar que a maioria não apresentou dificuldades significativas em identificar os menores quadrados. Esta facilidade pode indicar conhecimentos prévios relacionados às transformações geométricas, possivelmente adquiridos através da experiência cotidiana com azulejos e outros padrões, onde diferentes arranjos são possíveis através da manipulação das peças. Um episódio observado durante a atividade corrobora esta hipótese: um estudante que nunca havia presenciado a montagem de pavimentações com azulejos apresentava dificuldades em desenvolver estratégias para identificar o menor quadrado, enquanto outro colega, com experiência neste tipo de manipulação, explicava-lhe o processo de pavimentação. Estas interações sugerem que alguns estudantes possuíam conhecimentos empíricos sobre transformações geométricas, embora não formalizados, o que demandaria a institucionalização pelo professor para transformar estes saberes intuitivos em conhecimento matemático estruturado.

Na folha de atividades existiam os mosaicos e além destes também havia espaços que solicitavam que estes explicassem qual a estratégia que realizaram para encontrar os menores quadrados. As respostas das estratégias dos estudantes foram

curtas e grande parte dos estudantes responderam que “riscaram” ou que “recortaram” as figuras para encontrar os menores quadrados.

O Estudante A (Figura 31) obteve sucesso na identificação dos menores quadrados de forma satisfatória usando diferentes meios para cada um dos padrões, percebe-se que a utilização de diferentes materiais manipulativos possibilitou diferentes possíveis abordagens para a resolução da atividade proposta, de acordo com os dados levantados por Silva (2017) sobre o benefício do uso de material manipulativo. Essa utilização também caracteriza a validade do meio estruturado pelo docente para a atividade, visto que a partir das diferentes manipulações realizadas pelo Estudante A utilizando diferentes ferramentas que compuseram o meio educacional, este estudante conseguiu obter informações suficientes para que formule possíveis conjecturas sobre seu aprendizado (Brousseau, 2008).

Figura 31 - Atividade 1: Estratégias do Estudante A



Fonte: a pesquisa.

Outro aspecto que fomenta o potencial da atividade para a estruturação do meio educacional da situação didática proposta se dá pelo relato do estudante que apesar da apresentação da atividade, o discente não entendeu de começo o que exatamente deveria fazer, como menciona ao responder à pergunta cinco do questionário sobre as dificuldades encontradas no percorrer da atividade – “*Sim, eu não entendi no início a atividade*”. A dúvida sobre a atividade apresenta um problema em relação a linguagem técnica do enunciado, devido as dificuldades dos estudantes em conceitos matemáticos, este estudante pode ter problemas ao compreender o que deveria ser feito. Entretanto, conforme foi observado nas respostas sobre suas

estratégias, o estudante conseguiu realizar as atividades de forma satisfatória, identificando corretamente o menor quadrado em cada um dos padrões geométricos.

A superação dessa dificuldade pelo estudante sugere que o meio didático estruturado para a atividade ofereceu condições favoráveis para a aprendizagem. Observou-se que o estudante aparentou compreender melhor a proposta quando pôde interagir com o meio através de diferentes formas - tanto pela manipulação dos materiais, que pareceu permitir uma nova perspectiva sobre a atividade, quanto pela comunicação com colegas que já haviam compreendido a proposta.

Conforme Brousseau (2008), o meio didático não se limita apenas aos materiais físicos, mas engloba também as interações sociais que ocorrem durante a resolução do problema. Quando o estudante recebeu explicações de um colega sobre como proceder na atividade, ocorreu uma situação de formulação onde as estratégias foram explicitadas, permitindo que ele compreendesse o objetivo e desenvolvesse suas próprias abordagens para identificar os menores quadrados nos padrões. Este processo sugere que a estruturação do meio didático pode ter contribuído para criar condições favoráveis à superação de dificuldades iniciais pelos estudantes através das retroações obtidas em suas interações. Reconhece-se, contudo, que a aprendizagem é um processo complexo e multifatorial, envolvendo aspectos cognitivos, motivacionais, sociais e contextuais que interagem de forma dinâmica com os elementos do meio didático estruturado (Figura 32).

Figura 32 - Atividade 1: Estratégias do Estudante B



Fonte: a pesquisa.

O processo descrito pelo Estudante B ("eu desenhei um quadrado e logo dividi no meio, depois é só testar se aquela parte forma o padrão") torna perceptivo a construção de um método próprio de validação, o mesmo estudante complementa sua

estratégia mencionando que *"tentei imaginar um quadrado entre os padrões"*. Mesmo sem interlocutores humanos diretos, o estudante estabeleceu um diálogo com o meio material, onde inicialmente propôs uma hipótese ao desenhar um quadrado e dividi-lo, seguido de uma etapa de auto validação ao testar se a parte identificada conseguia formar o padrão completo. Esta interação ilustra o que Brousseau (2008) descreve como a capacidade do meio de proporcionar retroações que permitem ao estudante verificar suas conjecturas.

A capacidade de auto validação demonstrada pelo estudante representa um importante indicativo do desenvolvimento da autonomia no pensamento matemático, possibilitada pela atividade. Além disso, este processo metodológico revela que o estudante não apenas encontrou a resposta correta, mas desenvolveu um procedimento sistematizado para abordar o problema, o que contribui para o desenvolvimento do raciocínio geométrico necessário para a posterior compreensão das isometrias.

O Estudante C ao responder o questionário após evidenciar as estratégias trouxe informações sobre o meio que permitiram caracterizar também um ambiente que a interação social pode ter auxiliado na resolução das atividades. Ao ser questionado sobre seus métodos utilizados para identificação dos menores quadrados, responde no plural *"Pensamos em fazer um quadrado na volta das figuras"*, isso indica que o processo metodológico para realização das tarefas propostas, o discente foi auxiliado por outros colegas que tinham o mesmo objetivo, essa percepção se evidencia quando o estudante explicita em sua resposta a quinta pergunta que se tratava das hipóteses iniciais para identificar um menor quadrado, menciona *"Eu percebi riscando e com a ajuda dos meus colegas"*, por mais que não tenha compreendido a questão em si, que se tratava de responder sobre como as hipóteses para encontrar o menor quadrado iam mudando de acordo com o percorrer da atividade, ainda assim determina que a interação entre interlocutores no meio educacional foi um fator importante para resolução da tarefa proposta.

A situação descrita pelo Estudante C está de acordo ao que Brousseau (2008) caracteriza como situação de formulação, na qual os estudantes expressam suas estratégias e compartilham conhecimentos, permitindo que o grupo avance coletivamente na resolução do problema. Este aspecto social da construção do conhecimento matemático é particularmente relevante na TSD, que reconhece a importância das interações entre pares para o desenvolvimento de conceitos. Outros

estudos além da TSD também valorizam a aprendizagem coletiva de forma colaborativa.

O *Team Based Learning* (Aprendizagem baseada em Equipes) é uma teoria que valoriza a aprendizagem baseada na colaboração e desenvolvimento na autonomia dos estudantes. Oliveira et al. (2018) em um estudo sobre a utilização da aprendizagem baseada em times contribui no desenvolvimento da responsabilidade individual de cada estudantes sobre o conhecimento que estão construindo. Além da responsabilidade, a aprendizagem em conjunto possui potencial para facilitar o engajamento dos estudantes nas atividades. Müller et al. (2017) relatam que em seus estudos sobre a metodologia de ensino de Instrução pelos Pares, afirmam que essa forma de ensinar é recomendada quando o objetivo é trabalhar o engajamento dos discentes. Esses estudos colaboram com o argumento que enfatiza o impacto positivo da interação social no processo de ensino e aprendizagem.

O caso deste estudante complementa as análises anteriores, demonstrando a diversidade de formas pelas quais o meio didático estruturado para a atividade propiciou condições para a aprendizagem: enquanto alguns estudantes desenvolveram métodos próprios de auto validação, outros beneficiaram-se diretamente da dimensão social do meio, reforçando a versatilidade da sequência didática em acomodar diferentes estilos de aprendizagem.

Após a fase de exploração pelos estudantes, realizou-se o momento de institucionalização, conforme previsto na TSD (Brousseau, 2008). Neste momento, foram formalizados os conceitos trabalhados implicitamente pelos estudantes durante as situações adidáticas. Foi explicado como os padrões são construídos e como, a partir da manipulação de um módulo básico - analogamente aos azulejos mencionados na contextualização inicial - podem ser construídos diferentes padrões geométricos.

Esta etapa de institucionalização é fundamental no processo didático, pois transforma os conhecimentos construídos pelos estudantes em saberes matemáticos reconhecidos. Como aponta Almouloud (2007), é o momento em que o professor estabelece o estatuto cognitivo do saber, conectando as descobertas dos estudantes com o conhecimento matemático formal. A institucionalização realizada estabeleceu as bases conceituais necessárias para as próximas atividades da sequência didática, nas quais seriam exploradas as transformações geométricas específicas (translação, reflexão e rotação) aplicadas aos módulos para a formação de mosaicos.

Foram observados indícios das situações de ação, formulação e validação através das interações dos estudantes com o meio didático estruturado, composto tanto pelos materiais manipuláveis quanto pelas interações sociais. Percebeu-se que, mesmo os estudantes que inicialmente apresentaram dificuldades, desenvolveram métodos próprios de identificação dos módulos, o que indica que o meio didático proporcionou condições para a superação de obstáculos e construção do conhecimento.

A abordagem contextualizada, diferentemente da apresentação formal encontrada no livro didático analisado de Giovanni JR (2022), possibilitou que os estudantes estabelecessem conexões entre os mosaicos e suas experiências prévias com azulejos, criando referências conceituais para a introdução das isometrias nas atividades subsequentes. Esta primeira etapa da sequência didática aparenta ter contribuído para o desenvolvimento de conceitos iniciais necessários para que, nas próximas atividades, os estudantes pudessem explorar as transformações geométricas de translação, reflexão e rotação na construção e análise de mosaicos.

6.3 SEGUNDA ATIVIDADE E ORGANIZAÇÃO DOS ALGORITMOS DE CONSTRUÇÃO DOS PADRÕES GEOMÉTRICOS

Após compreenderem como alguns padrões geométricos são formados através da manipulação de módulos na primeira atividade, o próximo passo da sequência didática buscou fazer com que os estudantes identificassem quais eram essas manipulações específicas. Esta progressão permite que, ao entenderem os movimentos utilizados na construção de padrões, os estudantes possam posteriormente transformar esses conhecimentos intuitivos em conhecimento matemático sobre as isometrias.

Para esta segunda atividade, foi entregue uma folha de atividades contendo diferentes padrões geométricos - alguns já conhecidos pelos estudantes da atividade anterior e outros novos. Os discentes deveriam observar cada padrão geométrico apresentado e elencar quais foram os movimentos realizados no módulo para construir o padrão completo. O objetivo era que eles elaborassem um algoritmo que possibilitasse a reconstrução daquele padrão utilizando apenas a manipulação de um módulo básico.

No início da atividade, foram distribuídos aos estudantes, já organizados da forma que preferiam, envelopes contendo diferentes módulos de padrões geométricos

feitos em acetato transparente. A escolha do acetato transparente como material manipulável constituiu um elemento fundamental do meio didático, no sentido proposto por Brousseau (2008), oferecendo retroações que permitiriam aos estudantes visualizarem concretamente os efeitos de suas manipulações.

Os módulos impressos em acetato despertaram o interesse dos estudantes durante as atividades, o que fez com que eles interagissem com o material em busca de responder as atividades. Esta interação direta caracterizou o que Brousseau (2008) define como situação de ação, na qual os estudantes, a partir de suas manipulações, recebiam retroações do meio que os auxiliavam a desenvolver estratégias para identificar os movimentos necessários na construção dos padrões. (Figura 33).

Figura 33 - Manipulação das Peças de Acetato



Fonte: a pesquisa.

A partir da observação do docente, foi possível verificar que aos poucos os discentes iam desenvolvendo uma autonomia para verificar se os movimentos que elencavam no algoritmo estavam corretos ou não. Este processo de auto validação é consistente com a proposta de Brousseau (2008) para as situações adidáticas, em que o meio proporciona informações suficientes para que o estudante possa validar suas próprias estratégias sem a intervenção direta do professor. Isso pode se dar pelo acesso ao material manipulável disponibilizado, pois enquanto elencavam os movimentos, podiam ver se aquilo que propunham realmente iria compor o padrão geométrico.

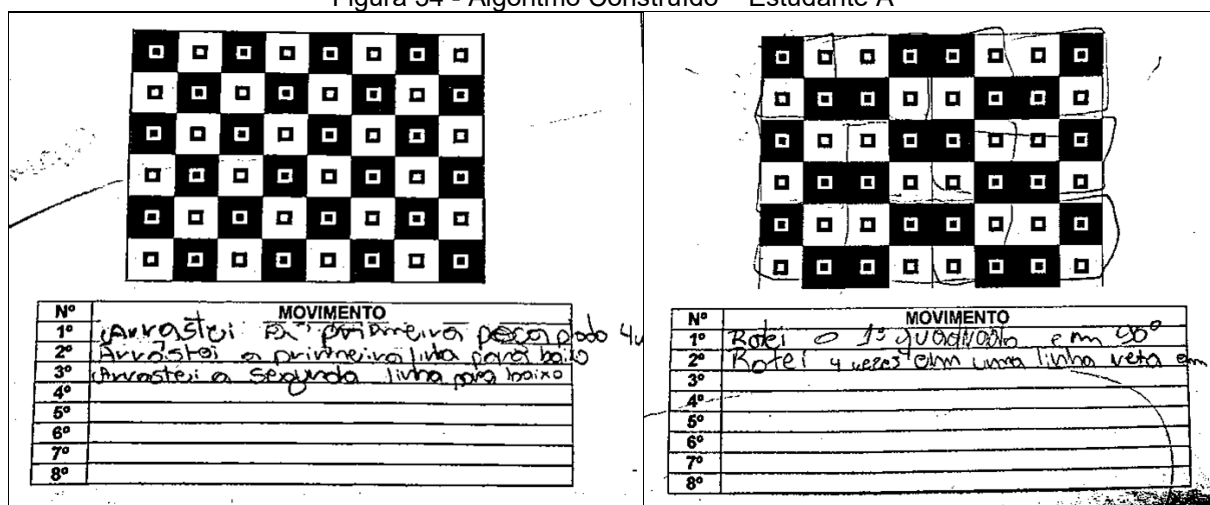
Ao descrever em forma de algoritmo como ocorreria o movimento para replicar o padrão, os estudantes foram comunicativos e constantemente conversavam com os colegas de seus grupos organizados para explicar como estavam fazendo e até mesmo para testar se o algoritmo construído por um colega estava correto ou não.

Estas interações evidenciaram a presença de situações de formulação, onde, segundo Brousseau (2008), ocorre a troca de informações entre interlocutores, permitindo que os conhecimentos implícitos desenvolvidos na situação de ação fossem verbalizados e compartilhados.

Foi possível observar momentos em que os estudantes testavam mutuamente os algoritmos elaborados por seus colegas. Verificando se as descrições de movimentos realmente podiam reproduzir o padrão geométrico apresentado, os estudantes mostravam estar em uma situação de validação. Brousseau (2008) define esta etapa como o momento em que os discentes demonstram a validade de seus modelos. Esta necessidade de comprovar suas hipóteses através da manipulação das peças de acetato para verificar se determinada sequência de movimentos realmente reconstituía o padrão. Almouloud (2007) aponta a validação como a etapa onde o discente precisa apresentar seu modelo para avaliação de outro interlocutor.

A atividade, a partir da necessidade da replicação dos movimentos, possibilitou que os estudantes exercitassem as noções que tinham sobre transformações geométricas, mesmo que ainda não formalizadas. Foi possível perceber, que ao elencarem os movimentos, os estudantes descreviam as transformações geométricas em linguagem coloquial, sem a acuidade matemática. O estudante A Figura 34, ao representar os movimentos, definiu as translações realizadas no módulo como “*arraste*” ou “*movi*” apresentando a direção para qual moveu, entretanto não elencou a distância percorrida. Nos movimentos de rotação, foi comum perceber que o estudante utilizava “*rote*” como representação da rotação em linguagem coloquial apontando os ângulos de rotação, entretanto não apresentou os pontos de referência para a rotação, apenas um sentido, se o quadrado girou para direita ou esquerda. Esta utilização de linguagem natural para descrever as transformações geométricas demonstra como os estudantes estavam desenvolvendo noções intuitivas dos conceitos que Imenes e Lellis (2000) apresentam sobre as isometrias utilizadas na construção de mosaicos.

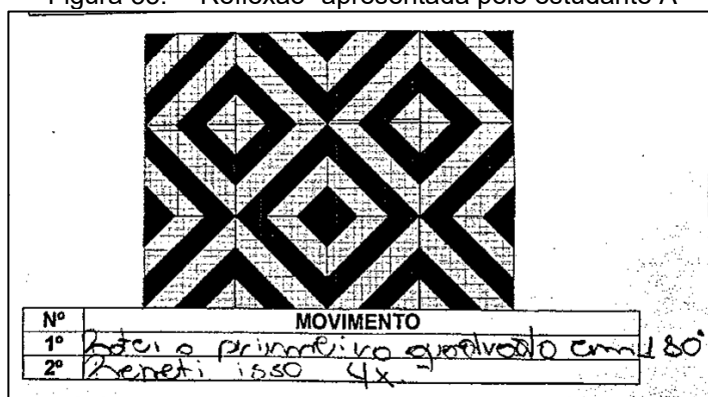
Figura 34 - Algoritmo Construído – Estudante A



Fonte: a pesquisa.

Neste primeiro momento não foi percebida nenhuma linguagem alternativa para a isometria de reflexão, no mosaico que se esperava que o estudante movimentasse esses conhecimentos (Figura 35), percebeu apenas rotação dizendo que “Rotei o primeiro quadrado em 180º”, sem referência. O que não representa uma colocação errônea do estudante, visto que também pode ser visto dessa forma, nas próximas atividades terão manipulações realizadas apenas com reflexão.

Figura 35: - “Reflexão” apresentada pelo estudante A



Fonte: a pesquisa.

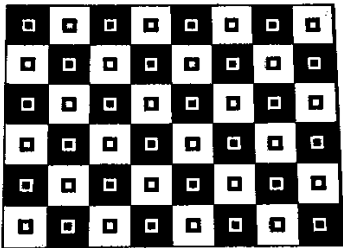
Contudo, o Estudante D ao realizar as atividades, ao elencar os movimentos entre um padrão e outro, apresentou duas nomenclaturas, “girou o 1º quadrado pro lado” são encontrados quando menciona as transformações de rotação, e quando se refere as figuras que podem ser tratadas como uma reflexão, representa movimentos como “virei o primeiro quadrado para o lado”. Essas representações e diferenciações indiciam uma movimentação dos conhecimentos intrínsecos das transformações geométricas, que irão ser desenvolvidos conforme o percorrer da sequência de

atividades. A diferenciação intuitiva que o Estudante D fez entre rotação e reflexão indica o desenvolvimento progressivo do pensamento geométrico necessário para a compreensão formal das isometrias (Imenes; Lellis, 2000).

Por mais que a compreensão da atividade e a linguagem técnica adotada nos enunciados da atividade parecem não ter apresentado problemas aparentes, a quantidade de movimentos apresentados na tabela, para alguns alunos, passou a perspectiva de que todas as linhas de movimento precisavam ser preenchidas. O que atrapalhou na compreensão da atividade. Essa situação ocorreu em alguns casos de estudantes da turma que não interagiram entre grupos, assim não propiciando maior entendimento sobre a atividade.

O Estudante E (Figura 36) representa alguns dos estudantes que interpretaram a atividade como a necessidade de preencher todas as linhas da tabela com movimentos, mesmo que o algoritmo resultante não fizesse sentido para a construção do padrão geométrico. Esta dificuldade evidencia o papel do meio didático, conforme discutido por Brousseau (2008), que quando não estruturado de forma suficientemente clara pode levar a interpretações não esperadas pelo professor.

Figura 36 - Algoritmo de Movimentos do Estudante E



Nº	MOVIMENTO
1º	Movi para o lado
2º	Movi para o lado
3º	Movi para o lado
4º	Movi para baixo
5º	Movi para baixo
6º	Movi para baixo e girar
7º	Movi para o lado
8º	Movi para o lado e girar

Fonte: a pesquisa.

Fica perceptível que o estudante conseguiu parcialmente elencar os movimentos de translação em linguagem coloquial para completar o padrão, terminando no 5º movimento. Entretanto, como restou movimentos para completar, o discente colocou outros movimentos que não condiziam com o algoritmo. Esse comportamento se manteve durante os outros padrões, o que indica uma carência de atenção a esse detalhe na atividade.

Após a realização das atividades, o último momento foi separado para a institucionalização do professor. Este momento é essencial para transformar os conhecimentos construídos pelos estudantes em saberes matemáticos reconhecidos (Almouloud, 2007; Brousseau, 2008). Foi então apresentado formalmente que os movimentos que os estudantes vinham descrevendo em linguagem natural correspondiam às transformações geométricas (Imenes; Lellis, 2000), estabelecendo assim a base conceitual necessária para a próxima etapa da sequência didática.

Ao responderem o questionário final da atividade, uma das perguntas que chamaram atenção foi aquela que questionava se alguma hipótese de outro grupo auxiliou na resolução das atividades. As respostas revelaram uma distinção clara entre dois comportamentos: enquanto alguns estudantes mencionaram que não discutiram entre grupos, aqueles que conversaram e interagiram com outros grupos apontaram no questionário a estratégia de girar as peças como uma descoberta compartilhada. Estes estudantes que estabeleceram diálogo entre grupos adotaram a técnica de posicionar o dedo em uma das pontas dos módulos de acetato e girar a peça para realizar o movimento de rotação. Por mais que ainda não apresentassem de forma adequada no algoritmo de construção a isometria de rotação, especificando ângulo e ponto de referência, intrinsecamente já realizavam essa ação com o material disponibilizado. Essa prática, originada da interação e troca de ideias entre os grupos, indicia a etapa de validação (Brousseau, 2008) durante a realização da atividade e proporcionou repertório conceitual para que o professor pudesse institucionalizar os conhecimentos utilizando esses conceitos já conhecidos pelos estudantes. Outra prática identificada pelos discentes no questionário foi a de testar novamente os algoritmos construídos, retornando à manipulação das peças de acetato sempre que surgiam dúvidas. Quando indeciso entre girar ou arrastar uma peça, os estudantes recorriam ao material manipulativo para sanar suas incertezas, validando empiricamente suas hipóteses através da experimentação concreta. Esta utilização recorrente do material manipulativo como instrumento de verificação indica que sua incorporação no processo de formação de conceitos auxilia os estudantes no desenvolvimento e refinamento de suas hipóteses, proporcionando um meio de auto validação que dispensa a intervenção constante do professor.

Durante a institucionalização, foi possível retomar os casos observados, como o Estudante A que utilizava 'arrastei' para translação e 'rotei' para rotação, demonstrando que suas descrições intuitivas correspondiam às transformações

geométricas formais. A diferenciação que o Estudante D fazia entre 'girar' e 'virar' foi validada como uma percepção correta entre rotação e reflexão, fortalecendo a confiança dos estudantes em suas observações. Este momento exemplifica o que Almouloud (2007) descreve como a transformação do conhecimento construído pelos estudantes em saber matemático institucionalizado, onde o professor estabelece o estatuto oficial dos conceitos que emergiram das situações adidáticas.

6.4 TERCEIRA ATIVIDADE E A TRANSFORMAÇÃO DA LINGUAGEM NATURAL PARA A LINGUAGEM MATEMÁTICA

Após a formalização dos conceitos trabalhados pelo docente, a terceira atividade assumiu o papel de aplicação daqueles conceitos novos às atividades no mesmo contexto das anteriores. Para esta atividade, manteve-se a estruturação do meio didático conforme preconizado por Brousseau (2008), com a entrega de uma folha de atividades e os envelopes contendo os moldes de acetato. O objetivo foi analisar se os estudantes conseguiam identificar e nomear as transformações geométricas utilizadas para a construção dos mosaicos.

Para facilitar a compreensão da construção do algoritmo, a atividade foi estruturada em níveis progressivos de complexidade. Inicialmente foram propostas atividades que não compunham um mosaico completo, mas apresentavam apenas transformações geométricas simples dos módulos. Esta abordagem possibilitou que os estudantes se adaptassem gradualmente à tarefa de identificar formalmente as isometrias presentes, transitando da linguagem coloquial utilizada na atividade anterior para a terminologia matemática apropriada.

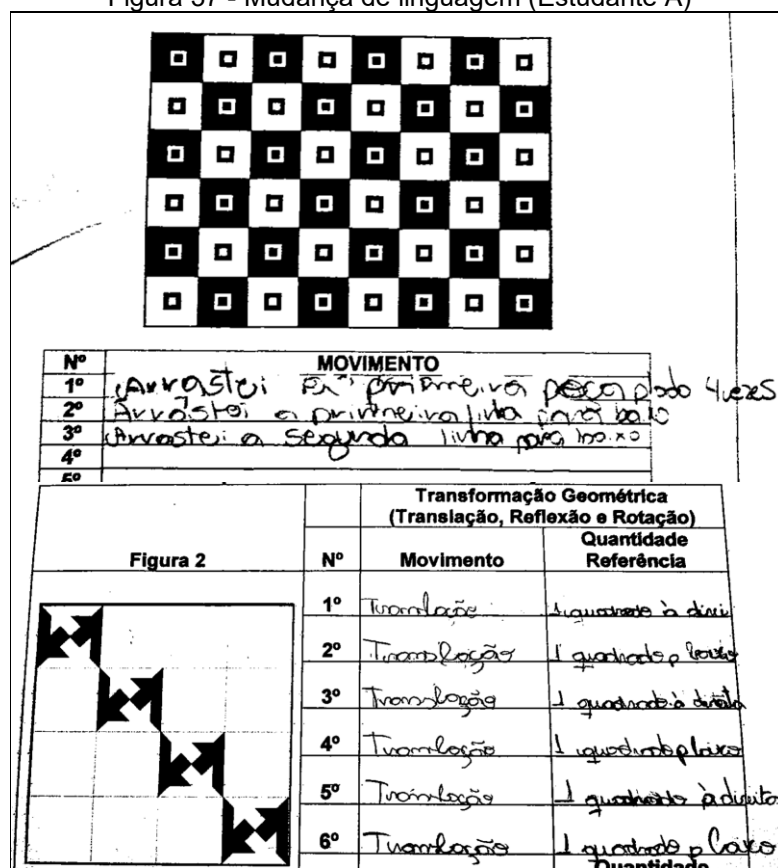
Conforme o percorrer da atividade, foi notada uma mudança de postura nas turmas em relação a sua autonomia. Diferentemente das atividades anteriores, onde alguns estudantes buscavam validação do professor para suas estratégias, nesta terceira atividade observou-se que muitos passaram a conferir seus algoritmos manipulando diretamente as peças de acetato, testando se a sequência de movimentos descrita realmente reproduzia o padrão apresentado. Ainda havia estudantes que pediam auxílio para tirar dúvidas sobre a construção do algoritmo, entretanto a maioria já validava os algoritmos por si só, utilizando o material manipulável como instrumento de verificação, além de colaborarem entre si para concluir a atividade sem necessidade de intervenção docente constante. Esta evolução na autonomia dos estudantes indica o desenvolvimento do que Brousseau

(2008) caracteriza como situações de validação mais independentes, onde os estudantes desenvolvem critérios próprios para avaliar a adequação de suas estratégias, reduzindo a necessidade de validação externa pelo professor.

Esta evolução na autonomia dos estudantes tornou necessário estabelecer critérios mais precisos para análise de suas produções, considerando tanto os avanços conceituais quanto as demandas procedimentais da atividade. Para análise das contribuições da atividade com mosaicos no desenvolvimento do pensamento matemático dos discentes, foram estabelecidos alguns critérios específicos: a apropriação da linguagem matemática adequada, a coerência entre o algoritmo estruturado e a figura construída, e a especificação correta de referências para cada isometria (para translação, direção e sentido; para reflexão, o eixo de simetria; e para rotação, o ângulo e ponto de referência). Estes critérios permitiram avaliar não apenas se os estudantes reconheciam as transformações, mas se conseguiam especificá-las com a precisão técnica necessária.

Após a segunda atividade foi percebido que os estudantes conseguiram transformar os movimentos elencados previamente nas transformações geométricas, evidenciando a efetividade do processo de institucionalização realizado. Um exemplo significativo desta transição conceitual foi observado no Estudante A, que na atividade anterior utilizava termos coloquiais como "arrastei" e "movi" para descrever translações, e "rotei" para rotações, e passou a empregar corretamente a terminologia matemática formal "translação" e "rotação" (Figura 37). Esta mudança representa mais que uma simples substituição vocabular. Também indica a apropriação conceitual das transformações geométricas, onde o estudante não apenas memorizou novos termos, mas compreendeu que suas descrições intuitivas correspondiam a conceitos matemáticos específicos. A capacidade de fazer esta conexão entre conhecimento informal e formal constitui um indicador importante do desenvolvimento do pensamento geométrico, demonstrando como o processo de institucionalização, conforme descrito por Almouloud (2007), permitiu que o estudante se apropriasse do saber matemático formal.

Figura 37 - Mudança de linguagem (Estudante A)



Fonte: a pesquisa.

O Estudante D ao manipular os módulos na atividade dois havia apresentado uma diferenciação entre os movimentos de rotação e reflexão utilizando os respectivos termos "girei" e "virei". Agora apresentava de forma clara os algoritmos com a linguagem matemática apropriada. O discente apresentava reflexão de forma clara e precisa nas primeiras atividades, elencando o movimento "reflexão" e indicando a referência como "eixo de simetria, lado direito". Entretanto, ao apresentar a reflexão nos algoritmos de construção dos mosaicos, por mais que tenha reconhecido a reflexão, ao indicar a referência, o estudante escreveu "direita, 1 quadrado". Essa percepção sobre a reflexão demonstra que por mais que ocorra a formalização dos conceitos matemáticos, ainda seria preciso de outros momentos de aplicação dos conceitos para que o estudante consiga elencar estes aspectos específicos das transformações geométricas em sua totalidade. Esta situação ilustra o que Zabala (1998) discute sobre a distinção entre conteúdos conceituais e procedimentais na aprendizagem. No caso observado, o estudante demonstrou apropriação do conceito de isometrias ao identificar corretamente a transformação como reflexão, mas o procedimento específico para especificar seus parâmetros

técnicos ainda estava em desenvolvimento. Estes aspectos procedimentais seriam trabalhados e reforçados na atividade seguinte, onde os estudantes teriam oportunidade de aplicar novamente os conceitos formalizados, consolidando a compreensão não apenas dos tipos de isometrias, mas também dos parâmetros específicos necessários para caracterizá-las completamente.

Em sua totalidade, observou-se que os estudantes, após o momento de institucionalização na segunda atividade, demonstraram compreensão das transformações geométricas, reconhecendo-as como os movimentos que haviam realizado anteriormente e substituindo a linguagem natural pela linguagem matemática apropriada. Com exceção de um único estudante, todos os demais conseguiram compreender a proposta da atividade de forma satisfatória, elencando os movimentos realizados nos módulos e demonstrando êxito na transição da linguagem coloquial para a terminologia matemática formal.

Quando confrontados com padrões geométricos que combinavam múltiplas isometrias, notou-se que a maioria dos estudantes apresentou incongruências ou falta de coesão na forma de elencar os algoritmos necessários para compor os padrões geométricos. A construção de algoritmos para descrever isometrias em mosaicos apresenta maior complexidade devido à necessidade de identificar e descrever diferentes transformações ocorrendo simultaneamente em um padrão. Considerando que a avaliação diagnóstica havia indicado que os estudantes não possuíam conhecimentos consolidados sobre aspectos elementares da geometria, esta exigência representou um desafio significativo para os discentes.

Conforme a tipologia de conteúdos proposta por Zabala (1998), diferentes tipos de conteúdo podem desenvolver-se em ritmos distintos, sendo o aspecto conceitual (reconhecimento das transformações) o foco central em toda a proposta pedagógica. A elaboração dos algoritmos, ao longo de todas as atividades, representava principalmente uma oportunidade para manipulação e experimentação dos conceitos, constituindo uma ferramenta para a construção do conhecimento e não um produto a ser avaliado. Esta observação não compromete o objetivo principal da sequência didática, que priorizava a compreensão conceitual das isometrias através da abordagem com mosaicos.

Foi percebido que os estudantes ainda necessitariam de mais tempo e prática para consolidar os aspectos específicos de cada tipo de isometria, como a indicação precisa de direção e sentido nas translações, a identificação exata do eixo de simetria

nas reflexões e os parâmetros próprios das demais transformações geométricas. Vale ressaltar que, caso o desenvolvimento de algoritmos precisos fosse considerado um objetivo central, a sequência didática necessitaria de um tempo mais extenso de realização, com atividades adicionais focadas especificamente no desenvolvimento dessa habilidade procedimental. Estes aspectos específicos seriam posteriormente abordados e reforçados na quarta atividade da sequência didática.

6.5 QUARTA ATIVIDADE E CONSOLIDAÇÃO DOS CONCEITOS DE ISOMETRIA

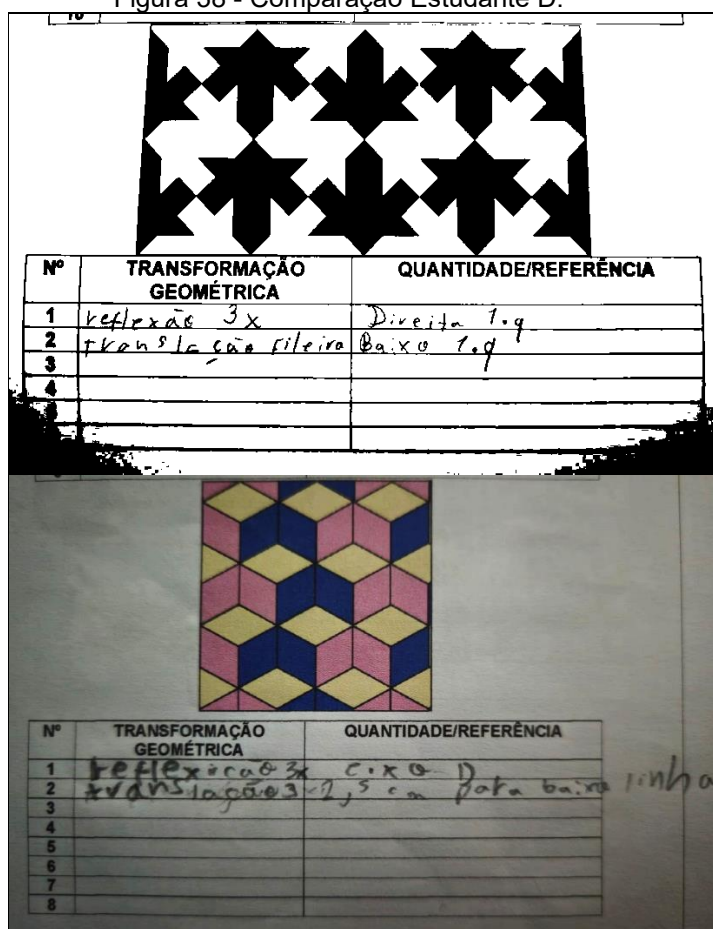
A quarta e última atividade da sequência didática manteve estrutura semelhante à terceira, porém com maior nível de complexidade. Foram utilizados módulos com formas geométricas hexagonais e triangulares, tornando o desafio mais elaborado, mas preservando o propósito de reforçar a aplicação dos conceitos de isometrias através da construção de algoritmos para mosaicos. A atividade iniciou seguindo os mesmos procedimentos da anterior, com a distribuição de envelopes contendo as formas geométricas acompanhadas da folha de atividades, que apresentava tanto exercícios básicos de aplicação das isometrias quanto tarefas de reconstrução de mosaicos.

A partir desta quarta atividade, observou-se uma mudança significativa na forma como os estudantes interagem com o material didático. Diferentemente das atividades anteriores, onde o meio era utilizado para proporcionar retroações diretas durante a manipulação, conforme Brousseau (2008), os discentes desenvolveram uma abordagem mais autônoma. Passaram a observar primeiro os padrões, formular hipóteses sobre os movimentos necessários e, apenas posteriormente, utilizavam as peças de acetato para validar suas conjecturas. Este comportamento evidencia que os estudantes percorreram as três situações didáticas de forma integrada e independente, assumindo maior responsabilidade pela construção de seu conhecimento. Alguns discentes inclusive optaram por não utilizar o material manipulável, demonstrando confiança em suas percepções sobre as transformações geométricas, o que indica uma evolução significativa na autonomia frente ao processo de aprendizagem.

A oportunidade de aplicar repetidamente os conceitos de isometrias em diferentes contextos ao longo da sequência didática contribuiu para o aprimoramento das habilidades procedimentais dos estudantes. Esta evolução alinha-se com o que Zabala (1998) apresenta sobre a aprendizagem de conteúdos procedimentais, que se

desenvolve através da prática contínua, evidenciando como a prática sistemática favorece o domínio deste tipo de conteúdo. A evolução descrita pode ser observada na Figura 38, que apresenta um comparativo entre os algoritmos elaborados pelo Estudante D na terceira e quarta atividade da sequência didática, embora possam ser percebidos alguns erros de construção de algoritmo, ainda assim fica perceptível a evolução dos conceitos trabalhados.

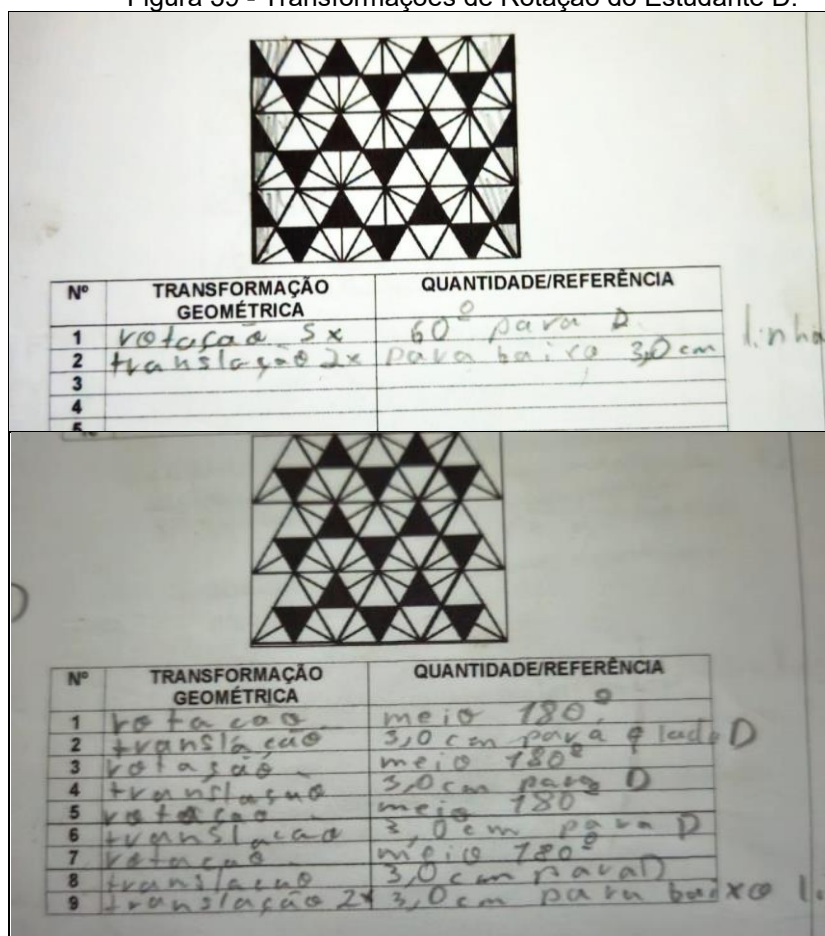
Figura 38 - Comparação Estudante D.



Fonte: a pesquisa.

Considerando que na avaliação diagnóstica este estudante respondeu sobre ângulos: "É uma inclinação" e sobre polígonos: "Eu não entendo nada", a evolução observada torna-se ainda mais significativa. A Figura 39 demonstra como o estudante passou a empregar corretamente o conceito de ângulo ao especificar rotações, indicando desenvolvimento tanto conceitual quanto procedimental.

Figura 39 - Transformações de Rotação do Estudante D.



Fonte: a pesquisa.

Esta situação do Estudante D ilustra como ocorreu a evolução do pensamento geométrico através das interações com o meio educacional. Entretanto, reconhecendo que conteúdos procedimentais requerem tempos diferentes de internalização conforme Zabala (1998), nem todos os estudantes alcançaram o mesmo nível de desenvolvimento. O caso da Estudante G ilustra esta situação: embora identificasse as transformações geométricas presentes nos mosaicos, apresentou dificuldades na especificação de parâmetros e na construção coerente de algoritmos. Esta observação sugere que uma possível ampliação da sequência didática, com mais encontros dedicados aos aspectos procedimentais, poderia beneficiar estudantes que necessitam de tempo adicional para consolidar estes conhecimentos.

Ao responderem o questionário de encerramento da sequência didática, foi possível perceber que os discentes mencionaram que a utilização de material concreto e a investigação por meio de tesselações foi criativa. Alguns estudantes afirmaram que se sentiram desafiados ao elaborar os algoritmos, mas ainda assim demonstraram satisfação com o formato da aula. Na pergunta relacionada ao estudo

de isometrias, quase todos os estudantes mencionaram que não se recordavam ou não haviam tido contato com esses conteúdos nos anos anteriores, com exceção de apenas um discente que mencionou já ter visto esse conteúdo previamente. Tal situação difere do que era esperado conforme a progressão curricular apresentada no livro didático.

De forma geral, a quarta atividade demonstrou as contribuições da sequência didática para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes. Os dados coletados sugerem que esta atividade final consolidou parcialmente a compreensão das transformações geométricas, uma vez que os estudantes conseguiram a apreensão conceitual das isometrias, mas apresentaram dificuldades na construção dos algoritmos de forma adequada. Esta limitação nos aspectos procedimentais pode estar relacionada ao tempo disponível para a consolidação desses conhecimentos, conforme observado por Zabala (1998) sobre a necessidade de períodos diferenciados para a apreensão de conteúdos procedimentais. Os resultados evidenciam o potencial da abordagem através de mosaicos para o ensino das isometrias, indicando que uma possível ampliação do tempo destinado à sequência didática poderia favorecer o desenvolvimento mais completo dos algoritmos de construção.

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Esta pesquisa buscou investigar a problemática que visava compreender as contribuições metodológicas de uma sequência didática de tesselações e mosaicos para o ensino das isometrias. Para desenvolver investigação, foi necessário realizar o levantamento de atividades voltadas para o ensino de isometrias, analisar as contribuições ditas nas pesquisas mais recentes na área e, posteriormente elaborar e implementar uma sequência didática fundamentada na Teoria das Situações Didáticas de Guy Brousseau (2008).

Dessa forma, foi necessário realizar o levantamento bibliográfico de pesquisas recentes alinhadas à temática da dissertação. Este processo investigativo possibilitou identificar o potencial de utilização de materiais manipulativos como ferramentas para estruturar as atividades propostas. A partir desta percepção, foram elaboradas quatro atividades progressivas que foram implementadas com 29 estudantes do 8º ano do Ensino Fundamental da Escola Estadual de Ensino Fundamental Gonçalves Dias, em Porto Alegre, Rio Grande do Sul. Para analisar as contribuições da sequência didática em relação à problemática da pesquisa, foi conduzida uma investigação qualitativa através do método de estudo de caso, conforme proposto por Yin (2001), permitindo uma análise aprofundada das interações dos estudantes com o meio didático e de suas produções ao longo do processo.

Para a construção da sequência didática alinhada a Teoria das Situações Didáticas, foi necessário estruturar um meio adidático no qual os estudantes iriam interagir e assim passarem pelas diferentes situações adidáticas de ação, formulação e validação. Para cada atividade foram construídas folhas de atividades alinhadas de peças de acetato que auxiliaram os discentes na construção dos mosaicos. A proposta seria de que construíssem um algoritmo de construção dos mosaicos a partir dos movimentos realizados nas peças de acetato sem conhecimentos prévios das isometrias. Movimentos estes que conforme progredissem na sequência, pudessem formalizar a linguagem matemática, transformando os movimentos de arrastar, inverter e girar as peças para as isometrias de translação, rotação e reflexão.

Na estruturação das atividades, foi adotada uma abordagem progressiva que possibilitou o desenvolvimento gradual dos conceitos. Inicialmente, os estudantes precisaram reconhecer os módulos (menores unidades) que formavam os mosaicos, utilizando diferentes estratégias como recortar, riscar ou dobrar os materiais para

identificar essas estruturas básicas. Após desenvolverem essa compreensão sobre módulos, a partir da manipulação das peças de acetato, os estudantes construíram a noção de algoritmo, registrando em linguagem natural os movimentos necessários para replicar os mosaicos. Na terceira e quarta atividades, essa linguagem coloquial foi transformada em linguagem matemática formal, com a apresentação das isometrias nos algoritmos construídos.

A análise das produções dos estudantes e de seus comportamentos durante as atividades indicou que percorreram as situações adidáticas apresentadas por Brousseau (2008) de ação (através da manipulação dos materiais), formulação (ao verbalizarem suas estratégias) e validação (ao justificarem suas conclusões), concluindo na institucionalização pelo professor dos conceitos de isometrias. A necessidade de duas atividades para a formalização dos conceitos geométricos e adaptação à linguagem matemática se deu devido à necessidade de os estudantes aprimorarem seus algoritmos. Esta ação foi necessária pois, alinhado às ideias de Zabala (1998), essa competência se tratava de um conteúdo procedimental, de modo que, após a apreensão conceitual das isometrias, foi necessário tempo para realizar exercícios e desenvolver esses algoritmos de construção.

Essa necessidade de tempo se alinha com os resultados observados no Estudante D, que aprimorou significativamente seu algoritmo da terceira para a quarta atividade. Entretanto, a sequência apresentou algumas limitações, visto que o número de atividades propostas, apesar de possibilitar a compreensão do conceito de isometria, não foi suficiente para que a Estudante G consolidasse os conhecimentos procedimentais necessários. Tal observação reforça que, durante a implementação de sequências didáticas, é preciso considerar que o desenvolvimento de conteúdos procedimentais requer diferentes tempos para consolidação (Zabala, 1998). Essa ocorrência pode apresentar uma necessidade de ampliação da sequência didática em futuras aplicações.

Quando se retorna à pergunta da pesquisa "Quais são as contribuições de uma sequência didática envolvendo tesselações e mosaicos para a aprendizagem de isometrias?", é possível identificar contribuições específicas. A utilização da Teoria das Situações Didáticas de Brousseau (2008) possibilitou que os estudantes desenvolvessem autonomia durante o percurso da sequência, permitindo que dialogassem sobre suas hipóteses e validassem a construção de seus algoritmos. Essas contribuições também possibilitaram que o docente utilizasse as noções

obtidas pelos discentes através das retroações do meio didático, transformando-as em conhecimento matemático e fixando o saber de forma significativa (Almouloud, 2007). Foi possível observar em diferentes momentos da sequência que os estudantes transformaram suas concepções sobre as transformações geométricas, transitando de um pensamento intuitivo e coloquial para a linguagem matemática apropriada. A integração entre Matemática e Arte apresentou um aspecto motivador, pois, a partir das manipulações das peças de acetato para construir os mosaicos, os estudantes constantemente mobilizaram noções de isometrias sem comprometer o rigor matemático necessário para a construção dos algoritmos. Assim, a utilização da Teoria das Situações Didáticas para estruturação da sequência didática, através do desenvolvimento de um meio didático adequado, possibilitou que os estudantes assumissem um papel de investigadores, tendo em vista que precisaram constantemente formular novas hipóteses e validá-las, desenvolvendo pensamento crítico sobre suas ações.

Ao utilizar material manipulativo, o esperado se alinha com os resultados obtidos ao analisar as literaturas recentes, como Costa (2023) e Chihaya (2022), que apontam o papel do material como um meio de dinamizar o acesso ao conhecimento. A sua integração na sequência didática possibilitou um meio investigativo e interativo entre os discentes, de forma a fazer com que os conteúdos propostos sejam fáceis de visualizar e compreender. A utilização de peças de acetato transparente mostrou-se eficaz para a visualização das transformações geométricas, especialmente para a compreensão da isometria de reflexão.

O livro didático de Giovanni JR (2022) contempla as três isometrias (translação, rotação e reflexão) trabalhadas e desenvolve o conceito de isometrias compostas, que se trata da utilização de duas ou mais isometrias em um objeto geométrico. No decorrer da sequência didática, percebe-se que foi possível desenvolver esses conceitos com os estudantes, mesmo que, quando questionados nas perguntas do final das atividades, mencionaram não terem trabalhado os conceitos de isometria previamente nos anos precedentes ao da pesquisa, diferente do que era esperado do livro didático. Tal ocorrência, não interferiu diretamente, a capacidade de resolução das atividades dos discentes durante o experimento. Entretanto, a defasagem de conhecimentos na área da geometria básica, como a noção de ângulos, que foi percebida na avaliação diagnóstica. Fez com que os

estudantes tivessem dificuldades iniciais ao identificar os ângulos na isometria de rotação.

Ao escolher a Teoria das Situações Didáticas como referencial teórico para a pesquisa, além de constituir uma alternativa aos meios tradicionais de ensino de Geometria, também possibilitou realizar uma análise crítica do comportamento dos estudantes em contato com o meio educacional, que, quando alinhada às ideias de Zabala (1998), permitiu verificar com precisão as etapas percorridas por cada aluno. Um dos pontos relevantes para análise sobre as situações adidáticas propostas (ação, formulação e validação) foi como os estudantes se comportaram em relação à responsabilidade de construir seus conhecimentos a partir de suas interações com as atividades, conceito que se alinha ao contrato de devolução mencionado por Brousseau (2008). Foi observado que inicialmente a atividade gerou estranhamento aos estudantes, dificultando o desenvolvimento de situações totalmente adidáticas, mas ao longo dos encontros, os estudantes se habituaram à proposta pedagógica e desenvolveram as tarefas com maior autonomia. As limitações identificadas nesta pesquisa sinalizam perspectivas para futuras investigações na área. Recomenda-se a realização de estudos que aprofundem a compreensão sobre os contratos didáticos no contexto do ensino de transformações geométricas, investigando como ocorrem os processos de ruptura e reestabelecimento desses contratos quando os estudantes são confrontados com metodologias de caráter investigativo.

Seria pertinente investigar a aplicabilidade da sequência didática em diferentes contextos educacionais e com estudantes de outras etapas da escolarização, realizando as adaptações necessárias aos materiais e atividades propostas. Estudos futuros poderiam explorar a integração de tecnologias digitais à sequência desenvolvida, investigando como softwares de geometria dinâmica poderiam potencializar as situações didáticas propostas. Sugere-se ainda investigações sobre a formação de professores para implementação de abordagens fundamentadas na TSD, identificando as competências necessárias para a condução adequada de situações adidáticas no ensino de geometria.

Quando realizada uma análise crítica da pesquisa, é possível identificar diferentes limitações que devem ser consideradas em futuras aplicações do material desenvolvido. O contexto específico da Escola Estadual de Ensino Fundamental Gonçalves Dias, com suas características socioeconômicas e o período adverso de aplicação (pós-enchentes e ausência prévia de professor de matemática regente),

apresenta variáveis que influenciaram o desenvolvimento e a análise dos dados obtidos da sequência didática. Outro fator limitante refere-se ao número de encontros para realização da sequência didática. Foi observado que, para alguns estudantes, como o Estudante G, o tempo não foi suficiente para desenvolver habilidades de caráter procedimental, o que sugere a necessidade de ampliação da sequência didática. As implicações pedagógicas emergentes desta investigação oferecem orientações para professores interessados em implementar abordagens semelhantes no ensino de geometria. A sequência didática demonstrou a possibilidade de desenvolver conceitos de isometrias sem que os estudantes possuam conhecimentos prévios formalizados sobre o tema, desde que seja proporcionado um meio didático adequado e tempo necessário para a construção conceitual.

Para a implementação desta abordagem, sugere-se que sejam considerados alguns aspectos: a necessidade de um período inicial para familiarização dos estudantes com a metodologia investigativa; o planejamento de tempo adequado para que os conteúdos procedimentais sejam consolidados; a preparação de materiais manipulativos que proporcionem retroações claras do meio didático; e a preparação do docente para mediar as situações de formulação e validação entre os estudantes. Ademais, a integração com as Artes Visuais requer que sejam estabelecidas conexões explícitas entre os padrões geométricos observados e os conceitos matemáticos, preservando o rigor necessário para a aprendizagem.

A relevância desta pesquisa se destaca ao contribuir para a necessidade de investigações sobre meios de ensinar geometria de forma contextualizada, temática que permanece atual mesmo após a implementação da BNCC, onde ainda se identificam dificuldades dos professores na integração adequada da Geometria conforme proposto pela BNCC (Frantz; Bisognin, 2022). A utilização de materiais manipulativos alinhada à Teoria das Situações Didáticas possibilitou que os estudantes desenvolvessem o pensamento crítico, formulando suas próprias hipóteses e conjecturas para a aprendizagem, potencializado pelo aspecto motivacional da contextualização através das Artes Visuais por meio da construção de tesselações e mosaicos. Assim, a pesquisa reafirma o potencial da integração disciplinar no ensino de transformações geométricas, oferecendo subsídios tanto para a prática pedagógica quanto para futuras investigações na área de Educação Matemática.

REFERÊNCIAS

- ALMOULOUD, S. A. **Fundamentos da Didática Matemática**. 1. ed. Curitiba: UFPR, 2007. v. 1
- BARBOSA, R. M. **Descobrendo Padrões em Mosaicos**. 4. ed. São Paulo: Atual, 1993. v. 1
- BRASIL, M. da E. **BASE NACIONAL COMUM CURRICULAR**. Brasília: MEC, 2018.
- BROUSSEAU, G. A etnomatemática e a teoria das situações didáticas. **Educação Matemática Pesquisa**, São Paulo, v. 8, n. 2, p. 267–281, 2006.
- BROUSSEAU, G. **Introdução ao Estudo das Situações Didáticas: Conteúdos e métodos de ensino**. 1. ed. São Paulo: Ática, 2008. v. 1
- BROUSSEAU, G. **Theory of didactical situations in mathematics : didactique des mathématiques, 1970-1990**. Boston: Kluwer Academic Publishers, 2002. v. 19
- CANELLA, A. C. **Matemática, Tecnologia e Arte: uma proposta de ensino de Isometrias para a Educação Básica**. 2021. 1–99 f. Dissertação de Mestrado - PUC - RJ, Rio de Janeiro, 2021.
- CASARIN, J. U. **TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: AÇÕES E APLICAÇÕES NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL**. 2023. Mestrado Profissional - Universidade Federal de Santa Maria, Santa Maria, 2023.
- CAVALCANTI, V. de S. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS: TRABALHANDO CONCEITOS DE CIRCUNFERÊNCIA. *In:* , 2013, Curitiba. **Encontro Nacional de Educação Matemática**. Curitiba: Sociedade brasileira de Educação Matemática, 2013. p. 1–16.
- CHIHAYA, M. C. **TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: UM OLHAR MATEMÁTICO NOS FLOCOS DE NEVE USANDO O ORIGAMI E O GEOGEBRA**. 2022. 1–110 f. Dissertação de Mestrado - UNIVERSIDADE TECNOLÓGICA FEDERAL DO PARANÁ, Curitiba, 2022.
- COSTA, M. A. **Estudo de figuras geométricas planas com arte: uma experiência com alunos de sexto e sétimo anos do Ensino Fundamental de uma escola pública**. 2023. 1–146 f. Mestrado Profissional - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS, Seropédica, 2023.
- CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa: Métodos Qualitativo, Quantitativo e Misto**. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.
- DUARTE, A. R. S.; SILVA, M. C. L. da. ABAIXO EUCLIDES E ACIMA QUEM? Uma análise do ensino de Geometria nas teses e dissertações sobre o Movimento da Matemática Moderna no Brasil. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 1, n. 1, p. 87–93, 2006.

ESQUERDO, C. A. da S. **TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO PLANO: UMA ABORDAGEM INSPIRADA EM ESCHER**. 2018. 1–123 f. Dissertação de Mestrado - UNIVERSIDADE ESTADUAL DE LONDRINA, Londrina, 2018.

FAINGUELERNT, E. K.; NUNES, K. R. A. N. **Fazendo Arte com a Matemática**. Porto Alegre: Artmed, 2006n.

FRANTZ, D. de S. F. da S.; BISOGNIN, V. Ensino da Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental: um problema sistêmico. **Revista Educar Mais**, v. 6, p. 28–45, 2022.

GIOVANNI JR, J. R. Polígonos e Transformações no Plano. *In*: A CONQUISTA DA MATEMÁTICA: MANUAL DO PROFESSOR. 1. ed. São Paulo: FTD, 2022. v. 1, p. 1–412.

IMENES, L. M.; LELLIS, M. **Geometria dos mosaicos**. 12. ed. São Paulo: scipione, 2000. v. 1

IZAR, S. B. **TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: LINGUAGENS HÍBRIDAS E INTERAÇÕES PARA PROMOVER APRENDIZAGENS DE ESTUDANTES NO ENSINO REMOTO**. 2023. 1–263 f. Tese de Doutorado - UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DO RIO DE JANEIRO, Seropédica, 2023.

LIMA, E. L. **Isometrias**. 2. ed. Rio de Janeiro: SBM, 2007. v. 1

LORENZATO, S. POR QUE NÃO ENSINAR GEOMETRIA. *In*: **A Educação Matemática em Revista**, Blumenal, v. 4, p. 3–13, 1995.

MACHADO, G. B.; RACHELLI, J. TEORIA DAS SITUAÇÕES DIDÁTICAS. **Educação Matemática em Revista - RS**, Santa Maria, 2023.

MONTEIRO, L.; TORMES, J. R.; MOURA, L. C. S. G. de A. ESTUDO DE CASO: UMA METODOLOGIA PARA PESQUISAS EDUCACIONAIS. **Ensaios Pedagógicos**, v. 2, n. 1, p. 18–25, 2018.

MÜLLER, M. G. *et al.* Uma revisão da literatura acerca da implementação da metodologia interativa de ensino Peer Instruction (1991 a 2015). **Revista Brasileira de Ensino de Física**, v. 39, n. 3, 2017.

NUNES, R. da S.; NUNES, J. M. V. Modelos constitutivos de sequências didáticas: enfoque na teoria das situações didáticas. **Revista Exitus**, Santarém, v. 9, n. 1, p. 148–174, 2019.

OLIVEIRA, F. W. S. Os momentos da teoria das situações didáticas no ensino de matemática. **REMAT**, Bento Gonçalves, v. 4, n. 2, p. 10–20, 2018.

OLIVEIRA, B. L. C. A. de *et al.* Team-Based Learning como Forma de Aprendizagem Colaborativa e Sala de Aula Invertida com Centralidade nos Estudantes no Processo Ensino-Aprendizagem. **Revista Brasileira de Educação Médica**, v. 42, n. 4, p. 86–95, 2018.

OLIVEIRA, S. C.; SILVA, S. A. F. da. SOLUÇÕES E ESTRATÉGIAS DE ALUNOS EM ATIVIDADES DIDÁTICAS SOBRE ISOMETRIAS ENVOLVENDO O BORDADO EM PONTO CRUZ. **Revista Eletrônica Debates em Educação Científica e Tecnológica**, v. 5, n. 02, p. 135–149, 2019.

PASSOS, C. C. M.; TEIXEIRA, P. J. M. Um pouco da teoria das situações didáticas (tsd) de Guy Brousseau. *In*: 2011, Recife. **XIII CONFERÊNCIA INTRAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA**. Recife: 2011. p. 1–11.

PAVANELLO, R. M. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causa e consequências. **Zetetiké**, v. 1, p. 7–18, 1993.

PONTE, J. P. da. Estudos de Caso em Educação Matemática. **FC-DE-CIE-GIDM - Artigos em Revistas Internacionais**, p. 105–132, 2006.

RIO GRANDE DO SUL. Secretaria da Educação. Subsecretaria de Desenvolvimento da Educação. Departamento de Desenvolvimento Curricular da Educação Básica. **Matrizes de Referência Priorizada 2024**: Ensino Fundamental e Ensino Médio - Área de Conhecimento: Matemática. Porto Alegre: SEDUC-RS, 2024.

SANCHES, A. de S. C. **TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS: FAZENDO ARTE NA AULA DE MATEMÁTICA**. 2021. 1–77 f. Mestrado - Universidade Federal de São Carlos, São Paulo, 2021.

SILVA, P. H. da. **TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS NO CONTEXTO ESCOLAR: UMA EXPERIÊNCIA DE APRENDIZAGEM NO 8º ANO DO ENSINO FUNDAMENTAL**. 2017. 1–157 f. Dissertação de Mestrado - UNIVERSIDADE FEDERAL DE OURO PRETO, Ouro Preto, 2017

SILVA, E. L. de; MENEZES, E. M. **Metodologia da Pesquisa e Elaboração de Dissertação**. 4. ed. Florianópolis: UFSC, 2005.
VICENTE, E. R. **MATEMÁTICA E ARTE: OFICINAS INTERDISCIPLINARES**. ano IV, Boa Vista, v. 12, n. 36, p. 38–47, 2022.

YIN, R. K. **Estudo de Caso: Planejamento e Métodos**. 2ºed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

ZABALA, A. **A PRÁTICA EDUCATIVA**. Porto Alegre: Artmed, 1998.

ZALESKI FILHO, D. **Matemática e Arte**. 1.ed. São Paulo: Autêntica, 2013.

APÊNDICES

APÊNDICE A – AVALIAÇÃO DIAGNÓSTICA



UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL – ULBRA

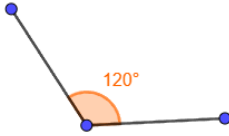
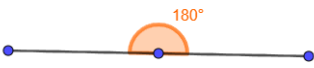
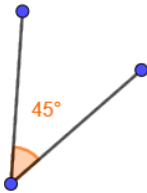
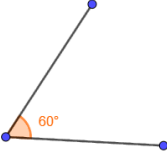
INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS

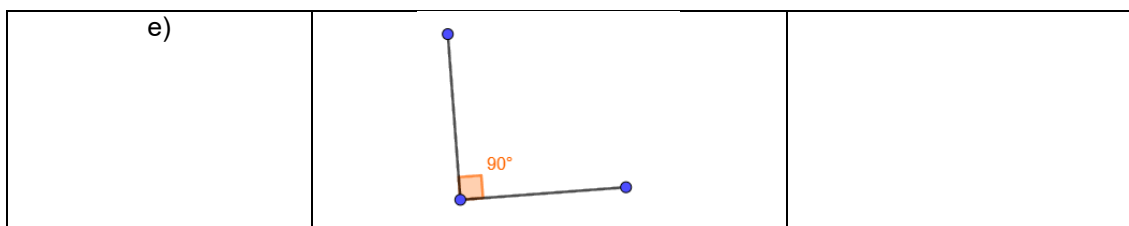
Nome _____

Ano: _____ Turma: _____

1. O que é um ângulo?

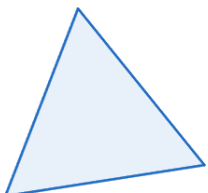
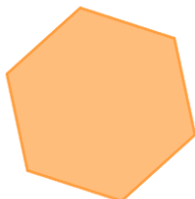
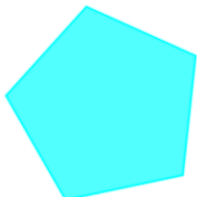
2. Determine os tipos dos ângulos (reto, raso, obtuso, agudo) a seguir a partir de suas medidas:

	Ângulo	Classificação
a)		
b)		
c)		
d)		



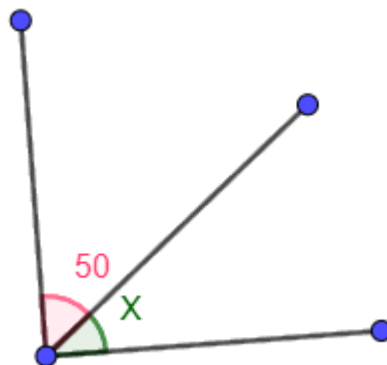
3. Diga em suas palavras o que você entende por um polígono:

4. Escreva o nome, número de diagonais internas e medida dos ângulos internos dos polígonos regulares apresentados a seguir.

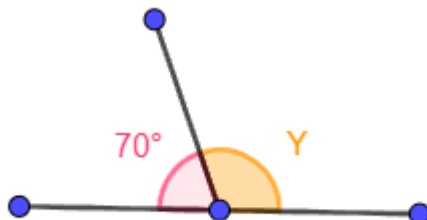
	Polígono Regular	Nome	Número de Diagonais	Medida dos Ângulos Internos
a)				
b)				
c)				
d)				

e)				
----	---	--	--	--

5. Sabendo que os ângulos a seguir são **complementares**, determine o valor de x :



6. Sabendo que os ângulos a seguir são **suplementares**, determine o valor de y :



APÊNDICE B – FOLHA DE ATIVIDADES: PRIMEIRA ATIVIDADE



UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL – ULBRA

INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS 1

Nome _____

Ano: _____ Turma: _____

Este é um Instrumento de Coleta de dados aplicado na Escola Estadual de Ensino Fundamental Gonçalves Dias. Os dados escritos nesse instrumento serão analisados e utilizados para defesa da Dissertação de Mestrado do pesquisador Douglas Fonseca Machado orientado pelo Dr. Agostinho Iaquan Ryokiti Homa.

Essa pesquisa visa analisar as contribuições de uma sequência didática de Isometrias utilizando Mosaicos. A sequência didática foi elaborada à luz da Teoria das Situações Didáticas e a partir desta será analisado o aprendizado dos estudantes participantes do experimento. O objeto de conhecimento de isometrias está previsto na BNCC a partir da habilidade (EF08MA18).

Marque com uma caneta ou lápis a menor parte quadrangular destes padrões, em seguida, descreva a estratégia utilizada para encontrá-lo.

Padrão A	Padrão B
Padrão C	Padrão D

Estratégia Padrão A	Estratégia Padrão B
Estratégia Padrão C	Estratégia Padrão D

1. Quais partes dos padrões geométricos você observou inicialmente para encontrar os menores módulos?
2. Que métodos você usou para explorar o padrão (recortar, riscar, dobrar)?
3. Os métodos que você utilizou, ajudaram ou dificultaram sua busca? Por quê?
4. Quais foram suas hipóteses iniciais sobre o menor quadrado que compõe o padrão? Essas hipóteses mudaram? Se mudaram, por quê?
5. Você encontrou dificuldades em encontrar o menor quadrado que compõe os padrões? Quais?

APÊNDICE C – FOLHA DE ATIVIDADES: SEGUNDA ATIVIDADE


UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL – ULBRA
INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS 1

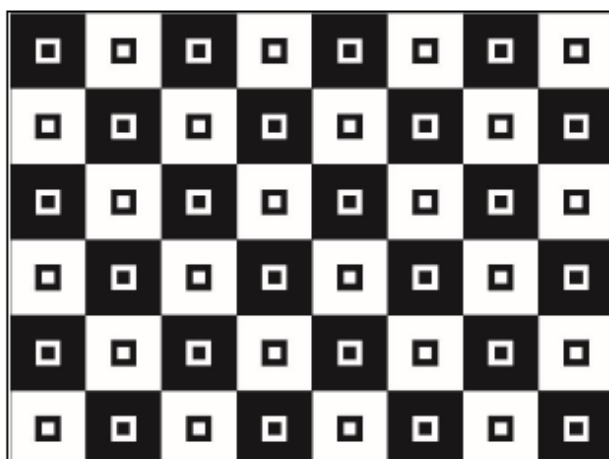
Nome _____

Ano: _____ Turma: _____

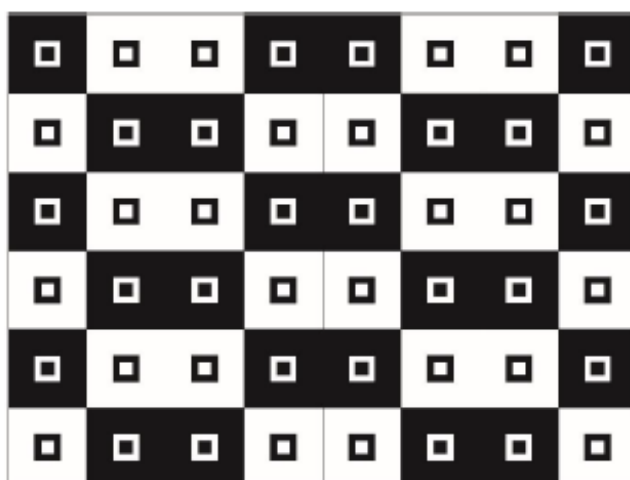
Este é um Instrumento de Coleta de dados aplicado na Escola Estadual de Ensino Fundamental Gonçalves Dias. Os dados escritos nesse instrumento serão analisados e utilizados para defesa da Dissertação de Mestrado do pesquisador Douglas Fonseca Machado orientado pelo Dr. Agostinho Iaquan Ryokiti Homa.

Essa pesquisa visa analisar as contribuições de uma sequência didática de Isometrias utilizando Mosaicos. A sequência didática foi elaborada à luz da Teoria das Situações Didáticas e a partir desta será analisado o aprendizado dos estudantes participantes do experimento. O objeto de conhecimento de isometrias está previsto na BNCC a partir da habilidade (EF08MA18).

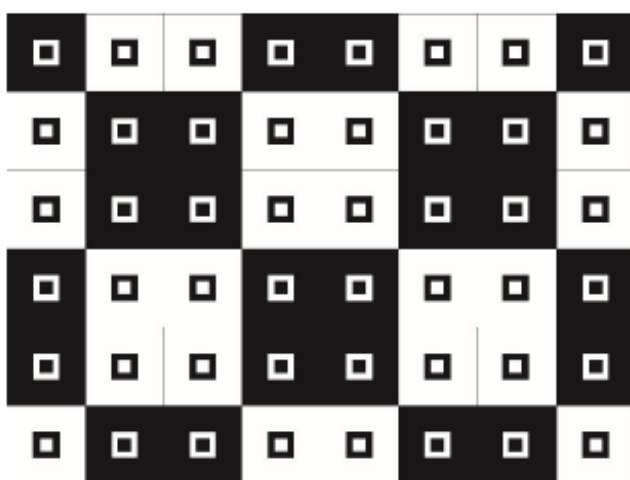
Manipulando as peças de acetato, apresente quais foram os movimentos feitos para replicar os mosaicos abaixo?



Nº	MOVIMENTO
1º	
2º	
3º	
4º	
5º	
6º	
7º	
8º	

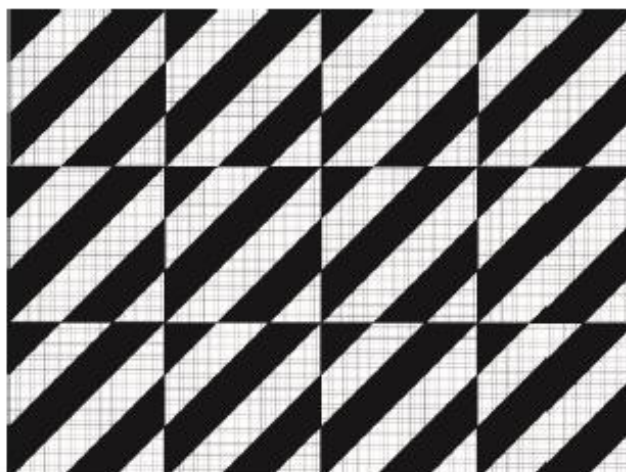


Nº	MOVIMENTO
1º	
2º	
3º	
4º	
5º	
6º	
7º	
8º	

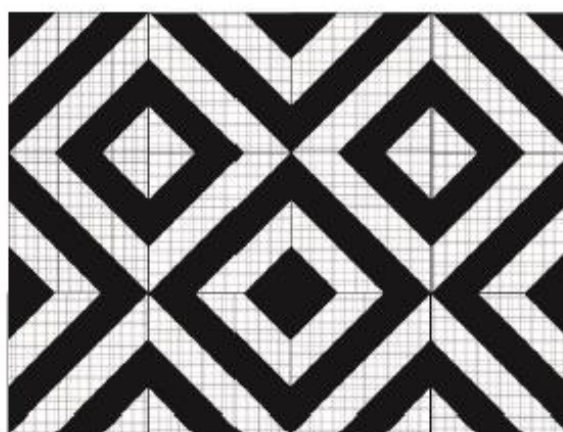


Nº	MOVIMENTO
1º	
2º	
3º	
4º	

5º	
6º	
7º	
8º	
9º	
10º	



Nº	MOVIMENTO
1º	
2º	
3º	
4º	
5º	
6º	



Nº	MOVIMENTO
1º	
2º	

3º	
4º	
5º	
6º	
7º	
8º	
9º	
10º	

1. Quais foram suas primeiras hipóteses sobre os movimentos necessários para replicar o padrão?
2. Você encontrou algum movimento que se repetia? Em qual padrão? Descreva.
3. Comparando seu movimento/ algoritmo com os de outros grupos, quais foram as semelhanças e diferenças encontradas?
4. Houve alguma ideia ou estratégia de outro grupo que ajudou a melhorar seu algoritmo? Explique.
5. Como as discussões com seus colegas influenciaram suas ideias sobre os movimentos necessários?
6. Como você testou seu algoritmo para garantir que ele realmente replica o padrão?
7. Você conseguiu explicar claramente seu algoritmo aos outros grupos ou ao professor? Que aspectos foram mais desafiadores de explicar?

APÊNDICE D – FOLHA DE ATIVIDADES: TERCEIRA ATIVIDADE



UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL – ULBRA

INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS 1

Nome _____

Ano: _____ Turma: _____

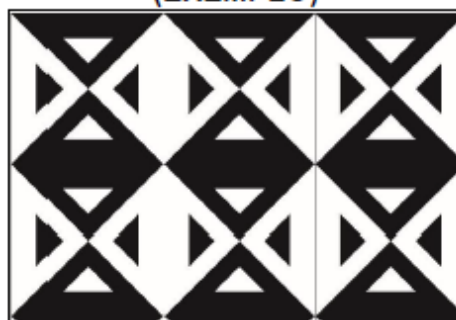
Este é um Instrumento de Coleta de dados aplicado na Escola Estadual de Ensino Fundamental Gonçalves Dias. Os dados escritos nesse instrumento serão analisados e utilizados para defesa da Dissertação de Mestrado do pesquisador Douglas Fonseca Machado orientado pelo Dr. Agostinho Iaquan Ryokiti Homa.

Essa pesquisa visa analisar as contribuições de uma sequência didática de Isometrias utilizando Mosaicos. A sequência didática foi elaborada à luz da Teoria das Situações Didáticas e a partir desta será analisado o aprendizado dos estudantes participantes do experimento. O objeto de conhecimento de isometrias está previsto na BNCC a partir da habilidade (EF08MA18).

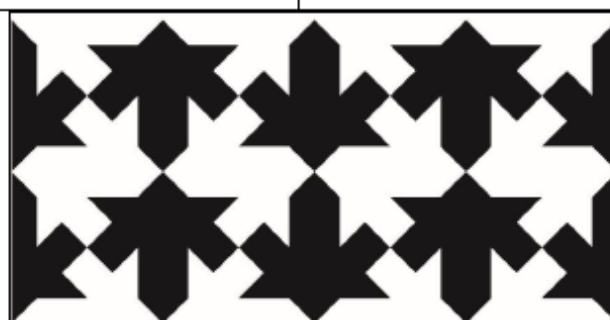
Nas figuras a seguir, apresente quais as transformações geométricas ocorreram para que sejam construídas as imagens. Indique também como foi aplicada cada uma das transformações.

	Nº	Transformação Geométrica (Translação, Reflexão e Rotação)	
		Movimento	Quantidade Referência
	1º		
	2º		
	3º		
	4º		
	5º		
	6º		
	Nº	Movimento	Quantidade Referência
	1º		
	2º		
	3º		
	4º		
	5º		

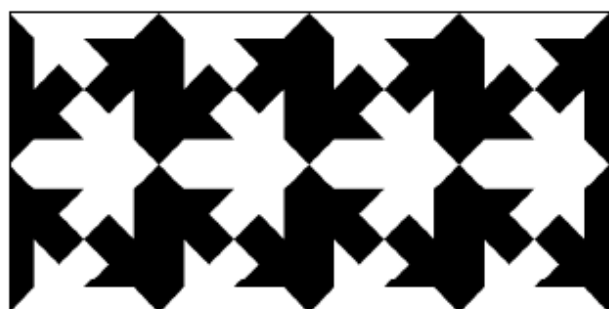
Manipule os módulos de acetato disponibilizados e apresente as transformações geométricas (translação, reflexão, rotação) utilizadas nos módulos para replicar os padrões a seguir.
(EXEMPLO)



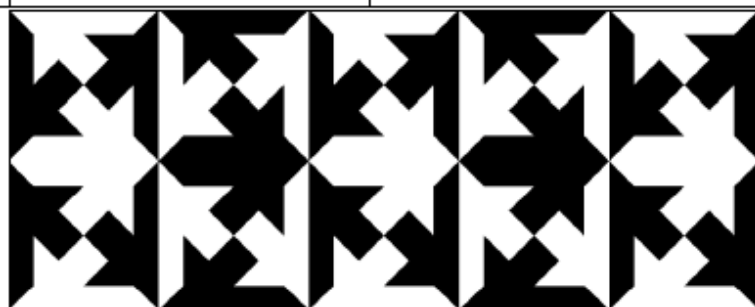
Nº	TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA	QUANTIDADE/REFERÊNCIA
1	TRANSLAÇÃO 2x	DIREITA 1 QUADRADO
2	TRANSLAÇÃO FILEIRA 1	BAIXO 1 QUADRADO
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		



Nº	TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA	QUANTIDADE/REFERÊNCIA
1		
2		
3		
4		
5		
6		



Nº	TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA	QUANTIDADE/REFERÊNCIA
1		
2		
3		
4		
5		
6		



Nº	TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA	QUANTIDADE/REFERÊNCIA
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

APÊNDICE E – FOLHA DE ATIVIDADES: QUARTA ATIVIDADE



UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL – ULBRA

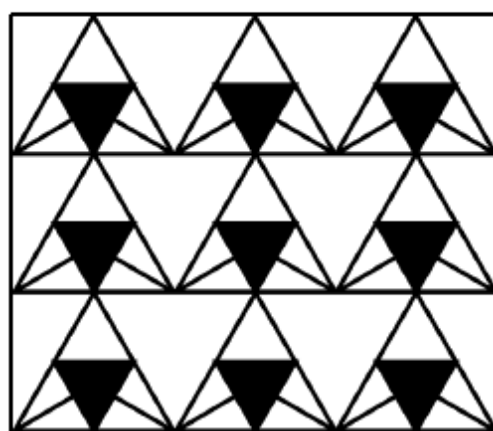
INSTRUMENTO DE COLETA DE DADOS

Nome _____

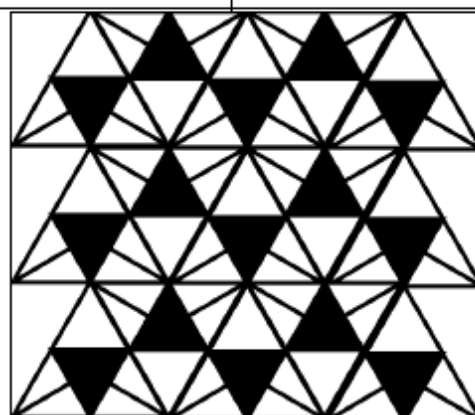
Ano: _____ Turma: _____

Nas figuras a seguir, apresente quais as transformações geométricas ocorreram para que sejam construídas as imagens. Indique também como foi aplicada cada uma das transformações.

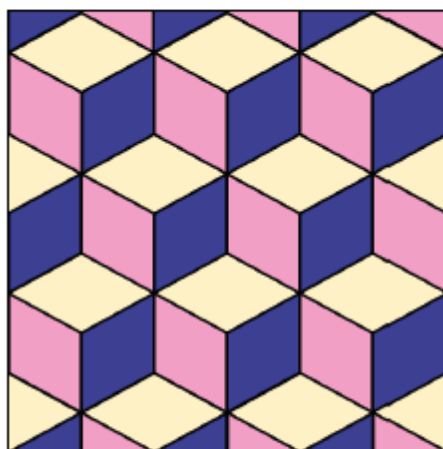
	Transformação Geométrica (Translação, Reflexão e Rotação)		
	Nº	Movimento	Quantidade Referência
	1º		
	2º		
	3º		
	4º		
	5º		
	6º		
	Nº	Movimento	Quantidade Referência
	1º		
	2º		
	3º		
	4º		
	Nº	Movimento	Referência
	2º		
	3º		
	4º		
	5º		



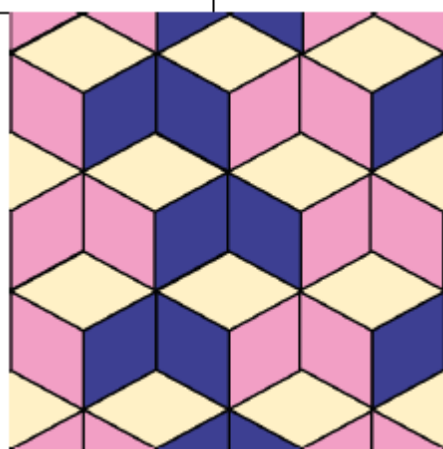
Nº	TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA	QUANTIDADE/REFERÊNCIA
1		
2		
3		
4		
5		
6		



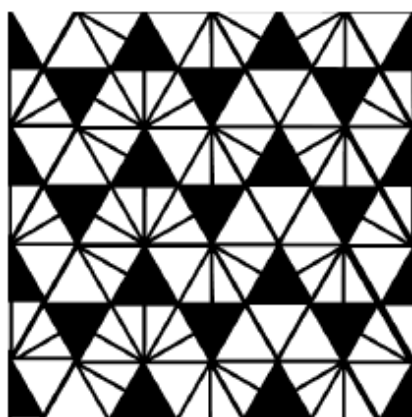
Nº	TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA	QUANTIDADE/REFERÊNCIA
1		
2		
3		
4		
5		
6		



Nº	TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA	QUANTIDADE/REFERÊNCIA
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		



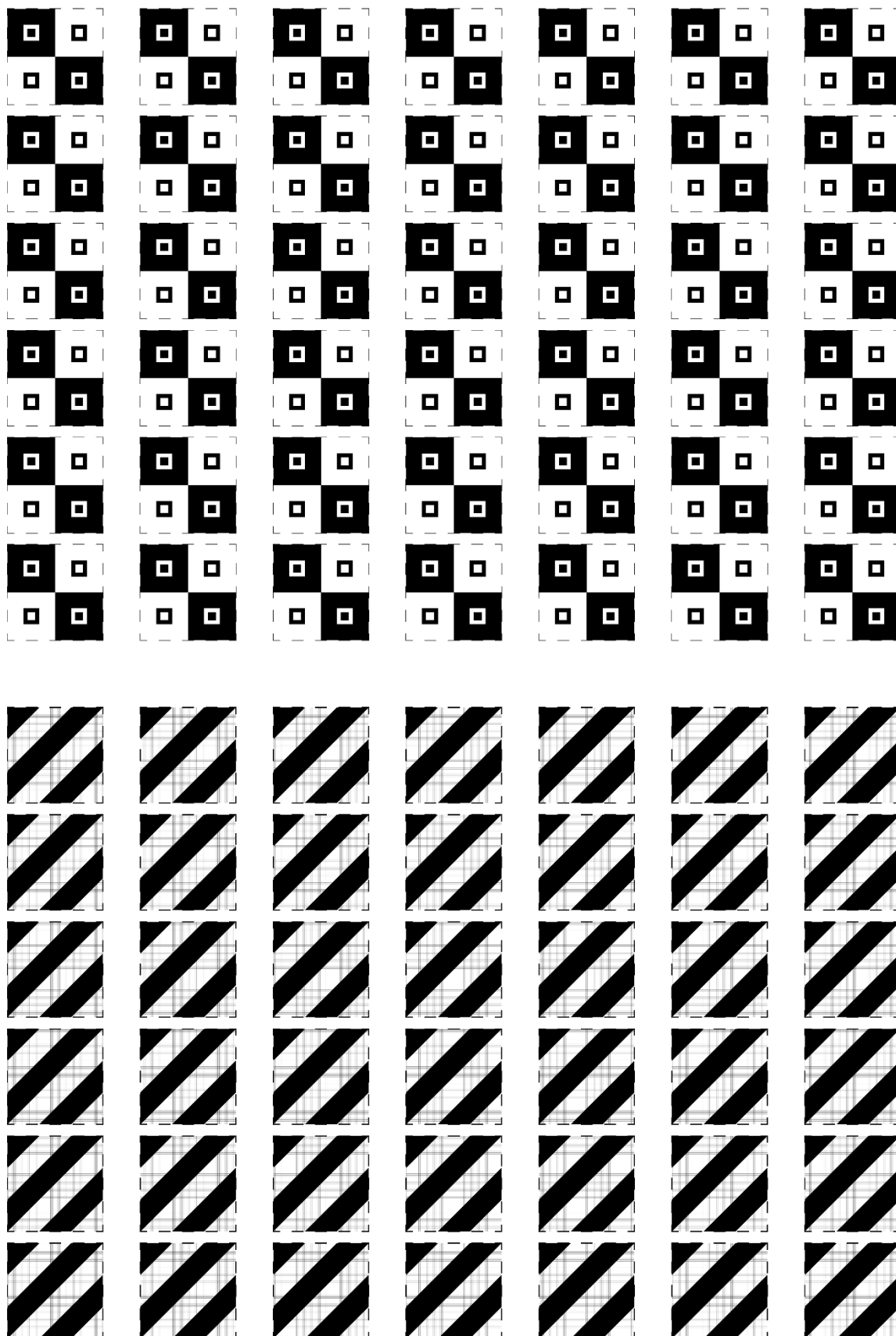
Nº	TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA	QUANTIDADE/REFERÊNCIA
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		

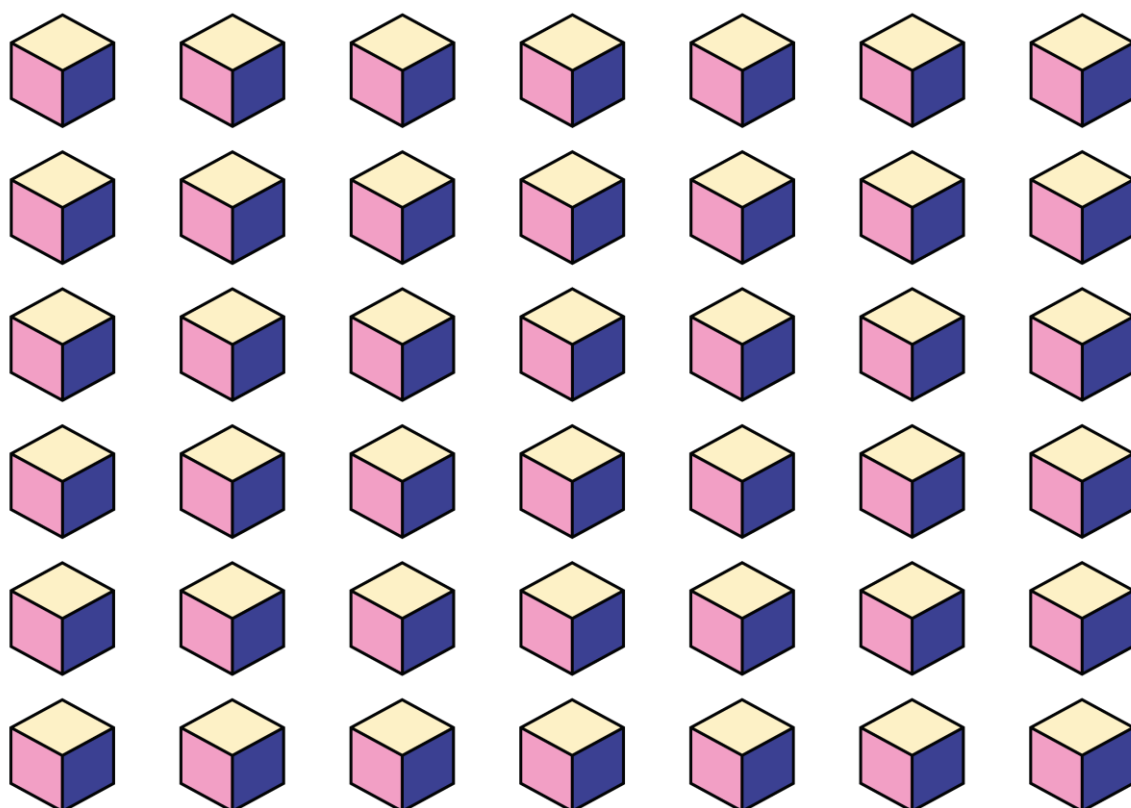
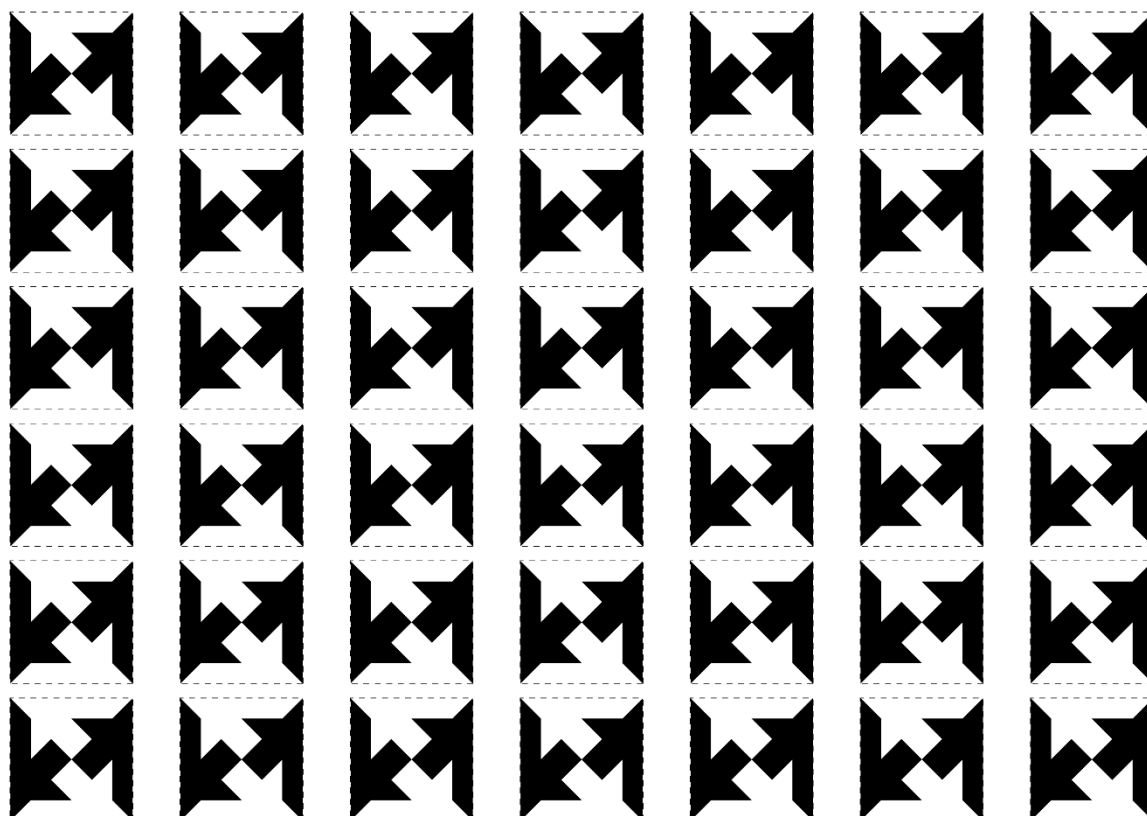


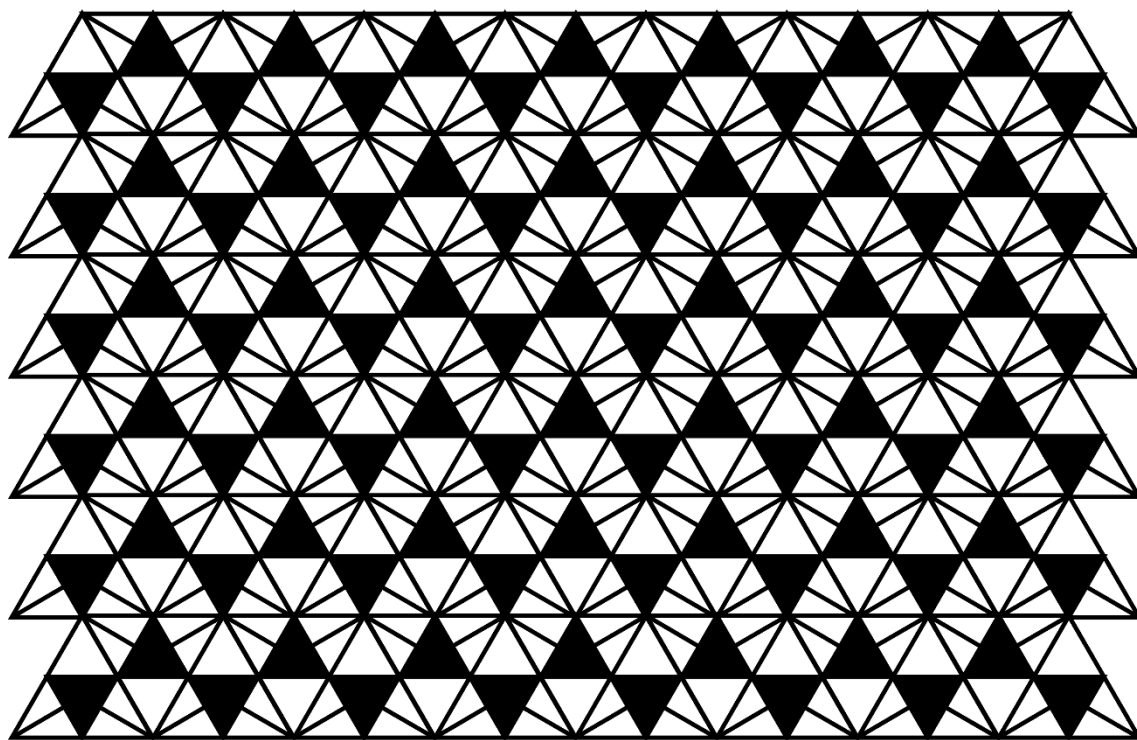
Nº	TRANSFORMAÇÃO GEOMÉTRICA	QUANTIDADE/REFERÊNCIA
1		
2		
3		
4		
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		
12		
13		
14		
15		

1. A forma de aprender os conceitos de transformações geométricas foram diferentes das outras aulas de matemática? Explique.
 - a. Se foi diferente, você gostou desse formato de aula? Prefere o antigo ou o novo?
 - b. Como eram suas aulas de matemática nos outros anos?
2. Você viu as transformações geométricas (rotação, translação e reflexão) nos anos anteriores?

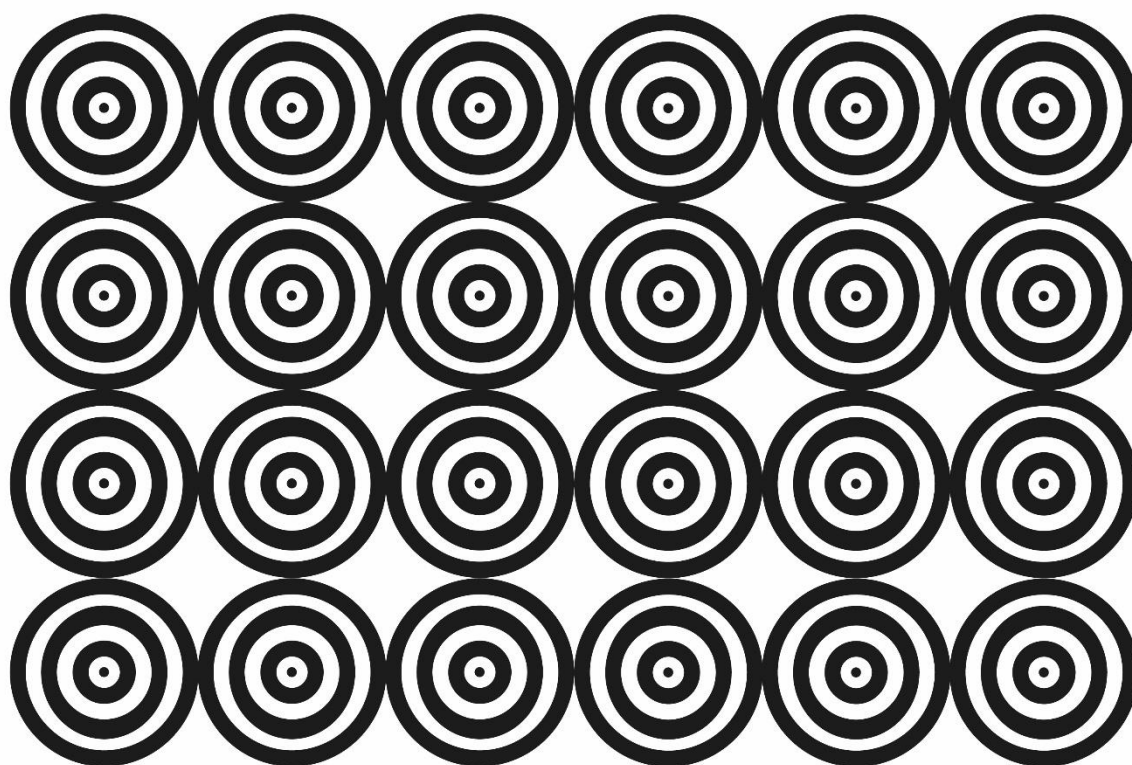
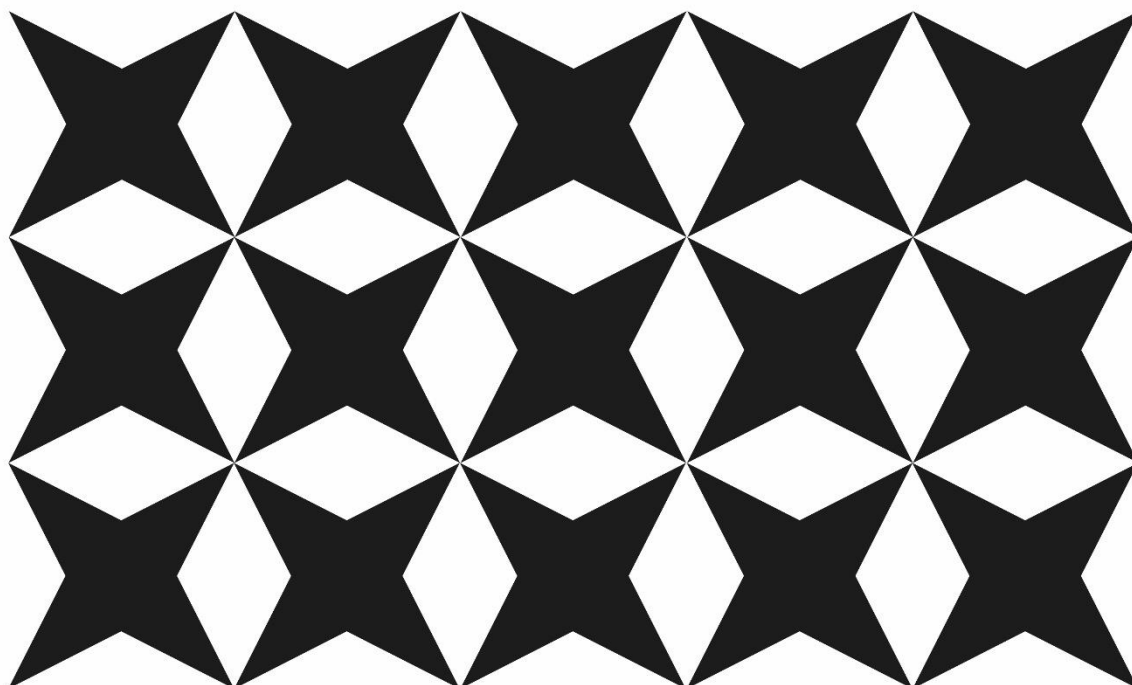
APÊNDICE F – MOLDES DE IMPRESSÃO EM ACETATO

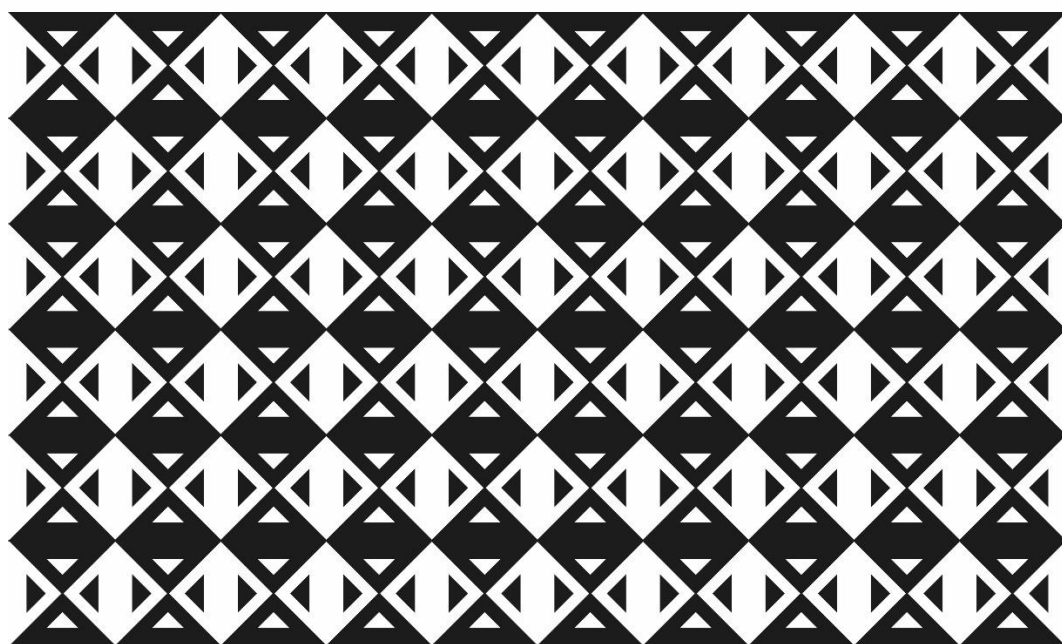
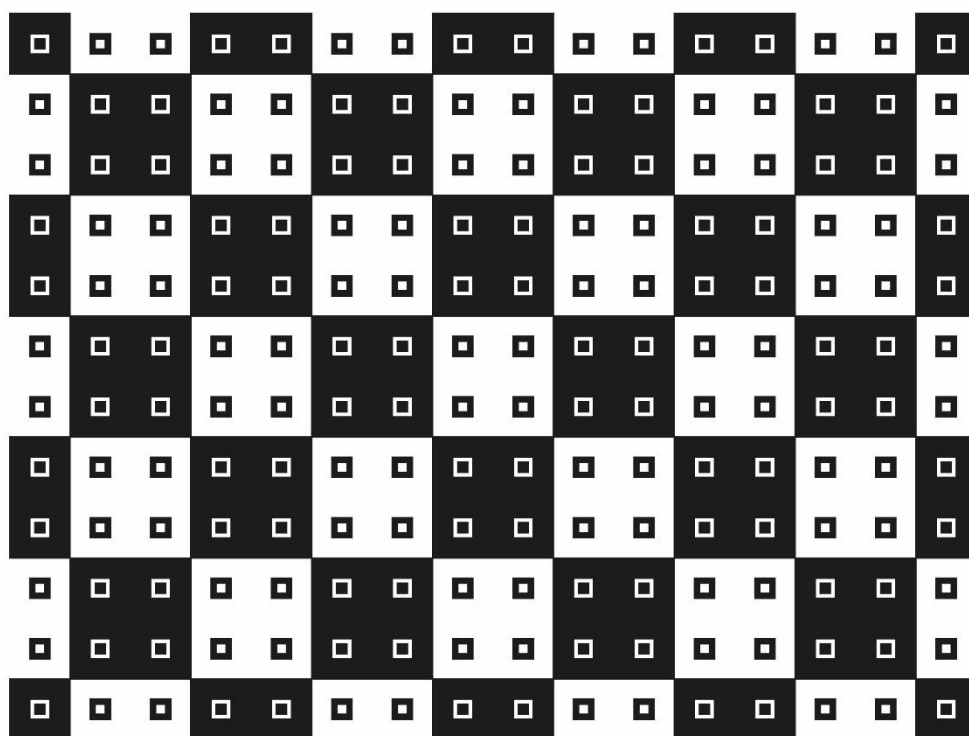






APÊNDICE G – PRIMEIRA ATIVIDADE: TESSELAÇÕES PARA RECORTAR





APÊNDICE H – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO															
1. IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO DE PESQUISA															
Título do Projeto: Matemática e Arte: Tesselações e Ornamentos no Plano Euclidiano para o Aprendizado de Isometrias															
Área do Conhecimento: Ensino de Matemática						Número de participantes: 60									
Curso: Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática						Unidade: Canoas									
Projeto Multicêntrico		☐ Sim		☒ Não		☐ Nacional		☐ Internacional		☐ Cooperação Estrangeira		☐ Sim		☒ Não	
Patrocinador da pesquisa:															
Instituição onde será realizado: Escola Municipal de Ensino Fundamental Santos Dumont – Canoas/ RS															
Nome dos pesquisadores e colaboradores: Douglas Fonseca Machado e Orientador: Prof. Dr. Agostinho Iaquan Ryokiti Homa															

Seu filho (**e/ou menor sob sua guarda**) está sendo convidado(a) para participar do projeto de pesquisa acima identificado. O documento abaixo contém todas as informações necessárias sobre a pesquisa que estamos fazendo. Sua autorização para que ele participe neste estudo será de muita importância para nós, mas, se retirar sua autorização, a qualquer momento, isso não lhes causará nenhum prejuízo.

2. IDENTIFICAÇÃO DO PARTICIPANTE DA PESQUISA E/OU DO RESPONSÁVEL			
Nome do Menor:		Data de Nasc.:	
Nacionalidade:		Estado Civil:	
RG:		CPF/MF:	
Telefone:		E-mail:	
Endereço:			

3. IDENTIFICAÇÃO DO PESQUISADOR RESPONSÁVEL	
Nome: Douglas Fonseca Machado	Telefone: (51) 981877484
Profissão: Professor	Registro no Conselho N°:
E-mail: douglasfonsec2021@gmail.com	
Endereço: Rua Washington Luís, nº 54 – CEP – 92130-450	

Eu, responsável pelo menor acima identificado, após receber informações e esclarecimento sobre este projeto de pesquisa, autorizo, de livre e espontânea vontade, sua participação como voluntário(a) e estou ciente:

1. Da justificativa e dos objetivos para realização desta pesquisa.

Embora a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) enfatize o desenvolvimento de habilidades relacionadas ao pensamento geométrico, como reconhecer padrões, propriedades de figuras e construir argumentações lógicas, constata-se que o ensino da Geometria tem sido conduzido de maneira excessivamente abstrata e focada apenas em cálculos algébricos, negligenciando a aplicação desta área na representação de fenômenos do mundo real.

Dessa forma, torna-se necessário buscar alternativas metodológicas que proporcionem um ensino mais contextualizado e significativo da Geometria, especialmente no que tange ao estudo das transformações geométricas, como as isometrias (reflexão, translação e rotação).

A proposta é utilizar mosaicos como recurso didático interdisciplinar, combinando Matemática e Artes Visuais em uma sequência didática. Mosaicos são criações artísticas que empregam repetição de padrões e isometrias em sua construção. Acredita-se que a integração de mosaicos para o aprendizado das isometrias possa promover um ensino mais contextualizado, significativo e motivador, contribuindo para o desenvolvimento do pensamento geométrico dos estudantes. Além da compreensão conceitual das isometrias, essa abordagem possibilita a apreciação estética e aplicação prática desses conceitos geométricos.

2. Do objetivo da participação de meu filho.

A pesquisa sobre "O processo de ensino-aprendizagem das isometrias" é fundamental para desenvolver diferentes métodos na educação matemática. A participação dos estudantes é crucial, pois fornece dados valiosos que ajudam a moldar práticas educacionais potencialmente eficazes. Essas práticas visam não apenas auxiliar a compreensão dos alunos sobre conceitos geométricos, mas também aprimorar a aplicação desses conceitos em ambientes escolares reais.

3. Do procedimento para coleta de dados.

No período de novembro de 2024, os alunos participarão de uma série de atividades que previamente incluem um questionário para identificar afinidade com conceitos de Geometria. Durante as atividades do experimento, as atividades realizadas terão enfoque na aprendizagem de isometria a partir da construção de mosaicos, serão feitas observações detalhadas, gravações e registros fotográficos das tarefas. A Teoria das Situações Didáticas e Trajetória Hipotética de Aprendizagem serão metodologias empregadas para auxiliar na elaboração e resolução de atividades de isometrias. Estão programados seis encontros em sala de aula, onde o pesquisador atuará como professor, aplicando a sequência didática conforme estabelecido.

4. Da utilização, armazenamento e descarte das amostras.

Os dados obtidos através da pesquisa serão armazenados em um computador de uso exclusivo do pesquisador. Eles serão empregados na transcrição e análise, visando o estudo e entendimento da questão investigada. Além disso, os dados adquiridos poderão ser aplicados em futuros estudos relacionados

5. Dos desconfortos e dos riscos.

A pesquisa em questão é segura em termos de integridade física e saúde dos participantes, mas existe a preocupação com a privacidade dos dados de desempenho dos estudantes. Para evitar qualquer constrangimento que possa surgir de uma quebra de confidencialidade, o pesquisador compromete-se a manter essas informações em sigilo e não as divulgará publicamente. Durante as entrevistas, que serão realizadas individualmente, a privacidade dos estudantes será protegida, e ao apresentar os resultados, os nomes reais serão substituídos por pseudônimos para garantir o anonimato. A pesquisa garante a confidencialidade e o anonimato dos dados dos estudantes, e a participação é voluntária com a opção de retirada a qualquer momento.

6. Dos benefícios.

A sequência didática em isometrias, pode promover o aprendizado interativo e concreto através de materiais tangíveis e digitais. Utilizando mosaicos e softwares de geometria, os estudantes podem construir e compreender figuras geométricas, como as obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão. Essas atividades fomentam a criatividade, resolução de problemas e o desenvolvimento do raciocínio geométrico e crítico.

7. Da isenção e ressarcimento de despesas.

A participação é isenta de despesas e não receberá ressarcimento porque não terá despesas na participação da pesquisa, durante a realização do experimento.

8. Da forma de acompanhamento e assistência.

O pesquisador estará disponível para esclarecer as dúvidas em relação à pesquisa, seus métodos e procedimentos. Os resultados individuais das atividades estarão disponíveis durante todo o período podendo ser requerido ao pesquisador a qualquer momento.

9. Da liberdade de recusar, desistir ou retirar meu consentimento.

Tenho a liberdade de recusar, desistir ou de interromper a colaboração nesta pesquisa no momento em que desejar, sem necessidade de qualquer explicação. A minha desistência não causará nenhum prejuízo à minha saúde ou bem-estar físico. Não virá interferir com a pesquisa "Matemática E Arte: Tesselações E Ornamentos No Plano Euclidiano Para O Aprendizado Das Isometrias

10. Da garantia de sigilo e de privacidade.

Os resultados obtidos durante este estudo serão mantidos em sigilo, mas concordo que sejam divulgados em publicações científicas, desde que meus dados pessoais não sejam mencionados.

11. Da garantia de esclarecimento e informações a qualquer tempo.

Tenho a garantia de tomar conhecimento e obter informações, a qualquer tempo, dos procedimentos e métodos utilizados neste estudo, bem como dos resultados finais, desta pesquisa. Para tanto, poderei consultar o **pesquisador responsável Douglas Fonseca Machado** Em caso de dúvidas não esclarecidas de forma adequada pelo(s) pesquisador(es), de discordância com os procedimentos, ou de irregularidades de natureza ética poderei ainda contatar o **Comitê de Ética em Pesquisa em Seres**

Humanos da Ulbra Canoas (RS), com endereço na Rua Farroupilha, 8.001 – Prédio 14 – Sala 224, Bairro São José, CEP 92425-900 - telefone (51) 3477-9217, e-mail comitedeetica@ulbra.br. Horário de atendimento ao público externo, pesquisadores e público em geral: De segunda a sexta-feira, das 08h às 14h, **EXCETO** nas tardes das últimas quintas-feiras de cada mês, momento em que são realizadas as Reuniões Ordinárias do Colegiado do CEP.

COMISSÃO NACIONAL DE ÉTICA EM PESQUISA - CONEP:

SRTVN - Via W 5 Norte - Edifício PO700 - Quadra 701, Lote D - 3º andar - Asa Norte, CEP 70719-040, Brasília (DF);
Telefone: (61) 3315-5877. **Horário de atendimento: 09h às 18h.**

Declaro que obtive todas as informações necessárias e esclarecimento quanto às dúvidas por mim apresentadas e, por estar de acordo, assino o presente documento em duas vias de igual conteúdo e forma, ficando uma em minha posse.

_____(), ____ de ____ de ____.

Participante da Pesquisa

Responsável pelo Participante da Pesquisa

Pesquisador Responsável pelo Projeto

APÊNDICE I – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO



UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

Pró-Reitoria Acadêmica



Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

(PARA MENORES DE 07 a 18 ANOS - OFÍCIO CIRCULAR Nº 11/2023/CONEP/SECNS/DGIP/SE/MS)

OBS.: Este Termo de Assentimento do menor de 07 a 18 anos não elimina a necessidade da elaboração de um Termo de Consentimento Livre e Esclarecido que deve ser assinado pelo responsável ou representante legal do menor.

Convidamos você, após autorização dos seus pais [ou dos responsáveis legais], para participar como voluntário (a) da pesquisa: **MATEMÁTICA E ARTE: TESSELAÇÕES E ORNAMENTOS NO PLANO EUCLIDIANO PARA O APRENDIZADO DAS ISOMETRIAS**. Esta pesquisa é da responsabilidade do (a) pesquisador (a) Douglas Fonseca Machado (R. Washington Luís, nº54, Canoas, CEP: 92130-450, telefone: (51) 9 8187-7484, e-mail: douglasfonsec2021@gmail.com) e está sob a orientação de: prof. Dr. Agostinho Iaquchan Ryokiti Homa Telefone: (51)998021620, e-mail iaqchan@ulbra.br.

Este Termo de Assentimento pode conter informações que você não entenda. Caso haja alguma dúvida, pergunte à pessoa que está lhe entrevistando para que esteja bem esclarecido (a) sobre sua participação na pesquisa. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer pagamento para participar. Você será esclarecido(a) sobre qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. Após ler as informações a seguir, caso aceite participar do estudo, assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é para ser entregue aos seus pais para guardar e a outra é do pesquisador responsável. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema se desistir, é um direito seu. Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um Termo de Consentimento, podendo retirar esse consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

Descrição da pesquisa: A participação é voluntária e tem por objetivo investigar as contribuições de uma sequência didática interdisciplinar, combinando Matemática e Artes Visuais para a aprendizagem das isometrias - reflexão, translação e rotação por meio da construção e análise destas em mosaicos. Será realizado um questionário para identificar o grau de compreensão em conceitos de Geometria. Além de filmagens durante os encontros para auxiliar na análise posterior, e que serão descartadas após elas, observações e registros realizados durante a execução das atividades solicitadas e um questionário semiestruturado ao final para verificar a compreensão do participante ao objeto realizado. O período de participação do aluno será de outubro a novembro de 2024 com encontros duas vezes na semana que ocorreram nas dependências da escola.

RISCOS diretos A pesquisa em questão é segura em termos de integridade física e saúde dos participantes, mas existe a preocupação com a privacidade dos dados de desempenho dos estudantes. Para evitar qualquer constrangimento que possa surgir de uma quebra de confidencialidade, o pesquisador compromete-se a manter essas informações em sigilo e não as divulgará publicamente. Durante as entrevistas, que serão realizadas individualmente, a privacidade dos estudantes será protegida, e ao apresentar os resultados, os nomes reais serão substituídos por pseudônimos para garantir o anonimato. A pesquisa garante a confidencialidade e o anonimato dos dados dos estudantes, e a participação é voluntária com a opção de retirada a qualquer momento.

BENEFÍCIOS diretos e indiretos A sequência didática em isometrias, pode promover o aprendizado interativo e concreto através de materiais tangíveis e digitais. Utilizando mosaicos e softwares de geometria, os estudantes podem construir e compreender figuras geométricas, como as obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão. Essas atividades fomentam a criatividade, resolução de problemas e o desenvolvimento do raciocínio geométrico e crítico.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa (gravações, entrevistas, filmagens) ficarão armazenados em pasta de arquivo do computador pessoal do pesquisador, sob a responsabilidade do pesquisador, no endereço acima informado, pelo período de no mínimo 5 anos. Nem você e nem seus pais [ou responsáveis legais] pagarão nada para você participar desta pesquisa. Se houver necessidade, as despesas para a sua participação e de seus pais serão assumidas ou ressarcidas pelos pesquisadores. Fica também garantida indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da sua participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

Este documento passou pela aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos que está no endereço: **Av. Farroupilha, nº 8.001 – prédio 14, sala 224 – Bairro: São José – Canoas/RS, CEP: 92425-900, Tel.: (51) 3477-9217 – e-mail: comitedeetica@ulbra.br.**

COMISSÃO NACIONAL DE ÉTICA EM PESQUISA - CONEP: SRTVN - Via W 5 Norte - Edifício PO700 - Quadra 701, Lote D - 3º andar - Asa Norte, CEP 70719-040, Brasília (DF); Telefone: (61) 3315-5877. **Horário de atendimento: 09h às 18h.**

Assinatura do pesquisador (a)

ASSENTIMENTO DO MENOR DE IDADE EM PARTICIPAR COMO VOLUNTÁRIO

Eu, _____, portador (a) do documento de Identidade _____ (se já tiver documento), abaixo assinado, concordo em participar do estudo MATEMÁTICA E ARTE: TESSELAÇÕES E ORNAMENTOS NO PLANO EUCLIDIANO PARA O APRENDIZADO DAS ISOMETRIAS, como voluntário (a). Fui informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisador (a) sobre a pesquisa, o que vai ser feito, assim como os possíveis riscos e benefícios que podem acontecer com a minha participação. Foi-me garantido que posso desistir de participar a qualquer momento, sem que eu ou meus pais precisemos pagar nada.

Local e data _____

Assinatura do (da) menor: _____

Presenciamos a solicitação de assentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do/a voluntário/a em participar. 2 testemunhas (não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome:

Assinatura:

Nome:

Assinatura:

ANEXOS

ANEXO A – MATRIZ DE REFERÊNCIA PRIORIZADA DO ESTADO OITAVO ANO

8º ano			
Matemática			
Trimestre	Habilidades	Objetos de conhecimento	Tema transversal
2º	(EF08MA07RS-1) Associar uma equação linear de 1º grau com duas incógnitas a uma reta no plano cartesiano, viabilizando comparações gráficas, com e sem uso de tecnologias digitais; (EF08MA08) Resolver e elaborar problemas relacionados ao seu contexto próximo, que possam ser representados por sistemas de equações de 1º grau com duas incógnitas e interpretá-los, utilizando, inclusive, o plano cartesiano como recurso; (EF08MA09) Resolver e elaborar, com e sem uso de tecnologias, problemas que possam ser representados por equações polinomiais de 2º grau do tipo $ax^2 = b$; (EF08MA10) Identificar a regularidade de uma sequência numérica ou figural não recursiva e construir um algoritmo por meio de um fluxograma que permita indicar os números ou as figuras seguintes; (EF08MA20) Reconhecer a relação entre um litro e um decímetro cúbico e a relação entre litro e metro cúbico, para resolver problemas de cálculo de capacidade de recipientes; (EF08MA19) Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas	Sistema de equações polinomiais de 1º grau: resolução algébrica representação no plano cartesiano; Equação polinomial de 2º grau do tipo $ax^2 = b$; Sequências recursivas e não recursivas; Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais; Volume de cilindro reto; Medidas de capacidade; Área de figuras planas; Área do círculo e comprimento de sua circunferência; Variação de grandezas: diretamente proporcionais, inversamente	Resolver problemas que envolvam cálculos matemáticos na resolução de problemas de demarcação de terras que envolvem quilombolas, afro-brasileiros e indígenas; Identificar a importância das novas tecnologias digitais nas periferias, quilombos e comunidades indígenas; Comparar as propriedades de quadriláteros triângulos com as pirâmides do Egito;
	de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos; (EF08MA13RS-1) Resolver, elaborar e socializar problemas que envolvam grandezas diretamente ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas, com uso ou não de tecnologias digitais; (EF08MA14) Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos; (EF08MA15) Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°; (EF08MA17) Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas.	proporcionais ou não proporcionais; Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros; Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares; Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas.	
3º	(EF08MA18) Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica; (EF08MA21) Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de recipiente cujo formato é o de um bloco retangular; (EF08MA22RS-1) Explorar e calcular problemas que envolvam probabilidade de eventos, a construção de espaços amostrais, utilizando o princípio multiplicativo, e expressá-la por meio de representações fracionárias, decimais e porcentagens; (EF08MA22) Calcular a probabilidade de eventos, com base na construção do espaço amostral, utilizando o princípio multiplicativo, e reconhecer que a soma das probabilidades de todos os elementos do espaço amostral é igual a 1; (EF08MA23) Avaliar a adequação de diferentes tipos de gráficos para representar um conjunto de dados de uma pesquisa; (EF08MA25RS-1) Investigar e resolver medidas de tendência central	Gráficos de barras, colunas, linhas ou setores e seus elementos constitutivos e adequação para determinado conjunto de dados; Pesquisas censitária ou amostral; Planejamento e execução de pesquisa amostral; Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação.	Conhecer estatísticas que mostrem questões ambientais, como pandemia, discutindo os cálculos apresentados; Conhecer dados e informações que fazem referência ao preconceito, trazendo o recorte de expressão de gênero, étnico-racial e socioeconômico (Dia nacional dos Direitos Humanos); Coletar dados da socioeconômicos dos povos africanos, afro-brasileiro e indígenas para organizar dados coletados por meio de tabelas, gráficos de colunas (Semana da Consciência Negra e Dia dos Povos Indígenas); Conhecer dados e informações que fazem referência ao preconceito,

	(média, moda e mediana), utilizando o rol de dados; (EF08MA26) Selecionar razões, de diferentes naturezas (física, ética ou econômica), que justificam a realização de pesquisas amostrais e não censitárias, e reconhecer que a seleção da amostra pode ser feita de diferentes maneiras (amostra casual simples, sistemática e estratificada); (EF08MA27) Planejar e executar pesquisa amostral, selecionando uma técnica de amostragem adequada, e escrever relatório que contenha os gráficos apropriados para representar os conjuntos de dados, destacando aspectos como as medidas de tendência central, a amplitude e as conclusões.	trazendo o recorte de expressão de gênero, étnico-racial e socioeconômico (Dia nacional dos Direitos Humanos); Coletar dados da socioeconômicos dos povos africanos, afro-brasileiro e indígenas para organizar dados coletados por meio de tabelas, gráficos de colunas (Semana da Consciência Negra e Dia dos Povos Indígenas); Identificar temas que fazem referência à violência contra as mulheres (Semana Maria da Penha nas Escolas); Pesquisar materiais que fazem referência à violência contra crianças e adolescentes, trazendo o recorte de expressão de gênero, étnico-racial e socioeconômico (Semana da Criança e do Adolescente).
--	---	---

Fonte: Subsecretaria de Desenvolvimento da Educação e seu Departamento de Desenvolvimento Curricular da Educação Básica