UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA ACADÊMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ROSÂNGELA FERREIRA DOMINGUES

TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS: CONTEXTUALIZAÇÃO PARA O ENSINO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO VISANDO UMA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA

Canoas, 2025.

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA ACADÊMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ROSÂNGELA FERREIRA DOMINGUES

TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS: CONTEXTUALIZAÇÃO PARA O ENSINO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO VISANDO UMA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA

Tese apresentada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: CLARISSA DE ASSIS OLGIN

Canoas, 2025.

ROSÂNGELA FERREIRA DOMINGUES

TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS: CONTEXTUALIZAÇÃO PARA O ENSINO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO VISANDO UMA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA

Tese apresentada no Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Data de Aprovação: 21/02/2025

BANCA EXAMINADORA

____
Profa. Dra. Neura Maria de Rossi Giusti
Universidade Norte do Paraná – UNOPAR

____
Profa. Dra. Simone Fátima Zanoello
Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões – URI

____
Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA

____
Prof. Dr. Rossano André Dal-Farra
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA

____
Profa. Dra. Clarissa de Assis Olgin (Orientadora)
Universidade Luterana do Brasil – ULBRA

D671t Domingues, Rosângela Ferreira

Temas Contemporâneos Transversais: contextualização para o ensino médio visando uma educação matemática crítica – 2025.
296fl.

Orientador (a): Clarissa de Assis Olgin

Tese (doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, BR-RS, 2025.

1. Ensino Médio. 2. Educação Matemática Crítica. 3. Temas Contemporâneos Transversais. 4. Registro de Representação Semiótica. 5. Ensino e aprendizagem de funções. 6. Sequência Didática. I. Clarissa de Assis Olgin. II. Título.

CDU 510

Bibliotecária Responsável: Ana Lídia Alves CRB/10 2298

À minha família, em especial ao meu esposo Antonio Carlos de O. Machado, e aos meus filhos, Karine Domingues Machado e Kairo Domingues Machado.

AGRADECIMENTOS

Agradeço, primeiramente, a Deus por todas as graças alcançadas, pois creio que sempre posso contar com Sua proteção. Aos meus pais, Valdeci Ferreira Domingues e Pedro José Domingues, que me criaram e me proporcionaram todas as condições necessárias para meus estudos, estando sempre ao meu lado nos momentos em que precisei. Ao meu esposo, Antonio Carlos, que em nenhum momento deixou de acreditar que eu conseguiria, por ser o meu grande incentivador a continuar com meus estudos, foi meu alicerce em todos os momentos de dificuldade e proporcionou, aos nossos filhos, toda a atenção que eu não pude dar nesses quatro anos, principalmente durante a minha ausência física por conta das viagens para cumprimento dos créditos e participação nos eventos para divulgação da minha pesquisa. Aos meus filhos, Karine e Kairo, por sua paciência e compreensão ao verem meu tempo e atenção dividida com os estudos. Aos meus irmãos e demais familiares que sempre me incentivaram. À Wedna e a todos os amigos e colegas que, de alguma forma, me incentivaram e torceram por mim. À coordenadora, Profa. Dra. Cláudia, ao secretário Moisés e a todos os professores do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM/ULBRA). À minha orientadora, Profa. Dra. Clarissa, por todos os ensinamentos, o apoio, a colaboração, o incentivo e por sua competência e sabedoria. À Lucimara e a todos os meus colegas de curso, em especial aos colegas do meu grupo de pesquisa, alguns se tornaram amigos que sempre vou me lembrar com um carinho muito especial. Aos professores doutores que compuseram a minha banca de avaliação, pelas contribuições. À Secretaria de Estado de Educação de Mato Grosso, pela concessão da minha licença qualificação. Aos gestores e aos colegas da E.E. Professor Domingos Aparecido dos Santos, principalmente à professora Marta que me concedeu espaço para a aplicação da minha pesquisa. Aos estudantes participantes da pesquisa pelas contribuições.

Por vezes sentimos que aquilo que fazemos não é senão uma gota de água no mar. Mas o mar seria menor se lhe faltasse uma gota.

Madre Teresa de Calcutá

RESUMO

O conteúdo de funções permeia todo o currículo de Matemática do Ensino Médio no Brasil e seu ensino deve ser realizado visando atingir as competências gerais dessa área de conhecimento, conforme previsto na Base Nacional Comum Curricular. Os Temas Contemporâneos Transversais, que estão presentes na Base Nacional Comum Curricular, são temas que têm relação com a realidade atual em que se encontram os estudantes brasileiros e devem ser trabalhados de forma a contextualizar os conteúdos escolares visando à complementação dos estudos nessa etapa escolar. Na busca por um ensino contextualizado, propõe-se neste estudo, o seguinte problema de investigação: quais são as contribuições para o ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio ao desenvolver sequências didáticas sobre funções, explorando diferentes representações e utilizando os Temas Contemporâneos Transversais propostos pela Base Nacional Comum Curricular? Utilizou-se como aportes teóricos para a realização desse trabalho: um contexto histórico sobre o Ensino Médio, contemplando o Ensino de Matemática e o ensino de funções no Brasil; os Temas Contemporâneos Transversais; a Educação Matemática Crítica; e os Registros de Representação Semiótica. Para nortear esse trabalho, traçou-se o objetivo geral de investigar a utilização de uma sequência didática sobre funções, elaborada a partir dos Temas Contemporâneos Transversais e das diferentes representações matemáticas, para potencializar o ensino e a aprendizagem de Matemática no Ensino Médio, bem como favorecer a formação crítica dos estudantes. A pesquisa teve uma abordagem qualitativa com análise interpretativa e foi realizada em 2023, com 20 estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola da rede estadual de Rondonópolis/MT. Os principais resultados evidenciaram que o ensino de funções, aliado aos Temas Contemporâneos Transversais, despertou o interesse dos estudantes pelo objeto matemático em estudo. Os livros didáticos mostraram-se importantes, pois ofereceram diversos recursos tanto para a abordagem dos Temas Contemporâneos Transversais quanto para a Educação Matemática Crítica, enriquecendo e potencializando o Ensino de Matemática. Além disso, a utilização dos Registros de Representação Semiótica contribuiu para a compreensão dos tópicos estudados. A sequência didática oportunizou a contextualização dos conhecimentos matemáticos, favorecendo a exploração do conhecimento reflexivo. Por fim, os estudantes apresentaram indícios do desenvolvimento da *matemacia*, o que pode ter despertado a competência crítica, promovendo o desenvolvimento de conhecimentos e habilidades que os capacitam a atuar como cidadãos críticos e responsáveis em diversos âmbitos da sociedade, estimulando sua capacidade de análise e intervenção social.

Palavras-chaves: Ensino Médio; Educação Matemática Crítica; Temas Contemporâneos Transversais; Registro de Representação Semiótica; ensino e aprendizagem de funções; sequência didática.

ABSTRACT

The topic of functions permeates the entire Mathematics curriculum in Brazilian high schools, and its teaching should be conducted with the aim of achieving the general competencies of this field of knowledge, as established by the Common National Curriculum Base (BNCC). The Cross-Curricular Contemporary Themes, which are included in the BNCC, are topics related to the current reality experienced by Brazilian students and should be addressed in a way that contextualizes school content, complementing students' studies at this educational stage. In the pursuit of a contextualized teaching approach, this study proposes the following research question: What are the contributions to the teaching and learning of Mathematics in high school when developing didactic sequences on functions, exploring different representations and incorporating the Cross-Curricular Contemporary Themes proposed by the BNCC? The theoretical framework for this study included: a historical overview of high school education, with a focus on Mathematics teaching and the instruction of functions in Brazil; the Cross-Curricular Contemporary Themes; Critical Mathematics Education; and the Registers of Semiotic Representation. To guide this study, the general objective was outlined as investigating the use of a didactic sequence on functions, developed based on the Cross-Curricular Contemporary Themes and different mathematical representations, to enhance the teaching and learning of Mathematics in high school, as well as to promote students' critical thinking. The research followed a qualitative approach with an interpretative analysis and was conducted in 2023 with 20 third-year high school students from a state school in Rondonópolis, Mato Grosso. The main results highlighted that teaching functions in conjunction with the Cross-Curricular Contemporary Themes sparked students' interest in the mathematical topic under study. Textbooks proved to be important resources, offering various materials for addressing both the Cross-Curricular Contemporary Themes and Critical Mathematics Education, thereby enriching and enhancing Mathematics instruction. Additionally, the use of the Registers of Semiotic Representation contributed to a better understanding of the topics studied. The didactic sequence provided an opportunity to contextualize mathematical knowledge, fostering the exploration of reflective thinking. Finally, students showed signs of developing mathematical literacy, which may have fostered critical competence, promoting the acquisition of knowledge and skills that enable them to act as critical and responsible citizens in different areas of society, encouraging their capacity for analysis and social intervention.

Keywords: High School; Critical Mathematics Education; Transversal Contemporary Themes; Registers of Semiotic Representation; teaching of functions; didactic sequence.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) apresenta os Temas Contemporâneos Transversais (TCT) como uma extensão dos já conhecidos Temas Transversais constantes dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN). Assim, a BNCC preconiza que esses TCT sejam trabalhados de forma a contextualizar o ensino dos conteúdos das áreas do conhecimento.

O Ensino de Matemática requer uma busca contínua por aprimoramento na implementação de práticas educativas que promovam um currículo[1] mais flexível e contextualizado, oferecendo aos estudantes oportunidades para um aprendizado ativo e participativo. Para os professores da Educação Básica, ao desenvolverem esse currículo, é crucial não apenas dominarem o conteúdo da disciplina, mas também entenderem as diversas maneiras pelas quais os estudantes assimilam e constroem conhecimentos.

Na busca por um ensino contextualizado, decidiu-se por desenvolver um trabalho aliando os TCT ao objeto matemático função. Essa integração tem por objetivo estimular a competência crítica dos estudantes do Ensino Médio por meio dos pressupostos da Educação Matemática Crítica (EMC) na perspectiva de Skovsmose (2001, 2010, 2015). Assim, para o desenvolvimento desta tese foi realizado um trabalho de investigação por meio da implementação de uma sequência didática cujo objetivo era investigar como o estudo de funções, ensinado a partir de atividades contextualizadas pelos TCT, contribui para o desenvolvimento do estudante almejando assim uma EMC. Essa integração entre os TCT, os referenciais teóricos adotados e a sequência didática desenvolvida para o ensino de funções, aliada ao uso de metodologias diferenciadas, representa indícios de um trabalho inovador, que busca promover uma Educação Matemática Crítica.

Para tanto, foi elaborado o problema de investigação: quais são as contribuições para o ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio ao desenvolver uma sequência didática sobre funções, explorando diferentes representações e utilizando os Temas Contemporâneos Transversais propostos pela Base Nacional Comum Curricular? E para responder a esse problema, propôs-se

---

[1] O termo currículo, para Lopes e Macedo (2011, p. 19) pode ter muitos significados, mas adota-se nesse estudo, que currículo no âmbito escolar envolve “a ideia de organização, prévia ou não, de experiências/situações de aprendizagem realizada por docentes/redes de ensino de forma a levar a cabo um processo educativo”.

investigar a utilização de uma sequência didática sobre funções, elaborada a partir dos Temas Contemporâneos Transversais e das diferentes representações matemáticas, para potencializar o ensino e a aprendizagem de Matemática no Ensino Médio, bem como favorecer a formação crítica dos estudantes.

A pesquisa desenvolvida teve caráter qualitativo, com análise interpretativa a partir dos instrumentos utilizados para a coleta de dados. Os dados foram coletados durante a aplicação de uma sequência didática junto aos estudantes do 3º ano do Ensino Médio da Escola Estadual Professor Domingos Aparecido dos Santos, localizada em Rondonópolis, Mato Grosso.

O texto que compõe essa tese está organizado em oito capítulos. O primeiro capítulo contempla a introdução com a apresentação dos capítulos da tese. O capítulo 2 apresenta a trajetória da pesquisadora, a pesquisa, apontando a justificativa, o problema e os objetivos (geral e específicos). O capítulo 3 foi dedicado à revisão de literatura, que apresenta trabalhos selecionados na Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) em duas categorias: teses e dissertações envolvendo o tema em estudo, e artigos envolvendo o tema em estudo. O capítulo 4 foi composto pelo referencial teórico que contempla: um breve contexto histórico do ensino no Brasil, com seções destinadas ao Ensino Médio no Brasil, ao Ensino de Matemática no Brasil, um breve olhar para o conceito de função ao longo da história, e o ensino de funções no Brasil; os Temas Contemporâneos Transversais; a Educação Matemática Crítica; e os Registros de Representação Semiótica.

O capítulo 5 apresenta a metodologia com seções sobre a pesquisa qualitativa, as etapas da pesquisa, os instrumentos de coleta de dados da pesquisa, local e participantes da pesquisa, e sobre a análise de dados da pesquisa. Já o capítulo 6 foi destinado a apresentar a sequência didática e, além disso, já apresenta alguns dos resultados das etapas anteriores, que foram necessários para a construção da sequência didática, sendo: a análise dos livros didáticos e a análise do questionário inicial da pesquisa.

O capítulo 7 foi construído com os resultados obtidos a partir da aplicação da sequência didática e das análises dos demais instrumentos de pesquisa incluindo as atividades desenvolvidas e o questionário final. Além disso, no fechamento desse capítulo, apresenta-se uma seção destinada a algumas reflexões sobre os resultados. O capítulo 8 é a conclusão que apresenta o fechamento do documento, com as contribuições e as perspectivas para pesquisas futuras.

2 A PESQUISA

Neste capítulo apresenta-se a justificativa da investigação envolvendo os Temas Contemporâneos Transversais e o ensino de funções. Em seguida, são abordados o problema de pesquisa e os objetivos. Para introduzir o capítulo, optou-se por apresentar a trajetória da pesquisadora.

2.1 TRAJETÓRIA DA PESQUISADORA

Essa seção é destinada a contar um pouco da trajetória pessoal, acadêmica e profissional da pesquisadora. Sendo assim, optou-se por utilizar a narrativa em primeira pessoa.

Nasci em 1978 em Rondonópolis/MT, mesma cidade que resido até hoje, mas na época do meu nascimento, meus pais e meus 4 irmãos moravam em um pequeno vilarejo chamado Aparecida do Leste que fica a quase 120 km de distância de Rondonópolis. No ano de 1979 meus pais resolveram se mudar para Rondonópolis para que minha irmã mais velha pudesse continuar os estudos, pois no vilarejo onde moravam só havia o Ensino Fundamental. Por ter nascido no mês de novembro, comecei a estudar com sete anos completos, o que me deixava frustrada muitas vezes, pois os meus colegas de turma eram mais novos que eu, sendo assim, me sentia atrasada. Estudei da primeira à oitava série, atualmente nono ano, na Escola Estadual de Ensino Fundamental São José Operário, uma escola confessional muito disciplinada. Ao término do Ensino Fundamental, tive que fazer a minha primeira escolha profissional, pois devia me decidir em fazer o curso Propedêutico, Magistério ou Técnico em Contabilidade, acabei me decidindo pelo último e assim, para cursar o Ensino Médio, me transferi para a Escola Estadual Major Otávio Pitaluga no centro da cidade.

Eu sempre fui muito estudiosa, desde o princípio era sempre a melhor da turma e, quando alguém me superava nas notas, eu ficava frustrada e fazia de tudo para pegar meu *lugar* de volta e conseguia quase sempre, foi assim durante todo o Ensino Fundamental e quase todo o Ensino Médio. No início do ano letivo, a minha maior satisfação era quando eu ganhava os livros didáticos, pois assim eu poderia fazer todas as tarefas com antecedência. Certa vez, a minha professora de português me fez apagar o livro quase todo quando ela descobriu que eu já tinha respondido antes da hora. Mas sempre gostei mesmo foi de Matemática, o que sempre era um diferencial, pois a maioria dos meus colegas gostava de outras disciplinas. Meus pais sempre foram comerciantes e eu os ajudei no comércio desde pequena, talvez venha daí a minha paixão por números, tive que aprender a fazer conta bem cedo para ajudá-los, pois meus pais têm pouco estudo e meus irmãos casaram cedo e eu, a caçula de cinco filhos, virei o *braço direito* deles.

Gosto de pensar que decidi pela minha profissão desde a infância, apesar de não assumir isso na época, pois sempre brincava com os coleguinhas, montava as cadeiras e o quadro (quase sempre uma parede), e eu era a professora. Apesar disso, não almejava lecionar, pois quando concluí o Ensino Fundamental queria cursar Economia, mas mudei de ideia quando tive contato com a disciplina no curso Técnico em Contabilidade durante o Ensino Médio. Sendo assim, ao final do 3º ano desse curso, influenciada por duas colegas da turma, prestei o vestibular e fui aprovada na primeira tentativa para o curso de Licenciatura em Matemática na Universidade Federal de Mato Grosso, Campus de Rondonópolis, hoje Universidade de Rondonópolis.

Mesmo durante a licenciatura, eu relutava à ideia de ser professora. Mas como precisava de trabalho, no meu último ano de faculdade, procurei algumas escolas no início do ano letivo para me apresentar e começar a lecionar, mas não obtive sucesso, pois nas escolas que procurei me disseram não haver vagas, o que eu descobri mais tarde que na verdade me negaram o emprego por não ter experiência. Isso foi em 1999 e nessa época não havia processo seletivo para contratação de professores nas escolas estaduais, sendo os coordenadores e diretores quem escolhiam quem teria turmas na escola. Após iniciado o ano letivo desse ano, um colega da minha turma que estava trabalhando em uma escola de Ensino para Jovens e Adultos (EJA), me ofereceu três de suas seis turmas, pois ele disse que estava sobrecarregado com a quantidade de turma e as aulas no nosso último período de estudo na faculdade. Me apresentei na escola e, como havia sido indicada por ele, fui aceita para o cargo. Assim, comecei minha jornada como professora na Escola Estadual Alfredo Marien, onde assumi três turmas de EJA (na época era modalidade Supletivo) e foi o suficiente para eu entender que essa era realmente a minha profissão. Esse início me trouxe uma experiência muito positiva, pois aprendi a ter paciência ao ensinar e compreender as dificuldades dos meus estudantes, que na sua maioria eram mais velhos que eu, e muitos já estavam há vários anos sem estudar.

Não parei mais de lecionar. Terminando a faculdade, prestei concurso público para professor da rede estadual de ensino de Mato Grosso, passei e assumi minhas aulas na escola em que eu já trabalhava, a Escola Estadual Alfredo Marien. Em 2001 passei em outro concurso, agora na rede municipal, assumi por menos de seis meses, pois no ano seguinte, passei num segundo concurso da rede estadual e assumi minhas aulas na escola em que trabalho até hoje, a Escola Estadual Professor Domingos Aparecido dos Santos, acumulando assim 60 horas de trabalho semanais na mesma escola. Nessa escola, sempre lecionei para turmas dos anos finais do Ensino Fundamental e do Ensino Médio.

Retomei minha trajetória de estudos em 2002 quando fiz minha primeira especialização, em Planejamento Educacional, *lato sensu*, ofertado pela Universidade Salgado de Oliveira, quando apresentei o trabalho de conclusão com o título: Gravidez na adolescência.

Durante os anos de 2004 a 2006 eu acumulei as funções de professora e coordenadora pedagógica nessa escola, isso me possibilitou um grande crescimento profissional, pois eu trabalhava não só com os estudantes, mas com os professores e toda a comunidade escolar, acredito ter desenvolvido um bom trabalho, pois só deixei a função devido ao nascimento da minha primeira filha em 2007 e do meu outro filho em 2009.

Em 2006 fiz minha segunda especialização, mas dessa vez em Educação Matemática, *lato sensu*, pelo Instituto Cuiabano de Educação, apresentando o trabalho de conclusão: A informática como ferramenta pedagógica no ensino da Matemática. Muitos me perguntaram o porquê de uma segunda especialização e respondia que era devido à necessidade de estudar mais sobre a Educação Matemática que sempre despertou o meu interesse.

Em 2011, voltei a assumir a função de coordenadora pedagógica e, nesse mesmo ano, me candidatei ao cargo de diretora e fui eleita pela comunidade escolar para um mandato de dois anos que se encerrou em 03 de janeiro de 2014. Tive o apoio de meus familiares, além da grande maioria da comunidade escolar nessa trajetória, o que me foi muito gratificante, tanto pessoal como profissionalmente.

Minha trajetória profissional acabou me distanciando um pouco dos estudos, pois os cargos que exerci, além do nascimento dos meus dois filhos, ocupavam todo o meu tempo, por isso demorei tanto a voltar ao desejo de um mestrado. Em 2014 eu me candidatei ao curso de Mestrado Profissional em Rede Nacional (PROFMAT) pela

Universidade Federal de Mato Grosso, campus Araguaia em Barra do Garças, cidade que fica a 400 quilômetros de distância da minha residência. Fui selecionada e cursei o mestrado nos anos de 2015 a 2017, apresentando minha dissertação em 30 de abril de 2017, com o título: A aritmética como conteúdo extracurricular no Ensino Médio.

A minha experiência como educadora nesses mais de vinte anos, me mostrou que trabalhar na educação, de um modo geral, é sempre um desafio e eu sou uma pessoa que busca esses desafios com muita determinação para vencê-los. Coloquei-me a disposição para assumir cargos como coordenação pedagógica e direção da unidade escolar com o intuito de aprimorar meu lado profissional e vivenciar a escola também fora da sala de aula, e isso tudo foi muito gratificante no sentido dos conhecimentos e experiências adquiridas, principalmente sobre trabalho coletivo e relação interpessoal.

A educação no geral é muito fascinante e ser professora termina sendo uma profissão de benevolências, pois, educar, ensinar o outro, mostrar que a realidade do mundo não é só o pequeno espaço que o estudante vivencia no momento, isso é muito recompensador. Ser professora para mim é uma forma de ajudar o estudante a ter identidade, responsabilidade, além de curiosidade, pois esta é a característica que o leva a buscar o conhecimento.

Assim, por gostar tanto da minha profissão eu sempre procurei aprimorar as minhas práticas pedagógicas. O meu curso do mestrado me ajudou muito no sentido de elevar meus conhecimentos acadêmicos em Matemática, mas ele me distanciou um pouco da Educação Matemática. Por esse motivo, fui em busca de um curso de doutorado e, no final de 2020, fui aprovada na seleção do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM). Dessa forma, comecei a realizar o meu desejo de evoluir, buscando conhecimentos para investigar formas de avançar e melhorar minha prática docente, bem como trazer contribuições para outros professores visando a qualidade do Ensino de Matemática aos estudantes, principalmente do Ensino Médio, pois foi essa etapa escolar a minha escolha para o desenvolvimento do projeto de tese.

2.2 JUSTIFICATIVA

O primeiro ano do Ensino Médio traz muitas novidades aos estudantes que saem do Ensino Fundamental quase sempre despreparados para as mudanças previstas. Dentre essas mudanças, está o acréscimo de disciplinas a serem cursadas e, em alguns estados brasileiros que adotam a progressão automática no Ensino Fundamental, a possibilidade de não aprovação ou progressão dos anos escolares. Aliadas a essas mudanças na escola, há ainda as mudanças de prioridades dos estudantes, que muitas vezes colocam a escola em segundo plano (Melo; Reis, 2018). Dependendo do contexto social e econômico de vida desse estudante, mas pensando na escola pública de periferia, muitas vezes a prioridade está em conseguir um emprego para ajudar na renda familiar ou para se enquadrar nos padrões de consumo ditados pela sociedade atual. Todas essas mudanças influenciam diretamente a aprendizagem e, muitas vezes, atrapalham o desenvolvimento escolar desses jovens ocasionando em evasão ou retenção logo no primeiro ano do Ensino Médio (Melo; Reis, 2018).

Como o estudo das funções é um dos principais conteúdos trabalhados no Ensino Médio e sua aplicabilidade pode ser percebida em muitas situações do cotidiano (Ponte, 1990), precisa-se repensar como está o ensino deste conteúdo, para que este não seja um dos fatores de reprovação dos estudantes nessa etapa e possa ser um diferencial no sentido de despertar maior interesse pela Matemática e ampliar a aprendizagem dos estudantes. O uso dos TCT pode trazer esse diferencial de forma a possibilitar o estudo das funções interligado a outros temas para que haja uma maior motivação dos estudantes, despertando-os para a necessidade de compreensão desse conteúdo (Brasil, 2019a). Na BNCC, as habilidades que envolvem o conteúdo de função estão presentes em quatro das cinco competências específicas em que a área de Matemática está dividida (Brasil, 2018a). Além disso, a base traz os TCT como essenciais para a Educação Básica, eles devem trazer uma contextualização do que é ensinado, abordando temas que sejam interessantes para os estudantes e sejam relevantes para seu desenvolvimento como cidadão (Brasil, 2019a). Ainda, no trabalho com temas, podem-se desenvolver atividades relacionadas a problemas que sejam do cotidiano dos estudantes para que eles utilizem a Matemática como suporte para resolvê-los, o que, para Skovsmose (2001), é uma forma de se desenvolver a criticidade na Educação Matemática.

Como a BNCC não predetermina a forma de trabalhar os conteúdos para atingir as habilidades propostas, há a necessidade de se investigar ferramentas que possam auxiliar o professor da Educação Básica, possibilitando o trabalho com os TCT no ensino de funções.

Nesse sentido, propõe-se, neste estudo, o seguinte problema de investigação: quais são as contribuições para o ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio ao desenvolver sequências didáticas sobre funções, explorando diferentes representações e utilizando os Temas Contemporâneos Transversais propostos pela Base Nacional Comum Curricular?

2.3 OBJETIVOS

Para responder ao problema desta pesquisa, foi delineado o objetivo geral, bem como os objetivos específicos que nortearam a investigação.

2.3.1 Objetivo geral

Investigar a utilização de uma sequência didática sobre funções, elaborada a partir dos Temas Contemporâneos Transversais e das diferentes representações matemáticas, para potencializar o ensino e a aprendizagem de Matemática no Ensino Médio, bem como favorecer a formação crítica dos estudantes.

2.3.2 Objetivos específicos

Visando alcançar o objetivo geral, foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- Realizar um estudo sobre o ensino de funções, os Temas Contemporâneos Transversais (TCT), a Educação Matemática Crítica (EMC) e os Registros de Representação Semiótica (RRS) para verificar as contribuições para o processo de ensino e aprendizagem durante o desenvolvimento de uma sequência didática.
- Analisar como os livros didáticos do Ensino Médio, do Plano Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD) de 2021, apresentam o conteúdo de funções, buscando por atividades que exploram as diferentes representações e como incorporam os TCT, a fim de identificar se contribuem para uma EMC.
- Implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) um experimento com estudantes do Ensino Médio explorando o conteúdo de funções por meio dos RRS utilizando os TCT como contextualização, visando uma EMC.
- Analisar e identificar, por meio dos instrumentos de coleta de dados, quais as facilidades e limitações de uma sequência didática envolvendo os TCT, as tecnologias e as diferentes representações no ensino de funções no Ensino Médio.

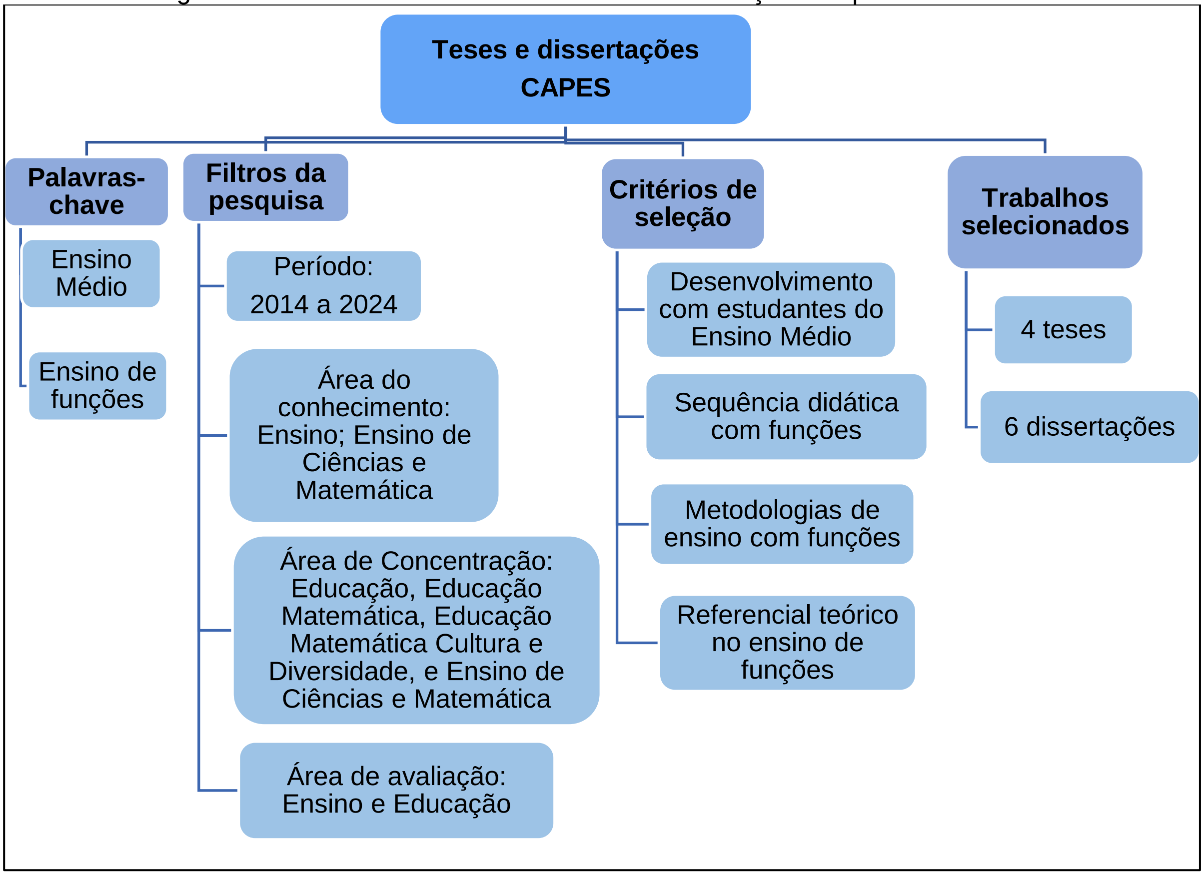
3 REVISÃO DE LITERATURA

Essa revisão de literatura tem por objetivo obter conhecimento sobre as produções científicas relacionadas à temática desta tese. Para isso, realizou-se uma busca por dissertações e teses desenvolvidas em Programas de Pós-Graduação no Brasil, no portal da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e também no portal de periódicos da CAPES. Optou-se por apresentar separadamente a revisão no banco de teses e dissertações e a revisão no portal de periódicos.

3.1 TESES E DISSERTAÇÕES ENVOLVENDO O TEMA EM ESTUDO

Iniciou-se a pesquisa, no catálogo de teses e dissertações da CAPES, utilizando os termos: ensino de funções, Ensino Médio, Temas Contemporâneos Transversais. Entretanto, essa busca não gerou nenhum resultado, assim, optou-se por buscar pelos dois primeiros termos: ensino de funções, Ensino Médio, encontrando-se 554 resultados. Restringindo a busca aos últimos dez anos e aplicando filtros na pesquisa, chegou-se a 17 resultados. Os filtros aplicados foram: área de conhecimento (Ensino, Ensino de Ciências e Matemática), área de avaliação (Ensino e Educação) e área de concentração (Educação, Educação Matemática, Educação Matemática, Cultura e Diversidade, e Ensino de Ciências e Matemática). Após uma seleção inicial, a partir da leitura dos resumos, foram selecionadas quatro teses e seis dissertações que foram desenvolvidos com estudantes do Ensino Médio e que apresentaram sequência didática com funções, uso de metodologias de ensino ou referencial teórico sobre o ensino de funções. Esses trabalhos foram usados como subsídios para o estudo. A Figura 1 apresenta uma síntese dessa revisão de literatura.

Figura 1 – Revisão de literatura – Teses e dissertações no portal da CAPES



Fonte: a pesquisa.

Para a apresentação dessas pesquisas, a Figura 2 foi organizada com base nas seguintes características: tipo de trabalho, autor e ano, título da pesquisa, orientador e instituição de ensino, conforme.

Figura 2 – Produções acadêmicas envolvendo o tema de pesquisa.

Tipo de trabalho	**Autor e Ano**	**Título**	**Orientador e Instituição de ensino**
Tese	Clarissa de Assis Olgin (2015)	Critérios, possibilidades e desafios para o desenvolvimento de temáticas no currículo de Matemática no Ensino Médio	Claudia Lisete Oliveira Groenwald – Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)
Tese	Valéria Espíndola Lessa (2018)	A programação de computadores e a função afim: um estudo sobre a representação e a compreensão de invariantes operatórios	Adriano Canabarro Teixeira – Universidade de Passo Fundo (UPF)
Tese	Valmir Ninow (2019)	O estudo de funções no Ensino Médio: uma investigação sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática	Carmen Teresa Kaiber – Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)

Dissertação	Fabio Barros Gonçalves (2019)	Uma sequência didática para o ensino de função quadrática	Miguel Chaquiam – Universidade do Estado do Pará (UEPA)
Dissertação	Diogo Cabral de Souza (2020)	Tecnologias digitais no ensino de função afim: estudo de caso a partir da Teoria Antropológica do Didático	Marcus Bessa de Menezes – Universidade Estadual da Paraíba (UEPB)
Dissertação	Shéridan dos Reis Pinto (2020)	Ações cooperativas e tecnologias móveis: planejamento, prática e análise de uma sequência de atividades sobre funções reais na escola básica	Rodrigo Sychocki da Silva – Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS)
Tese	José Edivam Braz Santana (2022)	Contrato Didático e Registros de Representação Semiótica: inter-relações no ensino da função afim no 1º ano do Ensino Médio	Rosinalda Aurora de Melo Teles – Universidade Federal de Pernambuco (UFPE)
Dissertação	Natacha Subtil (2022)	Práticas Pedagógicas Matemáticas numa abordagem vygotskyana com estudantes do primeiro ano do Ensino Médio: o ensino de funções lineares por meio do *software scilab*.	Eliana Maria do Sacramento Soares – Universidade de Caxias do Sul (UCS)
Dissertação	Juliana Rodrigues da Veiga (2023)	Resolução de problemas matemáticos modelados com funções quadráticas utilizando os pilares do pensamento computacional no Ensino Médio	Adriano Canabarro Teixeira – Universidade de Passo Fundo (UPF)
Dissertação	Pedro Mikael Santos Silva (2023)	Modelagem matemática de funções polinomiais do 1° grau a partir da resolução de problemas de razão e proporção no Ensino Médio	Agostinho Iaqchan Ryokiti Homa – Universidade Luterana do Brasil (2023)

Fonte: a pesquisa.

A seguir, apresenta-se de forma abreviada, o desenvolvimento das pesquisas selecionadas com um resumo das temáticas contendo os conteúdos abordados, os objetivos, a metodologia, o referencial teórico e os principais resultados obtidos.

A tese de Olgin (2015) teve como objetivo geral verificar quais os possíveis temas a serem trabalhados no Currículo de Matemática do Ensino Médio, considerando o que se deve ensinar, como ensinar e por que ensinar os conteúdos de Matemática, utilizando temas atuais, da realidade e que sejam considerados importantes para a formação dos estudantes do Ensino Médio. Utilizou a metodologia da investigação, baseada em uma pesquisa qualitativa. Para o referencial teórico, investigou a história do Ensino Médio no Brasil e o Currículo de Matemática e, assim, identificou a necessidade de contextualizar e desenvolver os conteúdos matemáticos do Ensino Médio por meio de temas de interesse, que envolvam aspectos relevantes da vida em sociedade, de forma que os estudantes consigam estabelecer relações entre a teoria e a prática.

Olgin (2015) utilizou as contribuições de Skovsmose, Doll Jr. e Silva. Após os estudos, trouxe, como exemplos, três sequências didáticas com as temáticas: Contemporaneidade, Político-Social e Cultura, das quais duas sequências didáticas foram aplicadas em turmas do Ensino Médio e foi realizada a análise por meio dos dados coletados nas observações, filmagens, registros dos estudantes, fotos e questionários, para mostrar a realidade da produção dos estudantes nas atividades propostas nas sequências didáticas. A autora aponta que os resultados indicaram que é possível indicar temáticas para serem desenvolvidas no Currículo de Matemática do Ensino Médio, inspiradas em teorias curriculares contemporâneas, contemplando os aspectos referentes ao que ensinar, como ensinar e porque ensinar.

O objetivo do estudo da tese de doutorado de Lessa (2018) foi o de conhecer as possibilidades que a programação de computadores pode trazer ao professor de Matemática da escola básica em relação às manifestações conceituais dos estudantes. A autora utilizou como referencial teórico, a Teoria dos Campos Conceituais de Gérard Vergnaud, elementos da Teoria Construcionista de Seymour Papert e o modelo da Espiral da Aprendizagem proposta por José Armando Valente. A metodologia utilizada foi a pesquisa de cunho qualitativo com estudo teórico sobre as bases conceituais e estudo empírico com os estudantes. Foi elaborada uma estratégia didática com base no uso da programação de computadores, utilizando situações sobre funções no ambiente de programação *Scratch*. Dentre outros resultados, a autora aponta que a pesquisa permitiu mostrar que o processo de manifestação da representação e da compreensão dos invariantes operatórios do Campo Conceitual das funções afim aconteceu por meio de ações de concretização, dinamização, compreensão e reformulação, proporcionadas, respectivamente, pelas etapas da descrição, da execução, da reflexão e da depuração da espiral da conceituação, a partir de uma estratégia didática mediada pela programação de computadores.

Ninow (2019), trouxe em sua tese de doutorado o objetivo geral: investigar a organização e desenvolvimento de um projeto educativo para a Matemática no Ensino Médio, na perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, tendo como foco o estudo de funções. O trabalho foi planejado e desenvolvido levando em consideração as indicações postas nos documentos oficiais, o currículo da escola, pesquisas na área, os significados de referência do objeto matemático função e os aportes teóricos e metodológicos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática. A metodologia aplicada foi a pesquisa qualitativa que buscou captar e registrar os dados produzidos ao longo da investigação, a pesquisa contou com a observação participante do pesquisador, questionários aplicados aos estudantes e a produção deles no desenvolvimento das atividades.

As conclusões trazidas por Ninow (2019) destaca que a proposta de estudos envolvendo funções contemplou os componentes e indicadores da Idoneidade Didática do Enfoque Ontossemiótico de modo satisfatório e possibilitou aos estudantes uma forma de estudo diferenciada. Nessa forma de ensino, cada estudante teve a possibilidade de seguir o seu ritmo de aprendizagem, retomando, aprofundando e desenvolvendo conceitos, noções, definições e procedimentos, visando à superação de eventuais conflitos e obstáculos no aprendizado de funções. Outro destaque, nas conclusões do autor, é que a investigação realizada e os resultados apresentados, analisados e discutidos abrem caminho para novas abordagens e reflexões sobre o conteúdo de funções. Ninow (2019) afirma que o material produzido, durante a execução do projeto, pode servir para auxiliar outros professores em suas aulas, podendo ser disponibilizado aos estudantes em distintos momentos durante o estudo das funções.

O objetivo da pesquisa de dissertação de mestrado de Gonçalves (2019) era o de estudar as potencialidades didáticas de uma sequência didática elaborada especificamente para o ensino e a aprendizagem de função quadrática. O autor utilizou como pressupostos teóricos: a Engenharia Didática de Michele Artigue, como metodologia de pesquisa; a estrutura das Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC's) proposta por Cabral para elaboração de Sequências Didáticas; as contribuições de Goés com as noções de Análise Microgenética na investigação da construção do conhecimento a partir das interações verbais; as contribuições de Mortimer e Scott a respeito da Análise do Discurso. A sequência didática apresentada no trabalho era composta de doze atividades, utilizando seis *applets* construídos no *software* livre de geometria dinâmica GeoGebra e uma calculadora denominada Equação do 2º Grau, construída no *App Inventor.*

A pesquisa de Gonçalves (2019) utilizou uma abordagem de pesquisa de cunho quantitativo e qualitativo, por meio da aplicação de um questionário sociocultural e um teste de conhecimento matemático sobre o conteúdo de função quadrática. O teste diagnóstico continha os principais conteúdos relacionados aos objetos matemáticos a serem (re)construídos com os estudantes onde foi aplicada a sequência didática. O autor apresenta que, após as análises, ele pode concluir que os resultados mostraram que uma sequência didática elaborada segundo o modelo das UARC's é potencialmente favorável ao processo de ensino e de aprendizado dos conteúdos matemáticos relativos à função quadrática, em pelo menos três dimensões: a do ensino (professor), a da aprendizagem (estudante) e a do saber (re)construído (objeto do conhecimento).

A dissertação de mestrado de Souza, D. C. (2020) com o tema função afim e Tecnologia Digital, teve como objetivo analisar o conjunto de condições e restrições que atuam na difusão de saberes matemáticos, na instituição escolar, com uso de ferramentas digitais para o ensino de funções polinomial do 1° grau. O aporte teórico de seu trabalho é a Teoria Antropológica do Didático (TAD), do francês Yves Chevallard, e algumas reflexões sobre a Tecnologia Digital no Ensino, com Borba e outros. Utilizou a metodologia de pesquisa qualitativa, do tipo exploratória e descritiva, e em forma de estudo de caso. Para verificar o uso efetivo das ferramentas tecnológicas em sala de aula, utilizou a observação da prática docente, tendo o docente como sujeito da investigação. Foram analisadas as atividades matemáticas realizadas ao longo do desenvolvimento do conteúdo de funções afim, para entender como se organizam as praxeologias, como as tecnologias digitais se apresentam no desdobramento da situação didática e ter uma noção da transposição didática interna, desde seus planejamentos até a execução na sala de aula.

Em suas considerações, Souza, D. C. (2020), destaca como limitações e restrições ao uso de recursos digitais na construção e na comunicação do saber matemático, aspectos como: a infraestrutura física; o livro didático; a formação inicial e continuada do professor, bem como sua concepção acerca do uso de recursos tecnológicos; o calendário escolar; e até o fato da escola ser em tempo integral. E quanto às possibilidades, o autor aponta aspectos como: as explorações dinâmicas das representações da função afim; a interatividade; a otimização do tempo; e as conexões das construções gráficas e dos conceitos. Ele conclui que a integração das tecnologias digitais na sala de aula é complexa e apresenta fatores alheios ao papel do professor; por isso é necessário um bom planejamento e várias explorações, o que requer tempo que nem sempre o docente dispõe, devido à carga horária que tem a cumprir e a outros compromissos escolares; as atividades matemáticas, a partir das praxeologias desenvolvidas sem a presença da tecnologia ou quando ela foi simplesmente justaposta à prática, estavam ligadas a técnicas sem muita complexidade, por meio de de fórmulas e a algoritmos de cálculos, já as praxeologias das atividades com o uso de tecnologias ganham, além da otimização de tempo nas construções gráficas, uma dinamicidade por meio da técnica *arrastar e observar*. Esta possui um aspecto empírico e assume um sentido diferente proposto pela TAD, surge como um conceito alternativo.

Pinto (2020) em sua pesquisa de dissertação de mestrado, teve como objetivo: observar, analisar e refletir sobre o trabalho coletivo dos estudantes no estudo de funções ao fazer uso das tecnologias móveis a partir de ações subsidiadas por meio de diálogo entre os pares. O estudo foi desenvolvido em um viés metodológico qualitativo que consistiu na elaboração, aplicação e reflexão teórica de uma sequência de atividades sobre introdução às funções, função afim e função quadrática com a utilização do aplicativo GeoGebra. Como fundamentação teórica do trabalho, utilizou o conceito de cooperação de Jean Piaget para analisar como o trabalho coletivo dos estudantes durante a sequência de atividades os leva em direção ao conhecimento, seja por meio de suas ações sobre a tecnologia móvel ou suas ações uns sobre os outros ao longo do processo.

O trabalho de Pinto (2020) foi desenvolvido por meio de dois experimentos com participantes diferentes que compõem os dados desse estudo no desenvolvimento de atividades com o uso do aplicativo GeoGebra. Os dados produzidos pelos estudantes (os áudios dos diálogos e produções escritas) constituíram o material para análise e reflexão da pesquisa. Pinto (2020) destaca que o uso do GeoGebra possibilitou o diálogo entre os participantes, gerando pequenos avanços graduais na busca e elaboração dos conceitos abordados nas atividades. A autora conclui que as ações cooperativas se fizeram presentes levando os estudantes à busca da construção dos conhecimentos matemáticos.

A tese de doutorado de Santana (2022) utilizou a pesquisa qualitativa por meio de entrevistas, observação (com gravações em vídeo) e diário de bordo para analisar tanto as inter-relações entre o contrato didático estabelecido por uma professora de Matemática e seus estudantes do 1º ano do Ensino Médio, como os Registros de Representação Semiótica (RRS) mobilizados na relação didática durante o ensino da função afim. O autor adotou como referencial teórico o contrato de didático (CD) e a Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS) para o desenvolvimento da pesquisa que foi realizada em uma escola pública estadual da cidade de Afogados da Ingazeira (PE).

Santana (2022) dividiu sua pesquisa em quatro etapas, sendo que: na primeira etapa foi realizado o contato inicial com a escola e os participantes para apresentação da pesquisa e assinatura dos devidos termos de autorização e consentimento (Apêndices D, E e F); a segunda etapa foi destinada à realização da entrevista semiestruturada com a professora da turma; a terceira etapa destinou-se à observação e gravação de 20 aulas; e a quarta etapa consistiu nas análises dos dados produzidos. O autor destaca que os resultados obtidos em sua pesquisa sugerem que existem relações próximas, entre o contrato didático estabelecido e os RRS mobilizados na relação didática, pois, para ele, tanto a postura do professor em aula, como as situações propostas, as expectativas em relação aos estudantes, a divisão de responsabilidades, as regras instituídas na relação didática, é influenciada e ao mesmo tempo influenciaram os RRS do objeto função afim.

O trabalho de Subtil (2022) apresenta uma pesquisa que investigou as possibilidades de uso do *software Scilab*, para criar práticas de ensino de funções lineares considerando os conceitos da Teoria Vygotskyana: sociointeração, mediação, zona de desenvolvimento proximal e internalização; além do conceito de funções matemáticas e do uso de recursos tecnológicos. A autora utilizou a pesquisa qualitativa com estudo de caso para analisar os dados produzidos durante a execução de uma oficina com estudantes do 1º ano do Ensino Médio em uma escola pública da serra gaúcha.

Subtil (2022) indica que os principais resultados de sua pesquisa revelam que as possibilidades e recursos do *software Scilab,* propondo tarefas que possam desafiar o estudante, precisam ser consideradas pelos professores de Matemática. Ainda, a pesquisadora destaca que os resultados sugerem que os conceitos da Teoria Vygotskyana podem inspirar e influenciar os professores, em suas práticas pedagógicas com o uso do *software Scilab*, para o ensino de funções lineares no Ensino Médio.

A dissertação de Veiga (2023) teve por objetivo elaborar uma sequência didática para a aprendizagem das relações entre duas grandezas variáveis em função do 2° grau, baseada no uso de programação de computadores com os estudantes do primeiro ano do Ensino Médio. A autora utilizou, para a elaboração da sequência didática, fundamentos teóricos do Construcionismo, proposto por Papert, da

Resolução de Problemas de Polya e do Pensamento Computacional, de Brackmann com o intuito de embasar o planejamento e as ações pedagógicas durante a aplicação. Assim, o produto educacional, na forma de sequência didática estruturada em sete encontros, foi aplicado em uma turma de uma escola da rede privada no município de Campos Novos (SC).

Utilizando-se de métodos qualitativos, com observações, gravações e diário de bordo como instrumentos de coleta de dados, Veiga (2023) apresenta que os resultados apontaram que houve melhora no engajamento dos estudantes. Destaca que o Pensamento Computacional pode auxiliar no desenvolvimento de habilidades referentes ao pensamento crítico e resolução de problemas e também pode tornar o entendimento dos conteúdos matemáticos mais interativos e dinâmicos, permitindo que os estudantes compreendam melhor as relações entre grandezas variáveis.

Silva (2023) apresentou, em sua dissertação, um estudo com o objetivo de investigar atividades com situações-problema para que os estudantes do Ensino Médio utilizassem a Modelagem Matemática como um instrumento para solução de problemas matemáticos, conectando o objeto de conhecimento razão e proporção com função polinomial do 1° grau. Por meio da pesquisa qualitativa com um estudo de caso, o autor desenvolveu um experimento, em cinco encontros, com um grupo de estudantes do 1° ano do Ensino Médio de uma escola estadual de Bento Gonçalves (RS).

Por meio da análise descritiva interpretativa, Silva (2023) verificou a evolução do pensamento matemático resolutivo dos estudantes, quanto a relacionar a razão, proporção e função polinomial do 1° grau. Assim, o autor pontua que seus resultados indicam que a aplicação da Modelagem Matemática e a Resolução de Problemas, em situações-problema partindo do cotidiano dos participantes, estimularam a curiosidade e o engajamento, tornando o processo de aprendizagem mais relevante para eles, o que proporcionou um ambiente colaborativo e investigativo propício para o desenvolvimento de competências, como a tomada de decisão e o pensamento crítico.

A seguir, a Figura 3 apresenta os principais referenciais utilizados pelos pesquisadores, bem como um resumo das contribuições apresentadas em suas pesquisas para o ensino de funções aos estudantes do Ensino Médio. Essas contribuições foram evidenciadas ao longo das análises ou nas considerações finais apresentadas nos trabalhos.

Figura 3 – Síntese das contribuições das teses e dissertações

Pesquisa	Referenciais teóricos	Contribuições para o processo de ensino e aprendizagem
Olgin (2015)	Educação Matemática Crítica; Currículo Pós-Moderno de Doll Jr. Critérios para seleção e organização de conteúdos de Silva.	Exploração, no currículo de Matemática, do trabalho por meio de temáticas importantes para o desenvolvimento dos conteúdos matemáticos e para a formação geral dos estudantes como agentes atuantes de forma crítica, participativa, ativa e reflexiva frente às problemáticas da vida em sociedade.
Lessa (2018)	Teoria dos Campos Conceituais; Teoria Construcionista; Espiral da Aprendizagem.	Estratégia didática para servir de apoio ao planejamento do professor da Educação Básica, com situações propostas utilizando o *Scratch*, considerando as diferentes formas que os estudantes aprendem, imergem e respondem aos diferentes tipos de ambientes de aprendizagem.
Ninow (2019)	Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática.	Proposta de estudos sobre funções para o Ensino Médio, desenvolvida sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, visando oportunizar aos estudantes a retomada, o desenvolvimento e o aprofundamento de noções, conceitos, definições e procedimentos articulados, por meio da solução de situações-problema e da utilização de diferentes recursos e metodologias, os quais possibilitaram, também, o estabelecimento de relações, a produção de argumentações e o uso de diferentes linguagens.
Gonçalves (2019)	Engenharia Didática; Unidades Articuladas de Reconstrução Conceitual (UARC's); Análise Microgenética.	Sequência didática, estruturada segundo o modelo proposto por Cabral em pelo menos três dimensões: dimensão do ensino, relacionada ao professor; dimensão da aprendizagem, relacionada ao estudante e a dimensão do saber construído, relacionada ao objeto do conhecimento.
Souza, D. C. (2020)	Teoria Antropológica do Didático; Tecnologia Digital.	Reflexões acerca da compreensão das condições e limitações para a integração da tecnologia digital em sala de aula e o entendimento dos desafios e a necessidade da busca por soluções que sejam viáveis, construindo praxeologias que sejam adequadas para o uso de recursos tecnológicos, onde estes possam favorecer o movimento de descoberta e aprendizado dos estudantes.
Pinto (2020)	Conceito de cooperação de Piaget; Tecnologias móveis no ensino de funções.	Explorações de atividades em ambientes coletivos com investigações e utilização de um aplicativo em um dispositivo móvel nas aulas de Matemática proporcionando diálogos entre os participantes para eles possam caminhar na busca e na construção de conceitos matemáticos sobre as funções.
Santana (2022)	Contrato Didático; Teoria dos Registros de Representação Semiótica (TRRS).	Pesquisa desenvolvida por meio de entrevista, observação de aula (com gravação em vídeo) durante o trabalho com o ensino de função afim (20 aulas no primeiro ano do Ensino Médio), mediado por um contrato didático. Buscou-se a inter-relação entre o contrato didático e a TRRS mobilizados na relação didática que possibilitou a reflexão sobre fatores que interferem no ensino e na aprendizagem de conceitos matemáticos, em particular a Função Afim, e sobre formas que permitam ao estudante avançar na construção do conhecimento.

Subtil (2022)	Conceitos da Teoria Vygotskyana; conceito de funções matemáticas; uso de recursos tecnológicos.	A pesquisa ressaltou a importância do *software scilab* e sua capacidade mediadora de oferecer desafios e possibilidades, para propor problemas e exercícios matemáticos relacionados a funções lineares, de forma que o estudante se envolva com o *software* junto com a mediação do professor. O papel do professor tem grande relevância na criação de práticas para a utilização do *software* com potencial de desencadear os processos de aprendizagem do conceito de funções.
Veiga (2023)	Pensamento Computacional; Resolução de Problemas; álgebra e função.	Sequência didática utilizando a programação em blocos com o *Scratch.* A resolução de problemas, por meio do uso de algoritmos e técnicas de programação, auxilia a desenvolve habilidades analíticas que podem ser aplicadas também em outras áreas. O Pensamento Computacional contribuiu para a compreensão das relações entre duas grandezas variáveis, presentes no estudo de funções do 2º grau, para estudantes do 1º ano do ensino médio. Isso acontece à medida que permiti que os estudantes vivenciem as fases do processo de construção do conhecimento, desde as pesquisas (com as ideias iniciais sobre programação e de quais as habilidades exigidas), até a compreensão e uso da linguagem de programação dos seus projetos no *Scratch*.
Silva (2023)	Modelagem Matemática; Resolução de Problemas	A abordagem de situações-problema do cotidiano dos participantes como ponto de partida para o aprendizado estimulou a curiosidade e o engajamento, tornando o processo de aprendizagem mais relevante e com sentido. A realização do experimento permitiu o desenvolvimento da metodologia de Resolução de Problemas aliada a Modelagem Matemática e, a partir disso, notou-se o desenvolvimento dos estudantes quanto ao espírito investigativo, o trabalho colaborativo, a resolução de problemas e a compreensão do mundo real, desencadeando a capacidade de enfrentar desafios matemáticos abrangentes e integrados ao mundo contemporâneo.

Fonte: a pesquisa.

Destaca-se algumas fragilidades a respeito do Ensino de Matemática do Ensino Médio ou apontamentos feitos pelos autores a respeito de novas pesquisas sobre a temática por eles estudadas.

Dessa forma, Olgin (2015) destaca a percepção de que o estudo de temáticas para o Currículo de Matemática do Ensino Médio pode ser ampliado, por meio de pesquisas futuras que busquem investigar tanto o papel do professor de Matemática no Ensino Médio no trabalho com temáticas ao longo do Currículo, quanto o uso de metodologias, recursos e ou ferramentas para auxiliar no processo de ensino e aprendizagem.

Uma fragilidade apontada por Lessa (2018) são os dados do SAEB de 2017, que indicam que os estudantes brasileiros concluintes do Ensino Médio se apresentam no nível dois de 10 níveis de proficiência em Matemática, indicando um conhecimento incipiente sobre a matéria escolar.

Ninow (2019) por sua vez, apresenta que a temática função é bastante ampla e deve continuar a ser explorada no meio acadêmico e científico, pois ainda há espaços para que novos elementos sejam discutidos e levados até as instituições de ensino básico de forma que as investigações em torno de processos de ensino e aprendizagem auxiliem os estudantes em Matemática.

Gonçalves (2019) concluiu que os resultados de sua investigação, apontam para, predominantemente, a existência de um ensino de função quadrática com aulas expositivas não dialogadas, uma avaliação dos estudantes apenas por prova escrita, uma apresentação de conteúdos de função quadrática somente por meio da de lista de exercícios para serem resolvidos, não havendo realização de estudos por meio de experimentos. Ele afirma que essas dificuldades apresentadas são devido a ausência da capacitação de professores, que possuem carga de trabalho exaustiva trabalhando em mais de uma escola devido aos baixos salários, dentre outros fatores que dificultam as inovações no ensino.

Em suas considerações, Souza, D. C. (2020) destaca que ainda há muito a se estudar sobre as Tecnologias Digitais em sala de aula e como elas podem contribuir para o ensino e a aprendizagem dos estudantes, pois as atividades Matemáticas, desenvolvidas sem a presença da tecnologia ou quando ela foi simplesmente justaposta à prática, ficam restritas a técnicas sem muita complexidade, por meio de fórmulas e algoritmos de cálculos, não possibilitando assim, o desenvolvimento dos estudantes. Para tanto, afirma que é necessário que a formação docente possa não só refletir sobre o uso de tecnologias, mas que proporcione práticas com elas integradas ao ensino e além disso, é preciso ter em mente as técnicas com a utilização das tecnologias sejam embasadas no saber matemático.

Também sobre a utilização de tecnologias digitais, Pinto (2020) considera importante a exploração de trabalhos que incitem a cooperação entre os estudantes e utilizem a tecnologia móvel para propiciar debates e possivelmente, a construção do conhecimento. Destacando que o diálogo entre os pares na sala de aula é um elemento necessário que leva os estudantes a aprendizagem e oportuniza um trabalho que valorize ações coletivas, onde os sujeitos interajam entre si contribui tanto para o grupo quanto para individual. Dessa forma, enfatiza a importância de explorar em sala de aula atividades coletivas com características cooperativas.

Santana (2022), em suas considerações finais, destaca algumas questões que foram surgindo ao longo de sua pesquisa, e que ele aponta como sugestões para futuras pesquisas. Essas questões estão relacionadas a interrelações de saberes da função afim em outros contextos (por exemplo, uma turma de 3º ano do Ensino Médio), bem como a exploração também de outras funções.

A pesquisadora, Subtil (2022) apresenta em suas considerações, que houve limitações para a realização de seu estudo, como a curta duração da oficina que limitou o planejamento inicial da abordagem das funções de primeiro grau. Ressalta que há possibilidades de novas discussões e outras concepções, a partir do tema de sua pesquisa, que podem ser evidenciadas e aprofundadas em futuros trabalhos.

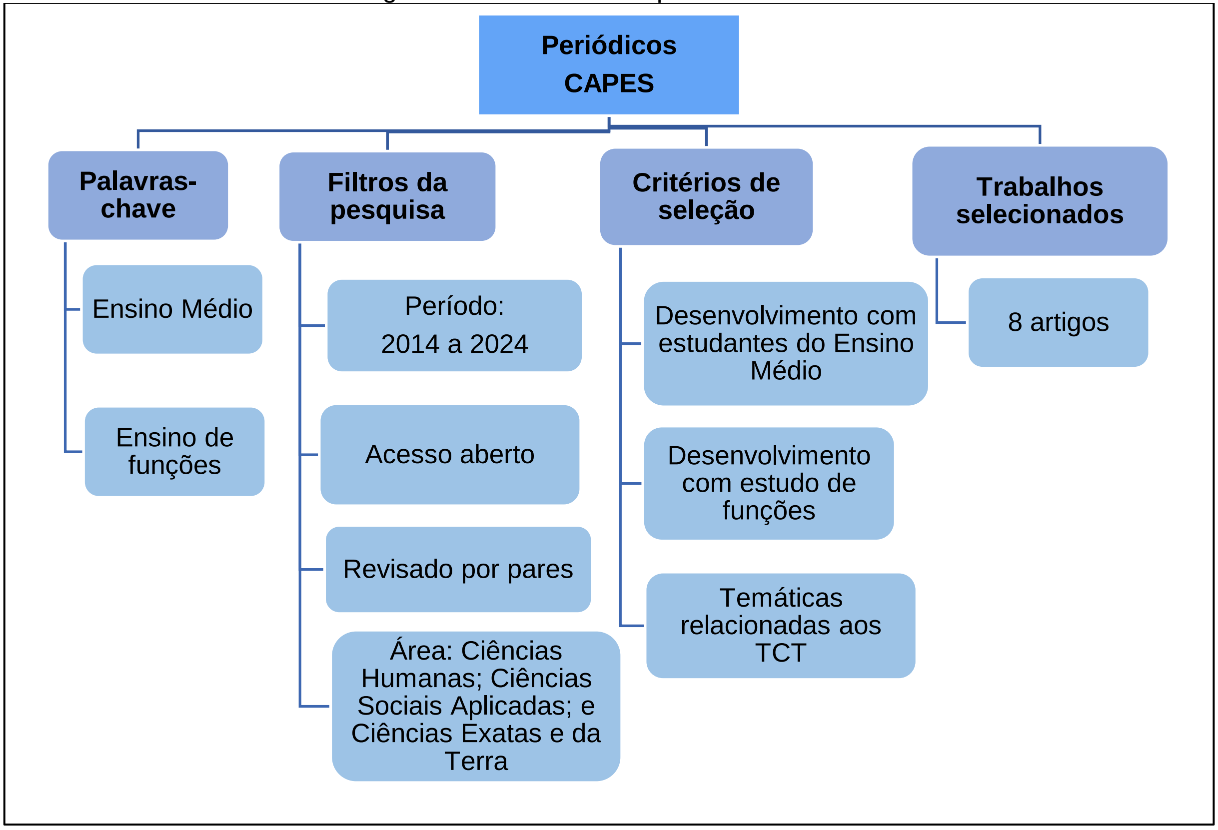
Em sua dissertação, Veiga (2023) destaca que os resultados verificados na aplicação da sua sequência didática foram de forma geral satisfatórios. A autora ressalta ainda que, seu produto educacional pode possibilitar, em outras aplicações, resultados positivos e diferentes, considerando-se um maior tempo de aplicação ou que possa ser desenvolvido em momentos alternados. Reitera que, com mais tempo os estudantes podem desenvolver projetos mais elaborados com a plataforma *Scratch* e utilizar outras plataformas ou linguagens de programação para fazer comparações de resultados

Silva (2023) destacou que, como sua pesquisa exigia um espírito investigativo contínuo, a falta de interesse dos participantes de alguns grupos em diferentes encontros e a dificuldade em recuperar conhecimentos prévios, foram obstáculos e impactou negativamente no alcance dos objetivos estabelecidos para cada encontro. Com isso, compreende-se que o sucesso na aplicação da Modelagem Matemática depende não apenas da compreensão dos conceitos matemáticos, mas também do envolvimento ativo e do interesse dos participantes pelo tema em questão. O pesquisador sugere que uma implementação da formação de professores da Educação Básica, com foco no aprimoramento de suas práticas pedagógicas relacionadas à Modelagem Matemática seria uma perspectiva para trabalhos futuros.

3.2 ARTIGOS ENVOLVENDO O TEMA EM ESTUDO

Para a revisão dos artigos publicados em revistas ou periódicos, realizou-se a busca no portal de periódicos da CAPES com os termos ensino de funções e Ensino Médio, limitando o período aos últimos dez anos, obtendo-se assim 53 resultados iniciais. Após aplicação de filtros de pesquisa (acesso aberto, revisado por pares, nas áreas: Ciências Humanas; Ciências Sociais Aplicadas; e Ciências Exatas e da Terra), chegou-se a 20 artigos. A Figura 4 apresenta uma síntese dessa revisão de literatura.

Figura 4 – Periódicos no portal da CAPES



Fonte: a pesquisa.

Assim, a partir da leitura inicial dos resumos dos artigos, chegou-se a oito resultados que foram desenvolvidos com algum tópico do conteúdo de funções, utilizaram temática relacionada aos TCT com estudantes do Ensino Médio. A Figura 5 apresenta esses artigos indicando os autores, o título e local de publicação, bem como o TCT relacionado.

Figura 5 – Artigos selecionados para revisão

Autores	Título do Artigo	Local de publicação	TCT
Martins, Doering e Bartz (2017)	Utilização do GeoGebra na resolução de problemas físicos: uma possibilidade para a Modelagem Matemática na Educação	Revista Thema – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia Sul-rio-grandense (IFSul)	Ciência e tecnologia
Cardoso e Carbo (2017)	Utilização do software FreeMat para ensinar função no Ensino Médio através da programação computacional	REMAT: Revista Eletrônica da Matemática – Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Rio Grande do Sul (IFRS)	Ciência e tecnologia

Silva e Lazzarin (2018)	Funções: construindo conceitos a partir da análise gráfica	RECEN: Revista Ciências Exatas e Naturais – Universidade Estadual do Centro-Oeste (UNICENTRO-PR)	Ciência e tecnologia
Oliveira e Romão (2018)	Sequência didática para o ensino de função afim utilizando aprendizagem baseada em projetos	ACTIO: Docência em Ciências – Universidade Tecnológica Federal do Paraná (UTFPR)	Ciência e tecnologia; educação para o
Sousa e Almeida (2020)	Atividades investigativas no ensino de função afim: desafios e possibilidades	REMATEC: Revista de Matemática, Ensino e Cultura – Universidade Federal do Pará (UFPA)	Educação financeira; educação para o
Costa, Pires e Boiago (2020)	Modelagem Matemática para o estudo de função afim: uma possibilidade de aprendizagem a partir da conta de água	INTERMATHS: Revista de Matemática Aplicada e Interdisciplinar – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia (UESB)	Educação financeira
Antunes, Moraes e Costa (2023)	Obstáculos Epistemológicos relativos ao conceito de função revelados por estudantes do Ensino Médio	Revista REAMEC: Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática – Universidade Federal de Mato Grosso (UFMT)	Ciência e tecnologia; educação financeira
Trancoso, Silva e Peixoto (2023)	Pensamento Computacional em movimento	Revista Diálogo Educacional – Pontifícia Universidade Católica do Paraná (PUCPR)	Ciência e tecnologia; educação financeira

Fonte: a pesquisa.

Ressalta-se que o TCT indicado não necessariamente foi mencionado ou explorado no artigo, mas as atividades desenvolvidas remetem, de alguma maneira, a esse TCT. Após a leitura desses artigos, apresenta-se uma síntese, destacando-se alguns aspectos de cada um deles.

Quanto ao referencial teórico utilizado, a Modelagem Matemática foi utilizada em 3 artigos: Martins, Doering e Bartz (2017); Silva e Lazzarin (2018); Costa, Pires e Boiago (2020). Destaca-se que Silva e Lazzarin (2018) também utilizaram a Resolução de Problemas e as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC) e, além dele, a TIC também foi o referencial de Cardoso e Carbo (2017), que, para completar seu referencial, utilizaram o Construcionismo. Oliveira e Romão (2018) optaram por utilizar a Aprendizagem Baseada em Projetos e Souza e Almeida (2020) por Investigações Matemáticas na Sala de Aula. Ressalta-se que Costa, Pires e Boiago (2020) completaram seu referencial com a Teoria de Registros de Representação Semiótica (TRRS). Antunes, Moraes e Costa (2023) optaram pelos

Obstáculos Epistemológicos, enquanto Trancoso, Silva e Peixoto (2023), escolheram o Pensamento Computacional e a utilização de Metodologias Ativas.

Do total de artigos, 6 mencionam que foram desenvolvidos em escolas públicas e 2 não mencionaram a rede de ensino da escola. Apenas o artigo de Silva e Lazzarin (2018) foi desenvolvido com estudantes do terceiro ano do Ensino Médio. Os demais trabalhos tiveram como participantes da pesquisa estudantes do primeiro ano dessa etapa escolar. A Figura 6 apresenta, resumidamente, os objetivos e o desenvolvimento de cada artigo.

Figura 6 – Apresentação de alguns aspectos dos artigos selecionados

Autores	Objetivos	Síntese do desenvolvimento
Martins, Doering e Bartz (2017)	Mostrar como utilizar o fenômeno do resfriamento, tão presente no cotidiano, para trabalhar ideias sobre funções,	A atividade foi desenvolvida junto aos estudantes do primeiro ano do Ensino Médio com a utilização do *software* GeoGebra e de seus recursos para buscar, intuitivamente, um modelo (função) que se aproxime dos dados do experimento que realizaram (resfriamento do café).
Cardoso e Carbo (2017)	Apresentar uma abordagem para o ensino das funções mediada pelo uso do computador, utilizando como recurso computacional o *software FreeMat*.	Aplicação de atividades, com estudantes do primeiro ano, voltadas para *plotagens* gráficas de funções e na construção de um programa computacional em linguagem *FreeMat*, que determina o valor a pagar para certo consumo de água em metros cúbicos (m³). Apoiados na Teoria Educacional Construcionista, o *software* foi utilizado para a construção de gráficos de função afim para proporcionar a compreensão dos conceitos relacionados a essa função.
Silva e Lazzarin (2018)	Verificar como uma prática pedagógica baseada na construção e interpretação de gráficos, durante o processo de ensino de funções, facilita a aprendizagem e provê de significado o conceito de funcão.	Na sequência didática desenvolvida empregou-se, em cada etapa, a abordagem visual dos diversos conceitos e definições relativas a funções, por meio dos esboços de gráficos e de construções dinâmicas realizadas com o *software* GeoGebra. A sequência de atividades, que explorou os principais conceitos inerentes a funções lineares, quadráticas, exponenciais e logarítmicas, foi proposta a partir da modelagem e resolução de problemas reais.
Oliveira e Romão (2018)	Propor uma sequência didática para o ensino de função afim fundamentada pela Aprendizagem Baseada em Projetos (APB), contemplando também o ensino tradicional de matemática.	A sequência didática foi realizada durante 6 semanas com três turmas do primeiro ano do Ensino Médio de uma escola pública estadual. A ABP consistiu na coleta de dados de potência elétrica de equipamentos elétricos existentes nas residências dos estudantes, cálculo do consumo diário em kWh, estimativa do consumo mensal, confecção de tabelas e gráficos de função linear e confecção de um produto (uma apresentação multimídia, um vídeo de curta duração ou panfletos contendo dicas e sugestões para o uso racional de energia elétrica).

Sousa e Almeida (2020)	Discutir sobre o potencial de aulas investigativas como metodologia a ser adotada no Ensino de Matemática.	A experiência realizada em uma turma de 1º ano do Ensino Médio, envolveu uma Investigação Matemática na qual foi utilizada a temática de produção e venda de geladinhos, em uma proposta que envolveu empreendedorismo e reflexão sobre este tipo de atividade, fazendo uma relação com o conteúdo de funcão afim.
Costa, Pires e Boiago (2020)	Analisar as potencialidades e limitações de uma sequência de atividades sobre função afim para alunos do 1º ano do Ensino Médio pautada pelos pressupostos da Modelagem Matemática à luz da Teoria dos Registros de Representação Semiótica.	A realização das atividades do projeto envolveu os estudantes e o professor de Matemática do 1º ano do Ensino Médio em um total de 16 encontros. Foram trabalhados assuntos que compõem o conteúdo de função afim para a construção do modelo almejado utilizando os dados da conta de água. Foram realizadas tarefas a partir da conta de água para o desenvolvimento dos conceitos relacionados à função afim com o uso de diferentes registros de representação, bem como a execução de sucessivas conversões entre eles.
Antunes, Moraes e Costa (2023)	Identificar os Obstáculos Epistemológicos no processo de construção do conceito de função real de uma variável real.	Elaboração e aplicação de um questionário com os estudantes matriculados no 1º ano do Ensino Médio do Instituto Federal Goiano. Questionário com cinco questões teóricas e exercícios (com situação-problema) para verificar quais os Obstáculos Epistemológicos que emergem durante o ensino e a aprendizagem do conteúdo de função. Cada questão foi analisada individualmente com o objetivo de confrontar as respostas fornecidas pelos estudantes com o referencial teórico apresentado em nossa pesquisa.
Trancoso, Silva e Peixoto (2023)	Investigar as possíveis implicações do Pensamento Computacional no estudo das relações funcionais para promover a construção do conceito de função afim por meio do *software Scratch*.	A intervenção de ensino, que ocorreu com estudantes do 1º ano do ensino médio de uma instituição pública estadual, foi realizada em duas fases, sendo a primeira para a apresentação e exploração do *software Scratch*, e a segunda para a aplicação das atividades que envolveram além da programação, noção intuitiva de função, noção intuitiva de função inversa e noção intuitiva de função definida por mais de uma sentença.

Fonte: a pesquisa.

A seguir, apresentam-se, de maneira abreviada os principais resultados dos artigos, ou ainda, as limitações e desafios quando destacados pelos autores.

Martins, Doering e Bartz (2017), em suas considerações finais, destacam que o experimento desenvolvido em sua pesquisa é uma sugestão viável para o trabalho com funções de forma livre, criativa e interdisciplinar. Para esses autores, uma metodologia apoiada por recursos tecnológicos pode colaborar no desenvolvimento de habilidades inerentes ao pensamento matemático, possibilitando o desenvolvimento da criatividade e da originalidade, permitindo que os estudantes tenham a capacidade de fazer julgamentos, tomar iniciativas e enfrentar desafios.

Nas considerações finais, Cardoso e Carbo (2017) apontam que o uso do *software* possibilitou a exploração de uma maior quantidade de funções, trazendo significado ao conteúdo estudado e, ao criar um espaço envolvente e criativo, aumentou a disposição dos estudantes, contribuindo de forma positiva no processo de ensino e aprendizagem. Os autores destacam que, com essa metodologia utilizando o computador e apoiada na teoria construcionista, os estudantes apresentaram mais vontade para o estudo da matemática, demonstrando menor dificuldade quando comparada com a metodologia sem o uso das TIC.

Silva e Lazzarin (2018) apresentam, em suas conclusões, que as atividades de interpretação e análise gráfica, utilizando o GeoGebra, despertaram o interesse e a motivação dos estudantes que se envolveram em discussões e reflexões sobre as diferentes representações de uma função, expondo seu pensamento. Isso possibilitou que o professor visualizasse as possíveis falhas de interpretação por parte dos estudantes e seus conhecimentos prévios, e assim, auxiliá-los a se expressarem de forma mais adequada usando termos matemáticos, ampliando seus conhecimentos em linguagem matemática. Os autores afirmam que, quanto ao referencial utilizado, a Resolução de Problemas e a Modelagem Matemática foram escolhas adequadas aos propósitos da pesquisa, pois deram significado ao estudo desenvolvido. Eles concluem que a abordagem visual foi um atrativo, facilitando o processo de ensino, a compreensão e a construção de conceitos por parte dos estudantes, possibilitando que esses se tornassem autônomos no processo de aprendizagem, com o professor no papel de mediador e facilitador na escolha das atividades e intervindo quando necessário para a construção de novos saberes.

Oliveira e Romão (2018) destacam, em suas conclusões, que os estudantes adquiriram conhecimentos da Matemática relacionados ao consumo e ao uso consciente de energia elétrica, compreendendo que o menor consumo de energia elétrica impacta em menor uso dos recursos naturais. Os autores afirmam que a utilização de recursos das TIC possibilitou o desenvolvimento do letramento informacional. Destacam também que foi possível o desenvolvimento da interdisciplinaridade com a Física e o tema transversal Meio Ambiente, pois os estudantes puderam perceber que o desperdício de energia elétrica impacta tanto na redução do volume armazenado de água das hidrelétricas quanto na emissão de gases poluentes na atmosfera por meio do acionamento das usinas termoelétricas.

Após a realização da experiência com Investigação Matemática, Sousa e Almeida (2020) apresentam que o uso de contextos cotidianos nas aulas, a partir da Educação Matemática, pode contribuir significativamente para a formação humana dos estudantes. Eles destacam que, durante todas as etapas do trabalho, foram produzidos muitos significados pelos estudantes, principalmente na fase final da investigação, que favoreceu um momento de muito aprendizado com as discussões entre as equipes, explicando e expondo os seus pensamentos, seus desafios e as suas descobertas, compartilhando conhecimentos. Sendo assim, Sousa e Almeida (2020) consideram como exitosa a experiência que desenvolveram, pois os estudantes puderam compreender o conceito de função de forma prática. Eles concluem pontuando que uma Investigação Matemática na sala de aula pode melhorar a forma como o professor visualiza os conhecimentos matemáticos dos seus estudantes, além de poder ajudar os estudantes a perceberem que eles podem alcançar resultados surpreendentes com base em suas próprias ideias.

Nas suas considerações finais, Costa, Pires e Boiago (2020) afirmam que o trabalho com a Modelagem Matemática, aliada ao tema conta de água, possibilitou estabelecer uma relação entre teoria e prática, o que favoreceu a compreensão dos cálculos, à interpretação e à construção dos gráficos por parte dos estudantes, que demonstraram interesse e satisfação em realizar as atividades. Os autores pontuam que o trabalho com os RRS permitiu o reconhecimento do objeto função em diferentes representações. Eles apontam também que a utilização da Modelagem Matemática, para relacionar os cálculos matemáticos ao cotidiano dos estudantes, proporcionou algumas reflexões que levaram os estudantes a constatarem alguns resultados (relacionados às tarifas cobradas na conta de água) e questioná-los, principalmente. Com isso, os autores concluem afirmando que o trabalho indica indícios de construção do conhecimento tanto matemático como reflexivo, promovendo o exercício da cidadania.

Antunes, Moraes e Costa (2023), em suas considerações sobre a pesquisa sobre os Obstáculos Epistemológicos no ensino de função, apresentaram que os Obstáculos Epistemológicos identificados fornecem informações que podem levar à compreensão dos desafios enfrentados pelos estudantes e, dessa forma, pode orientar práticas pedagógicas para serem mais eficazes no ensino desse importante conceito da Matemática. Os autores reconhecem as limitações do trabalho e sugerem que pesquisas futuras se concentrem em desenvolver propostas pedagógicas para superação dos Obstáculos Epistemológicos já identificados e que continuem explorando e identificando outros possíveis Obstáculos Epistemológicos que os estudantes possam enfrentar no processo de aprendizagem da Matemática no estudo de funções.

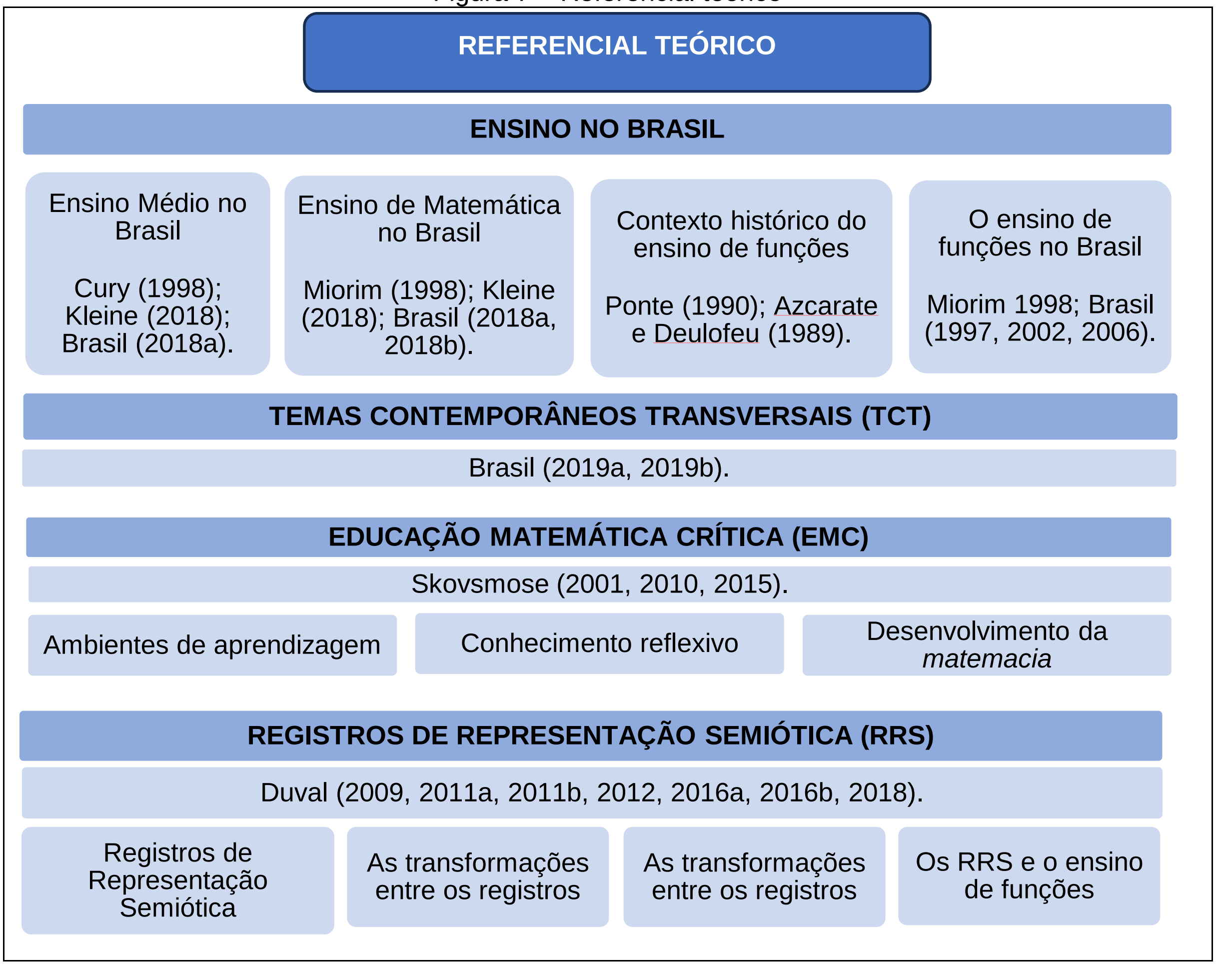
A intervenção realizada por Trancoso, Silva e Peixoto (2023) proporcionou a análise das narrativas digitais usando o *software Scratch* que mostraram a autoria dos estudantes bem como os aspectos implícitos do seu Pensamento Computacional diretamente relacionado às relações funcionais, como destacam os autores. Sobre as Metodologias Ativas, eles indicam que foram bem empregadas e consideram que foram fundamentais para desenvolver o potencial criativo dos estudantes, ao compartilharem suas ideias e participarem nas atividades. E isso, segundo os autores, influenciaram uma atitude transformadora nos estudantes, mudando seus modos de pensar, comunicar, representar os seus conhecimentos e realizar as atividades propostas em sala de aula. Trancoso, Silva e Peixoto (2023) concluem afirmando que o desenvolvimento do Pensamento Computacional, articulado às metodologias ativas por meio do *software Scratch,* devido a facilidade de seu uso, a visualização e a ludicidade que proporciona, permitem que os estudantes compreendam a atuação da Matemática no cotidiano.

Os trabalhos aqui apresentados, relatam resultados de experiências de pesquisas relacionadas ao tema desse projeto e, diante dos apontamentos de fragilidades ou de necessidades ou sugestões de novas pesquisas sobre as temáticas pesquisadas, têm-se possibilidades para a exploração do ensino de função visando à melhoria no processo de ensino e aprendizagem aos estudantes do Ensino Médio, buscando também a contextualização dos tópicos desenvolvidos em sala de aula.

4 REFERENCIAL TEÓRICO

Neste capítulo, apresenta-se o referencial teórico construído para subsidiar e nortear a pesquisa realizada. Inicia-se com um breve contexto histórico sobre o Ensino Médio no Brasil até a Base Nacional Comum Curricular e os Temas Contemporâneos Transversais, comtemplando o Ensino de Matemática e o ensino de funções no Brasil. Além disso, os aportes teóricos também se constituíram a partir das bases da Educação Matemática Crítica e dos Registros de Representação Semiótica. A Figura 7 apresenta, de forma resumida, como foi construído esse referencial.

Figura 7 – Referencial teórico



Fonte: a pesquisa.

A história do Ensino Médio, bem como do Ensino de Matemática no Brasil, se encontra com a história da educação brasileira como um todo. O próximo tópico apresenta um breve contexto histórico na busca da compreensão da importância desse estudo para o ensino de funções aos estudantes brasileiros do Ensino Médio.

4.1 BREVE CONTEXTO HISTÓRICO DO ENSINO NO BRASIL

Inicia-se esse tópico com um breve relato sobre o Ensino Médio no Brasil, abrangendo o Ensino de Matemática e o ensino de funções. Procurou-se elaborar um texto objetivo com as principais contribuições ao longo do tempo, principalmente em relação aos documentos oficiais que regem a educação pública no Brasil.

4.1.1 O Ensino Médio no Brasil

O Ensino Médio no Brasil nem sempre teve essa nomenclatura, inicialmente fazia parte da escola secundária e, posteriormente, até a promulgação da Constituição Federal de 1988, foi chamado de 2º grau. Cury (1998) relata que essa Constituição, promulgada dentro do Estado de Direito, alterou o então ensino de 1º e 2º graus para Ensino Fundamental e Médio. O autor aborda a importância dessa Constituição, que reafirmou a correlação entre educação e democracia, assegurando muitos direitos aos cidadãos brasileiros e, dentre esses direitos, destaca-se a gratuidade e a universalização progressiva do Ensino Médio, além da obrigatoriedade de responsabilidade dos estados.

Entretanto, para fazer uma retrospectiva histórica do Ensino Médio no Brasil, Cury (1998) aponta que deve ser considerado como foi o processo de construção da cidadania no Brasil. Para isso, ele relembra que a herança do período de escravidão deixou consequências visíveis até os dias atuais, como a desvalorização do trabalho produtivo. O ensino brasileiro começa então como um privilégio para a elite:

> Excluídos do ensino primário, os escravos, os foreiros e as mulheres, por razões diversas e distintas, consideradas as crianças como seres incompletos e tendo-se uma sociedade agrária e espalhada, pouco ou nada podia se esperar do ensino primário. Dessa maneira, só candidatos livres e privilegiados, de preferência do sexo masculino, tinham acesso ao ensino secundário cujo modelo era dado pelo Imperial Colégio Pedro II, fundado em 1837 (Cury,1998, p. 76).

Nesse contexto, o ensino secundário era um ensino propedêutico[2] destinado à preparação de futuros bacharéis e médicos. Ao longo do século XX, ocorreram iniciativas para se instituir o ensino no Brasil. A Figura 8 apresenta algumas reformas

---

[2] O ensino propedêutico consistia, dentro desse modelo, um conjunto de estudos com matrizes científicas com o propósito de um nítido sentido elitista e de privilégio com destinação social explícita (Cury, 1998).

com suas principais disposições, traçando uma linha histórica sobre o Ensino Médio no Brasil.

Figura 8 – Contexto Legal e Histórico do Ensino Médio no Brasil

Reforma (decreto, lei e outros)	Disposições	Considerações de Cury (1998)
Fundação do Colégio Pedro II em 1837.	Oferta do ensino secundário à população livre e privilegiada.	O Colégio Pedro II inaugura no Brasil um ensino gradual e orgânico, clássico com matizes de ensino científico, enfatizando a função propedêutica, para os exames preparatórios de futuros bacharéis e médicos.
Decreto 7.566/909 em 1909.	Cria Escolas de Aprendizes Artífices em cada unidade da federação, sob responsabilidade da União.	Tinha como objetivo habilitar os filhos da classe proletária, oferecendo preparo técnico e intelectual, preparando-os para o trabalho.
Reforma de Francisco Campos, decreto nº 19.890/31	Estabeleceu um currículo seriado, unificado e com frequência obrigatória.	O ensino secundário era dividido em dois ciclos: o primeiro considerado formativo e o segundo se voltava para o ensino superior.
Decreto 21.241 de 04/04/1932	Consolida a organização do ensino secundário.	Apresenta um currículo enciclopédico com a inserção das disciplinas de física, química e ciências naturais.
Decreto 19.360/31	Cria a Inspetoria do Ensino Profissional Técnico	Vários decretos passam a cuidar do ensino profissional separadamente do ensino formativo das escolas secundárias.
Decreto 24.558/34	Muda a Inspetoria do Ensino Profissional Técnico para Superintendência do Ensino Profissional, vinculada ao Ministério de Educação e Saúde Pública.	
Decreto 4.048/42	Cria o Serviço Nacional da Indústria (SENAI).	
Decreto 4.127/42	Regulamentou a Rede Federal de Ensino Industrial.	
Art. 129 da Constituição de 1937	Determina como primeiro dever do Estado o ensino pré-vocacional e profissional, destinado às classes menos favorecidas.	Exclusão total dos pobres, pois a escola secundária com uma função propedêutica, tinha um sentido elitista e de privilégio, com destinação social explícita.
Decreto 4.244/42	Reforma Capanema, relativa ao ensino secundário, conhecida como Lei Orgânica do Ensino Secundário.	De um lado, o ensino secundário se mantém com o enciclopedismo no curso clássico, e no curso científico, nacionalismo exacerbado. E, do outro lado, o ensino profissional é direcionado à condição de nível secundário. Mas, persistia uma dualidade em termos de finalidade e prestígio.
Decreto-lei 6.141/43	Cria a Lei Orgânica relativa ao Ensino Comercial.	
Decreto-lei 8.529/46	Cria a Lei Orgânica do Ensino Primário.	
Decreto-lei 8.530/46	Cria a Lei Orgânica do Ensino Normal.	
Decreto-lei 9.613/46	Cria a Lei Orgânica do Ensino Agrícola.	

<table>
<tr><td>Lei 1.076/50</td><td>Garantiu que todo e qualquer primeiro ciclo do secundário daria acesso ao segundo ciclo.</td><td rowspan="3">Com o objetivo de quebrar a dualidade existente entre o ensino tido como formativo e o ensino profissional. A equivalência foi considerada uma vitória daqueles que consideravam que o ensino técnico profissional era tão digno quanto o ensino secundário.</td></tr>
<tr><td>Lei 1.821/53</td><td>Passa a garantir o acesso ao vestibular, aos estudantes do secundário, com o pressuposto de equivalência.</td></tr>
<tr><td>Lei 5.0945/61</td><td>Garantia que os estudantes do ensino secundário, matriculados no segundo ciclo, poderiam se matricular no ensino técnico-industrial.</td></tr>
<tr><td>Lei 4.024/61</td><td>A primeira Lei de Diretrizes e Bases da Educação manteve a equivalência do acesso ao Ensino Superior com a finalidade de cada ramo de ensino sob o conceito do Ensino Médio.</td><td>Essa lei dá um destaque à função formativa como sendo o desenvolvimento harmonioso das potencialidades do educando com vistas à formação de pessoas responsáveis.</td></tr>
<tr><td>Lei 5.692/71</td><td>Passa a denominar o antigo primário como 1º grau e o estende para 8 anos obrigatórios. O secundário recebe a denominação de 2º grau passando a ser profissionalizante de modo universal e compulsório para todo o país.</td><td>O ensino secundário deixa de apresentar uma tendência ora mais humanística, ora mais cientificista para uma profissionalização de três ou quatro anos, imposta pela lei.</td></tr>
<tr><td>Lei 6.297/75</td><td>Lei de incentivo fiscal às empresas que promovessem treinamento em serviço aos seus empregados.</td><td>A exigência que o ensino secundário fosse profissionalizante não obteve o resultado esperado, pois não havia meios humanos (docentes) para suprir as necessidades específicas do processo produtivo. Desse modo, essa lei de incentivo fiscal procura minimizar esses problemas.</td></tr>
<tr><td>Lei 77.362/76</td><td>Cria o Sistema Nacional de Formação de Mão de Obra (SNFMO).</td><td>Teve a finalidade de estabelecer diretrizes para a formação de recursos humanos necessários aos processos produtivos.</td></tr>
<tr><td>Lei 7.044/82</td><td>Altera a lei 5.692/71.</td><td>Muda o trecho “qualificação para o trabalho” para “preparação para o trabalho”, além de mudar a obrigatoriedade de o ensino secundário ser profissionalizante, deixando a critério do estabelecimento de ensino.</td></tr>
<tr><td>Constituição Federal de 1988.</td><td>Altera a nomenclatura de 1º e 2º graus para Ensino Fundamental e Ensino Médio.</td><td>Essa Constituição foi promulgada dentro do Estado de Direito e passa a garantir a gratuidade e progressiva universalidade do Ensino Médio no âmbito estadual.</td></tr>
<tr><td>Lei 9.394/96</td><td>Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB).</td><td>A LDB reconhece o potencial formativo do Ensino Médio, considerando-o como aprofundamento e completamento do Ensino Fundamental, a fim de se alcançar uma socialização plena do indivíduo.</td></tr>
</table>

Fonte: adaptada de Cury (1998).

Ao longo dos anos, o Ensino Médio sofreu essas alterações, considerando desde o Colégio Pedro II até a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB). Cury (1998) afirma que deve se levar em conta as transformações econômicas, políticas e sociais pelas quais o Brasil passou, sendo necessário considerar que toda essa herança histórica e as consequências que ainda permaneceram no Ensino Médio: “Tal herança permaneceu no Ensino Médio, por meio do dualismo, do elitismo, da seletividade, que se expressam na dialética entre as três funções a ele atribuídas: a formativa, a propedêutica e a profissionalizante” (Cury, 1998, p. 80).

Complementando, Kleine (2018) afirma que o Ensino Médio nunca teve uma identidade muito definida, considerando a bifurcação existente entre o ensino propedêutico e o profissionalizante. A autora relata que, após a Constituição de 1934, houve reivindicações sociais e econômicas e com a ascensão do setor industrial, foi necessário aumentar as verbas destinadas à Educação para suprir a demanda de mão de obra especializada. Por isso, o Ensino Médio não recebeu muita atenção, pois “a prioridade era o ensino primário e o profissional, com formação mínima, rápida e prática, em detrimento do Ensino Superior” (Kleine, 2018, p. 4). Outro destaque histórico dado por essa autora é a Reforma Capanema, ocorrida em 1942, quando o Ensino Médio passou a ser constituído de duas modalidades, o científico e o clássico, ambos com três anos de estudo, mas sem grandes diferenças entre eles, prevalecendo o caráter humanístico e enciclopédico. Após essa reforma, o ensino profissionalizante segue separado do Ensino Médio, sem dar acesso ao Ensino Superior, o que prevalece até a aprovação da primeira LDB em 1961, que traz a afirmação de que o ensino deve contemplar o desenvolvimento individual, a formação profissional e o exercício da cidadania, sendo esses considerados como as três dimensões do mesmo processo de educação integral (Kleine, 2018).

Mesmo após a aprovação da primeira LDB, na prática ainda existia a dualidade entre as duas modalidades, Ensino Médio e Profissionalizante, segundo Kleine (2018). Para a autora, a reforma proposta pela Lei 5.692/71 teve a pretensão de acabar com esse problema, instituindo a profissionalização como modalidade a todos os estabelecimentos desse nível de ensino.

> Assim, todos teriam uma única trajetória: a obrigatoriedade de cursar uma habilitação profissional, com três ou quatro anos de duração, permitindo que, ao concluir o terceiro ano de ensino, o estudante estivesse habilitado a prosseguir os estudos em nível superior e, ao final do quarto, tivesse uma profissionalização técnica (Kleine, 2018, p. 4-5).

Contudo, as necessidades da época, a expansão do setor produtivo e o aumento da demanda pelo Ensino Superior, fatores que não foram considerados na aprovação da lei que, segundo Cury (1998, p. 80): “a lei pecava na base, por exigir o que o sistema não tinha: uma geração de docentes competentes para as novas funções e uma infraestrutura capaz de propiciar a necessária experimentação e aplicabilidade exigidas por um ensino dessa natureza”. Dessa forma, o problema persistia.

Kleine (2018, p. 6) relata que a Reforma de 1971 foi substituída pela Lei nº 9.394, em 1996, a Lei de Diretrizes e Bases da Educação (LDB), que vem tratar o Ensino Médio como eixo estruturante visando “ofertar uma formação geral e polivalente que propiciasse a aquisição de saberes e competências básicas para preparar o jovem para a vida”. Já o ensino profissionalizante passa a ser ofertado de forma paralela, complementar, separada do Ensino Médio, ficando a critério das redes de ensino a sua oferta. A autora complementa que, a partir da Emenda Constitucional nº 59/2009, o Ensino Médio passa a ser obrigatório e gratuito a todos os brasileiros na idade de 14 a 17 anos, ou para aqueles que não tiveram acesso na idade certa, passando assim a ser a última etapa da Educação Básica.

Outra mudança na legislação sobre o Ensino Médio foi a aprovação da Lei 13.415/2017 que altera a LDB, essa lei ficou conhecida como Lei do Novo Ensino Médio. Kleine (2018) aponta como principais destaques: o aumento da carga horária mínima ofertada nessa etapa escolar que deverá ser ampliada de forma progressiva até 1400 horas, devendo os sistemas de ensino oferecer, no prazo máximo de cinco anos a contar da aprovação da lei, pelo menos mil horas anuais de carga horária; a oferta de cinco itinerários formativos (Linguagens e suas tecnologias, Matemática e suas tecnologias, Ciências da Natureza e suas tecnologias, Ciências Humanas e Sociais aplicadas, e formação técnica e profissional); a autonomia dada aos sistemas de ensino para definir a organização das áreas de conhecimentos e as expectativas das respectivas competências e habilidades; a definição de direitos e objetivos de aprendizagens no Ensino Médio; e a inclusão das disciplinas Língua Portuguesa e Matemática como elementos obrigatórios nos três anos do Ensino Médio.

Além disso, a versão do texto da BNCC do Ensino Médio. aprovada em 2018, apresenta esse nível de ensino como a etapa final da Educação Básica, sendo um direito público subjetivo de todo cidadão brasileiro. Além da necessidade de universalizar o atendimento no Ensino Médio, “tem-se mostrado crucial garantir a permanência e as aprendizagens dos estudantes, respondendo às suas demandas e aspirações presentes e futuras” (Brasil, 2018a, p. 461).

Para tanto, a BNCC define dez competências[3] gerais que devem ser articuladas na construção de conhecimentos no desenvolvimento de habilidades e na formação de atitudes e valores, o que deve ocorrer ao longo da Educação Básica que se inicia com a Educação Infantil e se conclui com o Ensino Médio.

A BNCC inclui a Matemática como uma das áreas do conhecimento, sendo assim, é relevante conhecer a trajetória do Ensino de Matemática no Brasil e como ele deve ser desenvolvido para atender os pressupostos da Base, o que será visto na próxima seção.

4.1.2 O Ensino de Matemática no Brasil

Com a criação do Colégio Pedro II, em 1837, no Rio de Janeiro, inicia-se oficialmente o chamado Ensino Secundário, que percorreu um longo caminho histórico até ser denominado Ensino Médio (como mencionado anteriormente). De forma análoga, o Ensino de Matemática também teve várias nuances e, somente após a Reforma de Francisco Campos, a disciplina de Matemática começa a figurar como campo de conhecimento (Miorim, 1998). A autora afirma que, a partir dessa reforma, a Matemática tem por objetivo não somente o desenvolvimento do raciocínio lógico, mas deveria desenvolver também outras habilidades relacionadas à sua utilização e aplicações, devendo ser: “um ensino orientado segundo o grau de desenvolvimento mental, baseado no interesse do aluno, que deveria partir da intuição e apenas aos poucos ir introduzindo o raciocínio lógico, que enfatizasse a descoberta, e não a memorização” (Miorim, 1998, p. 95).

Assim, desde essa Reforma e nas reformas posteriores que aconteceram ao longo do século XX, tentou-se transformar a versão de ensino da Matemática voltado apenas para fórmulas, memorização e processos mecânicos de cálculos. “Ainda é um desafio a ser alcançado, hoje, em pleno no século XXI, um Ensino de Matemática voltado ao interesse do aluno, que parta da intuição deste e a promova!” (Kleine, 2018, p. 9). Nesse contexto, a partir da criação da LDB (Lei 9.394/96), nos anos finais do

---

[3] Na BNCC, competência é definida como a mobilização de conhecimentos (conceitos e procedimentos), habilidades (práticas, cognitivas e socioemocionais), atitudes e valores para resolver demandas complexas da vida cotidiana, do pleno exercício da cidadania e do mundo do trabalho (Brasil, 2018a, p.9).

século XX, surgem os documentos curriculares brasileiros: os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), as Orientações Curriculares Nacionais (OCN), as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) e, mais recentemente, a BNCC.

A BNCC traz a Matemática como uma área de conhecimento denominada Matemática e suas tecnologias e define competências específicas em que é necessário o desenvolvimento de habilidades relativas aos processos de investigação, de construção de modelos e de resolução de problemas por parte dos estudantes. E para que isso aconteça, eles “devem mobilizar seu modo próprio de raciocinar, representar, comunicar, argumentar e, com base em discussões e validações conjuntas, aprender conceitos e desenvolver representações e procedimentos cada vez mais sofisticados” (Brasil, 2018a, p. 529).

Para o desenvolvimento dessas competências, a BNCC (Brasil, 2018a) propõe que o Ensino de Matemática seja estruturado para que os estudantes possam:

- interagir com seus colegas e professores de forma a investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática;
- elaborar registros para enunciar um objeto matemático de forma que utilizem diversos registros de representação e que possam mobilizá-los para modelar situações diversas por meio da linguagem específica da matemática na busca de soluções e respostas;
- formular e testar conjecturas, apresentar e justificar seus resultados, interpretar os resultados dos colegas e interagir com eles.

Para além da Matemática como uma área de conhecimento da formação geral básica, as Diretrizes Curriculares Nacionais do Ensino Médio (DCNEM) a apresenta como componente dos itinerários formativos, definido como sendo:

> [...] cada conjunto de unidades curriculares ofertadas pelas instituições e redes de ensino que possibilitam ao estudante aprofundar seus conhecimentos e se preparar para o prosseguimento de estudos ou para o mundo do trabalho de forma a contribuir para a construção de soluções de problemas específicos da sociedade (Brasil, 2018b, p. 2).

Assim, a Matemática ofertada como itinerário formativo, deve proporcionar o “aprofundamento de conhecimentos estruturantes para aplicação de diferentes conceitos matemáticos em contextos sociais e de trabalho”, com um currículo estruturado de forma a possibilitar estudos com resolução de problemas e análises diversas, considerando o contexto local e as possibilidades de oferta pelos sistemas de ensino (Brasil, 2018b, p. 7).

Dessa forma, espera-se que, a partir da coordenação e desenvolvimento das competências gerais da Base e das competências específicas da Área de Matemática e suas tecnologias e com os itinerários formativos, o estudante do Ensino Médio complete a sua Educação Básica com as aprendizagens essenciais que a BNCC apresenta. Nesse sentido, acredita-se que o ensino de funções em muito pode contribuir para a formação desse estudante. Para tanto, apresenta-se no próximo tópico, um pouco da história do ensino desse objeto de conhecimento.

4.1.3 Um breve olhar para o conceito de função ao longo da história da Matemática

O estudo de funções é um dos principais conteúdos trabalhados no Ensino Médio, na disciplina de Matemática. Ponte (1990) afirma que o conceito de função é um dos mais importantes da Matemática. Sua história conta com Isaac Newton como um dos mais antigo colaborador, mas outros matemáticos importantes também contribuíram para seu conceito, como Leibniz – sendo este o primeiro a usar o termo função em 1673 – além de Johann Bernoulli, Euler, Fourier, Dirichlet, Cantor e outros.

Azcarate e Deulofeu (1989) apontam que, apesar de diversos estudos históricos sobre a Matemática, existem poucos trabalhos dedicados especificamente à origem do conceito de função e seus autores se contradizem em alguns pontos:

> Assim, embora alguns autores admitam uma certa natureza funcional em algumas operações matemáticas da antiguidade (especialmente no trabalho obras astronômicas dos babilônios, de Ptolomeu ou dos árabes), outros situam seu nascimento próximo ao surgimento da geometria analítica (Descartes) e alguns ainda situam a sua aparência autêntica no século XIX com as definições clássicas de função dadas por Dirichlet e Lobatchevsky (Azcarate; Deulofeu,1989, p.37, tradução própria).

Dessa forma, compreende-se que essa divergência entre os autores ocorre devido à natureza geral do conceito de função, sendo necessário fixar um período histórico para situar o nascimento desse conceito. Azcarate e Deulofeu (1989) apresentam três grandes períodos históricos sendo o primeiro, o mundo antigo, onde há a registros de estudos sobre casos particulares de dependência entre duas quantidades, mas não se apresentam noções gerais sobre grandezas variáveis e funções. Nesse período estão as contribuições dos babilônios, com as referências mais antigas conhecidas a partir do estudo dos fenômenos de mudança e da determinação de leis quantitativas obtidas por meio de tabelas, além das contribuições dos gregos pela sua importância e toda a sua influência posterior na Matemática. Sobre as contribuições gregas no mundo antigo, Mol (2013, p.29) apresenta que:

> A evolução da matemática sofreu uma mudança de rumo na Grécia Antiga. Ela deixou de ser uma coleção de resultados empíricos e passou a ter o formato de uma ciência organizada, de maneira sistemática e por elementos racionais. A matemática, tanto na Mesopotâmia quanto no Egito, tinha caráter concreto e prático. Na Grécia, ela passou a ser essencialmente abstrata, com uma certa independência em relação às aplicações práticas. As demonstrações, instrumentos para garantir a validade dos resultados por argumentação puramente racional, foram introduzidas como parte fundamental de sua estrutura. Os gregos remodelaram a matemática e introduziram elementos que viriam a orientar a evolução dessa ciência pelos séculos seguintes da história humana.

O segundo período destacado por Azcarate e Deulofeu (1989) é a Idade Média, período em que cada caso específico de dependência entre duas quantidades variáveis era expressa por uma descrição verbal ou no máximo por meio de gráfico, não sendo utilizada a determinação de leis quantitativas relativas às mudanças dos fenômenos estudados. Eles destacam neste período a mudança de pensamento que começou a ocorrer no estudo dos fenômenos naturais, com os movimentos ocorridos na França e na Inglaterra e as contribuições de Oresme, que foram as primeiras tentativas de representação gráfica da dependência entre variáveis.

O período moderno, destacado por Azcarate e Deulofeu (1989), inicia-se no final do século XVI com o aparecimento do conceito de função com aproximação mais ampla e generalizações. Nesse período, o estudo do movimento se torna um problema essencial, ao mesmo tempo que a descoberta da geometria analítica permite o desenvolvimento das expressões algébricas das funções. Os autores apresentam que, na segunda metade do século XVII, surge o método de expressar as funções por meio de séries de potências, o que permitiu ampliar o campo de funções tratadas analiticamente: “Esse método analítico para introduzir funções revolucionou a Matemática e, pela sua grande eficácia, garantiu um lugar privilegiado ao conceito de função dentro da Matemática” (Azcarate; Deulofeu, 1989, p.38, tradução própria). Os autores destacam que, mais ao final do século XVII, esta interpretação de funções como expressões analíticas se mostrou restritiva, mas deu origem a novas definições do conceito geral de função que foi universalmente aceito na análise matemática e, posteriormente nos séculos seguintes, como o conceito utilizado atualmente.

Complementando, o autor Ponte (1990) apresenta que a noção de função começa como um mecanismo matemático utilizado para se quantificar os fenômenos naturais. Esse mecanismo começou a ser utilizado por Galileu e Kepler ainda no século XVI quando a Matemática e a Física tinham uma relação muito estreita, considerando que muitos matemáticos, como Newton, Bernoulli, Euler, Lagrange e Fourier estudaram fenômenos físicos.

> Era preciso medir grandezas, identificar regularidades e obter relações que tivessem tanto quanto possível uma descrição matemática simples. O estudo do movimento da queda dos graves, do movimento dos planetas, e em geral, dos movimentos curvilíneos, conduziram à necessidade de considerar as funções de proporcionalidade direta e inversa, bem como as funções polinomiais (incluindo as cónicas) e as trigonométricas. [...] As funções são instrumentos por excelência para estudar problemas de variação (Ponte, 1990, p. 5).

Dessa forma, o conceito primitivo de função começa considerando três aspectos principais: a notação algébrica, por meio de uma expressão analítica com grande quantidade de informação e rigor; a representação geométrica, possibilitando uma base intuitiva fundamental associada a noções de tangente a uma curva e de derivada de uma função; e a relação com problemas concretos do mundo físico. Mas, com o decorrer do tempo, há uma evolução que se distancia desses elementos, sendo que a Matemática atual já não é exclusiva de aplicação dos fenômenos físicos, ela é igualmente aplicada no estudo de situações das ciências biológicas, das ciências humanas e sociais, da gestão, da comunicação, da engenharia e da tecnologia (Ponte, 1990).

Para Ponte (1990), o conceito de função ainda continua em evolução, destacando que Cantor foi quem iniciou o desenvolvimento da teoria de conjuntos e, no século XX, essa noção foi estendida contemplando todos os tipos de correspondências, numéricas ou não, possibilitando o entendimento da noção de função mais próxima da usada atualmente.

4.1.4 O ensino de funções no Brasil

No Brasil, o conteúdo de funções faz parte do currículo de Matemática do Ensino Médio, e seu ensino deve ser realizado visando atingir as competências dessa área de conhecimento, conforme previsto na BNCC vigente desde 2018. Para compreender a importância desse ensino, deve-se conhecer como ele foi historicamente construído.

Miorim (1998) retrata que o Ensino de Matemática só foi consolidado no Brasil no século XX a partir da Reforma de Francisco Campos, em 1931, que proporcionou a primeira organização nacional do ensino brasileiro. Antes dessa reforma, o Ensino de Matemática era realizado separadamente na escola secundária dividido em Aritmética, Álgebra, Geometria e Trigonometria, com programas, livros e professores diferentes. A autora considera que essa foi a primeira tentativa de estruturar todo o curso secundário brasileiro e de introduzir nele os princípios considerados modernizadores da educação. Assim, a Matemática passa a contemplar uma disciplina única e entre outras mudanças, tem-se que:

> A proposta também trazia uma visão mais moderna dos conteúdos matemáticos, sugerindo a eliminação de *assuntos de interesse puramente formalístico*, de *processos de cálculos desprovidos de interesse didático* e introduzindo o conceito de função e noções do cálculo infinitesimal. Além disso, propunha a descompartimentalização das várias áreas da Matemática, enfatizando a importância de suas aplicações (Miorim, 1998, p. 95, grifo da autora).

Observa-se que, nessa reforma. já aparece a necessidade de se ensinar o conceito de função na educação secundária, que hoje corresponde à Educação Básica brasileira. Miorim (1998) afirma que o conceito de função era tido como fator unificador das áreas que antes compunham as matemáticas, devendo ser ensinado inicialmente de forma intuitiva e ir, ao longo dos anos escolares, aumentando o rigor até chegar à sua forma mais geral e abstrata. Segundo a autora, o decreto anunciava que o professor não deveria ensinar geometria ou álgebra sem mostrar a dependência de uma grandeza em relação a outra. Apontava, também, que a representação gráfica e a discussão numérica deviam sempre acompanhar o estudo das funções, de forma a permitir que esse conteúdo fizesse uma conexão entre os diversos ramos das chamadas matemáticas elementares. Além disso, o estudo de funções deveria ser tratado como recurso indispensável à resolução rápida dos problemas da vida prática. Mas, essas mudanças não chegaram a produzir os efeitos esperados, sendo que:

> O descompasso existente entre os últimos avanços científicos e tecnológicos e a Matemática ensinada nas escolas de nível médio seria intensificado e este seria novamente um dos mais fortes argumentos utilizados pelos defensores do Movimento da Matemática Moderna para justificar a necessidade de modernização dos conteúdos matemáticos desenvolvidos naquele nível de ensino (Miorim,1998, p. 107).

O Movimento da Matemática Moderna no Brasil, segundo Gomes M. L. M. (2013), foi do fim dos anos 1950 ao fim dos anos 1970. As ideias desse movimento defendiam a modernização dos conteúdos ensinados na Matemática escolar, com a proposta de introdução de elementos unificadores dos campos da aritmética, da álgebra e da geometria. Segundo essa autora, esse movimento destacava a necessidade de conferir mais importância aos aspectos lógicos, estruturais e formais da Matemática. Além disso, havia uma disparidade entre a Matemática ensinada nos estudos universitários e aquela ensinada no nível médio, sendo assim, “era, portanto, necessário, como forma de garantir uma certa continuidade entre esses dois níveis de ensino, que fossem introduzidos nas escolas de nível médio alguns aspectos modernos da Matemática” (Miorim, 1998, p. 108).

Essa Matemática moderna priorizava a teoria dos conjuntos, as estruturas matemáticas e a lógica matemática, sendo que esses três foram os elementos unificadores dos campos matemáticos, conforme relata Miorim (1998). Ela complementa que para tanto, enfatizou-se a precisão de uma linguagem matemática e o rigor das justificações matemáticas, de forma que o estudante deveria saber justificar o que foi feito matematicamente. Nessa proposta, as relações e funções se destacavam, bem como a teoria dos conjuntos e as propriedades estruturais dos conjuntos. A autora explica que essa Matemática moderna acabou por agravar os problemas de ensino no Brasil, foram muitas críticas ao movimento, mas como foi intensa a inserção que o movimento alcançou na prática, as propostas de modificação foram acontecendo de forma lenta e gradual. “Apesar de diferentes, as posições assumidas pelos movimentos de modernização da Matemática ocorridos no século XX, influenciaram profundamente o ensino da disciplina daquele momento em diante” (Miorim, 1998, p. 115). De fato, a autora afirma, que ainda é possível perceber a presença das ideias defendidas nas discussões teóricas sobre o assunto, bem como na prática da Educação Matemática nas escolas brasileiras.

Da mesma forma, nos documentos curriculares que foram construídos para orientar os currículos brasileiros, o ensino de funções sempre teve destaque, sendo previsto para ser trabalhado ao longo dos três anos do Ensino Médio. Tanto os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), como as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN+) e as Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCN) fazem menção a esse conteúdo (Brasil, 2000, 2002, 2006).

Os PCN (Brasil, 2000) apontam que as competências e habilidades a serem desenvolvidas em Matemática se dividem em três grupos: representação e comunicação; investigação e compreensão; e contextualização sociocultural. O conteúdo de funções permeia os três grupos. Já os PCN+ (Brasil, 2002) apresentam os conteúdos separados por três temas: álgebra: números e funções; geometria e medidas; e análise de dados. Há um destaque para a funções, sendo que:

> O estudo das funções permite ao aluno adquirir a linguagem algébrica como a linguagem das ciências, necessária para expressar a relação entre grandezas e modelar situações-problema, construindo modelos descritivos de fenômenos e permitindo várias conexões dentro e fora da própria matemática. Assim, a ênfase do estudo das diferentes funções deve estar no conceito de função e em suas propriedades em relação às operações, na interpretação de seus gráficos e nas aplicações dessas funções (Brasil, 2002, p. 121).

De forma análoga, as OCN apresentam que os conteúdos básicos estão organizados em quatro blocos: números e operações; funções; geometria; análise de dados e probabilidade (Brasil, 2006). Nota-se que novamente as funções têm um lugar de destaque.

Estudos atuais continuam explorando o ensino de função, como foi apresentado na revisão de literatura dessa tese. Destaca-se aqui, alguns desses estudos: Olgin (2015) que em sua tese explorou o ensino de funções por meio de temáticas; Lessa (2018), Gonçalves (2019), Souza, D. C. (2020), Pinto (2020), Subtil (2022) e Veiga (2023) que pesquisaram sobre o ensino de funções relacionados com tecnologias digitais (tecnologia móveis, computadores ou ainda com pensamento computacional) com utilização de *softwares*. Ninow (2019) que desenvolveu um estudo com foco no ensino e aprendizagem de funções, sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS). Santana (2022) pesquisou sobre a interrelação do contrato didático com os Registros de Representação Semiótica. Ainda, Silva (2023) que explorou o ensino de funções aliados à Resolução de Problemas. Além desses estudos que foram desenvolvidos em programas de pós-graduação a nível de mestrado e doutorado, destacam-se também as pesquisas (também da revisão de literatura) que foram publicadas em periódicos, investigaram o estudo de funções explorando o uso de tecnologias digitais, a Resolução de Problemas, os Pilares do Pensamento Computacional, a Modelagem Matemática, a Aprendizagem Baseada em Projetos, a identificação de Obstáculos Epistemológicos: Martins, Doering e Bartz (2017); Cardoso e Carbo (2017); Silva e Lazzarin (2018); Oliveira e Romão (2018); Sousa e Almeida (2020); Costa, Pires e Boiago (2020); Antunes, Moraes e Costa (2023); e Trancoso, Silva e Peixoto (2023).

Na BNCC, a área de Matemática está dividida em cinco competências específicas que devem ser trabalhadas ao longo de todo o Ensino Médio. Destaca-se que as habilidades que envolvem o conteúdo de funções estão presentes em quatro dessas competências.

> Competência 1: utilizar estratégias, conceitos e procedimentos matemáticos para interpretar situações em diversos contextos, sejam atividades cotidianas, sejam fatos das Ciências da Natureza e Humanas, das questões socioeconômicas ou tecnológicas, divulgados por diferentes meios, de modo a contribuir para uma formação geral (Brasil, 2018a, p. 521).

Assim, o desenvolvimento da Competência 1 contribui tanto para a formação de cidadãos críticos e reflexivos, como para formação científica geral dos estudantes. Isso se dará por meio das habilidades desenvolvidas na área de Matemática como, por exemplo a habilidade 101: “Interpretar situações econômicas, sociais e das Ciências da Natureza que envolvem a variação de duas grandezas, pela análise dos gráficos das funções representadas e das taxas de variação com ou sem apoio de tecnologias digitais” (Brasil, 2018a, p. 525).

> Competência 3: utilizar estratégias, conceitos, definições e procedimentos matemáticos para interpretar, construir modelos e resolver problemas em diversos contextos, analisando a plausibilidade dos resultados e a adequação das soluções propostas, de modo a construir argumentação consistente (Brasil, 2018a, p. 527).

No que diz respeito ao desenvolvimento da Competência 3, as habilidades indicadas estão relacionadas à interpretação, construção de modelos, resolução e formulação de problemas matemáticos envolvendo noções, conceitos e procedimentos quantitativos, espaciais, estatísticos, probabilísticos, entre outros. Diante disso, o conteúdo de funções traz muitas contribuições, como por exemplo o que aponta a habilidade 302: “Resolver e elaborar problemas cujos modelos são as funções polinomiais de 1º e 2º graus, em contextos diversos, incluindo ou não tecnologias digitais” (Brasil, 2018a, p. 528).

> Competência 4: compreender e utilizar, com flexibilidade e precisão, diferentes registros de representação matemáticos (algébrico, geométrico, estatístico, computacional etc.), na busca de solução e comunicação de resultados de problemas, de modo a favorecer a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático (Brasil, 2018a, p. 530).

As habilidades relacionadas à Competência 4 requerem a utilização das diferentes representações de um mesmo objeto matemático, de modo a compreender as ideias que essas representações expressam e, quando possível, fazer a conversão entre elas. Isso possibilita que os estudantes passam a dominar um conjunto de ferramentas, tornando-se capazes de resolver problemas, de se comunicar e argumentar matematicamente em situações do cotidiano. Nesse sentido, o ensino de funções faz esse papel no que tange às diferentes representações, para atingir essas habilidades, como por exemplo, o que traz a habilidade 405: "Reconhecer funções definidas por uma ou mais sentenças (como a tabela do Imposto de Renda, contas de luz, água, gás etc.), em suas representações algébrica e gráfica [...]" (Brasil, 2018a, 9. 531).

> Competência 5: investigar e estabelecer conjecturas a respeito de diferentes conceitos e propriedades matemáticas, empregando recursos e estratégias como observação de padrões, experimentações e tecnologias digitais, identificando a necessidade, ou não, de uma demonstração cada vez mais formal na validação das referidas conjecturas (Brasil, 2018a, p. 532).

Essa última competência, a Competência 5, está mais voltada para as habilidades relacionadas a um importante papel na formação matemática dos estudantes que, mediante investigações, devem formular conjecturas, refutá-las ou validá-las e comunicar com precisão suas conclusões. Para tanto, há a necessidade de se trabalhar a importância da Matemática como Ciência e, nesse sentido, o papel das funções também merece destaque, como se destaca na habilidade 502: "Investigar relações entre números expressos em tabelas [...] criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização, reconhecendo quando essa representação é de função polinomial de 2º grau" (Brasil, 2018a, p. 533).

Percebe-se, ao longo da história, a importância que o ensino de funções passou a ter, até chegar hoje à BNCC. Para que sejam desenvolvidas as competências, um dos caminhos que a BNCC aponta é o trabalho com os Temas Contemporâneos Transversais (TCT). O que vem ao encontro do terceiro dentre os três aspectos que Ponte (1990, p.6) apresenta como essenciais na visualização do papel que o conceito de função assume no currículo: "(a) a natureza mais algébrica ou mais funcional da abordagem, (b) a generalidade do conceito, e (c) a sua aplicação a problemas e situações da vida". A próxima seção apresenta os TCT, a partir de como são definidos na BNCC.

4.2 OS TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS

Os Temas Contemporâneos Transversais (TCT) estão presentes na BNCC como temas obrigatórios e norteadores do ensino na Educação Básica brasileira. Eles devem ser utilizados de forma a contextualizar o que é ensinado, pois trazem temas que podem ser interessantes para os estudantes, sendo também relevantes para o seu desenvolvimento como cidadão, destacando que: "o grande objetivo é que o estudante não termine sua educação formal tendo visto apenas conteúdos abstratos e descontextualizados, mas que também reconheça e aprenda sobre os temas que são relevantes para sua atuação na sociedade” (Brasil, 2019a, p. 7).

Assim, esses temas são chamados de contemporâneos por terem relação com a realidade atual em que vivem os estudantes brasileiros, e são transversais porque são comuns a mais de uma área de conhecimento, sendo assim relevantes para a sociedade contemporânea.

> Na escola, são os temas que atendem às demandas da sociedade contemporânea, ou seja, aqueles que são intensamente vividos pelas comunidades, pelas famílias, pelos estudantes e pelos educadores no dia a dia, que influenciam e são influenciados pelo processo educacional (Brasil 2019a, p. 7).

A incorporação de temas nos documentos curriculares brasileiros vem desde os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), passando pelas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) e agora na BNCC, que vem acrescentar, integrar e trazer novos aspectos e práticas que pretendem ampliar a abordagem dos temas na escola (Brasil, 2019a). A Figura 9 destaca as mudanças ocorridas nesses documentos, abrangendo desde a denominação até suas principais características.

Figura 9 – Apresentação dos temas nos documentos curriculares

DOCUMENTO	PCN	DCN	BNCC
Publicação	1997	2013	2017/2018
Denominação	Temas Transversais	Eixos Temáticos / Norteadores	Temas Contemporâneos (Transversais e Integradores)
Quantos são?	6 (seis)	Indeterminado (Organizados em temas gerais)	15 (quinze)
Caráter normativo	Recomendações para a Educação Básica. Assuntos que deveriam atravessar as mais diversas disciplinas.	Recomendação de que eixos temáticos propiciem o trabalho em equipe, além de contribuir para a superação do isolamento das pessoas e de conteúdos fixos. Os professores com os estudantes têm liberdade de escolher temas, assuntos que desejam estudar, contextualizando-os em interface com outros.	Determinação como referência nacional obrigatória para a elaboração ou adequação dos currículos e propostas pedagógicas. Considerados como conteúdos a serem integrados aos currículos da Educação Básica, a partir das habilidades a serem desenvolvidas pelos componentes curriculares. Ademais, a BNCC recomenda incorporar aos currículos e às propostas pedagógicas a abordagem de temas contemporâneos que afetam a vida humana em escala local, regional e global, preferencialmente de forma transversal e integradora.
E a base legal?	Não havia o vínculo	Parecer CNE/CEB nº 14/2000: Estabelece a	Todos são regidos por marcos legais específicos.

<table>
<tr><td></td><td>obrigatório com uma legislação ou norma específica.</td><td>interação entre a base e a parte diversificada, indissociavelmente e de forma transversal.</td><td></td></tr>
<tr><td>Por que transversal?</td><td colspan="3">Os temas devem ser incluídos no currículo como conteúdos a serem ministrados pelas diversas áreas de conhecimento, de forma transversal.</td></tr>
<tr><td>Por que mudar?</td><td colspan="3">Em todos os documentos, as modificações representam importantes conquistas para a educação nacional e, principalmente, para os Temas Contemporâneos e à transversalização dos conteúdos, que na BNCC receberam, no currículo escolar, o espaço e o status compatíveis com a sua relevância.</td></tr>
</table>

Fonte: Brasil (2019a, p.15).

Observa-se que os PCN apresentam esses temas como Temas Transversais que eram recomendados no currículo da Educação Básica brasileira, sendo eles: Saúde; Ética; Trabalho e consumo; Orientação sexual; Meio ambiente; e Pluralidade cultural (Brasil, 1997). Os PCN eram flexíveis e podiam ser adaptados às realidades de cada sistema de ensino e de cada região, além disso, eram compostos por objetivos gerais que norteavam a organização do trabalho dos professores, sem necessariamente apresentar conteúdos e objetivos organizados por níveis ou séries (Brasil, 2019a).

Após a implantação dos PCN, foram aprovadas Resoluções do Conselho Nacional de Educação (CNE) definindo as DCN, dentre elas, destacam-se as relacionadas aos temas contemporâneos:

> Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação das Relações Étnico-Raciais e para o Ensino de História e Cultura Afro-Brasileira e Africana - Resolução CNE/CP nº 1/2004; Diretrizes Nacionais para a Educação em Direitos Humanos - Resolução CNE/CP nº 1/2012; e Diretrizes Curriculares Nacionais para a Educação Ambiental – Resolução CNE/CP nº 2/2012 (Brasil, 2019a, p.10).

As DCN, ao contrário dos PCN, tinham um caráter obrigatório, trazendo a obrigatoriedade de que as escolas trabalhem esses temas juntamente com os conteúdos científicos das áreas de conhecimento específicas de forma interdisciplinar. Esse caráter obrigatório dos TCT se manteve no documento aprovado da BNCC que aponta que os sistemas e redes de ensino, assim como as escolas, devem incorporar, aos currículos e às propostas pedagógicas, a abordagem dos TCT que afetam a vida humana em escala local, regional e global (Brasil, 2018a).

> Em 2017, com a aprovação da BNCC, os diversos temas de grande relevância social, apesar de ainda não detalhados na sua forma de implantação, permaneceram contemplados como assuntos transversais e integradores de uma educação que busca uma sociedade mais justa, igualitária e ética, pois elevam o trabalho educativo para além do ensino de conteúdos científicos (Brasil, 2019a, p. 11).

A BNCC traz seis macroáreas temáticas: Cidadania e civismo, Ciência e tecnologia, Economia, Meio ambiente, Multiculturalismo e Saúde, que subdivide em quinze TCT, como pode ser observado na Figura 10.

Figura 10 – Temas Contemporâneos Transversais

TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS	
MACROÁREA	TCT
CIDADANIA E CIVISMO	Direitos da criança e do adolescente
	Educação em direitos humanos
	Educação para o trânsito
	Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso
	Vida familiar e social
CIÊNCIA E TECNOLOGIA	Ciência e tecnologia
ECONOMIA	Educação financeira
	Educação fiscal
	Trabalho
MEIO AMBIENTE	Educação ambiental
	Educação para o consumo
MULTICULTURALISMO	Diversidade cultural
	Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras
SAÚDE	Educação alimentar e nutricional
	Saúde

Fonte: adaptada de Brasil (2019a).

Os TCT são sustentados por bases legais, sendo que cada um deles possui um conjunto de marcos legais que os amparam. Dessa forma, os TCT também têm o papel de cumprir a legislação que trata da Educação Básica, garantindo aos estudantes os direitos de aprendizagem, possibilitando o acesso a conhecimentos para a formação para o trabalho, para a cidadania e para a democracia, valorizando as características regionais e locais da cultura, da economia e da população que frequenta a comunidade em que a escola está inserida (Brasil, 2019b).

O trabalho com os TCT não pode ser isolado como se fossem uma disciplina específica, eles precisam perpassar o currículo, considerando que “as propostas podem ser trabalhadas tanto em um ou mais componentes de forma intradisciplinar, interdisciplinar ou transdisciplinar, mas sempre de forma transversal às áreas de conhecimento” (Brasil, 2019b, p.7). A abordagem dos TCT deve ser feita de modo que eles sejam vinculados “à dinâmica social cotidiana, para que faça sentido incluir seus conteúdos nos assuntos estudados e para que seja feita sua vinculação com o desenvolvimento das dez competências gerais da BNCC, que, por sua vez, visam à construção da cidadania e à formação de atitudes e valores” (Brasil, 2019a, p.19).

Para a organização curricular, são várias as possibilidades didático-pedagógicas para a abordagem dos TCT, envolvendo três níveis de complexidade: intradisciplinar, interdisciplinar e transdisciplinar (Brasil, 2019a). A utilização desses temas para contextualizar o ensino de função nas aulas de Matemática remete ao trabalho intradisciplinar que:

> [...] pressupõe a abordagem dos conteúdos relacionados aos temas contemporâneos de forma integrada aos conteúdos de cada componente curricular. Não se trata, portanto, de abordar o tema paralelamente, mas de trazer para os conteúdos e para a metodologia da área a perspectiva dos Temas Contemporâneos Transversais (Brasil, 2019a, p. 18).

Assim, o trabalho com os TCT é valorizado e dá significado e relevância aos conteúdos escolares, sendo que, a partir da utilização no ensino de função, pode ser um diferencial para promover uma aprendizagem contextualizada para os estudantes do Ensino Médio. Além disso, lidar com as questões abordadas nesses temas é fundamental para a construção de um futuro mais justo, inclusivo e sustentável para os nossos jovens, que são pressupostos de uma Educação Matemática Crítica (EMC), tema que será abordado na próxima seção.

4.3 EDUCAÇÃO MATEMÁTICA CRÍTICA

Para o embasamento teórico nesse tópico, buscou-se as contribuições da Educação Matemática Crítica de Ole Skovsmose a partir de três dos seus livros. O primeiro, intitulado “Educação Matemática Crítica: a Questão da Democracia”, discute aspectos da Educação Matemática, Educação Crítica, democracia, competência democrática e o conhecer reflexivo na Matemática. O segundo, denominado "Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica”, apresenta os cenários para a investigação, os desafios da reflexão e a Educação Matemática Crítica. Por fim, o livro “Um Convite à Educação Matemática Crítica” traz elementos da Educação Matemática, dos cenários para a investigação, da reflexão e da *matemacia*.

Inicia-se este tópico falando um pouco sobre a Educação Crítica (EC) que, para Skovsmose (2001), traz a relação entre professor e estudante como parceiros, baseada na “pedagogia emancipadora” de Paulo Freire, de forma que a educação possibilite ao estudante se envolver em questões relacionadas à democracia. Como o processo educacional envolve os professores, os estudantes e também um currículo, Skovsmose (2001) classifica a EC em três pontos-chave, sendo o primeiro deles o envolvimento dos estudantes no controle deste processo educacional. Nesse ponto, destaca-se que os interesses dos estudantes devem ser considerados na formação de um currículo crítico que deve envolver problemas relevantes ao contexto social desse estudante. O segundo ponto-chave para essa EC é a consideração crítica dos conteúdos e outros aspectos que envolvem um currículo crítico. Sobre o conteúdo e questões relacionadas a esse currículo, é necessário fazer considerações.

> 1) A aplicabilidade do assunto: quem o usa? Onde é usado? Que tipos de qualificação são desenvolvidos na Educação Matemática (EM)? 2) Os interesses por trás do assunto: que interesses formadores de conhecimento estão conectados a esse assunto? 3) Os pressupostos por detrás do assunto: que questões e que problemas geraram os conceitos e os resultados na Matemática? Que contextos têm promovido e controlado o desenvolvimento? 4) As funções do assunto: que possíveis funções sociais poderiam ter o assunto? Essa questão não se remete primariamente às aplicações possíveis, mas à função implícita de uma EM nas atitudes relacionadas a questões tecnológicas, nas atitudes dos estudantes em relação a suas próprias capacidades etc. 5) As limitações do assunto: em quais áreas e em relação a que questões esse assunto não tem qualquer relevância? (Skovsmose, 2001, p. 19).

Essas considerações, a respeito dos conteúdos que fazem parte de um currículo crítico, estão conectadas ao desenvolvimento de uma competência crítica nos estudantes. Principalmente quando também estão relacionadas ao ponto-chave anterior, ou seja, o envolvimento dos estudantes no controle do processo educacional.

O terceiro ponto-chave é o direcionamento do processo de ensino e aprendizagem a problemas. Para selecionar esses problemas, Skovsmose (2001) aponta dois critérios principais: um subjetivo que se relaciona à relevância e à proximidade com o conhecimento do estudante e outro objetivo relacionado à proximidade do problema com assuntos sociais existentes.

Esses aspectos da EC não estão presentes na Educação Matemática (EM). Para explicar isso, Skovsmose (2001) apresenta a EM por meio de três tendências: estruturalismo; pragmatismo; e orientação ao processo. No estruturalismo, a EM apresenta a ideia de que o conhecimento dos estudantes tem que ser construído de acordo com um currículo pré-estabelecido independentemente de quem é esse estudante, o que contrasta com o primeiro ponto-chave da EC. No pragmatismo, a EM se concentra na aplicação da Matemática, mas de forma hipotética, se distanciando do terceiro ponto-chave da EC. Por último, na orientação ao processo, a natureza da Matemática não está vinculada a conceitos específicos ou à sua aplicabilidade prática, mas aos processos de pensamento que conduzem à compreensão e ao *insight* matemático (Skovsmose, 2001). O autor destaca o ponto de vista da EM em que o principal é preparar os estudantes, deixando-os aptos para criar Matemática, concordando com Freudenthal (1973, p. 118 *apud* Skovsmose, 2001, p. 25):

> A ciência em sua melhor forma tem sido sempre invenção criativa, e hoje é assim até mesmo em níveis mais baixos do que o dos mestres. O processo de aprendizagem tem de incluir fases de invenção dirigida, isto é, da invenção não no sentido objetivo, mas no sentido subjetivo, vista da perspectiva do estudante. Acredita-se que conhecimento e habilidade adquiridos por reinvenção são mais bem entendidos e mais facilmente preservados que os adquiridos de um modo menos ativo.

Nessa perspectiva, para que essa tendência se aproxime mais da EC, é necessário desenvolver nesse processo uma ampla competência crítica nos estudantes, que seja possível ir além da crítica na atividade proposta, mas para uma situação exterior à trabalhada na sala de aula. Podendo-se desenvolver atividades relacionadas a problemas que sejam do cotidiano dos estudantes para que eles utilizem a Matemática como suporte para resolvê-los.

Para Skovsmose (2001), a EM precisa se integrar a EC. Ele indica dois aspectos que formalizam essa necessidade: a relação entre tecnologia e sociedade, e o currículo. Na relação entre tecnologia e sociedade, o autor traz a tese do filosófico Jacques Ellul (1964 *apud* Skovsmose, 2001) a qual aponta que a tecnologia se tornou o fator predominante da civilização, com o ser humano completamente imerso em seu impacto e influência, sendo que o domínio da tecnologia possibilita estabelecer ou intensificar relações de poder na sociedade. E a elaboração dos currículos é, de modo geral, impactada por essas relações de poder, pois tanto as forças econômicas como as relações sociais influenciam na determinação dos conteúdos de um currículo específico a partir de sua reestruturação que são derivadas dessas relações de poder que prevalecem na sociedade (Skovsmose, 2010). A EM tem lidado com situações que trabalham esses dois aspectos, desenvolvendo e transformando o conhecimento do estudante, preparando-o para lidar com questões de tecnologia, no que tange às relações sociais e nas relações pessoais, especialmente entre estudantes e professores.

Além disso, um exemplo da distinção entre a EC e a EM são os critérios apontados por Skovsmose (2001, p. 34) para a seleção de problemas a serem trabalhados dentro de uma perspectiva em uma EC. Esses critérios fazem parte das intenções da EC, mas não têm importância em relação aos conteúdos da EM, pois geralmente estes estão mais voltados para a própria Matemática, a sua estrutura lógica e o processo do pensar matemático.

> 1) Deveria ser possível para os estudantes perceberem que o problema é de importância. Isto é, o problema deve ter relevância subjetiva para os estudantes. Deve estar relacionado a situações ligadas às experiências deles. 2) O problema deve estar relacionado a processos importantes na sociedade. 3) De alguma maneira e em alguma medida, o engajamento dos estudantes na situação-problema e no processo de resolução deveria servir como base para um engajamento político e social (posterior).

Dessa forma, pode-se dizer que a EM está distante da EC. Assim, torna-se importante considerar os aspectos da EC ao longo do Currículo de Matemática. Nesse contexto, surge o movimento relacionado à Educação Matemática Crítica (EMC) proposto por Skovsmose (2001), a começar com a questão da democracia.

Em Desafios da Reflexão em Educação Matemática Crítica, Skovsmose (2010) faz um panorama histórico sobre a sua relação com a EMC que, se inicia nos anos de 1970, influenciada pelos movimentos estudantis. Em 1994, tem início a reformulação da ideia da EMC como uma educação que busque a igualdade e a justiça social em seus contextos, ou seja, preocupando-se com o papel social da Matemática. Ele destaca que ações podem acontecer a partir da Matemática:

> A ideia central é que muitas coisas podem ser realizadas quando a Matemática está em jogo. Tais ações constituem as inovações tecnológicas, os procedimentos econômicos, os processos de automação, o gerenciamento, a tomada de decisão, e fazem parte do dia a dia. [...] As ações baseadas na Matemática devem ser analisadas criticamente, levando-se em conta sua diversidade (Skovsmose, 2010, p. 12).

Nesse sentido, o autor pontua que há diversos papéis e ações que podem ser desenvolvidas por meio da Matemática. Por isso, Skovsmose (2015) aponta uma preocupação em que a EM é tida como uma indefinição, pois ela tanto pode potencializar os estudantes como pode despotencializar, dependendo do contexto social, político e econômico para o qual ela é aplicada. Assim, ele afirma que essa relação em que ora a Matemática pode potencializar ora pode despotencializar está ligada ao fato de que ela pode cumprir diversas funções que não são tão simples de classificar como boas ou ruins.

A despotencialização dos estudantes acontece à medida que os educadores utilizam a Matemática somente com o propósito de atender aos interesses do mercado de trabalho, sem produzir reflexões a respeito das ações. Nesse aspecto, os estudantes têm uma aprendizagem mecânica, baseada no Ensino de Matemática tradicional onde seu papel é somente a reprodução de exercícios a partir dos modelos apresentados pelo professor ou pelos livros didáticos. Tais exercícios esses já trazem todos os dados fornecidos, cabendo aos estudantes simplesmente o ato de calcular, sem precisar refletir se estão corretos, como foram obtidos ou se as respostas encontradas são coerentes com cada situação apresentada. Sobre esse aspecto que relaciona a mecanização da resolução de exercícios com a necessidade de uma produção de mão de obra obediente, Skovsmose (2015, p. 18-19) questiona:

> Será que o Ensino de Matemática tradicional contribui para embutir nos alunos uma obediência cega que os habilita a participar de processos de produção em que a execução de ordens sem questionamento é um requisito essencial? Será que tal obediência é uma condição necessária para o funcionamento de tantos postos de trabalhos existentes, e o papel do Ensino de Matemática tradicional na sociedade é justamente ajudar a estabelecer essa condição? Será que uma obediência cega, da qual faz parte certa submissão ao regime de verdades, alimenta a apatia social e política que tanto é apreciada pelas forças do mercado de trabalho? Será que esse tipo de obediência contempla perfeitamente as prioridades do mercado neoliberal, em que a produção sem questionamentos atende às demandas econômicas?

Para que a Matemática produza uma potencialização, Skovsmose (2015) destaca três ideias: ela desenvolve a inteligência; promove maior chance de sucesso pessoal; e tem um papel social e político. A primeira ideia é uma das mais antigas:

> A Matemática está entre os poucos gêneros de conhecimento cuja importância não tem sido questionada ao longo da história. [...] Tornou-se senso comum que as leis da natureza possuem um caráter matemático. Assim, por meio da Matemática, e somente dela, é possível captar as nuanças da criação divina. As duas linhas de raciocínio – a da certeza e a da essência da natureza – colocam a Matemática como uma forma superior de potencialização (Skovsmose, 2015, p. 19).

Sobre a segunda ideia, a de que a Matemática potencializa porque desenvolve uma maior promoção social, Skovsmose (2015) diz que está relacionada às possibilidades de aplicação da Matemática nas mais diversas áreas da sociedade industrial, permitindo às pessoas que tiveram uma boa formação em Matemática se destacarem no mercado de trabalho. Sobre o papel sociopolítico da Matemática, apontado pela terceira ideia de potencialização, o autor diz que está relacionado à questão da justiça social, com a expectativa de que a EM promovesse uma visão diferenciada do mundo, impactando-o social e politicamente. Esse papel sociopolítico da Matemática pode ser desenvolvido quando a EM é realizada por meio de projetos que tenham como objetivos a aplicação e desenvolvimento de conceitos matemáticos em problemas de situações do cotidiano relacionados a questões sociais, econômicas ou políticas.

Sobre esse papel sociopolítico que a Matemática pode assumir, Skovsmose (2015) apresenta o conceito de *matemacia*. Considerando a globalização em que o mundo hoje se encontra, a informação perpassa por diferentes realidades, podendo ser concebida de diferentes formas em cada uma delas. Além disso, conhecimento e informação são recursos considerados em uma economia baseada na informação, sendo o conhecimento o principal recurso gerador de valor, mas é preciso perceber que conhecimentos diferentes geram valores econômicos diferentes. A Matemática desenvolve um papel muito importante nessa economia globalizada, considerando principalmente o que Skovsmose (2015, p. 105, grifo nosso) apresenta.

> A escola deve dar acesso às reservas de conhecimento que são importantes para a manutenção e o aprimoramento do mecanismo que sustenta a globalização e a economia a ela associada. Essa observação nos conduz diretamente à Educação Matemática e à ideia de *matemacia* entendida como uma competência para lidar com as técnicas matemáticas. Nesse sentido, *matemacia* pode ser discutida em termos de habilidades para entender e operar ideias, algoritmos e procedimentos da Matemática; em termos de habilidades para aplicar todas essas ideias, algoritmos e procedimentos em uma variedade de situações; ou em termos de habilidades para se refletir sobre todas essas aplicações.

Assim, Skovsmose (2015) aponta que a EM deve ter o papel de preparar os jovens para que eles adquiram essas competências, integrando os estudantes em perspectivas, discursos e técnicas que serão necessários para suas carreiras futuras e para o desenvolvimento dos esquemas econômicos e tecnológicos atuais. Assim, a *matemacia* tem a sua importância, mas sem esquecer que grupos de estudantes em diferentes contextos (sejam econômicos, sociais ou culturais) vivenciam a Matemática de formas diferentes, logo a *matemacia* também será desenvolvida de maneiras distintas. Desse modo, a EM deverá contemplar essa variedade, tendo como desafio partir da realidade do estudante, sem limitar o seu conhecimento e sim ampliando-o de forma que ele desenvolva a *matemacia* para agir também em contextos que possam ser diferentes do seu. Seja em situações da economia, de práticas de consumo, práticas operacionais, práticas de construção ou outras, a *matemacia* pode ser explorada nos ambientes escolares visando desenvolver a concepção crítica da Matemática, promovendo então uma educação para a responsabilidade social.

Assim, Skovsmose (2010) ressalta que a EM pode ajudar a preparar os estudantes para serem cidadãos críticos, mas é uma mobilização que deve acontecer desde a escola primária até o ensino superior e isso não é tão simples, deve-se considerar os inúmeros papéis que a Matemática pode desempenhar:

> Há, na Educação Matemática, oportunidades para desempenhar tanto o papel de mocinho quanto o de bandido. É nesse sentido que falo que a Educação Matemática é crítica. Não estabeleço relações entre a Educação Matemática e qualquer posição otimista que afirme existir uma conexão intrínseca entre Educação Matemática e, digamos, valores democráticos. Nem defendo que a Educação Matemática *per se* sirva a interesses antidemocráticos. Ao contrário, afirmo simplesmente que nenhuma das funções efetivamente desempenhadas pela Educação Matemática representa sua essência. Não existe tal essência (Skovsmose, 2010, p. 105, grifo do autor).

Para tratar essa questão da democracia, Skovsmose (2001) aponta uma preocupação em que a EM deve estar envolvida na construção de uma competência democrática na sociedade, sendo seu conteúdo desenvolvido de forma a servir como ferramenta da democratização. Para tanto, ele apresenta o *argumento social da democratização* e o *argumento pedagógico da democratização*.

O *argumento social da democratização* para Skovsmose (2001), com o objetivo de melhorar a educação, procura identificar temas que sejam relevantes na EM e que possibilitam, a partir de reflexões, a construção e aperfeiçoamento de instituições e capacidades democráticas. O autor aponta três declarações sobre esse argumento. A primeira relaciona-se ao campo extenso de aplicações da Matemática, cuja dificuldade está em apresentar exemplos de aplicações reais, mesmo sendo importantes. A segunda declaração afirma que a Matemática é parte integrada e única da sociedade e tem implicações importantes para o seu desenvolvimento, não podendo ser substituída por nenhuma outra ferramenta que tenha as mesmas aplicações, embora essas implicações sejam difíceis de se identificar. Por fim, a terceira declaração ressalta que é necessário entender as funções de aplicações da Matemática (por exemplo, como processos de construção de modelos matemáticos influenciam decisões econômicas, políticas ou outras) para tornar possível o exercício de direitos e deveres democráticos. Sobre esses modelos, Skovsmose (2001, p. 40) discute que:

> O argumento social da democratização salienta as aplicações da Matemática, e a importância da atividade de construção de modelos matemáticos é de fato frequentemente enfatizada na literatura educacional. A ideia básica no que podemos chamar de tendência pragmática na Educação Matemática: é extremamente importante que os estudantes aprendam sobre a construção de modelos, e a melhor maneira de aprender isso é construindo modelos.

Esses modelos aplicados sobre situações reais devem ter por objetivo a criticidade desde o seu processo de criação até as análises de seus resultados. Para isso, não é suficiente conhecer apenas a construção Matemática do modelo, deve-se conhecer os pressupostos e as ideias econômicas que estão por trás das fórmulas matemáticas presentes no modelo.

O *argumento pedagógico da democratização*, para Skovsmose (2001) consiste em três declarações: a primeira tem relação ao distanciamento entre o que é ensinado pelo professor e o que é aprendido pelo estudante, sendo que ele pode não aprender tudo o que é proposto e compreender outros assuntos que não constam no currículo, mas que estão relacionados ao processo educacional ou a outros contextos do conteúdo em questão; a segunda declaração tem relação com as funções que a EM pode exercer no desenvolvimento epistemológico dos estudantes e que tendem a melhorar as habilidades na estruturação e resolução de problemas lógicos, mas que na prática isso não acontece, devido aos rituais em que a EM é apresentada (prática de exercícios). Além disso, sobre a competência tecnológica, os estudantes aprendem que nem todos são capazes de gerenciar problemas tecnológicos e os que não conseguem ficam submissos aos que conseguem; a terceira declaração aponta que as possibilidades de exercício dos direitos e deveres democráticos devem ser temas principais em atividades desenvolvidas no sistema escolar e nesse aspecto, o diálogo entre professor e estudante tem papel fundamental.

> O argumento pedagógico enfatiza que a Educação Matemática socializa em direções bem outras do que a esperada. Algumas razões poderiam estar relacionadas com o movimento estruturalista na Educação Matemática, [...] a ideia de que o conhecimento dos estudantes tem de ser construído de acordo com as estruturas e os conteúdos identificados independentemente dos estudantes. E um dos aspectos não democráticos da educação está implicado na exclusão dos estudantes no planejamento curricular (Skovsmose, 2001, p. 46).

Para o autor, esses dois argumentos apontam para direções diferentes, sendo que no argumento pedagógico, tem-se o olhar para dentro do sistema educacional e, no argumento social, o olhar está fora desse sistema. Mas, ambos os argumentos apontam para um conceito de democratização. É preciso olhar sob um ponto de vista epistemológico a começar sobre o conceito de competência democrática que Skovsmose (2001) apresenta como uma competência que não é previamente fixada, mas que a pessoa deve desenvolver, no meio social, para ser capaz de julgar os atos de seus governantes. Ela deve ser desenvolvida também no âmbito educacional e para isso, faz-se necessário criar materiais e situações de aprendizagem diferenciadas de forma a contemplar variadas situações vivenciadas pelos estudantes, objetivando construir conhecimentos críticos sobre o contexto trabalhado.

Outro ponto essencial para o desenvolvimento da competência democrática é a reflexão, que pode ser considerada como um dos pontos principais da EMC, pois é a partir da reflexão que se pode tomar decisões sobre as ações que devem ou não ser desenvolvidas em uma situação específica, seja em questões no cotidiano, na políticas ou em questões sociais, inclusive na EM. Essa constatação se embasa na descoberta de Skovsmose (2001) de que a noção de crítica deve ser desenvolvida a partir da noção de incerteza, pois ele considera que a crítica não pode ser fundamentada e, mesmo em uma abordagem crítica que faça parte da EMC, deve ser construída a partir de um processo investigativo. Para tanto, as abordagens para a EMC não devem partir de algo pronto ou predeterminado, mas devem ser deixadas em aberto para se buscar novas possibilidades educacionais por meio da investigação e da reflexão. Complementa ainda que a reflexão precisa contemplar não só o conteúdo de aprendizagem, mas também a relevância da aplicação desse conteúdo na vida do estudante, precisando para isso, que ele tenha autonomia para discutir o que está aprendendo e como está aprendendo.

Skovsmose (2010) amplia a discussão sobre as ações como objetos de reflexão, pois, para ele, elas tanto podem ser consideradas encantadoras e oportunas como também podem ser tomadas pelo oposto disso. Logo, há a necessidade de reflexão sobre qualquer ação e, principalmente aquelas que se concretizam a partir da Matemática. Nesse contexto, Skovsmose (2015) diz que as ações precisam ser julgadas por meio da reflexão, que pode estar associada a profundas considerações éticas que envolvem tanto o sujeito que está refletindo como a ação que está sendo refletida.

Na educação, a reflexão ganha uma importância muito grande, pois é preciso que o professor reflita sobre o conteúdo que está ensinando, analisando de que forma isso vai ser útil e benéfico para o seu estudante. Por outro lado, o estudante também precisa ter espaço para a reflexão, como traz Skovsmose (2015, p. 92):

> A reflexão é importante na educação. Tudo o que pode ser ensinado e aprendido pode ser submetido à reflexão. Os alunos podem ponderar sobre o que eles estão fazendo na escola: Faz sentido o que o professor fala? O que acontece se não fizermos nosso dever de casa? Se o professor pedir para formar equipes, eu vou querer estar no mesmo grupo de Pedro? Eu vou sofrer bullying no próximo recreio? O professor, por sua vez, pode se preocupar com o andamento das atividades: Os alunos estão engajados? O Miguel vai aprontar de novo? Vou conseguir preparar a próxima aula no feriado?

Diante das reflexões do estudante, o conhecimento transmitido pelo professor pode ter mais ou menos relevância, por isso é necessário que as tomadas de decisão do professor levem em consideração, também, as reflexões que o estudante possa a vir a fazer.

Assim, para Skovsmose (2015), as reflexões estão diretamente ligadas ao julgamento das ações próprias ou do outro, mas não é um conceito simples, pois há muitas concepções que podem ser consideradas. Reforçando a importância do papel da reflexão para a educação como um todo, mas se atendo às preocupações da EMC, é preciso buscar os significados da reflexão “sobre” a Matemática, “com” a Matemática e “por meio” dela.

As reflexões “sobre” a Matemática dizem respeito a situações que envolve tomada de decisões utilizando dados matemáticos, por exemplo, em um controle de qualidade levando em consideração o estudo de uma amostra de produção de um determinado produto[4]. No projeto apresentado pelo autor, foi necessário que os estudantes analisassem a confiabilidade dos dados obtidos, a partir da análise da amostra considerada, para então tomarem decisões sobre os resultados encontrados. No exemplo em questão, a decisão a ser tomada era garantir a qualidade dos produtos aumentando a quantidade da amostra, mas diminuindo o lucro ou garantir o maior lucro analisando uma amostra menor e isso, segundo o autor, é um dilema muito comum nos testes de qualidade de produtos.

Reflexões “com” a Matemática se referem a situações em que a Matemática é tida como uma ferramenta para auxiliar as reflexões que podem ser de ordem econômica, política e social. Por exemplo, um projeto de planejamento urbano[5] em que os dados matemáticos podem ser usados para analisar a eficiência de um sistema de abastecimento de água de uma determinada região, podendo gerar discussões sobre os impactos econômicos, sociais e ambientais dessa análise. No projeto em questão, os resultados obtidos deram margem para discussões sobre o desperdício de água entre o fornecido pela companhia de saneamento e o que realmente chegava nas residências dos consumidores, podendo-se ampliar as análises sobre os dados e discutir as causas e possíveis soluções para o problema em questão.

---

[4] Skovsmose (2015, p. 93) traz como exemplo o Projeto Ameaça nos Números.
[5] Skovsmose (2015, p. 97) traz como exemplo o Projeto Planejamento Urbano.

As reflexões “por meio” da Matemática acontecem em situações de aprendizagem que envolvem investigações matemáticas, cujas reflexões partem de propriedades matemáticas, abordando diferentes aspectos do tópico estudado e podem abrir caminho para reflexões de outras naturezas pertinentes ao contexto estudado. Por exemplo, um projeto que envolve embalagem[6] de um determinado produto pode começar com reflexões acerca das dimensões da embalagem e partir para questões ambientais e de sustentabilidade. No projeto citado pelo autor, os estudantes eram incentivados a refletirem sobre as propriedades relacionadas a áreas e volumes de um paralelepípedo, além da reflexão sobre o custo e o benefício da embalagem para o meio ambiente.

Dessa forma, em um contexto escolar, a reflexão Matemática pode ser utilizada em diversas situações de aprendizagem, principalmente em uma aula com projetos. Mas, mesmo em uma aula baseada apenas em exercícios propostos pelo livro didático, é possível levantar situações que levem a reflexões por parte dos estudantes, pode-se questionar os dados, refletir sobre as propriedades matemáticas, argumentar os resultados, propor alterações de dados, entre outras possibilidades. Para Skovsmose (2015), as reflexões precisam de diálogos, sendo mais um processo de interação do que individual, mesmo podendo ter reflexões individuais, ele considera que, para o contexto de Matemática em Ação, o diálogo é mais relevante.

Skovsmose (2001) destaca as relações entre o conhecimento reflexivo e o conhecimento tecnológico e como a tecnologia tem influenciado na questão da democracia. Quanto mais a sociedade avança em termos de tecnologia, mais conhecimento reflexivo será necessário para avaliação dos atos e decisões dos governantes.

> Uma sociedade baseada na tecnologia avançada enfrenta um problema específico de democracia. Se uma sociedade é baseada em ferramentas manuais, a interpretação idealista de competência democrática torna-se plausível; nenhum conhecimento tecnológico é necessário para avaliar atos e decisões das pessoas encarregadas de governar. O contrário ocorre em uma sociedade altamente tecnológica. O conteúdo da competência democrática está rapidamente mudando em direção a uma enorme complexidade. [...] A consequência parece ser que apenas um grupo limitado de pessoas pode desenvolver uma competência democrática e se tornar capaz de avaliar as ações das pessoas encarregadas do gerenciamento (Skovsmose, 2001, p. 57-58).

[6] Skovsmose (2015, p. 99) traz como exemplo o Projeto Caixas de Caramelo.

Skovsmose (2001) defende que o conhecimento tecnológico deve ser desenvolvido em todos os níveis educacionais. A EM é parte integrante da tecnologia e a competência matemática é parte central da competência democrática. No entanto, para ele, do ponto de vista epistemológico, isso não é tão simples, pois essa competência democrática está baseada no conhecimento reflexivo que é distinto do conhecimento tecnológico, sendo que o primeiro é aplicado no desenvolvimento de construções tecnológicas e o segundo para analisar e avaliar essas construções. O autor enfatiza que o conhecimento reflexivo é importante, pois o conhecimento tecnológico não é suficiente para analisar os resultados de sua própria produção. Deve-se desenvolver novos aspectos do processo educacional, dando importância ao diálogo a partir do objeto de aprendizagem e com foco na produção do conhecimento reflexivo. Além desses conhecimentos, não se deve abandonar o conhecimento matemático que, para Skovsmose (2001), é desenvolvido por meio das habilidades matemáticas que compreendem as competências de dominar algoritmos, reproduzir raciocínios, teoremas e demonstrações matemáticas. Ainda, para o autor, o objetivo do conhecimento tecnológico é a busca para a resolução de um problema e o objetivo da reflexão é a avaliação das soluções apresentadas para a solução dos problemas tecnológicos. Dessa forma, não é suficiente encontrar uma solução para um problema específico, o papel da EMC é refletir sobre essa solução encontrada.

Além disso, o autor destaca que a integração da Matemática na tecnologia deve considerar que a Matemática também tem seus conhecimentos distintos: o próprio conhecimento matemático (que envolve conceitos, fórmulas, algoritmos e outros termos), o conhecimento pragmático (é o conhecimento sobre como construir e usar um modelo matemático) e o conhecimento reflexivo (conhecimento utilizado para discutir os critérios de construção, aplicação e avaliação dos modelos matemáticos).

Para o desenvolvimento do conhecimento reflexivo, a partir da EM, é necessário fazer indagações também sobre os cálculos matemáticos: se estão corretos; se foram realmente necessários; se teria outro método de resolução; e sobre se os resultados são suficientes ou confiáveis. Skovsmose (2001) destaca a importância da contextualização para se fazer essas investigações, considerando uma situação educacional ampla, levando a reflexões dentro de uma EMC. Dessa forma, Skovsmose (2015) pontua que a EMC é mais que uma subdivisão da Educação Matemática, sendo considerada como uma EM mais voltada para a reflexão sobre a realidade social e para o desenvolvimento de um olhar crítico por parte dos estudantes.

Nesse sentido, Skovsmose (2001, p. 59-60) complementa que:

> [...] o conhecimento reflexivo não pode ser reduzido ao conhecimento tecnológico. Tem natureza diferente. O conhecimento reflexivo não tem suas bases epistemológicas no conhecimento tecnológico e pragmático. Nem pode ser o conhecimento tecnológico reduzido ao conhecimento matemático, uma ideia que é expressa em um contexto educacional, assim: quando você aprende a Matemática, também aprende aplicá-la – uma hipótese fortemente criticada pela tendência pragmática na Educação Matemática.

Skovsmose (2010) ressalta que a reflexão vai além de, por exemplo, como desenvolver um algoritmo confiável para reconhecimento de padrões e de como esses algoritmos podem vir a ser utilizados para um sistema de vigilância pelo Estado ou por outra instituição. Sendo necessária a reflexão de como a Matemática está sendo utilizada, qual o propósito e para quem serve esse propósito.

A reflexão também é fortemente necessária em outro conceito trazido por Skovsmose (2015), a Matemática em Ação, que é quando se pode colocar a Matemática em prática. Para Skovsmose (2010) a Matemática em Ação é o distanciamento de um papel formatador exercido pela Matemática, refere-se às ações que fazem parte do cotidiano e que podem ser realizadas a partir da Matemática.

A partir disso, Skovsmose (2015) classifica a Matemática em Ação sob cinco aspectos: *Imaginação tecnológica; Raciocínio hipotético; Legitimação ou justificação; Realização;* e *Dissolução da responsabilidade*. Esses aspectos podem e devem ser trabalhados em sala de aula na aplicação dos conhecimentos matemáticos. O primeiro aspecto, a *imaginação tecnológica* é a possibilidade de se explorar, por meio de projetos, o desenvolvimento tecnológico, utilizando a Matemática para tomada de decisões, seja em situações do cotidiano ou em invenções de aparatos tecnológicos. Na invenção do computador ou na utilização da criptografia, por exemplo, a Matemática é utilizada na *imaginação tecnológica* para se investigar todos os detalhes técnicos antes mesmo de se criar os modelos.

> As tecnologias da informação e da comunicação são profundamente enraizadas na imaginação baseada em Matemática. [...] Os métodos da Matemática puseram a imaginação tecnológica em um novo patamar. Meu argumento geral é de que muitas inovações dependem totalmente da Matemática. Não há comparação da imaginação amparada pela Matemática com qualquer outra forma de imaginação (Skovsmose, 2015, p.82).

O *raciocínio hipotético* é o aspecto da Matemática em Ação utilizado tanto no desenvolvimento de um projeto tecnológico, quanto nas decisões diárias. Os modelos matemáticos são utilizados para representar as situações, analisar as hipóteses e as implicações delas, possibilitando a tomada de decisão. Esse *raciocínio hipotético* permite fazer estimativas, investigar detalhes de projetos em todos os campos, inclusive, na economia e na engenharia. Podem se prever os riscos, buscar soluções para problemas que possam surgir na etapa da execução, tudo isso ainda no planejamento da ação.

Na Matemática em Ação, a *legitimação ou justificação* é a possibilidade de validar as ações tecnológicas. A *justificação* se preocupa com o aspecto lógico verdadeiro da ação, enquanto a *legitimação* busca argumentos para se justificar uma ação. Em um exemplo trazido por Skovsmose (2015) de um modelo matemático para analisar os impactos ambientais na construção de uma ponte, a Matemática tanto pode servir para justificar como para legitimar o projeto. O modelo pode justificar se já há uma lógica real sobre o impacto ou ele pode legitimar o projeto, utilizando a Matemática para apresentar os dados de tal forma que as implicações ambientais calculadas sempre estejam dentro de certa faixa aceitável.

A *realização* contempla aspectos relacionados ao momento em que de fato a Matemática passa a fazer parte da realidade, mostra o quanto ela está presente seja na tecnologia, na medicina, na economia ou em tomadas de decisões do cotidiano. O último aspecto apontado pelo autor é *a dissolução da responsabilidade*, em que as ações baseadas em Matemática parecem não ter um responsável diretamente por elas e, nesse caso, as questões éticas desaparecem.

Para o autor, em um contexto escolar, a Matemática em Ação pode ser proposta para aplicação dos conhecimentos matemáticos, buscando-se superar um dos grandes desafios da Educação Matemática que é a aprendizagem significativa. Ainda, Skovsmose (2015) salienta que um caminho para se alcançar essa aprendizagem significativa é a pedagogia de projetos. Sendo que, em uma aula com metodologia de projeto, pode-se utilizar a reflexão em todas as etapas, pois, desde a elaboração é necessário fazer ponderações, analisar dados ou fatos, buscar estratégias, tomar decisões, e outras ações, do mesmo modo que em uma situação real. O autor afirma que essa não é a solução para todos os problemas da aprendizagem em Matemática, mas que se distingue do ensino tradicional pelos cenários de investigação que favorecem o processo de ensino e aprendizagem.

Esses cenários de investigação são descritos por Skovsmose (2010) como situações em sala de aula em que o professor leva os estudantes a fazer questionamentos sobre um determinado assunto. Ou seja, uma aula em que o professor não apresenta respostas prontas, mas que instiga os estudantes a partir de um exemplo de situação Matemática relacionada à realidade, a fazer descobertas por meio de alterações no modelo proposto, produzindo significados para a situação.

> O momento em que um cenário de investigação é apresentado aos alunos é um momento de abertura de possibilidades de sentidos. [...] Podemos convidar, mas nunca obrigar, os alunos a participar das atividades em torno de um cenário para investigação. Se o convite vai ser aceito ou não é sempre incerto. Eles podem encantar com a proposta ou podem não manifestar nenhuma curiosidade a respeito. (Skovsmose, 2015, p. 46).

O despertar do interesse do estudante pelo cenário a ser investigado depende muito do que é significante para ele, descobrir isso pode ser parte do processo investigativo. Skovsmose (2015) complementa que a significação depende também do comprometimento e intensões dos estudantes nas atividades, pois a investigação e a exploração são atividades que só acontecem a partir do anseio pela descoberta.

Para o desenvolvimento das aulas com o intuito de promover uma EMC aos estudantes envolvidos, Skovsmose (2010) classifica os ambientes de aprendizagem por meio de referências de Matemática pura, da semirrealidade ou da realidade, associadas à prática da aula, aplicada a partir de exercícios ou com cenários de investigação[7]. O autor descreve a semirrealidade como sendo uma referência de situações de aprendizagem baseada na realidade, sem a preocupação com dados que pode ou não ter a preocupação de serem coesos ou exatos, a partir dos objetivos propostos e do acordo prévio entre o professor e os estudantes. A Figura 11 apresenta essa classificação dos ambientes de aprendizagem.

Figura 11 – Ambientes de aprendizagem

	Exercícios	Cenários para investigação
Referências à Matemática pura	(1)	(2)
Referências à semirrealidade	(3)	(4)
Referências à realidade	(5)	(6)

Fonte: Skovsmose (2010, p, 23).

[7] Skovsmose (2010) diferencia a prática de uma sala de aula baseada num cenário para investigação da prática da sala de aula baseada somente em exercício, ele pontua que essa distinção se dá por meio das referências (ações, motivos ou contextos apresentados) que tem por objetivo levar os estudantes a construir significados e resultados para atividades e conceitos matemáticos.

O ambiente (1) é aquele dominado pela Matemática pura, por exemplo, as expressões ou equações apresentadas sem nenhuma relação com a realidade. O ambiente (2) é caracterizado como aquele que envolve números e figuras geométricas, por exemplo, um exercício com translação de figuras para uma tabela numérica. O ambiente (3) é constituído por exercícios que envolvem a semirrealidade, por exemplo, um exercício ou problema envolvendo uma situação baseada em uma situação real de compras. No ambiente (4), há a presença de referência à produção de exercícios, mas com explorações e explicações por parte dos estudantes. Nesse ambiente podem ser feitas simulações de situações reais com espaço para o estudante analisar dados e tomar decisões.

No ambiente (5) são trabalhados exercícios baseados na realidade, por exemplo, podem ser trabalhados diagramas de uma situação real e, a partir dele, ser explorados questões do conteúdo que está sendo trabalhado pelo professor. Skovsmose (2010) destaca que, como todos os diagramas partem de situações reais, a comunicação entre o professor e os estudantes é facilitada, pois vai ser mais significativo para os estudantes questionarem e acrescentarem informações ao exercício. No ambiente (6), tem-se a realidade como cenário de investigação que é tratada no trabalho com projetos, onde podem ser feitas as investigações matemáticas.

Skovsmose (2010) faz um paralelo entre a prática de aulas somente com exercícios ou utilizando os cenários de investigação por meio dos ambientes de aprendizagem e conclui que a escolha por qual percurso seguir deve ser feita pelo professor juntamente com os estudantes, podendo inclusive perpassar por mais de um ambiente em uma determinada aula. É ainda importante ressaltar que, nos ambientes que envolvem um cenário de investigação, o estudante tem a possibilidade de explorar, questionar, propor soluções e outras ações que o levem à reflexão.

> Propor cenários de aprendizagem é um jeito de convidar à reflexão. Os alunos têm a oportunidade de refletir sobre os procedimentos matemáticos de um posto de vista diferente do utilizado quando resolvem exercícios. A resposta a um exercício pode estar ou não correta. [...] Suas reflexões podem ser similares, sob certo aspecto, às reflexões dos pesquisadores matemáticos (Skovsmose, 2010, p. 64 - 65).

Em EMC, principalmente em um cenário de investigação baseado em projetos, o professor precisa estar preparado para lidar com situações imprevistas, procurando conduzir a aula de forma a permitir a autonomia dos estudantes para explorar soluções. Em resposta à problemática sobre o desenvolvimento de uma EM que promova uma EC, que possibilite o desenvolvimento do pensamento matemático dos estudantes de forma autônoma e reflexiva, considerando o papel estruturante da Matemática nas diversas áreas econômicas e sociais, Skovsmose (2010, p. 39) diz:

> Nunca ousaria afirmar que o abandono do paradigma do exercício com o objetivo de explorar cenários para investigação forneceria uma resposta para essas questões. Nem afirmaria que é suficiente construir uma educação baseada somente em referências à vida real. Minha expectativa é de que a busca de um caminho entre os diferentes ambientes de aprendizagem possa proporcionar novos recursos para levar o aluno a agir e a refletir, oferecendo, dessa maneira, uma Educação Matemática de dimensão crítica.

A partir dos conceitos trazidos por Skovsmose (2001, 2010, 2015), buscou-se desenvolver uma pesquisa que se baseou nas reflexões apresentadas, de forma a atingir os objetivos propostos.

4.4 OS REGISTROS DE REPRESENTAÇÃO SEMIÓTICA E A APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA

Para a continuidade da construção do Referencial Teórico, lançou-se um olhar para os Registros de Representação Semiótica (RRS), buscando contribuições para o processo de ensino e aprendizagem dos estudantes do Ensino Médio. Os RRS são a base da teoria de Raymund Duval, francês, filósofo e psicólogo de formação, que atualmente é professor emérito da *Universidade du Littoral Côte d'Opale* na França.

O estudo dos RRS foi necessário para o trabalho com o conteúdo de função, objeto de conhecimento matemático que foi explorado nessa tese de doutorado. Como esse conteúdo tem um conceito muito abstrato, requer diferentes registros para a sua compreensão e os estudos de Duval, referentes à aprendizagem matemática, alertam para a necessidade de desenvolver um sistema cognitivo que utilize mais do que a linguagem natural e/ou de imagens. Esse sistema precisa se valer de todo um sistema semiótico de representação e de expressão, que faz uso de símbolos, linguagem natural, fórmulas algébricas, figuras, entre outros, que podem oportunizar a compreensão e aprendizagem de objetos matemáticos.

Dessa forma, para o entendimento a respeito da aprendizagem, torna-se imprescindível buscar a compreensão das diferentes formas pelas quais os estudantes adquirem conhecimento. Tal busca constitui uma necessidade constante e desafiadora para os educadores, uma vez que o processo de ensino e aprendizagem é uma via de mão dupla que precisa ser trilhada com uma atenção especial.

Direcionando o foco para a compreensão específica da aprendizagem em Matemática, nesta seção serão apresentadas as contribuições teóricas de Duval (2009, 2011a, 2011b, 2012, 2016a, 2016b, 2018) visando o avanço no entendimento da aprendizagem nesse contexto.

4.4.1 Registros de Representação Semiótica

Para Duval (2009), a aprendizagem em Matemática se caracteriza como um campo de estudo que engloba as análises das atividades cognitivas essenciais como a conceituação, a interpretação de textos, o raciocínio e a resolução de problemas. Duval (2011b, 2016b) pondera que, para que essa aprendizagem ocorra de forma a possibilitar que os estudantes tenham uma compreensão efetiva da Matemática, com contribuições na formação geral deles, é necessário o desenvolvimento de um sistema cognitivo diferente daquele que é praticado nas outras disciplinas. Assim, no desenvolvimento dessas atividades cognitivas, são necessárias representações além da linguagem natural ou de imagens, o que Duval (2009) caracteriza como sistemas semióticos de representação e de expressão, que utilizam de símbolos gráficos, linguagem natural, fórmulas algébricas, figuras, representações gráficas, entre outros.

As representações semióticas são aquelas formadas com a utilização de signos próprios de um sistema de representações com suas particularidades de funcionamento e significados (Duval, 2012). A palavra signo se refere ao que se usa para a comunicação, como hieróglifos, alfabetos e outros que formam um sistema de signos que, para Duval (2016a, p. 10), possibilitam a execução da "Operação Semiótica" e é classificada como distinta das operações físicas, mentais ou conceituais. Essa operação consiste na substituição de um ou mais símbolos em um cálculo matemático, tal como nas operações de cálculo.

Para a realização da atividade cognitiva necessária para o desenvolvimento do pensamento matemático, Duval (2016b) ressalta duas características, sendo a primeira, a importância substancial das representações semióticas e a segunda, a grande diversidade dessas representações semióticas utilizadas em Matemática. O autor usa aspectos da história da Matemática para ilustrar o desenvolvimento das representações semióticas, relatando que essa foi uma condição essencial para a evolução do pensamento matemático. Isso se justifica, principalmente pelo fato de que as possibilidades de tratamento matemático dependem do sistema de representação utilizado, além disso, de que os objetos matemáticos só são percebidos e observados por meio dos sistemas de representação.

Duval (2009, 2011b, 2012) considera que as representações semióticas não são somente necessárias para fins de comunicação, mas também são essenciais à atividade cognitiva do pensamento, pois elas desempenham um papel primordial no desenvolvimento das representações mentais, na realização de diferentes funções cognitivas e na produção de conhecimentos. Nessa perspectiva:

> O funcionamento cognitivo do pensamento humano se revela inseparável da existência de uma diversidade de registros semióticos de representação. Se é chamada semiose a apreensão ou a produção de uma representação semiótica, e *noesis* a apreensão conceitual de um objeto, é preciso afirmar que a *noesis* é inseparável da semiose (Duval, 2012, p. 270, grifo do autor).

O termo *noesis* é apresentado por Duval (2011b), como um termo utilizado por Aristóteles e retomado por Husserl para se referir ao ato de pensar ao conceituar um objeto. E ele se refere ao termo *semiósis,* como a associação simultânea de, pelo menos, dois registros de representação desse objeto em termos da produção e da transformação semiótica dessas representações. Assim, na visão do autor, considerando o problema cognitivo, o modo de trabalhar matemático deve ser analisado em termos de transformação de representações semióticas.

> É pela dinâmica de transformações semióticas que a *semiose* está no centro dos processos cognitivos do pensamento matemático. Não existe (nenhuma) *noesis sem semiosis*, não existe ato matemático de pensamento em transformação das representações semióticas sejam quaisquer que sejam (Duval, 2011b, p. 42, grifo do autor).

Dessa forma, Duval (2009) enfatiza que não se pode ter compreensão em Matemática sem se distinguir um objeto matemático (os números, as funções, as retas e outros) de sua representação (as escrituras decimais ou fracionárias, os símbolos e os gráficos), pois um mesmo objeto matemático pode ser dado por meio de representações muito diferentes. Portanto, a aprendizagem Matemática ocorre quando o estudante conhece o conceito do objeto e suas distintas representações, sabendo relacioná-las quando necessário.

Sobre a grande variedade de representações semióticas utilizadas em Matemática, Duval (2016b) apresenta a língua natural, os sistemas de numeração, as figuras geométricas, as escritas algébricas e as representações gráficas. Assim, para se referir aos diferentes tipos de representações semióticas utilizados em Matemática, Duval (2011b) diz parafrasear Descartes, quando utiliza o termo Registro de

Representação para descrever os sistemas semióticos como sistemas criadores de novos conhecimentos. Ele afirma que o sistema deve cumprir duas condições: ser capaz de produzir novas representações, possibilitando o acesso a objetos inacessíveis à percepção ou ferramentas que permitam a exploração de todas as representações possíveis; e iniciar um conjunto de operações específicas que possam transformar as representações já produzidas em novas.

Duval (2012) complementa que um sistema semiótico é um registro de representação se ele permitir as três atividades cognitivas fundamentais ligadas a semiose: a formação de uma representação identificável como representação de um registro dado, por exemplo, a enunciação de uma frase, o desenho de uma figura geométrica; o tratamento de uma representação; e a conversão entre as representações. Esses dois últimos, o tratamento e a conversão, serão mais detalhados nas próximas seções.

Duval (2016b) ressalta a existência de quatro tipos muito diferentes de registros, os quais são representados na Figura 12 para proporcionar uma exibição mais precisa e clara.

Figura 12 – Classificação dos diferentes registros no funcionamento matemático

	REPRESENTAÇÃO DISCURSIVA	REPRESENTAÇÃO NÃO DISCURSIVA
REGISTROS MULTIFUNCIONAIS: não são algoritmizáveis.	Língua natural Associações verbais (conceituais). Forma de raciocinar: • argumentação a partir de observações, crenças...; • dedução válida a partir de definição ou de teoremas.	Figuras geométricas planas ou em perspectivas (configurações em dimensão 0, 1, 2 ou 3). • apreensão operatória e não somente perceptiva; • construção com instrumentos.
REGISTROS MONOFUNCIONAIS: são algoritmizáveis (os tratamentos são principalmente algoritmos)	Sistema de escritas: • numéricas (binária, decimal, fracionária ...); • algébricas; • simbólicas (línguas formais). Cálculo	Gráficos cartesianos. • Mudanças de sistema de coordenadas; • Interpolação, extrapolação.

Fonte: adaptada de Duval (2016b, p. 14).

Vale destacar que a representação discursiva, a língua natural, é o primeiro RRS responsável pelo funcionamento do pensamento. Mas segundo Duval (2011b), muitas vezes ela é negligenciada pela Matemática e é utilizada apenas com a função de comunicação, para enunciação de problemas, para explicações alheias aos tratamentos matemáticos, ou para produção da resposta final. Duval (2016a) ressalta que a língua natural, como RRS, pode ser utilizada como comunicação comum durante as aulas, mas também como tratamento em produções escritas para formular definições, deduções, a partir de propriedades ou teoremas e para descrever problemas matemáticos. Duval (2016a, p. 19) destaca que essas duas formas de uso da língua natural são bem diferentes.

> Para perceber isso é preciso lembrar que a língua natural é um sistema semiótico, e não um vocabulário e regras sintáticas. Dito de outro modo, o que é essencial no domínio de uma língua natural não é o conhecimento do vocabulário, mas ter consciência das operações que permitem articular as palavras em sintagmas nominais para designar objetos, proposições, ou para efetuar uma descrição coerente.

Já as figuras geométricas apresentam uma análise cognitiva que diz respeito ao modo como elas precisam ser visualizadas para que possam ser utilizadas na resolução de um problema ou no reconhecimento de aplicação de suas propriedades geométricas em uma situação real. Duval (2011b) esclarece que as figuras são um RRS específico, sendo necessário descrever, por meio de operações figurais que utilizam propriedades matemáticas. O autor afirma que essas operações figurais possibilitam as transformações de uma figura para outra em busca da produção de uma solução ou um contraexemplo, podendo também ser utilizadas na modelagem de uma situação dada. Ele complementa que a percepção dessas operações figurais permite entrar na maneira Matemática de ver em geometria.

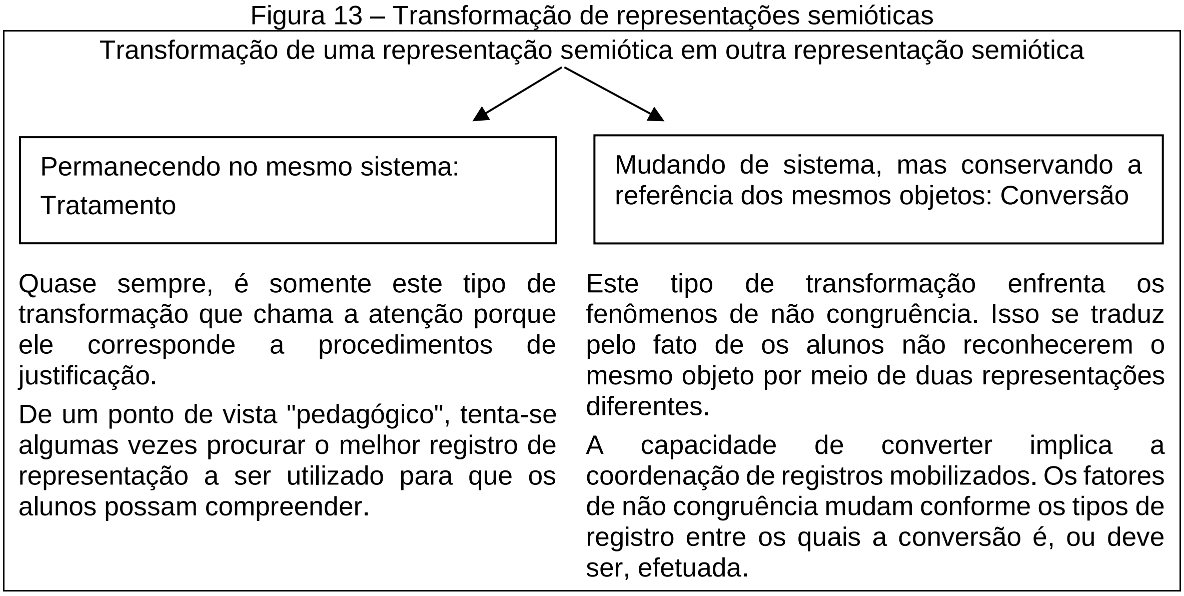
Dessa forma, a língua natural e as figuras geométricas, para Duval (2016b) compõem os registros multifuncionais, enquanto os registros monofuncionais incluem as escritas simbólicas e os gráficos cartesianos. Esses dois últimos, para Duval (2011b), são registros específicos da Matemática e foi por meio da constituição deles que a álgebra e a análise se desenvolveram.

A articulação entre esses registros, segundo Duval (2009, 2011a, 2011b, 2012, 2016a, 2016b, 2018), é essencial para permitir a compreensão dos objetos de conhecimento da Matemática. Essa articulação vai ocorrer a partir das transformações (operações) que podem ser efetuadas de um para outro ou dentro do mesmo registro, o que será esclarecido na seção subsequente, com o propósito de fornecer uma compreensão mais abrangente sobre o tema.

4.4.2 As transformações entre os registros

Para Duval (2016b) a originalidade da atividade Matemática se sustenta na possibilidade de mobilização simultânea de ao menos dois registros de representação ou ainda, na possibilidade de se alterar a qualquer momento o registro de representação utilizado. Dessa forma, para que haja a aprendizagem Matemática, o autor conjectura que é necessário a coordenação de pelos menos dois RRS, de forma que o estudante consiga relacionar e passar de um registro para outro. Ele destaca dois tipos de transformação de representações semióticas: o tratamento e a conversão, conforme a Figura 13.

Figura 13 – Transformação de representações semióticas



Fonte: Duval (2016b, p. 15).

Um tratamento acontece quando há transformações de representações dentro de um mesmo registro, como Duval (2016b) traz nos exemplos: na realização de um cálculo numérico, utilizando o mesmo sistema de escrita ou de representação dos números; na resolução de uma equação ou um sistema de equações; e no preenchimento de uma figura de forma conexa e simétrica. Já as conversões ocorrem quando há transformações de representações em que se muda o registro conservando os mesmos objetos, por exemplo com o objeto equação, pode-se passar da escrita algébrica para a sua representação gráfica. Nesse contexto, Duval (2018, p. 17) ressalta que há possibilidades de transformações que são específicas de cada registro, o que o autor chama “de gestos intelectuais do trabalho matemático”.

A escolha pela conversão ou pelo tratamento se dá de acordo com a finalidade da transformação. Enquanto o tratamento tem mais importância para as demonstrações matemáticas, a conversão é importante para o desenvolvimento cognitivo da aprendizagem Matemática, conforme Duval (2016b, p. 16):

> Do ponto de vista matemático, a conversão intervém somente para escolher o registro no qual os tratamentos a serem efetuados são mais econômicos, mais potentes, ou para obter um segundo registro que serve de suporte ou de guia aos tratamentos que se efetuam em um outro registro. Em outros termos, a conversão não tem nenhum papel intrínseco nos processos matemáticos de justificação ou de prova, pois eles se fazem baseados num tratamento efetuado em um registro determinado, necessariamente discursivo. [...] Mas, do ponto de vista cognitivo, é a atividade de conversão que, ao contrário, aparece como a atividade de transformação representacional fundamental, aquela que conduz aos mecanismos subjacentes à compreensão.

Em vista disso, Damm (2010) ressalta que o tratamento de registros possui regras próprias de acordo com cada um deles, como no exemplo das operações fundamentais com os números naturais no registro algorítmico que segue as regras do sistema posicional e da base dez. Ela completa que, para o tratamento ser significativo, tem que haver a compreensão dessas regras. Por outro lado, Duval (2009) destaca que certas regras de tratamento não são exclusivas a um único registro, e cita como exemplo, as regras de derivação que são utilizadas em todos os raciocínios de forma dedutiva. Essas regras de derivação, também conhecidas como regras de destacamento e regra de substituição, são utilizadas para o que o autor chama de expandir uma representação, pois para ele, realizar o tratamento de uma Representação Semiótica é expandir as informações dessa representação.

Sobre a conversão, Damm (2010) destaca que essa não pode ser confundida com o tratamento, pois ela se dá de um registro para outro, permitindo a coordenação entre eles. Duval (2016b) explica que na conversão de registros, precisa-se considerar dois tipos de fenômenos característicos: as variações de congruência e não congruência; e a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão. O autor ressalta que a natureza cognitiva é própria da natureza da conversão e aparece nos dois tipos de fenômenos.

Na atividade de conversão, parte-se de um registro inicial (registro de partida ou saída), para um registro final (registro de chegada). Para a verificação do primeiro fenômeno, a congruência ou não congruência, o autor afirma que pode ser considerada a análise da atividade de conversão, com a comparação entre o registro de partida e o de chegada. Ao se comparar a representação do registro de partida com a representação terminal no registro de chegada, há uma congruência se a representação terminal transparece na representação de saída – podendo ser considerada como uma situação de simples codificação – caso contrário, há uma não congruência.

A Figura 14 apresenta um exemplo de congruência ou de não congruência de uma conversão, consistindo em passar da escrita simbólica para uma expressão em língua natural.

Figura 14 – Exemplo de congruência ou não congruência de conversão

Representação inicial (registro de partida)	**Representação não congruente (registro de chegada)**	**Representação congruente (registro de chegada)**
I) x ·y > 0	II) O conjunto de pontos cuja abscissa e ordenada têm o mesmo sinal.	III) O produto da abscissa pela ordenada é maior que zero.

Fonte: adaptada de Duval (2009).

Nesse exemplo, apresenta-se três representações e Duval (2009) esclarece não haver congruência entre a primeira e a segunda, considerando a expressão “mesmo sinal” e símbolo “maior que zero”. Já entre a primeira e a terceira tem-se uma relação de congruência com a expressão e o símbolo com o mesmo significado: “maior que zero”. Duval (2009, p. 64-65) apresenta esses exemplos:

> Tomemos, por exemplo, a expressão “o conjunto de pontos cuja ordenada é superior a abscissa” e sua conversão em escritura algébrica “y > x”. Observa-se que uma correspondência termo a termo entre as unidades significantes respectivas é suficiente para efetuar a conversão. Neste caso, a conversão inversa permite reencontrar a expressão inicial do registro de partida. Seja agora a expressão: “o conjunto de pontos que tem uma abscissa positiva...” x > 0. Falta na escritura algébrica, uma unidade significante que corresponda a “positivo”. É preciso recorrer à perífrase “ > 0”, combinação de duas unidades significantes para amenizar essa ausência. [...] Aqui, não há mais correspondência termo a termo entre as unidades significantes respectivas das duas expressões: uma reorganização da expressão dada no registro de partida é necessária para obter a expressão correspondente no registro de chegada.

No primeiro exemplo, apresentado por Duval (2009) há uma congruência nas representações da conversão, que é quase instantânea (utilização da expressão superior e do sinal >). Já no segundo exemplo, é um caso de não congruência, pois não é uma conversão imediata. O autor afirma que, em caso de não congruência, o tempo para o tratamento no registro aumenta e a conversão pode ser difícil de se efetuar, o que dificulta a compreensão dos estudantes. Ainda Duval (2012, p. 284) complementa que “[...] quando não há congruência, não somente a conversão torna-se custosa em termos de tempo de tratamento, mas pode criar um problema diante do qual o sujeito se sente desarmado e a possibilidade de conversão não vem mais à mente".

O segundo tipo de fenômeno é a heterogeneidade dos dois sentidos de conversão. Para Duval (2016b) a conversão, em alguns objetos matemáticos, é considerada simples em um sentido, mas quando invertem-se os registros de entrada e saída, ela passa a ser complexa para o estudante. Um exemplo desse fenômeno é a passagem da representação algébrica de uma função para uma representação gráfica, a conversão contrária não é tão simples de ser assimilada pelos estudantes:

> Nem sempre a conversão se efetua quando se invertem os registros de partida e de chegada. [...] Geralmente, no ensino, um sentido de conversão é privilegiado, pela ideia de que o treinamento efetuado num sentido estaria automaticamente treinando a conversão no outro sentido. Os exemplos propostos aos alunos são instintivamente escolhidos, evidentemente, nos casos de congruência (Duval, 2016b, p. 20).

Dessa forma, segundo Duval (2016b), a conversão no sentido inverso, como no exemplo acima, é pouco trabalhada, dificultando a aprendizagem dos estudantes. Por exemplo, em um problema apresentado em um texto para ser equacionado, o sentido que usualmente é trabalhado é o da língua natural para a expressão algébrica, não sendo explorado o sentido da equação para o registro na língua natural.

A partir do exposto aqui, pode-se considerar que as transformações efetuadas nos RRS, por meio do tratamento ou da conversão a depender do objeto e do objetivo desejado, viabilizam a análise da aprendizagem Matemática. Nessa perspectiva, este será o tema abordado na próxima seção desse texto.

4.4.3 Os Registros de Representação Semiótica e a aprendizagem matemática

Os Registros de Representação Semiótica podem ser utilizados para analisar se houve aprendizagem Matemática, do ponto de vista cognitivo. Para tanto, serão considerados os aspectos apontados por Duval (2009, 2011b, 2016a, 2016b, 2018).

Para Duval (2009), as dificuldades apresentadas pelos estudantes na compreensão da Matemática – principalmente nas representações fundamentais relativas ao raciocínio, à compreensão de textos, à aquisição de tratamentos lógicos e matemáticos – estão relacionadas a três fenômenos interligados: a diversificação dos RRS; a diferenciação entre o objeto e sua representação; e a coordenação entre os diferentes registros de representação disponíveis. Sendo assim, o autor afirma que para uma análise cognitiva da aprendizagem em Matemática, deve-se considerar esses três fenômenos que estão relacionados à semiose e a operação de conversão que lhe é essencial.

Duval (2016b) complementa que para compreensão em Matemática é necessária a capacidade de se mudar o registro. Isso porque não se deve jamais confundir um objeto e sua representação. Para tanto, o autor apresenta o que ele chama de paradoxo da compreensão em Matemática: “como podemos não confundir um objeto e sua representação se não temos acesso a esse objeto a não ser por meio de sua representação?” (Duval, 2016b, p. 21).

O autor destaca que um objeto pode ter duas representações produzidas em dois registros diferentes com conteúdos diferentes, e assim surge outra pergunta: “Se somente existem as representações semióticas como via de acesso aos objetos matemáticos, como não identificar o conteúdo da representação e o objeto representado?” (Duval, 2016b, p. 22). Ele afirma que a articulação entre os registros possibilita a compreensão em Matemática quando as representações semióticas permitem essa identificação, pois, a mudança de um para outro registro não se caracteriza apenas por alterar o tratamento, e sim por apresentar um outro modo de explicar as diferentes propriedades ou aspectos de um mesmo objeto.

Dessa forma, Duval (2016b) pondera que, diferente de outras áreas do conhecimento, a aprendizagem em Matemática ressalta fenômenos mais complexos, pois é necessário considerar as exigências científicas que são próprias dos conteúdos matemáticos e do funcionamento cognitivo do pensamento humano. Duval (2011b, p. 66), complementa que, para o desenvolvimento da atividade Matemática, deve-se considerar dois fatores: a variedade de representações semióticas que podem ser utilizadas e a execução (paralela ou alternada) de duas transformações diferentes da representação inicial.

Portanto, é fundamental compreender a natureza desse processo de aprendizagem, sendo necessário saber o que deve ser observado nas produções dos estudantes e o que deve ser utilizado para analisar e interpretar as ações ou dados coletados nas pesquisas para esse fim.

> Porque o objetivo da pesquisa é colocar em evidência os mecanismos próprios da compreensão em Matemática, não se podem analisar as produções dos alunos unicamente por meio de critérios matemáticos, procurando reconstruir de maneira mais ou menos hipotética os procedimentos utilizados. Os mecanismos de compreensão não ressaltam somente justificações feitas pelos alunos, eles dependem de um funcionamento cognitivo que se deve poder descrever (Duval, 2016b, p. 24).

Para entender os processos de compreensão Matemática, Duval (2011b) afirma que é necessária uma análise cognitiva da atividade Matemática, ressaltando que os critérios de compreensão não são exatamente os mesmos do ponto de vista cognitivo e matemático. O autor aponta que, do ponto de vista matemático, a compreensão inicia-se quando há validação, justificação e demonstração de acordo com o nível de exigência. Já, do ponto de vista cognitivo, a compreensão ocorre quando o estudante consegue reconhecer os objetos estudados por meio de suas múltiplas representações possíveis e começa a explorar, de forma autônoma, a utilização desses objetos em novas tarefas, verificando a sua relevância. Portanto, segundo o autor, sem que essas condições cognitivas sejam atendidas, a compreensão Matemática não ocorre e, para a análise cognitiva desses aspectos, é necessário considerar duas questões essenciais. A primeira diz respeito ao modo de acesso aos objetos matemáticos, levando-se em conta que, na Matemática, o critério de realidade é diferente do que é dado de modo empírico, pois considera todos os casos possíveis que podem ser representados ou construídos semioticamente. A segunda questão, ressaltada pelo autor, é a natureza da atividade Matemática, por envolver objetos, áreas ou estruturas matemáticas, é importante fornecer uma possível descrição objetiva e não somente introspectiva desta atividade, levando em consideração as características que se pode observar ou conjecturar do objeto em questão.

Duval (2016b) explica que o método utilizado para análise deve permitir observar, nas produções dos estudantes, os fenômenos cognitivos que são revelados a partir da mobilização de vários RRS. O autor pondera que é preciso saber distinguir, nessas produções, o que é tratamento de registros e o que é conversão de registros, pois elas remetem a dois domínios de problemas cognitivamente diferentes. Além disso, afirma o autor, é preciso considerar a natureza dos registros apresentados, se são utilizados registros monofuncionais ou plurifuncionais (multifuncionais):

> No que se refere aos tratamentos, as dificuldades mais sérias concernem aos registros plurifuncionais, como se pode ver em geometria com as demonstrações feitas em língua natural e com a utilização heurística das figuras. O mesmo ocorre para a atividade de conversão: ela pode ser mais complexa se houver a necessidade ou não de passagens entre registro monofuncional e registro plurifuncional (Duval, 2016b, p. 24).

Para Duval (2016a), é necessário trabalhar com atividades específicas independentes da aquisição e da aplicação de conhecimentos matemáticos, de acordo com o nível de compreensão requerido, sendo considerado dois níveis. O primeiro tem o objetivo de se trabalhar com dois registros para sanar as dificuldades de representação de um mesmo objeto em duas representações semióticas diferentes. O segundo nível tem por objetivo trabalhar com os registros multifuncionais (ou plurifuncionais) para elucidar o funcionamento que é próprio de cada registro. O autor trata o registro de representação como instrumento de observação e análise da compreensão ou incompreensão na aprendizagem de Matemática, qualquer que seja o domínio de Matemática ensinado.

Ainda, Duval (2016b) propõe usar a conversão entre os registros como instrumento de análise, colocando em evidência as variáveis cognitivas próprias do funcionamento de cada registro e explorando as variações de congruência e não congruência que podem aparecer nas diversas representações de um mesmo objeto. Para tanto, ele destaca duas condições:

> 1 - Dar-se a representação a mais elementar possível, R_1, de um objeto em um registro de saída A e sua representação convertida R'_1 em um registro de chegada B; 2 - proceder a todas as variações possíveis de R_1, ..., R_n que conservem nas diferentes representações um valor de representação de alguma coisa no registro de saída A, e observar as variações concomitantes de R'_1, no registro de chegada B. [...] As representações R_1, ..., R_n do registro A se separam, então, em duas classes: aquelas para as quais existe somente uma representação concomitante R'_i no registro de chegada B e aquelas que têm cada uma representação concomitante diferente no registro de chegada (Duval, 2016b, p. 25).

Cada uma das alterações feitas no registro de saída de um objeto considerado é chamada de R_i e, segundo Duval (2016b), cada R_i é interpretada e considerada cognitivamente como relevante se provocam uma modificação na representação no registro de chegada.

Para Duval (2018), o critério de compreensão é considerado quando há um reconhecimento imediato de um mesmo objeto em representações diferentes, ou seja, em que os conteúdos não possuem nada em comum. Ele destaca que quando o estudante tem esse reconhecimento, ele consegue mudar de registro substituindo uma representação dada por outra representação totalmente diferente. E, para que realmente haja esse reconhecimento, o autor diz que o trabalho com o objeto matemático deve ser realizado com a mudança de registro de representação nos dois sentidos de conversão e não somente o sentido único, que geralmente é trabalhado mais frequentemente pelo professor. Como nas funções, por exemplo, o sentido habitual é sempre partindo da lei de formação para a construção do gráfico, o que para Duval (2011b) não possibilita a articulação entre o registro das representações gráficas e das equações mesmo depois que os estudantes tenham tido as aulas sobre funções afins.

A partir do conhecimento dos RRS e da importância da articulação entre eles para a compreensão Matemática, percebe-se a necessidade de conhecer essas possibilidades para o objeto função, o que será tratado na próxima seção.

4.4.4 Os Registros de Representação Semiótica e o ensino de funções

Para o desenvolvimento da pesquisa dessa tese de doutorado, desenvolveu-se uma sequência didática com o conteúdo de funções. Para tanto, buscou-se investigar a relação da teoria dos Registros de Representação Semiótica com esse conteúdo.

Considerando que Duval (2018) afirma que os objetos matemáticos precisam de suas representações semióticas para serem acessados, a função, como objeto matemático, pode ser visualizada a partir de suas representações. Para o autor, as representações semióticas devem ser descritas conforme o registro nas quais foram produzidas e que determinam o seu conteúdo. Ele destaca que esse conteúdo apresenta duas características inseparáveis, sendo a primeira a apresentação de certas propriedades do objeto e ocultação de outras e, a segunda, a dependência total do sistema semiótico utilizado para produzir a representação desse objeto. Dessa forma, a escolha do tipo de representação vai depender das operações que se quer fazer para obter outras representações cujos conteúdos mostrarão dados ou informações novas.

Nesse sentido, Damm (2010) relata que os registros são complementares, pois, dependendo do objeto observado, a representação em um único registro é parcial e, há a necessidade da conversão entre esses registros de forma a possibilitar que o estudante perceba outras propriedades ou aspectos desse objeto. A autora aborda o exemplo das funções:

> Quando trabalhamos com as funções, os gráficos, as tabelas e as equações são todos registros parciais desse objeto. Cada um desses registros é parcial e possui uma especificação própria. Perceber essas especificidades a cada registro e reforçá-las é um caminho para o entendimento do objeto como um todo (Damm, 2010, p. 185).

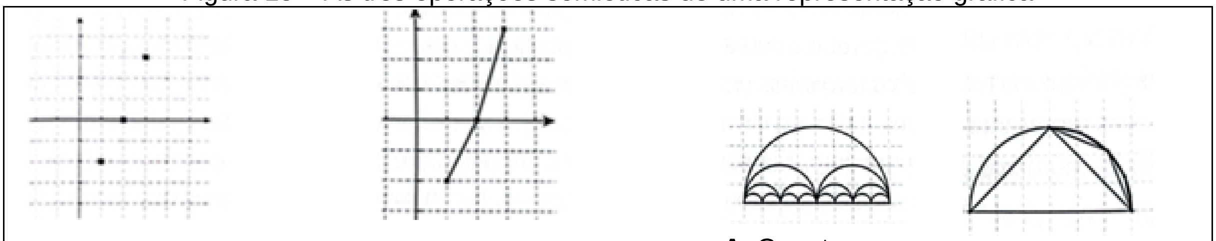
Considerando o objeto função, deve ser trabalhada a articulação entre os registros, sendo utilizado: o registro algébrico, para a conceituação da lei de formação;

o registro numérico, para o estudo das raízes e seus demais pontos; o registro figural, para construção das tabelas; e o registro gráfico, para as representações no plano cartesiano.

Para um registro algébrico é importante discriminar as unidades significativas próprias desse registro que para Duval (2011a, p. 99) é nítido que são “os símbolos relacionais (<, >, =, ...); os símbolos de operações ou de sinais (+, –); os símbolos de variável; os símbolos de expoente, coeficiente e de constante”. Assim, o autor destaca que é importante esclarecer que cada símbolo corresponde geralmente a uma unidade significativa, mas que existem unidades significativas em que os símbolos são omitidos: o coeficiente 1, o sinal positivo dos coeficientes maiores do que zero. Por exemplo, na expressão $y = x$ tem-se, na verdade, $y = +1x$.

Para um registro gráfico, Duval (2011b) aborda as representações gráficas como um caso típico, parecendo serem as mais simples de serem construídas quando se considera uma regra única a ser aplicada, a regra da codificação: cada par de números corresponde a um ponto específico no plano cartesiano – plano quadriculado munido de dois eixos graduados e orientado. Além disso, ele afirma que podem ser facilmente diferenciadas as retas e as curvas, o crescimento ou decrescimento, os pontos de inflexão, de máximo ou de mínimo. Mas, ressalta que a regra de codificação permite apenas a marcação dos pontos, que é insuficiente para a construção da representação gráfica, sendo necessário efetuar mais duas outras operações, apresentadas na Figura 15.

Figura 15 – As três operações semióticas de uma representação gráfica



1. A regra de codificação permite marcar somente os pontos de interseção no plano quadriculado.	2. Ligam-se os pontos marcados e obtêm-se assim uma cadeia de segmentos. 3. Pode-se codificar os pontos intermediários. Para isso, é necessário ampliar a visão de um intervalo, isto é, tomar um quadriculado mais fino, em uma escala maior. *Cada segmento pode assim ser transformado em uma nova cadeia de segmentos menores*.	**A**. Quantas vezes é necessário repetir esta partição para que os **semicírculos se confundam visualmente com o diâmetro** do círculo de partida?	**A´.** Quantas vezes é necessário separar os segmentos para que uma cadeia de segmentos coincida visualmente com uma curva?

Fonte: Duval (2011b, p. 107).

A primeira operação é a codificação, em que se permite somente marcar os pontos, como já foi mencionado. A segunda operação consiste na ligação dos pontos em que para Duval (2011b) é uma transgressão da regra de codificação, pois substitui-se a marcação dos pontos por uma unidade figural – uma reta, uma curva, pontos notáveis e outros. Essa unidade figural possui uma orientação vertical (sobe, desce), de posição em relação ao eixo horizontal (acima ou abaixo do nível do solo). A terceira operação consiste na codificação, marcação de pontos intermediários, como o autor afirma:

> Podemos sempre marcar pontos intermediários entre os já marcados e assim obter uma cadeia de segmentos menores. Se eles não estão alinhados, podemos repetir a operação até o momento em que a cadeia de segmentos coincida visualmente com uma bela curva sem nenhuma aspereza. Aqui jogamos com o limiar da discriminação visual do olho humano (Duval, 2011b, p.107).

Duval (2011b, p. 108) resume a construção de um gráfico por meio da operação de identificação de uma sequência de pontos – obtidos pelo cálculo das ordenadas a partir das abscissas selecionadas – e da operação, que ele não classifica como Matemática, que consiste em ligar os pontos dos segmentos consecutivos. O autor afirma que entre essas duas operações há um “salto dimensional no contínuo visual de retas e curvas”, e é por conta desse salto dimensional que os gráficos cartesianos se tornam um sistema semiótico que pode criar ou produzir novas representações, pois: “possibilita efetuar sobre o contínuo visual as operações que não são possíveis com os pontos, tão numerosos que eles são”. Tem-se assim um salto de um procedimento fundamentado em um visual discreto, por meio dos cálculos matemáticos, para outro fundamentado em um visual contínuo. Assim:

> É esse salto que cria o equívoco cognitivo das representações gráficas. Como jamais nenhum procedimento pode se aproximar do intervalo da curva com a qual ele tem extremidades comuns, o que vemos pode ser uma ilusão: o objeto representado é uma reta, uma sequência de segmentos não alinhados ou uma curva? (Duval, 2011b, p. 108).

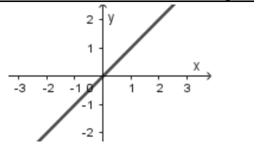
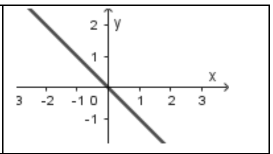
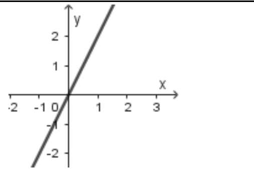
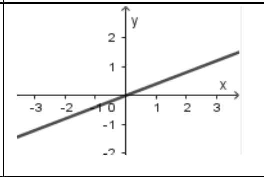
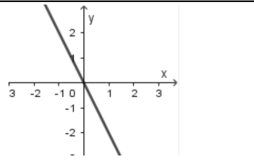
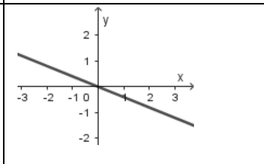
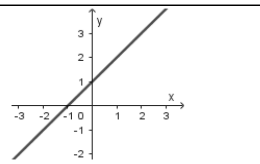
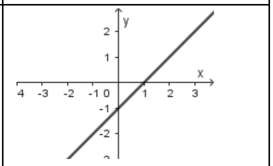
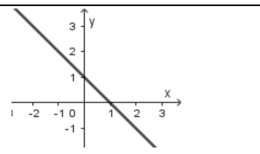
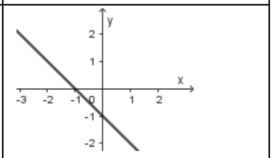
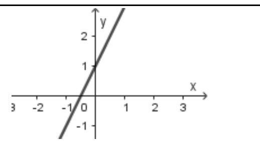
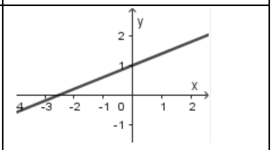
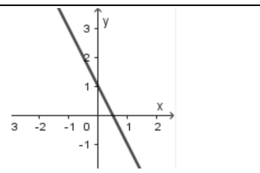
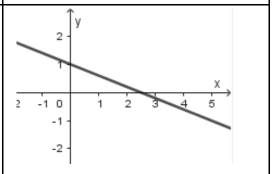
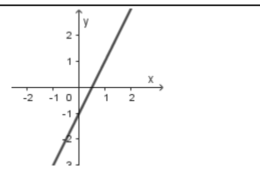
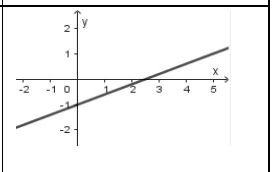
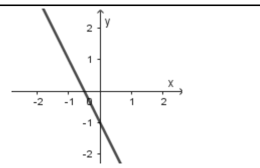
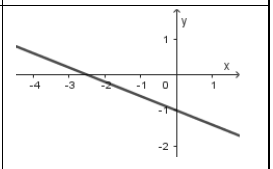
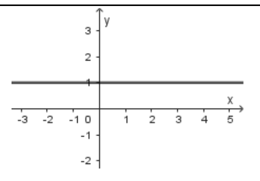
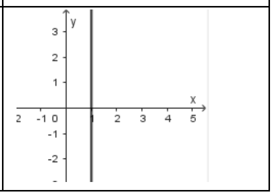
Para compreender essas modificações dentro do registro, deve-se distinguir as unidades de sentido. Mas, para Duval (2011b), é necessário a utilização da conversão para um ou mais registros para se reconhecer as unidades de sentido matematicamente pertinentes à representação considerada. Ele afirma ser necessário alterar sistematicamente o conteúdo da representação de partida e fazer uma nova conversão para cada alteração realizada.

Nas representações cartesianas, Duval (2011b) declara que essas variações sistemáticas devem ser somente visuais, correspondendo às oposições qualitativas no reconhecimento visual do formato do gráfico, considerando a orientação e a posição (em relação aos eixos). Assim, o autor diz que há cinco oposições qualitativas para os gráficos lineares e em cada oposição há dois valores visuais: a reta sobe ou desce (em relação ao eixo das abscissas); a reta está mais próxima do eixo das abscissas ou está mais próxima do eixo das ordenadas (em relação aos quadrantes formados pela divisão simétrica do plano); a reta passa ou não pela origem do sistema; a reta passa acima ou passa abaixo da origem; e a reta é paralela ou não paralela a um dos eixos.

Dessa forma, Duval (2011b, p. 109) esclarece que toda reta ou segmento de reta no plano cartesiano tem cinco valores visuais, “a reta sobe ou desce em relação à orientação do eixo das abscissas; mas esses valores tendem a se confundir em uma figura de forma global (reta) sobre o fundo (eixos orientados e graduados)”. Assim, o autor afirma ser necessário variar as oposições qualitativas, ou seja, cada um dos valores visuais, de forma a reconhecer aqueles que são matematicamente pertinentes.

A Figura 16 apresenta um quadro com as variações dos valores visuais de uma representação gráfica linear. Essa figura mostra as dez oposições visuais qualitativas que, para Duval (2011b) são todas as posições possíveis de uma reta ou segmento de reta traçado em um plano cartesiano, de forma que cada reta tem diversas qualidades visuais. O autor afirma que, para reconhecer essas qualidades, ou seja, para ver o que o gráfico apresenta, é necessário reconhecer os três valores que diferencia um gráfico linear de outros tipos de gráficos, sejam quaisquer forem os valores numéricos das coordenadas, dos coeficientes e da constante da equação da reta. Duval (2011a) denomina de unidades significativas ao coeficiente *a* e a constante *b* na expressão algébrica da reta: $y = ax + b$. Assim, a partir da alteração de um dos valores visuais do gráfico sem mudar os outros, é possível analisar o que muda na equação algébrica.

Figura 16 – Variações das oposições de valores visuais em um gráfico linear

1. Passa pela origem E divide simetricamente os quadrantes (tem a mesma distância dos eixos ordenados).		
2. Passa pela origem E sobe E está mais próxima de um eixo do que do outro (não divide simetricamente os quadrantes).		
3. Passa pela origem E desce E está mais próxima de um eixo do que do outro.		
4. Não passa pela origem E sobe E não está mais próxima de um eixo do que do outro (é paralela à divisão simétrica dos quadrantes).		
5. Não passa pela origem E desce E não está mais próxima de um eixo do que do outro.		
6. Passa acima da origem E sobe E está mais próxima de um eixo do que do outro.		
7. Passa acima da origem E desce E está mais próxima de um eixo do que do outro.		
8. Passa abaixo da origem E sobe E está mais próxima de um eixo do que do outro.		
9. Passa abaixo da origem E desce E está mais próxima de um eixo do que do outro.		
10. É paralela a um dos eixos.		

Fonte: Duval (2011b, p. 110).

Para compreensão do conceito de inclinação (na equação da reta esse é dado pelo coeficiente a), Duval (2011a) destaca que são necessárias duas unidades significativas diferentes: uma definida em relação ao sinal (traço subindo ou traço descendo) e a outra em relação ao inteiro 1 (ângulo com o eixo x, sendo igual, maior ou menor que 1). A Figura 17 mostra os valores qualitativos visuais e as correspondências de unidades de sentido entre o conteúdo das representações gráficas e das equações algébricas.

Figura 17 - Descrição algébrica das oposições dos valores de um gráfico linear

Valores qualitativos visuais de um gráfico linear				Equações
Sentido da inclinação	Ângulos com o eixo x	Posição no eixo y		Exemplo
traço subindo (+) x	divisão simétrica coeficiente a = 1	passa pela origem	b = 0	y= (+1) x
		passa acima da origem	b = +1	y = x + 1
		passa abaixo da origem	b = -1	y = x - 1
	ângulo maior coeficiente a > 1	passa pela origem	b = 0	y = 2x
		passa acima da origem	b = +1	y = 2x + 1
		passa abaixo da origem	b = -1	y = 2x - 1
	ângulo menor coeficiente a < 1	passa pela origem	b = 0	y= $\frac{1}{2}$ x
		passa acima da origem	b = +1	y= $\frac{1}{2}$ x + 1
		passa abaixo da origem	b = -1	y= $\frac{1}{2}$ x - 1

Fonte: adaptada de Duval (2011b, p. 111).

Duval (2011b) esclarece que o trabalho de observação das variações visuais do gráfico e dos valores categoriais da equação, possibilita o reconhecimento do que é matematicamente pertinente no conteúdo visual do gráfico. A Figura 18 mostra as variações com as equações no registro de partida.

Figura 18 – Descrição algébrica das oposições dos valores de um gráfico linear

Equações	Valores qualitativos visuais de um gráfico linear			
Exemplo	Posição no eixo y		Ângulos com o eixo x	Sentido da inclinação
y= (-1) x	passa pela origem	b = 0	divisão simétrica coeficiente a = -1	traço descendo (-) x
y = (-1) x + 2	passa acima da origem	b = +2		
y = (-1) x - 2	passa abaixo da origem	b = -2		
y = - 1x	passa pela origem	b = 0	ângulo menor coeficiente a < -1	
y = - 2x + 2	passa acima da origem	b = +2		
y = - 2x - 2	passa abaixo da origem	b = -2		
y= - $\frac{1}{2}$ x	passa pela origem	b = 0	ângulo maior coeficiente a > - 1	
y= - $\frac{1}{2}$ x + 2	passa acima da origem	b = +2		
y= - $\frac{1}{2}$ x - 2	passa abaixo da origem	b = -2		

Fonte: adaptada de Duval (2011b, p. 111).

Duval (2011b) acrescenta que, para as observações, tanto podem ser feitas as conversões considerando as equações no registro de chegada, como na Figura 17, como invertendo o sentido da conversão e colocando as equações no registro de partida, fazendo inicialmente as alterações nas equações e observando as mudanças significativas que ocorrem no registro gráfico, como na Figura 18.

Essas transformações, propostas como experiência para analisar as unidades significativas na equação da reta, vem ao encontro do que traz Duval (2011a, p. 103):

> De fato, é suficiente praticar a abordagem experimental a mais clássica: variar uma unidade significativa na expressão, mantendo as outras constantes e ver o que se passa no outro registro (ou mudar uma variável visual mantendo as duas outras constantes e ver as modificações que acontecem na expressão). Assim, por exemplo, a oposição entre y = x e y = - x se articula em uma unidade de uma imagem visual e esta imagem se presta a modificações que têm contrapartida algébrica imediata.

Para o caso de o traçado não ser uma reta, também podem ser utilizadas as variáveis gerais para fazer a análise, podendo ser feitas modificações na forma ou nas dimensões do gráfico, ou ainda o sistema de graduação dos eixos. Visto que “as variações visuais vão corresponder às variações do grau da letra variável, pelo fato de que a relação é uma igualdade ou uma desigualdade” (Duval, 2011b, p. 112). Para a análise das curvas, por exemplo, Duval (2011a) considera que a expressão das funções deve ser levada em conta de forma implícita ou explícita, integrando outras características visuais importantes, como o formato mais aberto ou mais fechado das curvas. Ele revela ainda que, as variáveis gerais, diferentemente das variáveis particulares, correspondem às modificações próprias da imagem.

Duval (2011b) ressalta que a conversão, tomada como ferramenta de análise do que é matematicamente pertinente, terá uma eficácia cognitiva a partir da escolha das variações que devem ser feitas com as unidades de sentido próprias de cada registro, no caso dos registros gráficos, as unidades visuais e não em função dos objetos matemáticos representados. O autor complementa que não se deve negligenciar a alfabetização Matemática, o que é feito, quando a noção de gráficos é introduzida no ensino somente em função dos objetos matemáticos, deve-se trabalhar a noção de função a partir de um terceiro registro, o da língua natural por meio dos enunciados verbais que definem uma função e caracterizam os critérios de correspondência entre um ponto e sua imagem.

Assim, por meio da articulação entre os RRS aqui apresentados, trabalhando com as unidades significativas de cada registro pertinente ao objeto função, pode-se ofertar o ensino desse conteúdo, que tem suas particularidades como objeto matemático, de forma a possibilitar que os estudantes adquiram uma compreensão Matemática.

4.4.5 Considerações sobre os RRS

O estudo da teoria de Duval com os Registros de Representações Semióticas possibilitou o entendimento da necessidade de se compreender como se dá a aprendizagem Matemática, do ponto de vista cognitivo.

Entende-se a aprendizagem Matemática como a capacidade de o estudante conseguir utilizar os conceitos abordados na sala de aula em situações do seu cotidiano. E, para que este objetivo seja atingido, o autor apresenta que o ensino deve ser realizado a partir de atividades específicas com o objetivo de sanar as dificuldades de representação de um mesmo objeto em duas representações semióticas diferentes. Dessa forma, compreende-se que o ensino do objeto função deve ser realizado por meio de atividades elaboradas considerando-se as variáveis cognitivas que podem ser desenvolvidas em cada registro e que correspondem ao modo de ver, raciocinar e fazer Matemática.

Considerando que o autor apresenta o objeto função como sendo totalmente dependente de um sistema semiótico para ser percebido, a escolha do RRS desse objeto vai depender do aspecto que se quer considerar, pois cada um dos registros tende a mostrar umas propriedades e esconder outras. Ainda, como o autor afirma, a compreensão dos conceitos passa pela possibilidade de mobilização de pelo menos dois registros, acredita-se que o ensino de funções deve ser trabalhado a partir da coordenação e das transformações desses três registros: a língua natural (para o trabalho com os enunciados e com as formulações das respostas aos problemas); o registro algébrico; e o registro gráfico. Além disso, devem ser consideradas as unidades significativas de cada registro e as regras de tratamento que também são próprias de cada um.

Compreende-se que o trabalho com as atividades do objeto função, utilizando a conversão entre os registros também precisa trabalhar os dois sentidos da conversão, por exemplo, partindo da expressão algébrica para a construção do gráfico, bem como o inverso, de forma que o estudante realmente consiga transitar por esses dois registros, articulando-os. Da mesma forma, ao se trabalhar com o registro na língua natural para a expressão algébrica ou a construção gráfica, deve-se trabalhar também a conversão nos dois sentidos. Além disso, há a necessidade de ter uma preocupação com as regras de congruência e não congruência apresentadas pelo autor.

Como os RRS, segundo o autor, também podem ser utilizados como instrumento de observação e análise da compreensão ou incompreensão na aprendizagem de Matemática, o método utilizado deve permitir observar as produções dos estudantes de forma a distinguir o que é tratamento e o que é conversão dos registros. Pois, entende-se a afirmação do autor que cada tipo de transformações dos registros remete a domínios cognitivos diferentes, sendo que quando o estudante apresenta bons resultados na utilização do tratamento, significa que ele compreendeu bem as regras do registro de representação utilizado. Já quando ele reconhece e consegue realizar a conversão entre os registros, o autor afirma haver uma transformação representacional, o que indica que houve a compreensão do assunto estudado. No caso específico da função, o método deverá ter o objetivo de analisar se o ensino está possibilitando aos estudantes uma aprendizagem que lhes permitam uma melhor compreensão desse objeto matemático, de forma que consigam fazer associações com situações e problemas reais para além da sala de aula.

5 METODOLOGIA

Nesse capítulo, apresenta-se a metodologia de pesquisa utilizada no desenvolvimento desta tese, bem como as etapas em que a pesquisa foi desenvolvida, os instrumentos utilizados para a coleta de dados e a caracterização dos participantes e do local de pesquisa.

5.1 PESQUISA QUALITATIVA

A metodologia, segundo Minayo (2016) é não só a trajetória a ser seguida, mas também o caminho do pensamento e como ele é colocado em prática na realidade abordada. Para a autora, a metodologia inclui o método (a teoria da abordagem), as técnicas (os instrumentos) utilizadas para operar o conhecimento, além das experiências, criticidade e sensibilidade do pesquisador, que ela chama de sua criatividade. Assim, "a metodologia é muito mais que técnicas, ela inclui as concepções teóricas da abordagem, articulando-se com a teoria, com a realidade empírica e com os pensamentos sobre a realidade" (Minayo, 2016, n.p.).

A metodologia utilizada foi a pesquisa qualitativa com o propósito de investigar o processo de ensino e aprendizagem a partir da aplicação de uma sequência didática desenvolvida para o ensino de funções aos estudantes do Ensino Médio, utilizando os TCT para contextualizar o trabalho com esse objeto de conhecimento.

A escolha da abordagem qualitativa se fundamenta com o texto de Martins e Campos (2004, p.22) que diz:

> O pesquisador qualitativo preocupa-se mais com o processo do que com o produto, procurando retratar a perspectiva dos participantes. Isso significa que, estuda-se a realidade, em seu contexto natural, tal como sucede, e procura dar sentido ou interpretar os fenômenos de acordo com os significados que possuem para as pessoas implicadas nesse contexto.

Gibbs (2009, p. 18) afirma que na pesquisa qualitativa "não há separação entre conjunto de dados e análise de dados". Para o autor, a análise é feita concomitantemente à "coleta seus dados, por meio de entrevistas, notas de campo, aquisição de documentos e assim por diante, é possível iniciar sua análise".

Ainda, Minayo (2016) apresenta que a pesquisa qualitativa é utilizada para responder a questões que são muito particulares, pois esse tipo de pesquisa se ocupa não somente de fatos, mas de um universo que compreende os significados, os valores, aspirações, crenças e atitudes dos seres humanos envolvidos.

> Esse conjunto de fenômenos humanos é entendido aqui como parte da realidade social, pois o ser humano se distingue não só por agir, mas também por pensar sobre o que faz e por interpretar suas ações dentro e a partir da realidade vivida e compartilhada com seus semelhantes. O universo da produção humana que pode ser resumido no mundo das relações, das representações e da intencionalidade e é objeto da pesquisa qualitativa dificilmente pode ser traduzido em números e indicadores quantitativos. (Minayo, 2016, n.p.).

Nesse sentido, Creswell (2010) relata que nessa metodologia de pesquisa, o pesquisador coleta os dados no local em que os participantes vivenciam o problema, usando instrumentos como a observação do comportamento, diálogos e entrevistas ou por meio de questionários próprios e esses dados são analisados de forma indutiva, por meio de padrões e categorias próprias:

> Em todo o processo de pesquisa qualitativa, o pesquisador mantém um foco na aprendizagem do significado que os participantes dão ao problema ou questão, e não ao significado que os pesquisadores trazem para a pesquisa ou que os autores expressam na literatura. [...]. A pesquisa qualitativa é uma forma de investigação interpretativa em que os pesquisadores fazem uma interpretação do que enxergam, ouvem e entendem (Creswell, 2010, p. 209).

Por fim, destaca-se que, nesta investigação, além da abordagem qualitativa, foram utilizados elementos da estatística descritiva para a análise dos dados obtidos por meio dos questionários aplicados.

5.2 ETAPAS DA PESQUISA

Como ponto de partida, a pesquisa foi submetida para a apreciação junto ao Comitê de Ética, sob protocolo CAAE: 52544321.8.0000.5349 e aprovada por meio do parecer n. 5.069.909. Após essa aprovação, a pesquisa foi desenvolvida em sete etapas, sendo:

a) Pesquisa bibliográfica onde foram analisados os trabalhos publicados por pesquisadores em Educação Matemática que abordaram o tema desse projeto com o objetivo de buscar contribuições.

b) Construção do referencial teórico da tese que teve como embasamento: as contribuições da Educação Matemática Crítica de Ole Skovsmose; os Registros de Representação Semiótica, de Raymond Duval, aplicada ao ensino de funções; os Temas Contemporâneos Transversais; e o ensino de funções.

c) Revisão bibliográfica por meio de uma análise dos livros didáticos do PNLD do ano de 2021, da etapa do Ensino Médio, para a verificação de como estão sendo abordados os TCT e para a seleção de atividades que foram utilizados na sequência didática sobre o objeto função.

d) Coleta de dados inicial, com aplicação de questionários aos estudantes do Ensino Médio participantes da pesquisa com o objetivo de se obter um perfil de natureza pedagógico.

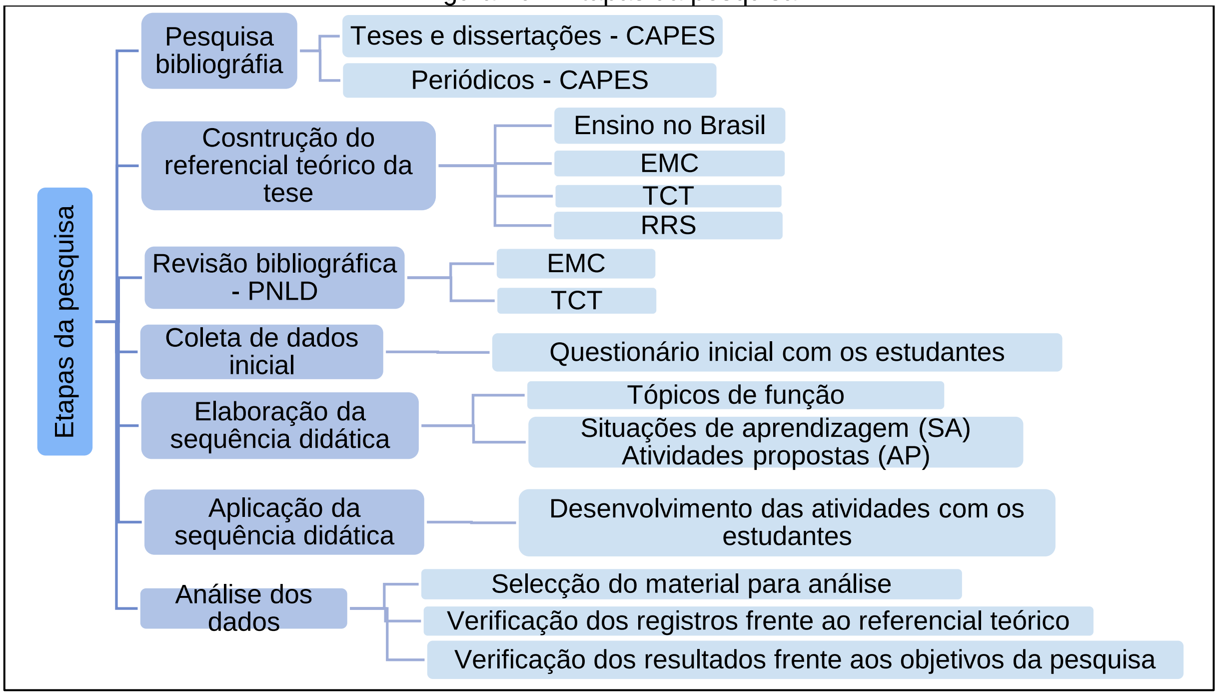
e) Elaboração da sequência didática com o intuito de se trabalhar o conteúdo de funções associados aos TCT trazidos como obrigatórios pela BNCC.

f) Aplicação da sequência didática aos estudantes do Ensino Médio, utilizando tecnologias digitais acessíveis ao grupo de estudantes participantes do projeto, por meio de *smartphones* pessoais e *Chromebooks*[8] disponibilizados pela escola participante.

g) Análise dos dados construídos para verificar quais as facilidades e limitações que essa sequência didática envolvendo os TCT, os aspectos da EMC e as diferentes representações no ensino de funções aos estudantes do Ensino Médio.

A Figura 19 apresenta de forma resumida essas etapas da pesquisa.

Figura 19 – Etapas da pesquisa



Fonte: a pesquisa.

[8] Os *Chromebooks* são dispositivos móveis que foram disponibilizados pela Secretaria de Estado de Mato Grosso, para todas as escolas da rede estadual, por meio da Política Pública de Tecnologia no Ambiente Escolar, que faz parte dos pilares do Plano Estadual de Educação de Mato Grosso. São dispositivos para uso educacional pelos estudantes. (Decreto estadual nº 1.497, de 10 de outubro de 2022).

Na próxima seção, apresenta-se os instrumentos que foram utilizados para a coleta de dados da pesquisa.

5.3 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS DA PESQUISA

Para a coleta de dados, foram utilizados os seguintes instrumentos:

- Questionário inicial (Apêndice A) – aplicado para traçar um perfil de natureza pedagógica dos estudantes e fornecer subsídios para a construção da sequência didática, incluindo a escolha dos temas de interesse dos estudantes participantes da pesquisa.
- Sequência didática – elaborada a partir de atividades contextualizadas com os TCT selecionados pelos estudantes da pesquisa. Abrange os seguintes tópicos: ideia de função; conceito e representação de função; gráfico de função; e algumas características de função. A sequência didática foi composta por 60 atividades, classificadas como situações de aprendizagem (SA) e atividades propostas (AP), que foram desenvolvidas em um total de 23 aulas. As resoluções das AP podem ser observadas no Apêndice G.
- Registros escritos dos estudantes – atividades desenvolvidas pelos estudantes em seus cadernos ou em folhas de ofício fornecidas pela pesquisadora.
- Registros coletados por meio do GeoGebra Classroom – atividades realizadas pelos estudantes em um ambiente virtual de aprendizagem, utilizado para o desenvolvimento, acompanhamento e análise de suas resoluções.
- Questionário final (Apêndice B) – aplicado para identificar as percepções dos estudantes sobre o desenvolvimento da sequência didática.
- Observação e registros da pesquisadora – utilizados para construção das análises a partir do olhar da professora pesquisadora durante a aplicação da sequência didática.

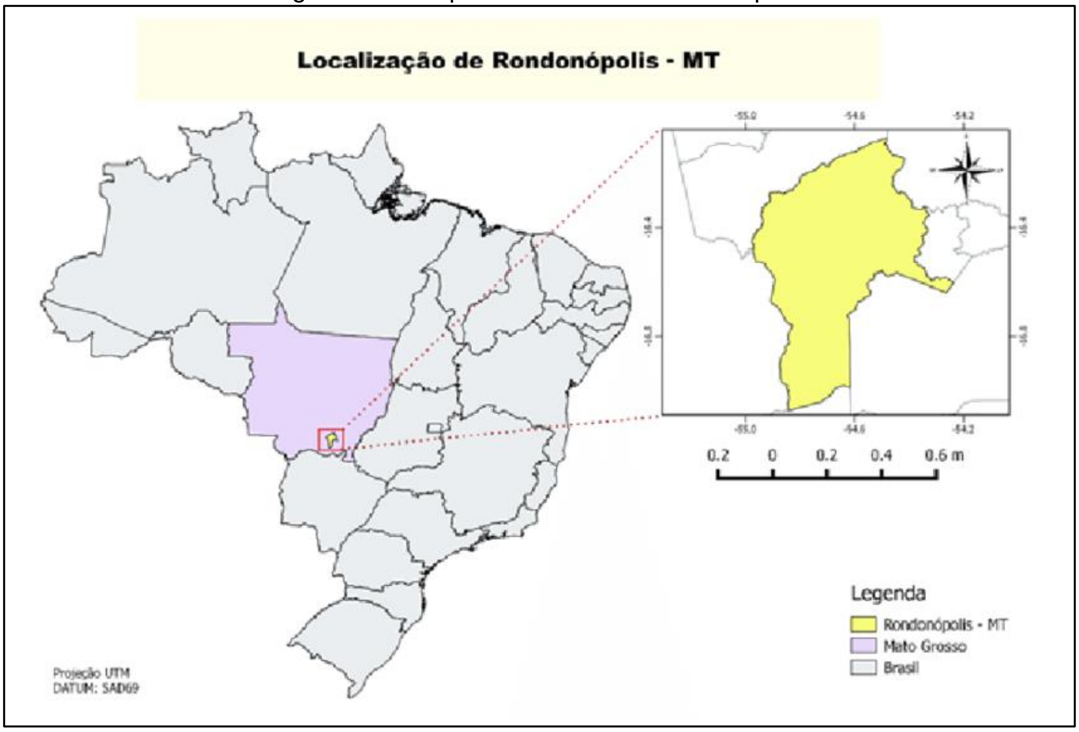
A utilização dos questionários como coleta de dados é vista por Gil (2007) como uma técnica de investigação que apresenta uma série de vantagens, dentre elas, que possibilita o anonimato, tem baixo custo e pode ser aplicado a uma grande quantidade de pessoas. Ele aponta que o questionário deve ser construído de forma a ser possível responder os objetivos da pesquisa por meio de questões específicas, que podem ser abertas ou fechadas, o que possibilitar melhor a análise das respostas. O questionário também não pode ser muito extenso, para não dificultar o seu preenchimento pelos pesquisados. O autor destaca, ainda, que a observação e o registro são elementos importantes para a pesquisa, sendo que a maior vantagem é a percepção dos fatos de maneira direta, sem qualquer intermediação, permitindo assim uma análise mais clara por parte do pesquisador.

As sequências didáticas segundo Zabala (1998, p.18), “são um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecidos tanto pelos professores como pelos alunos”. A sequência didática, elaborada e aplicada neste projeto, foi utilizada como instrumento metodológico para o ensino de funções no Ensino Médio e foi analisada com a finalidade de verificar se os objetivos propostos foram atingidos.

5.4 LOCAL E PARTICIPANTES DA PESQUISA

A pesquisa foi desenvolvida em Rondonópolis/MT, local de residência da pesquisadora. A cidade de Rondonópolis está localizada na região sudeste do estado de Mato Grosso a 210 km da capital Cuiabá (Figura 20).

Figura 20 – Mapa da cidade de Rondonópolis



Fonte: https://www.researchgate.net/figure/Figura-1-Localizacao-de-Rondonopolis-MT_fig1_318781592.

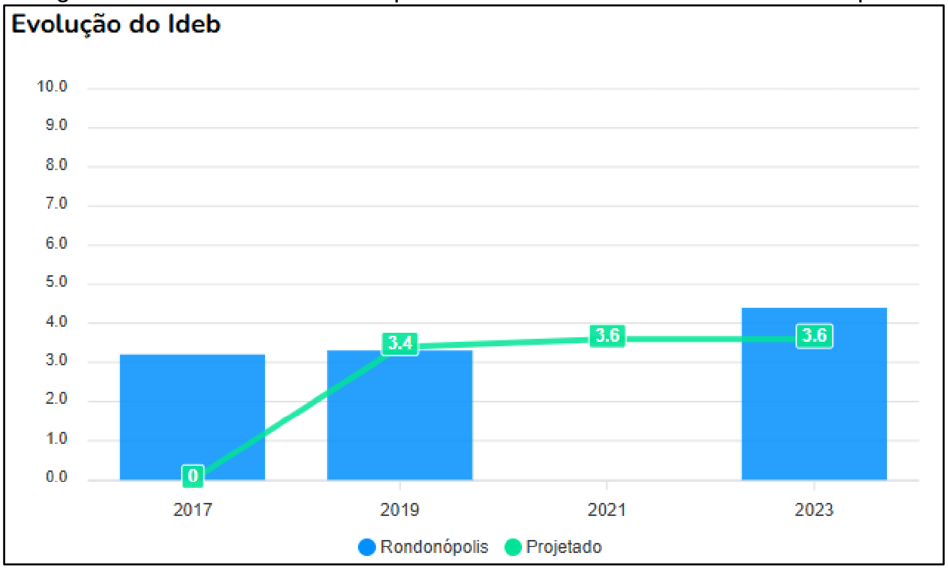
Segundo os dados do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), essa cidade, que em 2025 completará 72 anos de emancipação política, possui

4.824,02 km² de extensão territorial e possui uma população estimada em 244.911 habitantes. Por estar localizada no entroncamento das Rodovias BR-163 e BR-364, a cidade é uma ligação entre as regiões Norte e Sul do país e, dessa forma, toda a produção agrícola e industrial é transportada por essas rodovias para os grandes centros metropolitanos e portos do Brasil. Rondonópolis tem o segundo maior Produto Interno Bruto (PIB) do estado de Mato Grosso e a média mensal dos salários dos trabalhadores foi registrada, em 2022, em 2,6 salários-mínimos (Brasil, 2023).

A cidade é conhecida como a capital do agronegócio, pois tem reconhecimento nacional pelo desempenho agropecuário, que lhe garante a liderança no *ranking* de exportações do Estado. Tem se despontado também no setor industrial (na produção de óleo de soja, fertilizante, ração e suplemento animal), no setor frigorífico, com padrões internacionais, e no ramo da metalurgia. No setor turístico, Rondonópolis conta com suas belezas naturais: rios, ribeirões, córregos, morros, serras, formações rochosas, trilhas, cachoeiras, cascatas, águas termais e áreas de preservação ambiental (Rondonópolis, 2018).

Com relação aos dados da educação, em 2024, foram registradas 8.275 matrículas no Ensino Médio, distribuídas em 23 escolas[9]. O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) do Ensino Médio, na rede pública estadual, em 2023, foi 4,4 superando os índices anteriores (Figura 21).

Figura 21 – IDEB das escolas públicas do Ensino Médio em Rondonópolis



Fonte: https://qedu.org.br/municipio/5107602-rondonopolis/ideb.

[9] Dados oriundos do QEdu disponíveis em: https://qedu.org.br/municipio/5107602-rondonopolis/censo-escolar. Acesso em 13 ago. 2023.

Em 2023, a escola participante atendeu cinco turmas de 3º ano do Ensino Médio. No entanto, para atender aos objetivos da pesquisa, optou-se por trabalhar com apenas uma turma, indicada pela professora titular da disciplina de Matemática. Assim, os participantes da pesquisa foram vinte estudantes de uma turma do terceiro ano do Ensino Médio da Escola Estadual Professor Domingos Aparecido dos Santos, da rede pública de Mato Grosso (Figura 22).

Figura 22 – Fotos da E.E. Prof. Domingos Aparecido dos Santos

Fachada | Pátio interno

Corredor do bloco 2 | Corredor do bloco 3

Fonte: a pesquisa.

Essa escola, escolhida por ser o local de trabalho da doutoranda, está localizada em um bairro periférico da cidade de Rondonópolis/MT e conta com 167 profissionais para atender cerca de 1100 estudantes do Ensino Fundamental (anos finais) e do Ensino Médio nos três turnos de funcionamento. O IDEB foi de 4,6 nos anos finais do Ensino Fundamental em 2023, e no Ensino Médio, de 4,2 no mesmo ano de avaliação. A escola, que foi criada em 6 de dezembro de 1982 pelo decreto n°. 2.147, publicado no D. O. 07/12/82, atualmente é tida como de porte médio, comportando 18 salas de aula por turno de funcionamento. Além disso, conta com: 1 laboratório de informática; 1 laboratório de Ciências da Natureza; 1 biblioteca, 1 sala de recursos para atendimentos aos estudantes com deficiência; 1 sala de professores;

1 sala de direção; 1 secretaria; 1 sala de coordenação escolar; 1 sala de vídeo; 1 quadra poliesportiva coberta e iluminada, com anexo de banheiros, que serve também como espaço cultural para a comunidade escolar; 1 cozinha com refeitório (com despensa, banheiro, área de serviço acoplada); 4 dependências para depósito, almoxarifado e arquivo permanente; 4 banheiros (2 femininos e 2 masculinos) – com repartições internas totalizando 4 boxes cada um; 2 banheiros adequados a pessoas com deficiência; e 1 sala de Laboratório de Aprendizagem.

Atualmente, a escola passa por um processo de reforma iniciado em 2023, o que limitou a utilização da sala de informática para a realização da pesquisa, pois esta está sendo utilizada como sala de aula. No entanto, não houve prejuízos para o desenvolvimento do trabalho, pois foram disponibilizados recursos que foram utilizados nas aulas, como o *datashow* e um gabinete contendo os *Chromebooks,* que os estudantes usaram para realizar as atividades da sequência didática.

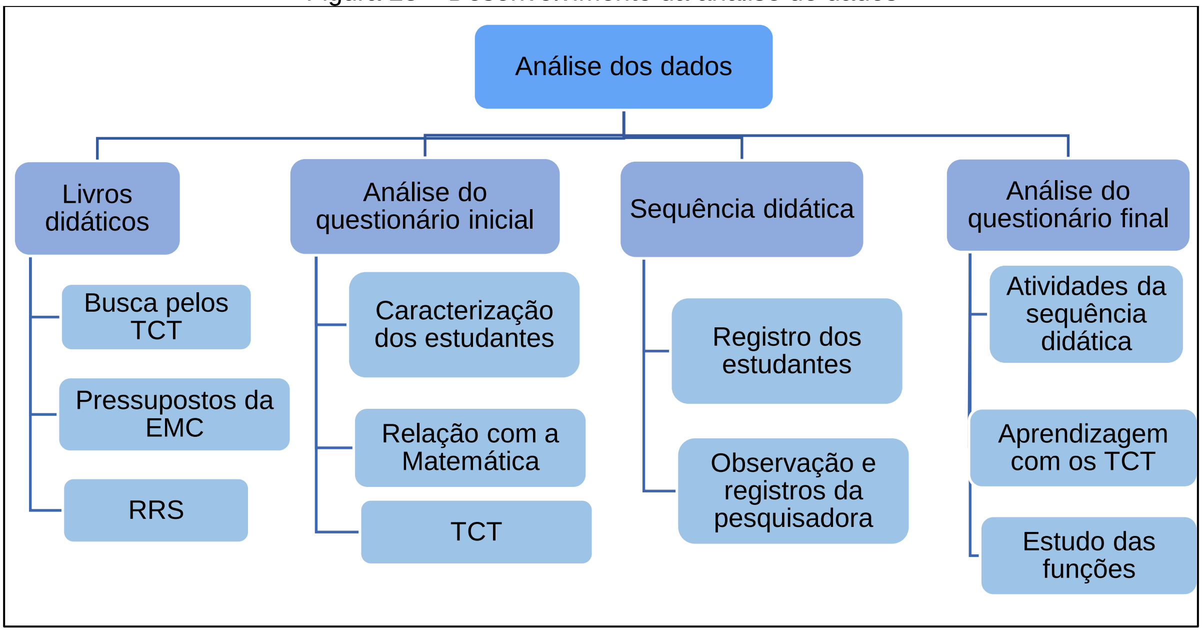
5.5 ANÁLISE DOS DADOS DA PESQUISA

Utilizou-se a pesquisa qualitativa para analisar o processo de ensino e aprendizagem que foi desenvolvido por meio da sequência didática, realizando uma análise interpretativa dos dados construídos ao longo de todas as etapas. Para Creswell (2010, p. 209) “a pesquisa qualitativa é uma forma de investigação interpretativa em que os pesquisadores fazem uma interpretação do que enxergam, ouvem e entendem”. Sendo assim, essas interpretações são marcadas pelas características do pesquisador, ou seja, sua origem, história, contexto e entendimentos.

Para essa análise interpretativa, segue o que Gomes, R. (2016) considera como foco, não uma contagem, mas a exploração de representações sobre o tema investigado. Além disso, segundo o autor, o estudo não precisa abranger a totalidade dessas expressões, porque, geralmente a “dimensão sociocultural das opiniões e representações de um grupo que tem as mesmas características costumam ter muitos pontos em comum ao mesmo tempo que apresentam singularidades próprias da biografia de cada interlocutor” (Gomes, R., 2016, n.p.). Sendo assim, na análise interpretativa, as informações geradas durante a pesquisa precisam ser consideradas levando em conta tanto o que pode ser homogêneo quanto no que se diferencia entre os participantes da pesquisa.

Dessa forma, a análise foi desenvolvida concomitantemente às etapas da coleta de dados, como pode ser observado na Figura 23.

Figura 23 – Desenvolvimento da análise de dados



Fonte: a pesquisa.

Ressalta-se que também foi utilizada a pesquisa quantitativa para a análise de parte dos dados gerados por dois instrumentos da pesquisa, o questionário inicial e o questionário final.

No próximo capítulo, apresenta-se a sequência didática que foi construída para ser trabalhada com os estudantes participantes dessa pesquisa. Para tanto, optou-se por apresentar primeiro as análises dos livros didáticos e do questionário inicial aplicado aos estudantes, pois esses instrumentos forneceram suporte à construção da sequência didática.

6 DAS ANÁLISES DOS LIVROS DIDÁTICOS E DO QUESTIONÁRIO INICIAL À SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Neste capítulo, apresentam-se as etapas realizadas para a construção da sequência didática aplicada aos estudantes participantes, iniciando pela análise dos livros didáticos. Essa análise visou identificar quais Temas Contemporâneos Transversais (TCT) estão presentes nas coleções recebidas pelas escolas de Rondonópolis, Mato Grosso, bem como verificar a possibilidade de exploração dos ambientes de aprendizagem e outros pressupostos da Educação Matemática Crítica (EMC) nessas coleções. Em seguida, apresenta-se a análise do questionário inicial da pesquisa, aplicado aos estudantes para direcionar o trabalho conforme as características do público atendido.

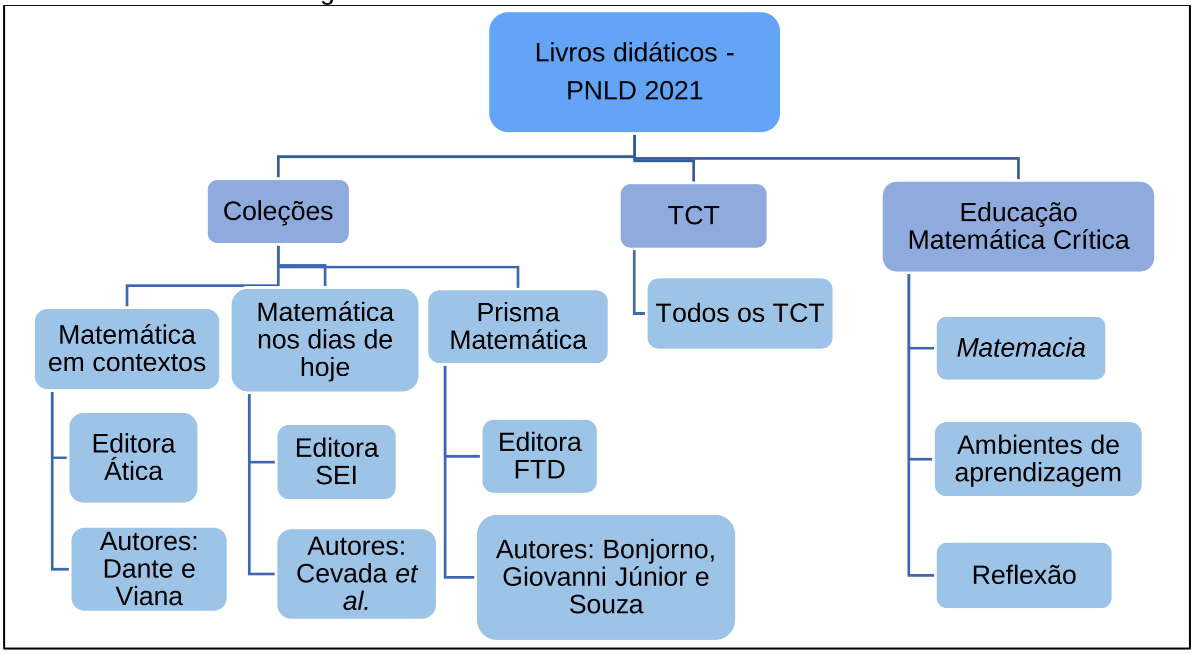
Na última seção desse capítulo, apresenta-se a sequência didática que foi aplicada aos estudantes participantes. Essa sequência didática foi construída para abordar os tópicos de função por meio de atividades contextualizadas, que foram categorizadas como situações de aprendizagem (SA) e atividades propostas (AP). Nessa construção, buscou-se aproximar as atividades da sequência didática à realidade dos estudantes participantes, para potencializar o processo de ensino e aprendizagem. A próxima seção apresenta a primeira etapa desse processo.

6.1 ANÁLISE DOS LIVROS DIDÁTICOS ENVOLVENDO OS TCT E A EMC

Essa seção tem por objetivo apresentar a investigação de como é abordado o conteúdo de funções nos livros didáticos do Ensino Médio, disponibilizados pelo Ministério da Educação, no Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD). Procurou-se identificar os TCT e como estes são utilizados, além disso, como as questões abordam ou contribuem para a EMC. Importante destacar que essa análise foi apresentada em dois artigos publicado por Domingues e Olgin (2023a; 2023b), sendo respectivamente nos anais da XVI Conferência Interamericana de Educação Matemática e na Revista Paradigma.

Essa investigação se justifica porque todos os estudantes das escolas públicas brasileiras têm direito ao acesso aos livros didáticos distribuídos pelo Ministério da Educação (MEC) por meio do Programa Nacional do Livro e do Material Didático (PNLD). Essa distribuição acontece desde o ano de 1937, sendo que a etapa do Ensino Médio, começou a ser contemplada com esse programa em 2005 (FNDE, 2017). A Figura 24 apresenta a organização dessa análise.

Figura 24 – Análise dos livros didáticos PNLD 2021

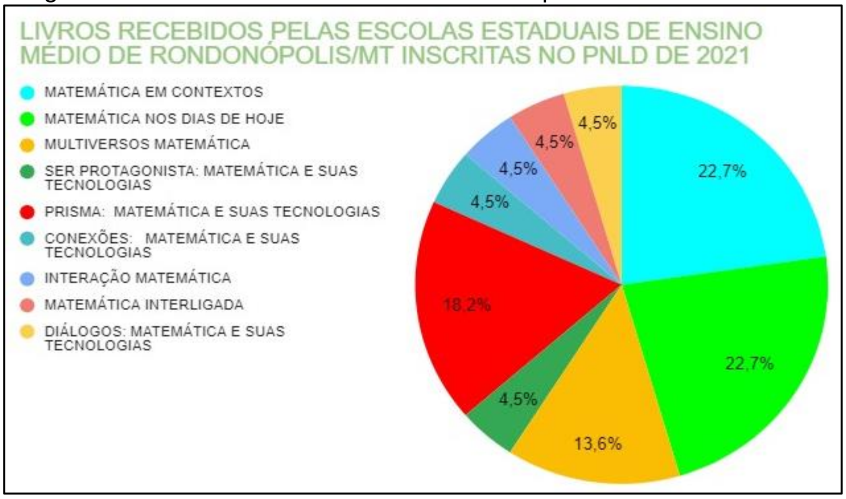


Fonte: a pesquisa.

A partir da verificação do Guia Digital, disponibilizados para as escolas participantes, constatou-se que os livros da edição de 2021 do PNLD estão organizados por temáticas. Todas as coleções nesse PNLD foram divididas em seis volumes, com a disposição dos conteúdos de acordo com a organização dos autores e ou editoras. Dessa forma, o conteúdo de funções está presente em mais de um volume, mas não necessariamente no volume inteiro.

Assim, para atender os objetivos propostos, para a etapa de análise, considerou-se os volumes, em seus respectivos capítulos, que contemplam os conteúdos do estudo de funções. Para a escolha de quais coleções dos livros didáticos seriam analisadas, realizou-se a verificação dos livros aprovados no PNLD de 2021 que foram recebidos pelas escolas estaduais que ofertam o Ensino Médio em Rondonópolis/MT. Para tanto, utilizou-se o Sistema de Material Didático (SIMAD), portal vinculado ao Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação (FNDE), disponível para consulta por qualquer cidadão que tenha interesse pelo assunto. A partir dos dados coletados, elaborou-se um gráfico, conforme Figura 25, para verificar quais as coleções atenderam um maior número de escolas do município pesquisado, considerando o total de 22 escolas estaduais em Rondonópolis/MT que atendem a etapa de Ensino Médio e estavam inscritas no PNLD de 2021.

Figura 25 – Percentual dos livros recebidos pelas escolas estaduais



Fonte: Domingues e Olgin (2023b).

Observa-se que as três coleções recebidas por um maior número de escolas foram: Matemática em contextos; Matemática nos dias de hoje; e Prisma Matemática. A Figura 26 apresenta essas coleções de forma resumida.

Figura 26 – Coleções recebidas por escolas estaduais de Rondonópolis

Editora	Autores	Coleção	Volume analisado
Ática	Luiz Roberto Dante e Fernando Viana	Matemática em contextos	Função afim e função quadrática
			Função exponencial, função logarítmica e sequências
			Trigonometria e sistemas lineares
SEI	Jefferson Cevada, Daniel Romão da Silva, Gabriel Gleich Prado e João Guilherme Boaratti Colpani	Matemática nos dias de hoje	Funções
			Algoritmos e álgebra
			Matemática Financeira e Álgebra
			Geometria e álgebra
FTD	José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Roberto Câmara de Sousa	Prisma Matemática	Conjuntos e funções
			Funções e progressões

Fonte: Domingues e Olgin (2023b).

Para a análise, apresentada na próxima seção, foram utilizadas as versões *on-line* dos livros selecionados, buscando por seções com exercícios ou atividades envolvendo os TCT e procurando identificar os assuntos que são tratados e se contribuem para uma Educação Matemática Crítica. A seguir, apresenta-se a análise das três coleções selecionadas: Matemática em contextos; Matemática nos dias de hoje; e Prisma Matemática.

6.1.1 Coleção: Matemática em contextos

A coleção Matemática em contextos, da editora Ática, dos autores Luiz Roberto Dante e Fernando Viana, está organizada em seis volumes, sendo: *Análise combinatória, probabilidade e computação*; *Estatística e matemática financeira*; *função afim e função quadrática; Função exponencial, função logarítmica e sequências*; *Geometria plana e geometria espacial*; e *Trigonometria e sistemas lineares*. Desses, três tratam do conteúdo de função e foram escolhidos para análise, sendo: *Função afim e função quadrática; Função exponencial, função logarítmica e sequências;* e *Trigonometria e sistemas lineares*.

A análise desses três volumes constatou que as abordagens dos TCT são por meio de textos que introduzem os capítulos, atividades resolvidas, atividades propostas e sugestões de pesquisas. O primeiro volume analisado foi *Função afim e função quadrática*. Esse volume é dividido em dois capítulos e apresenta diversas atividades contextualizadas abrangendo 11 dos 15 TCT como pode-se observar na Tabela 1[10].

Tabela 1 – Os TCT na coleção Matemática em contextos (volume 1)

TCT	Coleção: MATEMÁTICA EM CONTEXTOS		
	Volume 1 analisado: FUNÇÃO AFIM E FUNÇÃO QUADRÁTICA		
	Quantidade de abordagens temáticas encontradas		
	Textos-conexões	Atividades resolvidas ou propostas	Propostas de pesquisas / debates em sala
Ciência e tecnologia	6	33	1
Educação ambiental	3	7	0
Educação para o consumo	0	4	0
Diversidade cultural	2	2	0
Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	1	1	0
Vida familiar e social	0	1	0
Educação para o trânsito	1	1	0
Trabalho	4	23	0
Educação financeira	4	7	0
Educação fiscal	1	3	0
Saúde	1	7	0

Fonte: a pesquisa.

10 Destaca-se que as Tabelas 1 a 9 apresentados foram elaboradas pelas autoras a partir da análise realizada nos livros didáticos selecionados, considerando se as atividades envolviam algum TCT, mesmo que não explorado com profundidade, pois entende-se nesta pesquisa que as atividades podem ser ampliadas ou reformuladas pelos docentes em seus planejamentos, buscando atender os objetivos propostos.

Com relação à EMC, nesse primeiro volume, foram encontradas situações-problema com utilização de tabelas para definir a função afim, e atividades em que se deve tomar decisão de compra por meio dos cálculos, possibilitando que os estudantes possam interpretar criticamente situações econômicas com o olhar da Matemática.

O segundo volume dessa coleção, *Função exponencial, função logarítmica e sequências* é divido em três capítulos, mas o conteúdo de função está presente somente nos dois primeiros. Dessa forma, os capítulos analisados apresentam atividades ou textos envolvendo 9 dos 15 TCT, mostrados na Tabela 2.

Tabela 2 – Os TCT na coleção Matemática em contextos (volume 2)

TCT	Coleção: MATEMÁTICA EM CONTEXTOS Volume 2 analisado: FUNÇÃO EXPONENCIAL, FUNÇÃO LOGARÍTMICA E SEQUÊNCIAS Quantidade de abordagens temáticas encontradas		
	Textos-conexões	Atividades resolvidas ou propostas	Propostas de pesquisas / debates em sala
Ciência e tecnologia	9	70	1
Educação ambiental	2	4	0
Educação para o consumo	1	11	0
Diversidade cultural	1	1	0
Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	1	1	0
Vida familiar e social	2	1	0
Trabalho	1	3	0
Educação financeira	0	10	0
Saúde	5	8	3

Fonte: a pesquisa.

Nesse segundo volume, há situações que podem promover a EMC, pois a partir de textos introdutórios dos capítulos, há possibilidades para exploração da temática das mídias sociais, podendo ser conduzida para uma abordagem crítica, bem como uma outra situação que visa instigar os estudantes acerca de um processo de investigação crítica sobre as mudanças demográficas na América Latina, devido ao crescimento da população das pessoas com 60 anos ou mais.

O título do terceiro volume é *Trigonometria e sistemas lineares*. Esse volume é dividido em dois capítulos, mas somente o primeiro foi analisado, por envolver o conteúdo de funções. Assim, ele apresenta somente 5 TCT, como pode ser visto na Tabela 3.

Tabela 3 – Os TCT na coleção Matemática em contextos (volume 3)

TCT	Coleção: MATEMÁTICA EM CONTEXTOS		
	Volume 3 analisado: TRIGONOMETRIA E SISTEMAS LINEARES		
	Quantidade de abordagens temáticas encontradas		
	Textos-conexões	Atividades resolvidas ou propostas	Propostas de pesquisas / debates em sala
Ciência e tecnologia	0	1	3
Educação ambiental	1	2	0
Educação para o trânsito	0	1	1
Trabalho	1	1	0
Saúde	0	4	1

Fonte: a pesquisa.

Observa-se, ao longo dessa coleção, que os autores tiveram um olhar para o trabalho com temáticas, o que pode ser um indicativo de que há avanços em termos de uma Educação Matemática contextualizada. Para Argudín (2005), isso proporciona a promoção de um ensino, no qual os estudantes vivenciem situações com vários temas que os possibilitem construir conhecimentos que lhes sejam úteis para participar de forma ativa e crítica tanto no âmbito pessoal, quanto profissional ou em comunidade (Domingues; Olgin, 2023b).

Algumas atividades foram selecionadas para exemplificar como os TCT foram abordados. A Figura 27, apresenta um exemplo de atividade envolvendo o tema ciência e tecnologia, no qual é explorado o conteúdo de função exponencial por meio de uma discussão envolvendo os recursos tecnológicos para a divulgação de conteúdo, seja utilizando um aplicativo de mensagem ou um influenciador digital. Por ser uma situação-problema, o tema explorado não é aprofundado, mas tem a preocupação de chamar a atenção dos estudantes para o compartilhamento de notícias falsas, bem como para a influência de profissionais que divulgam conteúdos em um canal *on-line*, na tomada de decisões a partir do material que estão vendo.

Figura 27 – Situações-problema envolvendo a função exponencial

Situação 1

Não escreva no livro.

Mensagens via aplicativo

Os *smartphones* e os aplicativos de mensagens ampliaram as possibilidades de comunicação no século XXI. No entanto, aumentou também o compartilhamento de conteúdo falso, como notícias manipuladas ou dicas de saúde sem comprovação científica.

Certamente você já deve ter recebido alguma corrente de mensagem via aplicativo de mensagens ou rede social, não é? Trata-se de mensagens que, ao final do conteúdo, pedem para serem enviadas para certa quantidade de contatos. Algumas são apenas uma brincadeira, enquanto outras pretendem espalhar uma *fake news* (notícia falsa). O maior objetivo das correntes de mensagens é que a quantidade de envios cresça de maneira muito rápida para alcançar muitas pessoas.

Vamos supor que uma corrente peça para ser enviada para outras 3 pessoas e você fará esse envio na 1ª hora. Depois, cada uma das pessoas que receberam a corrente de você farão o envio para 3 novas pessoas na 2ª hora.

a) Quantas novas pessoas recebem a mensagem na 1ª hora? E na 2ª hora? 3 pessoas. 9 pessoas.

b) Seguindo a mesma regularidade, quantas pessoas recebem a mensagem na 3ª hora? 27 pessoas.

c) De que maneira a quantidade y de novas pessoas que recebem a corrente pode ser escrita em **função** da quantidade x de horas após o início? Converse com os colegas e crie alguma forma de representar essa relação. Exemplo de resposta: $y = 3^x$

Professor, os estudantes podem apresentar a relação entre a quantidade y de novas pessoas que recebem a corrente após x horas do início de diferentes maneiras, não sendo obrigatório o uso da representação algébrica. Neste momento, é importante explorar o entendimento deles de como ocorre a relação, explicitando-a oralmente ou pela língua materna; depois, no decorrer deste capítulo, serão feitas as formalizações e as representações com linguagem matemática.

Situação 2

a) Exemplo de resposta: $y = 10^x$.
Professor, novamente os estudantes podem apresentar a relação entre o total y de visualizações e a quantidade x de dias que se passaram da postagem de diferentes maneiras, não sendo obrigatório o uso da representação algébrica.

Influenciador digital

Um influenciador digital que costuma atualizar o canal com certa frequência observou que a quantidade de visualizações de um vídeo aumentava em **função** da quantidade de dias decorridas após a postagem. No 1º dia, ele verificou que havia apenas 10 visualizações. No dia seguinte, o total de visualizações mudou para 100. Após 3 dias da postagem, esse número já havia chegado a 1 000 visualizações.

Um influenciador digital é uma pessoa que divulga conteúdos em um canal *on-line* com o objetivo de atrair grande público. Geralmente, os influenciadores digitais conseguem muitos usuários fiéis, que visualizam todas as publicações e que, muitas vezes, podem ser influenciados na tomada de decisões de acordo com o conteúdo que veem.

a) O que você observa no total y de visualizações em função da quantidade x de dias que se passaram da postagem?

b) Seguindo esse padrão de crescimento, quantas visualizações esse influenciador digital teria no 4º dia da postagem? E no 5º dia? 10000 visualizações. 100000 visualizações.

c) Pense nessa situação e no crescimento que costuma acontecer nas visualizações de postagens. Você acha que é comum ter quantidades como 10, 100 e 1 000 visualizações em cada dia? E é esperado manter um padrão de crescimento diário como esse? Explique suas respostas. Resposta esperada: Não. Resposta esperada: Não. Exemplo de justificativa: Apesar de ser comum o aumento da quantidade de visualizações de postagens, não vemos quantidades diárias em dezenas, centenas ou unidades de milhar inteiras, bem como o aumento diário não costuma ser constante ou depender diretamente da quantidade de visualizações do dia anterior.

Fonte: Dante e Viana (2020b, p. 34).

Ainda, nas orientações ao professor Dante e Viana (2020b) indicam que nessas atividades, *Situação 1* e *Situação 2,* os estudantes são convidados a investigar contextos relacionados ao conteúdo, sem necessariamente estabelecer uma representação algébrica com estrutura de lei de função, pois estão introduzindo o assunto e visam verificar os conhecimentos prévios dos estudantes, para depois realizar a formalização do conteúdo. Assim, com relação ao tema proposto, os autores colocam que:

Na situação 1, converse com os estudantes sobre a rapidez na veiculação de uma informação na internet, o que por vezes pode permitir pouca reflexão sobre o que estamos compartilhando. Promova uma conversa das vantagens e desvantagens dessa facilidade em compartilhar informações. O item c da situação 2 também permite uma conversa a respeito de o crescimento das visualizações seguir, de fato, na realidade, um crescimento exponencial (Dante; Viana, 2020b, p. 34).

Outro exemplo pode ser observado na seção denominada *conexões* (Figura 28). Nessa seção, Dante e Viana (2020b) apresentam um texto referente à construção de um edifício com base no processo de regulação de temperatura dos cupinzeiros, de forma a conectar o conteúdo de função afim aos temas ciência e tecnologia, bem como a educação ambiental. De acordo com os autores, a atividade oportuniza a abordagem dos seguintes aspectos: eficiência térmica, pois o estudo tecnológico do prédio possibilita reduzir o consumo de energia elétrica em regiões de clima quente; capacidade térmica, explorando a razão entre a variação da quantidade de calor com relação a variação da medida de temperatura; e eficiência ambiental, porque a temática traz um processo produtivo que buscou minimizar os impactos socioambientais.

Figura 28 – Texto apresentado na seção *conexões*

Edifício sustentável inspirado em cupinzeiro

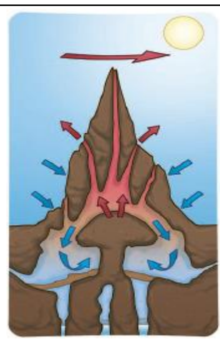
O Eastgate Centre, localizado em Harare, no Zimbábue, foi uma das edificações construídas com os princípios da biomimética – área da Ciência que estuda fenômenos e processos da natureza para inspirar projetos de inovação em várias áreas do conhecimento –, tendo como referência as estruturas dos imensos cupinzeiros africanos para manter a medida de temperatura interna agradável.

Os cupins são incríveis construtores: podem construir um cupinzeiro em pouquíssimo tempo e conseguem regular a medida de temperatura interna para cultivar fungos para a própria alimentação. Esses fungos devem ser mantidos a 30 °C e a medida de temperatura em Zimbábue pode variar de 1,6 °C durante a noite a 40 °C durante o dia.

O segredo para a manutenção da medida de temperatura interna é a abertura de novos túneis e o fechamento de túneis antigos a fim de que o ar noturno entre e circule na parte inferior do monte, passe por galerias úmidas e suba para o topo até sair do cupinzeiro.

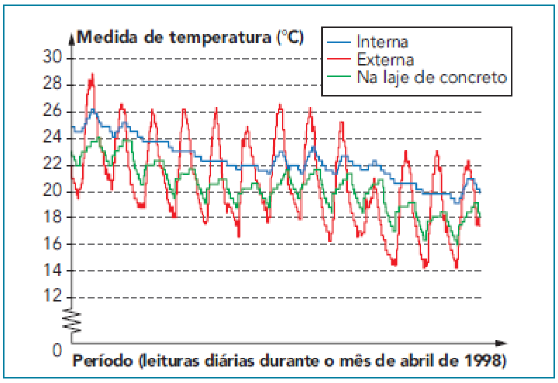
O cupinzeiro africano é formado pelos cupins da espécie Macrotermes. Essas construções podem ter medida de comprimento de altura de até 8 metros, comportando uma população de em média 2 milhões de cupins. Foto tirada na Namíbia, em 2018.

Esquema mostrando a circulação de ar frio (em azul) e ar quente (em vermelho) dentro de um cupinzeiro.



Assim como o cupinzeiro, o edifício Eastgate, idealizado pelo arquiteto Mick Pearce, vale-se de túneis por onde entra o ar noturno, com medida de temperatura mais baixa, e, durante o dia, quando a medida de temperatura externa é mais elevada, circula por câmaras (no caso do edifício, salas comerciais). O ar aquecido é canalizado para as chaminés no topo do prédio, por onde é eliminado. As trocas de ar com o ambiente externo são reguladas e acontecem 10 vezes durante a noite e 2 vezes durante o dia.

O gráfico a seguir mostra a variação diária das medidas de temperatura, durante alguns dias do mês de abril de 1998, dentro do edifício, na estrutura e fora dele.



Esse empreendimento sustentável tem custo de energia elétrica 35% menor do que o de um prédio convencional na mesma cidade, uma vez que não utiliza sistema de ar-condicionado, mas apenas ventiladores de exaustão ligados em horários determinados para auxiliar na circulação do ar, como em um cupinzeiro.

Conecte com o texto

1. Para escolher os materiais que comporiam a estrutura do Eastgate Centre, o arquiteto Mick Pearce (1938-), nascido no Zimbábue, teve que estudar como se comportava a variação das medidas de temperatura deles. A capacidade térmica (C) de um objeto relaciona a variação da medida de temperatura (ΔT) com a quantidade de calor (ΔQ) recebida: $C = \frac{\Delta Q}{\Delta T}$. Para uma mesma quantidade de calor recebida, seria interessante para o edifício sustentável de Pearce optar por materiais com menor ou com maior capacidade térmica?

2. A capacidade térmica (C) também relaciona a medida de massa (m) de uma substância e o calor específico (c) dessa mesma substância: C = m·c. Considerando que um tijolo de cerâmica e um bloco de concreto tenham a mesma medida de massa e que o calor específico da cerâmica é de 0,92 J/kg? K, qual seria o material mais interessante para o edifício sustentável de Pearce?

Fonte: Dante e Viana (2020a, p. 54-56).

Entende-se que esta atividade sobre os TCT, educação ambiental e ciência e tecnologia, pode proporcionar aos estudantes uma reflexão quanto à importância do conteúdo matemático de funções para o avanço do conhecimento científico, em particular, para compreender e explicar como a estrutura térmica de um cupinzeiro, contribuiu em um estudo para a aplicação de um modelo similar que ajuda na redução dos impactos causados pela sociedade ao ambiente. Tal fato vai ao encontro da pesquisa de Olgin (2015) que indica a necessidade de contextualizar os conteúdos matemáticos, promovendo uma educação crítica aos estudantes, na qual eles compreendem os conteúdos estudados e os relacionam a problemas importantes advindos da vida em sociedade. Ainda, perceber que o trabalho com temáticas vem sendo explorado nos livros didáticos, chama a atenção para o fato mencionado por Sacristán e Gomes (2007) referente a função cultural das escolas, de oportunizar um trabalho que conecte os conhecimentos escolares a outros conhecimentos, dando sentido aos mesmos.

6.1.2 Coleção: Matemática nos dias de hoje

A coleção Matemática nos dias de hoje, da editora SEI, tem como autores, Jefferson Cevada, Daniel Romão da Silva, Gabriel Gleich Prado e João Guilherme Boaratti Colpani. A Coleção tem seis volumes: *Algoritmos e álgebra*; *Funções*; *Matemática financeira e álgebra*; *Geometria e álgebra*; *Medidas e geometria*; e *Probabilidade e estatística*. Desses, foram analisados quatro volumes que abordam conteúdos relacionados a função: *Funções*; *Algoritmos e álgebra*; *Matemática financeira e álgebra*; e *Geometria e álgebra.*

Essa coleção apresenta abordagens com os TCT por meio de textos, situações-problema, atividades resolvidas e propostas e algumas sugestões de pesquisas e debates em sala. O volume *Funções* abrange três capítulos que apresentam 10 dos 15 TCT, como pode ser observado na Tabela 4.

Tabela 4 – Os TCT na coleção Matemática nos dias de hoje (volume 1)

TCT	Coleção: MATEMÁTICA NOS DIAS DE HOJE		
	Volume 1 analisado: FUNÇÕES		
	Quantidade de abordagens temáticas encontradas		
	Textos-conexões	Atividades resolvidas ou propostas	Propostas de pesquisas / debates em sala
Ciência e tecnologia	11	18	4
Educação ambiental	2	3	1
Educação para o consumo	3	7	1
Vida familiar e social	2	4	4
Educação para o trânsito	3	0	2
Educação em direitos humanos	2	1	2
Trabalho	3	23	0
Educação financeira	1	7	0
Saúde	0	4	0
Educação alimentar e nutricional	0	4	0

Fonte: a pesquisa.

Considerando os pressupostos da EMC, esse volume apresenta situações em que são realizados cálculos para a tomada de decisões, além de atividades fundamentadas nos ambientes de aprendizagem elencados por Skovsmose (2010). Também inclui uma proposta de simulação de empreendedorismo, que pode ser explorada como um cenário de investigação (Domingues; Olgin, 2023a). Essa abordagem é amparada no argumento social da democratização trazida por

Skovsmose (2001, p. 39), pois “tenta identificar um assunto relevante da Educação Matemática por meio de reflexões sobre possibilidades para construção e o aperfeiçoamento de instituições democráticas e capacidades democráticas na sociedade, melhorando o conteúdo da educação”.

O segundo volume analisado, *Algoritmos e álgebra,* é dividido em três capítulos, somente o segundo foi analisado por apresentar tópicos de função. O livro tem atividades com quatro TCT, como pode ser observado na Tabela 5.

Tabela 5 – Os TCT na coleção Matemática nos dias de hoje (volume 2)

TCT	Coleção: MATEMÁTICA NOS DIAS DE HOJE		
	Volume 2 analisado: ALGORITMOS E ÁLGEBRA		
	Quantidade de abordagens temáticas encontradas		
	Textos-conexões	Atividades resolvidas ou propostas	Propostas de pesquisas / debates em sala
Ciência e tecnologia	0	0	1
Educação financeira	2	3	1
Educação fiscal	0	1	0
Saúde	0	2	0

Fonte: a pesquisa.

No que se refere à promoção da EMC, esse segundo volume apresenta atividades que exigem reflexão matemática para a resolução de situações-problema.

O volume *Matemática financeira e álgebra* é dividido em três capítulos, sendo o segundo escolhido para análise por ter tópicos de função. Assim, apresenta quatro temas contemporâneos, visando o desenvolvimento de conteúdos da matemática financeira e funções exponenciais e logarítmicas. A Tabela 6 apresenta a abordagem desses TCT.

Tabela 6 – Os TCT na coleção Matemática nos dias de hoje (volume 2)

TCT	Coleção: MATEMÁTICA NOS DIAS DE HOJE		
	Volume 3 analisado: MATEMÁTICA FINANCEIRA E ÁLGEBRA		
	Quantidade de abordagens temáticas encontradas		
	Textos-conexões	Atividades resolvidas ou propostas	Propostas de pesquisas / debates em sala
Ciência e tecnologia	0	0	1
Educação financeira	2	3	1
Educação fiscal	0	1	0
Saúde	0	2	0

Fonte: a pesquisa.

Esse terceiro volume aborda o conteúdo de função relacionado com juros simples e juros composto. Apresenta atividades que envolvem situações nas quais o estudante precisa fazer uso da reflexão para tomar decisões, promovendo o desenvolvimento da EMC.

O volume de *Geometria e álgebra* apresenta um capítulo com as funções periódicas, no qual observou-se atividades contemplando somente dois TCT, ciência e tecnologia, e educação ambiental, como pode-se observar na Tabela 7.

Tabela 7 – Os TCT na coleção Matemática nos dias de hoje (volume 4)

TCT	Coleção: MATEMÁTICA NOS DIAS DE HOJE Volume 4 analisado: GEOMETRIA E ÁLGEBRA Quantidade de abordagens temáticas encontradas		
	Textos-conexões	Atividades resolvidas ou propostas	Propostas de pesquisas / debates em sala
Ciência e tecnologia	4	3	0
Educação ambiental	1	0	0

Fonte: a pesquisa.

Esse último volume analisado apresenta poucas situações-problema contextualizadas, mas apresenta atividades utilizando um software de geometria dinâmica que incentiva os estudantes a fazerem investigações matemáticas, oportunizando a dedução de conceitos.

A investigação mostrou que essa coleção apresenta livros contextualizados, aborda os temas contemporâneos por meio de seções como: *contato* que traz um tema que introduz o conteúdo a ser trabalhado; *no entorno* que explora conhecimentos para analisar, criar ou propor formas de intervir no entorno; *híbridos* que visa proporcionar aos estudantes conexões entre áreas do conhecimento ou diferentes temas, dando espaço para a reflexão; *travessias* cujo foco é aspectos específicos do processo de investigar e modelar a realidade, possibilitando o desenvolvimento da *matemacia*; *nuvens* que apresenta como explorar ferramentas digitais e virtuais envolvendo algum conteúdo matemático, entre outros (Domingues; Olgin, 2023b). Destaca-se que essas seções buscam promover propostas de trabalho em grupos, pesquisas e produção de materiais digitais. Tais aspectos levam refletir acerca das considerações sinalizadas por Olgin (2015) sobre a importância de se trabalhar com temáticas, utilizando diferentes metodologias e recursos de forma a potencializar o processo de ensino e aprendizagem dos conteúdos matemáticos.

Os autores Cevada *et al.* (2020a), no capítulo sobre a função polinomial de 1º grau, trazem como fio condutor para o desenvolvimento desse conteúdo o tema educação para o trânsito, no qual exploram questões como: o uso da inteligência artificial para a resolução de problemas envolvendo monitoramento do fluxo de veículos; mobilidade urbana; cinemática; meios de transporte; fatores de risco no trânsito; entre outros. Cabe evidenciar, que nesse capítulo, também são apresentados outros assuntos além do mencionado, como no conteúdo de razão e proporção e taxa de variação da função afim que promove uma discussão sobre a diferença salarial entre homem e mulher, que ainda existe no Brasil, violando os direitos humanos (Figura 29).

Figura 29 – Texto sobre diferença salarial entre os sexos

TRAVESSIAS

Leia o trecho de um texto.

Natália*, 40 anos e Felipe*, 42 anos, são professores, têm formação semelhante e exercem funções semelhantes, mas ao longo de 20 anos de carreira, Natália sempre ganhou menos que o marido.

O caso mais marcante foi há dois anos, quando ela fez uma entrevista de emprego para uma escola particular, em São Carlos (SP), e recebeu a proposta salarial de R$ 800 por mês para lecionar seis aulas de 40 minutos cada, por manhã. “Na semana seguinte, a escola conversou com o meu marido e ofereceu R$ 1,7 mil pelo mesmo trabalho”, diz Natália.

O caso de Natália e Felipe não é isolado.

Historicamente, no Brasil, homens ganham mais que mulheres. Após sete anos de quedas consecutivas, em 2019, houve um aumento da diferença dos salários de mulheres e homens de 9,2% em relação a 2018. [...]

TOKARNIA, Mariana. Após 7 anos em queda, diferença salarial de homens e mulheres aumenta. 8 mar. 2020. Agência Brasil. Rio de Janeiro. Disponível em: https://agenciabrasil.ebc.com.br/direitos-humanos/noticia/2020-03/apos-7-anos-em-queda-diferenca-salarial-de-homens-e-mulheres. Acesso em: 16 jun. 2020.

Fonte: Cevada *et al.* (2020a, p. 32).

Nessa atividade (Figura 29), os autores apresentam um gráfico do período de 2012 a 2016 sobre o rendimento habitual médio mensal de todos os trabalhos em razão de rendimentos, por sexo. A partir desse gráfico os estudantes são convidados a analisar a questões envolvendo a diferença salarial e a pesquisar a lei 1723, de 8 de novembro de 1952, a qual se refere a igualdade de salário, sem distinção de sexo, nacionalidade ou idade.

Outro exemplo de atividade envolve o tema educação financeira, explorando o assunto imposto de renda (Figura 30).

Figura 30 – Atividade proposta com o tema Educação Financeira

O Imposto de Renda

O Imposto de Renda de Pessoa Física (IRPF) precisa ser declarado anualmente por todos os cidadãos que possuem bens ou algum tipo de renda que ultrapasse um certo limite (para mais detalhes sobre a obrigatoriedade de declaração, visite http://receita.economia.gov.br/interface/cidadao/irpf/2020/apresentacao/obrigatoriedade).

A alíquota do IRPF, ou a porcentagem que um cidadão precisa pagar sobre seus rendimentos, é calculada em diferentes extratos, evoluindo de forma progressiva, pagando mais quem ganha mais. Segundo a Receita Federal, o imposto:

Incide sobre a renda e os proventos de contribuintes residentes no País ou residentes no exterior que recebam rendimentos de fontes no Brasil. Apresenta alíquotas variáveis conforme a renda dos contribuintes, de forma que os de menor renda não sejam alcançados pela tributação.

Disponível em: http://receita.economia.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica. Acesso em: 29 jul. 2020.

A tabela de incidência do IRPF é:

A PARTIR DO MÊS DE ABRIL DO ANO-CALENDÁRIO DE 2015:

BASE DE CÁLCULO (R$)	ALÍQUOTA IRPF	PARCELA A DEDUZIR DO IRPF (R$)
Até 1.903,98	Isento de pagamento	Isento de pagamento
De 1.903,99 a 2.826,65	7,5%	142,8
De 2.826,66 a 3.751,05	15,0%	354,8
De 3.751,06 a 4.664,68	22,5%	636,13
Acima de 4.664,68	27,5%	869,36

Disponível em: http://receita.economia.gov.br/acesso-rapido/tributos/irpf-imposto-de-renda-pessoa-fisica. Acesso em: 29 jul. 2020.

Isso significa que alguém que ganhe R$ 2.500,00, por exemplo, terá que pagar imposto de renda somente sobre o valor que ultrapassar R$ 1.903,98, ou seja, R$ 596,02. Sobre tal valor, ele pagará 7,5%. Vamos lembrar como é feito esse cálculo? Utilizamos a regra de três, lembrando que 100% correspondem a R$ 596,02: $\frac{596{,}02}{100} = \frac{x}{7{,}5} \Rightarrow x = 44{,}70$ (aproximado para 2 ordens decimais)

O valor devido de imposto nesse caso seria de R$ 44,70.

Outra alternativa para realizar esse cálculo é utilizando a última coluna que nos diz a parcela a ser deduzida. Ela já possui o valor que estaríamos pagando a mais de imposto se o calculássemos sobre o valor total. No exemplo, imagine que calculássemos 7,5% de R$ 2.500,00, em vez de calcular sobre R$ 596,02:

$$\frac{2500}{100} = \frac{x}{7{,}5} \Rightarrow x = 187{,}50$$

Ao deduzir a parcela de R$ 142,80, encontramos 187,50 – 142,80 = 44,70, o mesmo valor encontrado anteriormente. Assim, para calcular o imposto a pagar por alguém na faixa da alíquota de 22,5%, por exemplo, podemos efetuar o cálculo do percentual (alíquota) sobre o total e subtrair R$ 636,13 do resultado encontrado.

Fonte: Cevada *et al.* (2020a, p. 89-90).

Nessa atividade, busca-se mostrar para os estudantes a aplicação das funções definidas por várias sentenças, utilizando uma situação-problema atual, que envolve um assunto enfrentado por vários cidadãos brasileiros que exercem atividades profissionais, mas que muitas vezes não sabe o que é, para que serve e como se calcula, o imposto de renda pessoa física. Nesse sentido, entende-se que temas como o desenvolvido nesta atividade precisam ser explorados no Ensino

Médio, pois possibilita momentos de compreensão, análise e reflexão dos estudantes frente a essa temática, de maneira que eles possam compreender a sua finalidade.

Outro exemplo envolvendo o tema educação financeira é apresentado pelos autores no conteúdo de juros e funções exponenciais e logarítmicas, no qual trazem uma discussão sobre o *spread* bancário, que corresponde à diferença entre os juros pagos pelo banco quando se faz um investimento e os juros cobrados quando se faz um empréstimo (Figura 31).

Figura 31 – Exemplo de atividade com o tema *spread* bancário

O que é o *spread* bancário e o que ele tem a ver com os juros que você paga?

Sempre que se fala em juros altos no Brasil, o *spread* bancário é mencionado. Mas afinal qual o significado de *spread*?

O *spread* é a diferença entre os juros que os bancos pagam quando você investe seu dinheiro e os juros que cobram quando você faz um empréstimo. (...)

É como em qualquer outro negócio. Um supermercado, por exemplo, paga um preço quando compra seus produtos dos fornecedores e cobra outro quando os vende para os clientes. É dessa diferença que ele tira o dinheiro para cobrir seus custos, como frete e salários, e conseguir lucro.

Nos bancos é igual. A diferença é que o produto deles é o dinheiro, e o preço do dinheiro são os juros. O problema é que há pouca concorrência no setor bancário, faltam opções aos clientes e os juros cobrados ficam altos, dizem especialistas. (...)

Para bancos, culpa é da inadimplência

Além do preço que o banco paga para “comprar” o dinheiro que vai emprestar — os juros de captação —, os juros finais que o cliente paga embutem outros quatro grandes custos. São eles que compõem o *spread*:

• Despesas administrativas: Os gastos de operação, como segurança, agências, caixas eletrônicos, salários e outros serviços.

• Tributos: Os impostos pagos pelos bancos.

• Inadimplência: Créditos concedidos e não pagos pelos devedores.

• Lucros: A remuneração do dono e acionistas do banco.

Segundo os bancos, a principal razão que puxa os juros e os *spreads* para cima é a inadimplência. “É um dinheiro que eles perdem”, disse o economista Michael Viriato, coordenador do Laboratório de Finanças do Insper. “É como em uma distribuidora de energia ou uma faculdade: se alguns não pagam, a empresa sobe o preço de todos para cobrir o prejuízo.”

Para especialistas, falta concorrência

Especialistas, porém, questionam outro ponto: a falta de concorrência. “Ela piorou muito”, disse Rabi, da Serasa Experian. “Em 2005, os cinco maiores bancos detinham cerca de 60% das operações de crédito do país e hoje eles concentram 80%; isso aumenta o poder de oligopólio deles.” (...)

ELIAS, Juliana. O que é o spread bancário e o que ele tem a ver com os juros que você paga? UOL, 3 fev. 2019. Disponível em: https://economia.uol.com.br/noticias/redacao/2019/02/03/juros-altos-spread-bancario.htm. Acesso em: 16 jul. 2020.

APÓS A LEITURA

· Segundo o texto, “Sempre que se fala em juros altos no Brasil, o *spread* bancário é mencionado”. A partir dos elementos apresentados no texto, quais as relações entre juros altos e o *spread* bancário?

· O texto apresenta dois pontos de vista diferentes sobre o porquê do grande *spread* bancário no Brasil. Explique cada um deles.

· Pesquise sobre as justificativas dadas pelos dois pontos de vista e converse com seus colegas sobre eles.

Fonte: Cevada *et al*. (2020c, p. 86).

Considera-se importante convidar os estudantes a compreender, discutir e refletir sobre questões que envolvem o mercado financeiro, buscando ampliar seus conhecimentos a respeito de seus diferentes produtos (poupança, empréstimo, investimento, financiamento) e seus impactos tanto no orçamento familiar, quanto em sua qualidade de vida.

Nessa coleção, as temáticas selecionadas pelos autores chamaram a atenção, pois discutem questões importantes para a vida em sociedade, como indica Azcárate (1997), que é necessário a abordagem de assuntos relevantes para os estudantes, que os oportunizem a compreender, analisar, refletir e agir criticamente. Dessa forma, concorda-se com Olgin (2015) quando menciona que para trabalhar com temáticas é preciso selecionar assuntos importantes de serem tratados ao longo do Currículo de Matemática, possibilitando não só o desenvolvimento de conteúdos, mas a ampliação da rede de conhecimentos dos estudantes com relação a assuntos que impactam a sociedade tanto de forma local, quanto global.

6.1.3 Coleção: Prisma Matemática

A coleção Prisma Matemática dos autores José Roberto Bonjorno, José Ruy Giovanni Júnior e Paulo Roberto Câmara de Sousa é organizada em seis volumes: *Conjuntos e funções*; *Funções e progressões*; *Estatística, combinatória e probabilidade*; *Geometria e trigonometria*; *Geometria*; e *Sistemas, matemática financeira e grandezas*. Desses, foram analisados dois volumes que abordam os conteúdos de funções, *Conjuntos e funções* e *Funções e progressões*.

A análise mostrou que o livro aborda os temas contemporâneos por meio de textos, situações-problema, atividades e propostas de pesquisas. Essa coleção, nos volumes, apresenta seções que merecem destaque na análise em relação à EMC (Domingues; Olgin, 2023a). No final de cada capítulo, tem-se a seção intitulada *Conexões* que apresenta um texto seguido de algumas questões que relacionam a Matemática com temas do cotidiano, com o propósito de desenvolver a competência leitora, a cidadania e o senso crítico dos estudantes. Dessa forma, o trabalho desenvolvido nessa seção possibilita a valorização e utilização dos conhecimentos para explicar a realidade, levando os estudantes a relacionar fatos a conceitos estudados. Outra seção apresentada, *Explorando a tecnologia*, traz contribuições para o desenvolvimento da reflexão e análise crítica dos estudantes a partir da possibilidade de eles elaborarem e testarem hipóteses relacionadas aos tópicos estudados, ou seja, são cenários de investigação que possibilitam o desenvolvimento da *matemacia*. Ainda, para Skovsmose (2001) o desenvolvimento do conhecimento tecnológico é visto como necessário em todos os níveis educacionais, pois para ele a EM é parte integrante da tecnologia e a competência matemática é parte central da competência democrática.

No primeiro volume, *Conjuntos e funções*, dividido em 3 capítulos, analisou-se os capítulos 2 e 3, onde encontram-se 7 dos TCT, como apresentado na Tabela 8.

Tabela 8 – Os TCT na coleção Prisma Matemática (volume 1)

TCT	Coleção: Prisma Matemática Volume 1 analisado: CONJUNTOS E FUNÇÕES Quantidade de abordagens temáticas encontradas		
	Textos-conexões	Atividades resolvidas ou propostas	Propostas de pesquisas / debates em sala
Ciência e tecnologia	6	26	0
Educação ambiental	2	2	3
Educação para o consumo	1	2	0
Trabalho	2	24	0
Educação financeira	1	12	0
Saúde	1	5	0
Educação alimentar e nutricional	1	0	0

Fonte: a pesquisa.

No segundo volume, *Funções e progressões,* dividido em quatro capítulos, foram analisados os capítulos 1, 2 e 3 que apresentam 7 dos TCT, como apresentado na Tabela 9.

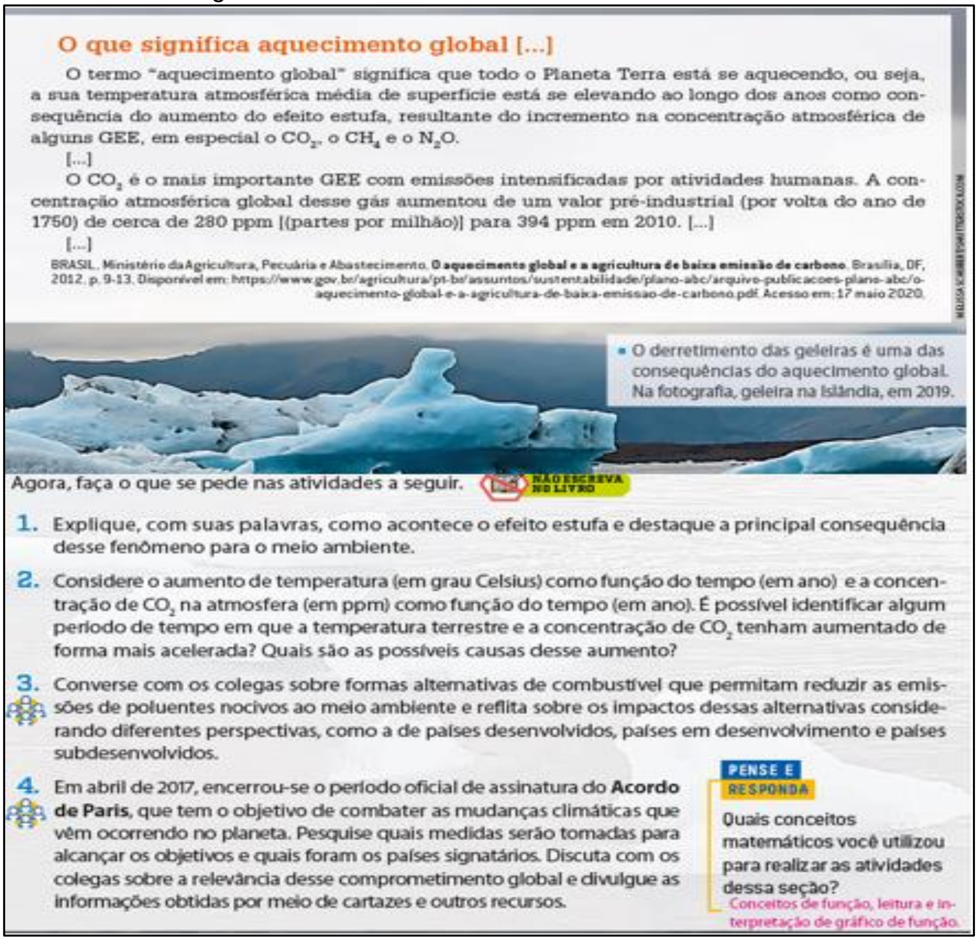
Tabela 9 – Os TCT na coleção Prisma Matemática (volume 2)

TCT	Coleção: Prisma Matemática Volume analisado: FUNÇÕES E PROGRESSÕES Quantidade de abordagens temáticas encontradas		
	Textos-conexões	Atividades resolvidas ou propostas	Propostas de pesquisas / debates em sala
Ciência e tecnologia	6	33	0
Educação ambiental	3	5	1
Educação para o consumo	2	3	1
Trabalho	1	4	0
Educação financeira	1	6	2
Educação fiscal	3	2	4
Saúde	4	4	4

Fonte: a pesquisa.

Nessa coleção, um exemplo de atividade envolvendo os temas educação ambiental e educação para o consumo é desenvolvido na seção *conexões*, do capítulo a respeito da função afim. Para trabalhar a temática, é proposto um texto introdutório sobre o efeito estufa e o aquecimento global (Figura 32) e em seguida sugere atividades que podem oportunizar um debate em sala de aula no tocante as consequências do efeito estufa e alternativas de combustível que permitam reduzir as emissões de poluentes no meio ambiente.

Figura 32 – Atividade envolvendo o meio ambiente



O que significa aquecimento global [...]

O termo "aquecimento global" significa que todo o Planeta Terra está se aquecendo, ou seja, a sua temperatura atmosférica média de superfície está se elevando ao longo dos anos como consequência do aumento do efeito estufa, resultante do incremento na concentração atmosférica de alguns GEE, em especial o CO_2, o CH_4 e o N_2O.

[...]

O CO_2 é o mais importante GEE com emissões intensificadas por atividades humanas. A concentração atmosférica global desse gás aumentou de um valor pré-industrial (por volta do ano de 1750) de cerca de 280 ppm [(partes por milhão)] para 394 ppm em 2010. [...]

[...]

BRASIL. Ministério da Agricultura, Pecuária e Abastecimento. **O aquecimento global e a agricultura de baixa emissão de carbono**. Brasília, DF, 2012. p. 9-13. Disponível em: https://www.gov.br/agricultura/pt-br/assuntos/sustentabilidade/plano-abc/arquivo-publicacoes-plano-abc/o-aquecimento-global-e-a-agricultura-de-baixa-emissao-de-carbono.pdf. Acesso em: 17 maio 2020.

- O derretimento das geleiras é uma das consequências do aquecimento global. Na fotografia, geleira na Islândia, em 2019.

Agora, faça o que se pede nas atividades a seguir. NÃO ESCREVA NO LIVRO

1. Explique, com suas palavras, como acontece o efeito estufa e destaque a principal consequência desse fenômeno para o meio ambiente.
2. Considere o aumento de temperatura (em grau Celsius) como função do tempo (em ano) e a concentração de CO_2 na atmosfera (em ppm) como função do tempo (em ano). É possível identificar algum período de tempo em que a temperatura terrestre e a concentração de CO_2 tenham aumentado de forma mais acelerada? Quais são as possíveis causas desse aumento?
3. Converse com os colegas sobre formas alternativas de combustível que permitam reduzir as emissões de poluentes nocivos ao meio ambiente e reflita sobre os impactos dessas alternativas considerando diferentes perspectivas, como a de países desenvolvidos, países em desenvolvimento e países subdesenvolvidos.
4. Em abril de 2017, encerrou-se o período oficial de assinatura do **Acordo de Paris**, que tem o objetivo de combater as mudanças climáticas que vêm ocorrendo no planeta. Pesquise quais medidas serão tomadas para alcançar os objetivos e quais foram os países signatários. Discuta com os colegas sobre a relevância desse comprometimento global e divulgue as informações obtidas por meio de cartazes e outros recursos.

PENSE E RESPONDA

Quais conceitos matemáticos você utilizou para realizar as atividades dessa seção?

Conceitos de função, leitura e interpretação de gráfico de função.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Junior e Souza (2020a, p. 81).

A Figura 33 apresenta um texto envolvendo o tema educação alimentar e nutricional como introdução ao conteúdo de função exponencial, visto que o crescimento da população de bactérias, como as do leite, pode ser modelado por esse tipo de função. Na atividade, busca-se também conscientizar os estudantes tanto para os benefícios do consumo de leite fermentado, quanto para os seus efeitos no organismo em caso de consumo em excesso.

Figura 33 – Texto sobre bactérias do leite

Introdução

Nos iogurtes e em outros alimentos derivados do leite fermentado, há bactérias que colaboram para o equilíbrio da flora intestinal, evitando a proliferação de bactérias nocivas, melhorando a absorção de nutrientes e fortalecendo nosso sistema imunológico.

Apesar de esses alimentos serem benéficos, o consumo em excesso pode acarretar alguns efeitos indesejados em nosso organismo. Esses efeitos podem estar relacionados ao aumento do número de bactérias, que se reproduzem muito rapidamente.

Em geral, o crescimento de uma população de bactérias pode ser modelado por um tipo de função que estudaremos neste Capítulo: a função exponencial.

Diversos tipos de derivados do leite, entre eles o iogurte. No detalhe, micrografia de duas bactérias presentes no iogurte. Uma das bactérias tem formato arredondado e está colorizada em azul; a outra lembra um bastão rosado; em branco, o iogurte visto por meio do microscópio (imagem de microscopia eletrônica, aumento aproximado de 5 mil vezes; colorido artificialmente).

Fonte: Bonjorno, Giovanni Junior e Souza (2020b, p. 56).

Os exemplos apresentados mostram caminhos para a prática docente por meio do trabalho com temáticas, como proposto na BNCC (Brasil, 2019a). Abordar os conteúdos relacionados a diferentes assuntos, como meio ambiente e saúde, além de contextualizar os mesmos, são importantes para a atuação do estudante na sociedade, como um cidadão consciente e participativo.

6.1.4 Algumas considerações sobre a análise dos livros didáticos

A análise apresentada mostra que os livros, dentro dos capítulos pesquisados, contemplam os temas trazidos como obrigatórios pela BNCC. Mas, os temas apresentados trazem possibilidades ao desenvolvimento do conteúdo de forma integradora, não se limitando ao conteúdo científico, necessidade apontada pelos TCT na BNCC (Brasil, 2019a) e também por Olgin (2015) e Azcárate (1997).

Os livros foram analisados de forma a se verificar quais TCT estão sendo abordados nos capítulos destinados ao conteúdo de funções. Pode-se observar que há a presença de vários TCT, mas vale mencionar que a abordagem é feita de diferentes formas, em alguns casos há um texto sobre o assunto com informações e que possibilitam a reflexão e o debate em sala de aula. Mas em outros casos, há somente uma pequena menção em uma ou outra atividade, cabendo ao docente ampliar a discussão sobre a temática. Ressalta-se que as atividades constantes nesses livros, não apontam claramente o tema a ser trabalhado, devendo o professor analisar qual o TCT pode ser explorado a partir do conteúdo de funções, de forma a possibilitar que os estudantes tenham acesso aos conhecimentos necessários para a sua formação.

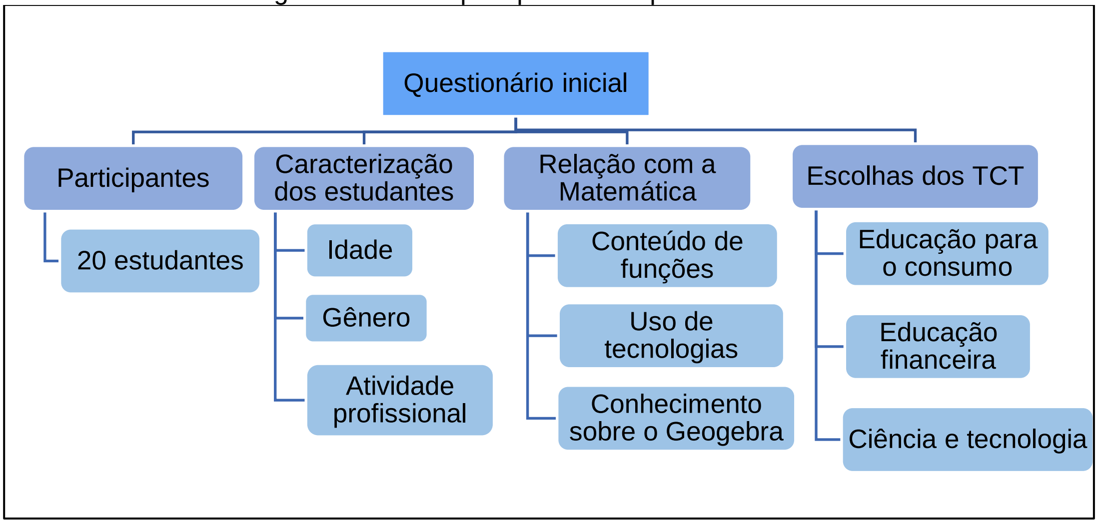
Em relação à EMC, todos os livros analisados apresentam situações, atividades, textos ou cenários de investigação, que podem ser exploradas pelos professores para uma aula envolvendo uma EMC. Dessa forma, cabe ao professor a reflexão de como incluir em seu planejamento esse trabalho tão necessário e importante para o desenvolvimento dos estudantes para agirem como cidadãos atuantes em uma sociedade que pode vir a ser mais justa e igualitária para o futuro dos nossos jovens.

Nesse sentido, a partir dessa análise, foi possível selecionar as atividades que compõe a sequência didática. Entretanto, destaca-se dois pontos importantes. O primeiro é que a proposta da sequência é o trabalho com os TCT educação para o consumo, educação financeira e ciência e tecnologia somente, por ser esses os TCT escolhidos pelos estudantes participantes por meio do questionário inicial que será apresentado na próxima seção. O segundo ponto, é que em alguns tópicos foi necessário a busca por outras coleções, além das que foram analisadas nesse tópico, para abranger todo o conteúdo de forma contextualizada e utilizando os pressupostos da EMC.

6.2 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO INICIAL DA PESQUISA

Esta seção apresenta dados advindos do questionário inicial (Apêndice A) que foi aplicado, no primeiro semestre letivo de 2023, aos estudantes do 3º ano B da Escola Estadual Professor Domingos Aparecido dos Santos em Rondonópolis/MT. A turma era formada por 37 estudantes, desses 31 responderam ao questionário inicial, mas somente 20 participaram da pesquisa porque nove estudantes saíram da turma (por transferência ou remoção de turma) e oito optaram por não participar. Mesmo os estudantes que optaram por não participar, eventualmente faziam as atividades, mas essas não foram consideradas para as análises, pois eles não entregaram os termos de consentimento para participar da pesquisa. Dessa forma, toda a análise apresentada aqui, desde o questionário inicial, será referente somente aos 20 estudantes participantes. A Figura 34 apresenta de forma resumida os principais pontos do questionário inicial.

Figura 34 – Principais pontos do questionário inicial



Fonte: a pesquisa.

Sobre esses participantes da pesquisa, constatou-se que todos estavam com a idade certa para o ano que cursavam (entre 16 e 18 anos), sendo a maioria do sexo feminino (15) e metade deles já exerciam alguma atividade profissional (Tabela 10).

Tabela 10 – Caracterização dos estudantes

EXERCE ATIVIDADE PROFISSIONAL	QUANTIDADE	%
Não	10	50
Até 4 horas	2	10
Mais de 4 horas dia/noite	4	20
Sim/ mas não informou a quantidade de horas trabalhadas	4	20
TOTAL	20	100

Fonte: a pesquisa.

Para o conhecimento sobre o contato desses estudantes com a Matemática, foram feitas quatro perguntas (Tabela 11). Quando perguntados se gostam desta disciplina, somente um indicou que *concorda fortemente* e cinco responderam que *concordam*. Sobre as dificuldades com essa disciplina, nove estudantes responderam ter dificuldades com a disciplina (*concordam fortemente*), mas somente dois estudantes já reprovaram nessa disciplina. Sobre a utilidade da Matemática, 14 estudantes responderam que a utilizam no dia a dia (*concordo* e *concordo fortemente*).

Tabela 11 – Contato dos estudantes com a Matemática

	Você gosta de Matemática?		Você tem dificuldade na disciplina de Matemática?		Você utiliza a Matemática no seu dia a dia?	
ESCALA	QUANTIDADE	%	QUANTIDADE	%	QUANTIDADE	%
(1) Discordo fortemente	3	15	0	0	0	0
(2) Discordo	4	20	2	10	2	10
(3) Nem concordo nem discordo	7	35	4	20	4	20
(4) Concordo	5	25	5	25	5	25
(5) Concordo fortemente	1	5	9	45	9	45
Total	20	100	20	100	20	100

Fonte: a pesquisa.

Na pergunta sobre como os estudantes utilizam a Matemática, as respostas eram abertas, mas foram agrupadas por similaridade (Tabela 12). Assim, 10 estudantes responderam que usam *no comércio* (50%), sete disseram que *em contas* (35%), cinco colocaram que *na escola* (25%) e cada uma das respostas *no dia a dia, medir o tempo* e *no trabalho*, foram citadas por três estudantes (15%).

Tabela 12 – Como os estudantes dizem utilizar a Matemática

RESPOSTAS	QUANTIDADE DE RESPOSTAS	%
No comércio	10	50
Em contas	7	35
Na escola	5	25
No dia a dia	3	15
Medir o tempo	3	15
No trabalho	3	15

Fonte: a pesquisa.

É interessante ressaltar que 14 estudantes disseram que utilizam a Matemática no cotidiano e, quando perguntados se acham importante estudar Matemática, 18 responderam que *concorda* ou *concorda fortemente* (Tabela 13).

Tabela 13 – Respostas sobre a importância de se estudar Matemática

ESCALA	QUANTIDADE	%
(1) Discordo fortemente	0	0
(2) Discordo	0	0
(3) Nem concordo nem discordo	2	10
(4) Concordo	10	50
(5) Concordo fortemente	8	40
TOTAL	20	100

Fonte: a pesquisa.

As justificativas dessa importância (respostas abertas que foram agrupadas por similaridade) variam desde a aplicabilidade em diversas áreas até a importância para o desenvolvimento pessoal e acadêmico, com destaque para as respostas: *ela faz parte da realidade* (seis estudantes) e *é utilizada em várias áreas* (quatro estudantes). Ainda, apenas um estudante respondeu que *somente parte da Matemática estudada na escola vai ser utilizada no cotidiano.* Esses resultados estão apresentados na Tabela 14, observa-se que o percentual está sobre o total de respostas apresentadas pelos estudantes, pois alguns apresentaram mais de uma resposta.

Tabela 14 – Justificativa da importância de se estudar Matemática

JUSTIFICATIVA	QUANTIDADE	%
Faz parte da nossa realidade.	6	25
É utilizada em várias áreas.	4	16,7
A Matemática é fundamental para o ser humano.	2	8,3
Para ter independência.	2	8,3
Para conhecimento.	2	8,3
É importante.	2	8,3
Para usar no comércio, nas finanças.	2	8,3
Para utilizar em provas e vestibulares.	1	4,2
Às vezes é boa para o ser humano.	1	4,2
Para saber contar, ver hora.	1	4,2
Somente parte da Matemática estudada vai ser utilizada no dia a dia.	1	4,2
TOTAL	24	100

Fonte: a pesquisa.

Sobre como as aulas de Matemática são ministradas (Tabela 15), 18 responderam que *utilizando o livro didático ou apostila*, seis disseram que há *trabalhos individuais ou em grupos*, quatro citaram que *é utilizando material impresso como listas de exercícios*, um estudante mencionou também *a aula expositiva*, outro estudante respondeu que *somente é utilizada aula expositiva.* Um destaque é que nenhum estudante mencionou a *utilização de jogos ou aplicativos*. Observa-se que o percentual está sobre o total de respostas apresentadas pelos estudantes, pois alguns apresentaram mais de uma resposta.

Tabela 15 – Respostas sobre as aulas de Matemática

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
Utilizando o livro didático ou apostila	18	60,00
Trabalhos individuais ou em grupos	6	20,00
Utilizando material impresso como listas de exercícios	4	13,33
Aula expositiva	1	3,33
Somente aula expositiva	1	3,33
Utilização de recursos didáticos como jogos, aplicativos	0	0,00
TOTAL	30	100

Fonte: a pesquisa.

Na pergunta sobre a utilização de recursos tecnológicos durante as aulas de Matemática (Tabela 16), metade dos estudantes disseram que *nunca são utilizados*, três responderam que são utilizados *uma vez por semana*, seis falaram que *uma vez por mês* e outro estudante disse que só *uma vez por ano*.

Tabela 16 – Frequência de utilização de recursos tecnológicos

RESPOSTA	QUANTIDADE	%
Nunca são utilizados	10	50
Uma vez por mês	6	30
Uma vez por semana	3	15
Uma vez por ano	1	5
Uma vez por bimestre	0	0
TOTAL	20	100

Fonte: a pesquisa

A Tabela 17 apresenta as respostas sobre quais recursos tecnológicos eram utilizados nas aulas de Matemática. Ressalta-se que, somente cinco estudantes dos que disseram que *nunca eram utilizados,* responderam *nenhum*, acredita-se que essa contradição ocorreu porque não consideraram a calculadora como recurso tecnológico. Assim, 15 estudantes mencionaram a utilização de calculadoras (14 estudantes) e/ou *softwares* (quatro estudantes).

Tabela 17 – Uso de recursos tecnológicos

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
Calculadoras	14	60,9
Softwares (aplicativos)	4	17,4
Nenhum	5	21,7
Outros	0	0
TOTAL	23	100

Fonte: a pesquisa.

Foi perguntado aos estudantes participantes o que se lembravam sobre o conteúdo de função estudados nos anos anteriores durante as aulas de Matemática (Tabela 18), conforme as respostas apresentadas: somente quatro se recordaram de *gráficos*, um citou o *x* e o *y*, um disse que se lembrava *da fórmula* – mas não citou nenhuma, dois disseram que tinha uma *vaga lembrança*, sete estudantes responderam que não lembraram de *nada* e sete citaram outros conteúdos matemáticos não relacionados com função. Como as respostas eram abertas, foram agrupadas utilizando o critério de similaridade, totalizando 22 e, assim o percentual apresentado é sobre esse total de respostas.

Tabela 18 – Respostas sobre o que se lembravam no conteúdo de função

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
Nada	7	31,80
Outros conteúdos que não estão em funções	7	31,80
Gráficos	4	18,20
Vaga lembrança	2	9,10
Do x, do y	1	4,55
Fórmula	1	4,55
TOTAL	22	100

Fonte: a pesquisa.

Na pergunta seguinte (Tabela 19), se eles lembravam de situações em que utilizaram função, as respostas também foram agrupadas por similaridade e assim 16 estudantes disseram que não se lembravam de nenhuma situação do cotidiano em que poderiam ter usado a função, somente dois estudantes disseram que utilizavam em situações relacionadas *com dinheiro* (salário e vendas), um estudante disse que *só na Matemática* e outro disse *em contas básicas*.

Tabela 19 – Respostas sobre onde utilizaram funções no cotidiano

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
Não lembro	16	80
Relação com dinheiro (salário, vendas)	2	10
Só na matemática	1	5
Contas básicas	1	5
TOTAL	20	100

Fonte: a pesquisa.

Em relação ao conhecimento dos estudantes sobre o GeoGebra e/ou outros aplicativos (Tabela 20): em relação ao *software* GeoGebra, 16 estudantes responderam *nunca ouvi falar* e somente quatro disseram *já ouvi falar, mas nunca utilizei.* Os estudantes também foram perguntados se tinham conhecimento de algum outro aplicativo para o desenvolvimento do conteúdo de funções e todos responderam que não conheciam.

Tabela 20 – Respostas sobre GeoGebra e outros aplicativos

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
Nunca ouvi falar	16	80
Já ouvi falar, mas nunca utilizei	4	20
Já utilizei, mas não saberia utilizar novamente	0	0
Já utilizei e consigo utilizar novamente	0	0
Conhece outro aplicativo para estudar função	0	0
TOTAL	20	100

Fonte: a pesquisa.

A última pergunta do questionário solicitava que os estudantes escolhessem quais Temas Contemporâneos Transversais que teriam interesse em trabalhar nas aulas de Matemática, sendo que poderiam escolher um ou mais temas. O resultado foi: *educação financeira* foi escolhido por 14 estudantes; *ciência e tecnologia* foi selecionado por 11 estudantes; *educação para o consumo* foi apontado por 10 estudantes; sete estudantes optaram por *educação alimentar e nutricional*; *educação fiscal* e *saúde* foram a escolha de cinco estudantes; *diversidade cultural* e *educação em direitos humanos* foram escolhidos por quatro estudantes; *trabalho* e *vida familiar e social* foram opção de dois estudantes; os demais temas só foram escolhidos por um estudante: *educação para o trânsito*, *direitos da criança e do adolescente*, *processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso* e *educação ambiental*. O tema *educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras* não foi escolhido por nenhum dos estudantes participantes da pesquisa. Esses resultados estão detalhados na Tabela 21 em que se optou por apresentar o percentual em relação ao total de 20 estudantes participantes e não ao total de respostas, pois os estudantes escolheram mais de um TCT como resposta.

Tabela 21 – Escolha de temas para as aulas de Matemática

TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS (TCT)	QUANTIDADE	%
Educação financeira	14	70
Ciência e tecnologia	11	55
Educação para o consumo	10	50
Educação alimentar e nutricional	7	35
Educação fiscal	5	25
Saúde	5	25
Diversidade cultural	4	20
Educação em direitos humanos	4	20
Trabalho	2	10
Vida familiar e social	2	10
Educação para o trânsito	1	5
Direitos da criança e do adolescente	1	5
Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso	1	5
Educação ambiental	1	5
Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras	0	0

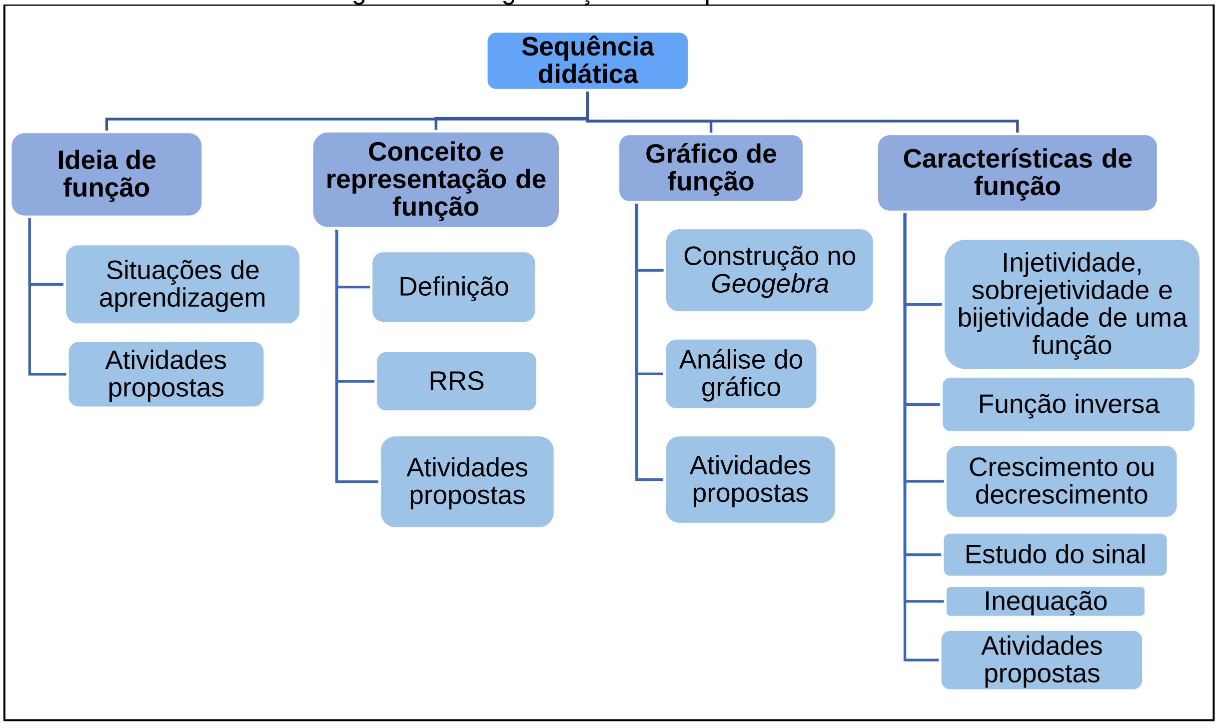
Fonte: a pesquisa.

A aplicação desse questionário foi imprescindível para que a sequência didática fosse elaborada a partir dos TCT escolhidos pelos estudantes. Além disso, foi importante para que a professora pesquisadora tivesse um diagnóstico inicial sobre os participantes, principalmente sobre a relação deles com a Matemática. A próxima seção apresenta a sequência didática, na íntegra, contemplando a parte teórica e as atividades que foram trabalhadas com os estudantes participantes.

6.3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA

A presente sequência didática foi elaborada para ser trabalhada com a parte inicial do conteúdo de funções, abordando os seguintes tópicos: ideia de função, conceito e representação de função (língua natural, representação algébrica, representação figural, representação gráfica); gráfico de funções com utilização do *software* GeoGebra para construção do gráfico e para resolução de problemas; características de função (crescimento e decrescimento, injetividade, sobrejetividade, bijetividade, função inversa; estudo do sinal de uma função para resolução de inequações). A Figura 35 apresenta a organização dessa sequência didática.

Figura 35 – Organização da sequência didática



Fonte: a pesquisa.

Para o desenvolvimento das atividades foram utilizados os seguintes recursos: Google Sites; GeoGebra Classroom; projetor *datashow*; dispositivos móveis (*Chromebooks*); papel e caneta; lousa (quadro branco) e pincel. Os Temas Contemporâneos Transversais (TCT) foram utilizados para contextualizar os conceitos e dessa forma trabalhar com problemas baseados em situações reais explorando os ambientes de aprendizagem propostos por Skovsmose (2010).

Ressalta-se que foram utilizados também os ambientes com cenários de investigação, mas esses foram considerados em termos de atividades que contemplem situações envolvendo algum tipo de investigação e não a proposta como um todo.

As atividades foram organizadas em duas categorias: situações de aprendizagem (SA) contemplando exemplos e situações-problema para dedução dos conceitos e atividades propostas (AP) para verificação da aprendizagem. Para a elaboração das atividades, foram utilizados três TCT escolhidos pela maioria dos estudantes participantes da pesquisa, ciência e tecnologia, educação para o consumo e educação financeira. Essa possibilidade de escolha pelos estudantes vem ao encontro do que Olgin (2015) chama de temas de interesse, que envolvem aspectos relevantes do cotidiano possibilitando que eles consigam estabelecer relações entre a teoria e a prática.

Assim, buscou-se nos livros didáticos do PNLD, nos volumes que contemplam o conteúdo de funções, por atividades que abordam os TCT para se organizar a sequência didática no intuito de desenvolver um trabalho utilizando os principais conceitos da Educação Matemática Crítica: ambientes de aprendizagem, conhecimento reflexivo e desenvolvimento da *matemacia* (Skovsmose, 2001, 2010, 2015).

> Os TCT aliados ao estudo de funções têm a possibilidade de ser um diferencial para possibilitar uma melhor aprendizagem aos estudantes do Ensino Médio. Para tanto, os livros didáticos podem ser um recurso de suma importância, pois trazem diferentes possibilidades de trabalho para ser desenvolvido pelos professores juntamente com esses alunos (Domingues; Olgin, 2023b, p.101).

Algumas atividades foram adaptadas para ficarem próximas da realidade dos estudantes, atendendo a classificação de ambientes 3, 4, 5 e 6 (Skovsmose, 2010). Cada atividade envolvia um ou mais TCT, com o intuito de se abordar o tópico relacionado ao conteúdo de função de forma contextualizada. Por fim, ressalta-se que o Apêndice G apresenta todas as resoluções das atividades propostas.

6.3.1 Ideia de função

Weir, Hass e Giordano (2009, p. 1) classificam as funções como “elemento-chave para descrever o mundo real em termos matemáticos”. Nas situações apresentadas a seguir, pode-se ter uma noção para iniciar uma compreensão do que esses autores afirmam.

A primeira situação de aprendizagem, apresentada na Figura 36, é uma situação que é vivenciada pelos estudantes ou por pessoas próximas a eles explorando o TCT educação para o consumo e educação financeira.

Figura 36 – SA 1 envolvendo a ideia de função

A Matemática pode e deve ser aplicada para tomada de decisões diárias. O conteúdo de função é muito utilizado para as práticas do cotidiano. Pode-se analisar uma situação que envolve função, para se compreender sua aplicabilidade.

Parte 1 – Perguntas feitas aos estudantes:

- ✓ Alguém vem de motocicleta para a escola?
- ✓ Qual o consumo (quantidade de km com um litro de combustível) de uma moto específica (escolhida por eles)?
- ✓ Qual o preço do combustível?

A partir dos dados pesquisados por eles, construíram uma tabela relacionando a quantidade de quilômetros percorridos com a quantidade de litros.

Uma segunda tabela foi construída relacionando a quilometragem e o preço do combustível

Parte 2 – Alcindo mora no Bairro Conjunto São José e trabalha em um comércio no centro da cidade de Rondonópolis. Ele vai e volta de ônibus para o trabalho, gastando R$ 8,20 (preço da passagem de ônibus urbano em Rondonópolis). Ele trabalha 6 dias por semana. Alcindo está analisando a possibilidade de comprar uma moto para ir para o trabalho. Considerando que o percurso até o trabalho é de 6 km, ele vai percorrer 12 km por dia, caso ele tenha o dinheiro para comprar a moto, será viável financeiramente essa alternativa (ele vai gastar mais ou vai gastar menos do que com as passagens de ônibus, considerando somente o custo do combustível)?

Fonte: a pesquisa.

Na parte 1 da atividade, pode-se introduzir a ideia de função a partir da tabela, escrever os pares ordenados e construir o gráfico da função. Na parte 2, pode-se explorar a matemática em ação e o conhecimento reflexivo dentro da EMC, pois essa atividade envolveu um ambiente de semirrealidade.

Para o desenvolvimento da parte 1 da SA 1 foi considerado o preço do etanol como R$3,80 e os cálculos referentes a uma motocicleta *Honda CG Fan 160 cc* (cilindrada) que tem o consumo de 30 km/l, como mostra a Figura 37.

Figura 37 – Resolução da SA 1 (parte 1)

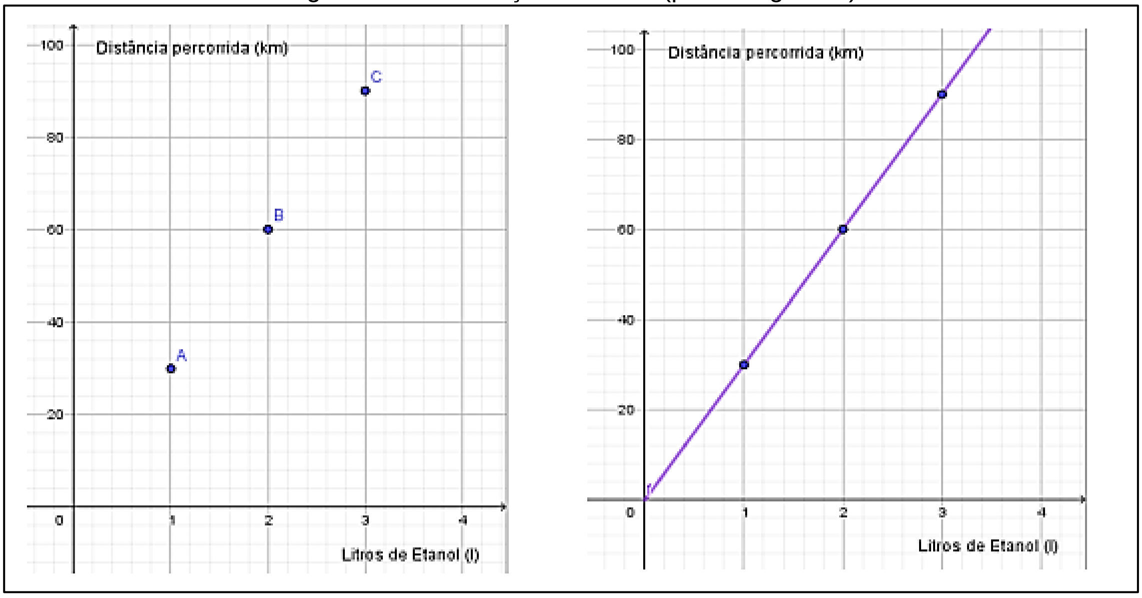
Etanol (quantidade de litros consumidos)	Km (distância percorrida)
1	30
2	60
3	90
10	300
x	30x

Km (distância percorrida)	R$ (valor gasto em reais)
30	3,80
60	7,60
90	11,40
300	38,00
x	$\frac{3,8}{30} \cdot x = \frac{19x}{15}$

Fonte: a pesquisa.

Em ambas as tabelas, encontra-se uma relação de dependência. Na primeira têm-se as variáveis litros *(l)* e quilômetros (*km*), sendo *km* a variável dependente. É uma função porque para cada quantidade de litros consumidos haverá uma quantidade (única) de quilômetros percorridos. Na segunda tabela, as variáveis são quilômetros (*km*) e valor em reais (R$), sendo o *R$* a variável dependente; é uma função porque para cada quantidade de quilômetros percorridos, haverá um valor único em *R$* gasto correspondente. Tomando a primeira função como exemplo, pode-se escrever a lei como d(x) = 30x. Para os valores representados na tabela, têm-se os pares ordenados: (1,30); (2,60); (3,90); e (10,300). Esses pares ordenados podem ser representados graficamente, como mostra a Figura 38.

Figura 38 – Resolução da SA 1 (parte 1: gráfico)



Fonte: a pesquisa.

Para o desenvolvimento da parte 2 da SA 1 foi solicitado aos estudantes:

a) Calcular o gasto semanal com passagens de ônibus e com o combustível

b) Calcular o gasto mensal com passagens de ônibus e com o combustível (considerar o mês com 4,5 semanas)

c) Há outros gastos para a utilização da motocicleta?

d) Quais as vantagens e desvantagens não financeiras na utilização do transporte público?

e) Quais as vantagens e desvantagens não financeiras na utilização da motocicleta?

Resolução – Cada item da SA 1 – Parte 2.

a) $8{,}2 \cdot 6 = 49{,}2$ por semana (passagem de ônibus)

Utilizando os dados obtidos na atividade anterior: $x.\ (\frac{19}{150})$, onde x são os km percorridos, tem-se: $12 \cdot (\frac{19}{150})$ = 1,52 gasto por dia com combustível, logo 1,52·6 = 9,12 por semana.

b) 49,2·4,5 = 221,40 gastos com passagem de ônibus em um mês.

9,12·4,5 = 41,04 gastos com combustível em um mês.

c) Considerar: manutenção da moto, impostos e outras sugestões dos estudantes.

d) Vantagens: questão ambiental.

Desvantagens: gasto de tempo, desconforto com superlotação.

e) Vantagens: gestão do tempo, aquisição de um bem móvel.

Desvantagens: risco de sofrer acidentes.

Nas atividades a seguir, apresentam-se situações com funções que envolvem os TCT. A Figura 39 apresenta uma situação para explorar os TCT educação para o consumo e ciência e tecnologia, a partir das variáveis (ou grandezas) distância em quilômetros e consumo em litros.

Figura 39 – SA 2 com a ideia de função

Combustível em automóveis

Um automóvel pode percorrer determinada distância de acordo com a quantidade de combustível que há no tanque dele. A autonomia (medida de distância máxima percorrida utilizando um tanque cheio de combustível) é dada, entre outros fatores, em função da quantidade de litros de combustível existente no tanque.

Suponha que determinado veículo percorra 12 km com 1 litro de gasolina, mas se utilizar o etanol como combustível a autonomia passa a ser de 9 km por litro. Considere que nenhum outro fator interfira na autonomia.

a) Sabendo que no tanque há 45 litros de gasolina, qual será, aproximadamente, a medida de distância máxima que ele poderá percorrer sem precisar reabastecer?

b) Qual foi a operação matemática que você utilizou para responder ao item anterior?

Ao planejarem viagens, motoristas costumam considerar a quantidade de quilômetros rodados por litro como referência para estimar a quantidade de combustível necessária para percorrer o trajeto.

c) Considerando que esse veículo tem x litros de etanol no tanque, qual expressão indica a medida de distância máxima, em quilômetros, que pode ser percorrida sem necessidade de reabastecimento? E se o combustível no tanque for a gasolina?

d) Considerando que esse veículo vai sair de Rondonópolis e vai até Cuiabá (distância aproximada de 216 km entre as duas cidades), os 45 litros de gasolina (dados da letra *a*), serão suficientes para percorrer o trajeto ou será necessário fazer algum reabastecimento? Qual seria o total de combustível necessário para fazer a viagem de ida e volta?

e) Considerando a autonomia desse veículo, qual a melhor opção de combustível considerando a sustentabilidade ambiental?

Fonte: adaptada de Dante e Viana (2020a).

Resolução da SA 2 – Respondendo-se aos itens da atividade, tem-se:

a) Para 45 litros de gasolina, percorrerá: $12 \cdot 45 = 540$ km.

b) A operação é a multiplicação.

c) A expressão pode ser: $d = 9x$ para o etanol, e $d = 12x$ para a gasolina

d) Tem-se que: $216 = 12 \cdot x \Rightarrow x = 12$, logo, para percorrer os 216 km serão necessários 12 litros de gasolina. Sendo assim, não será necessário fazer nenhum reabastecimento. Para fazer a viagem completa, serão gastos 24 litros desse combustível.

e) Espera-se que ocorra uma discussão envolvendo a questão da sustentabilidade, com destaque para o fato de o carro gastar menos combustível utilizando a gasolina, mas sem esquecer que essa é mais poluente, sendo um recurso não renovável.

Na próxima situação, Figura 40, é apresentada a ideia de função relacionando a variável valor cobrado pelo estacionamento com a variável tempo em que o veículo fica estacionado. Essa situação propicia a exploração do TCT educação financeira.

Figura 40 – SA 3 – Ideia de função – TCT educação financeira

Cobrança de estacionamento

Ao buscar estacionamentos em uma região, um motorista pode utilizar conhecimentos matemáticos para calcular qual é, financeiramente, a melhor opção, já que os valores fixo e por hora excedente podem variar na mesma região.

Alguns estacionamentos rotativos costumam cobrar um valor mínimo que dá ao motorista o direito de manter o carro estacionado no local durante certa medida de intervalo de tempo. Quando essa medida de intervalo de tempo acaba, há um acréscimo no valor do estacionamento, que aumenta com relação à quantidade de horas inteiras excedidas.

Considere a situação: o novo *shopping center* de Rondonópolis terá um estacionamento rotativo que terá uma cobrança pelo estacionamento de um carro, sendo R$ 9,00 por até 2 horas de estacionamento e R$ 1,50 por hora excedente.

a) Quanto um motorista terá de pagar se deixar o carro estacionado por 4 horas?

b) No caso de pagar R$ 16,50, quantas horas o motorista ficou estacionado?

c) E se ele permanecer por apenas 1 hora, quanto deverá pagar de estacionamento?

d) Escreva no caderno uma maneira de calcular o preço a pagar, de acordo um número x de horas em que o carro fica no estacionamento.

e) Converse com os colegas sobre o porquê de o valor do estacionamento ser constituído por uma parte fixa e outra variável.

f) Verifique qual o valor cobrado pelas zonas de estacionamento público no centro da cidade. Por que normalmente há um distanciamento entre os valores cobrados pelo estacionamento público e pelo privado?

Fonte: adaptada de Dante e Viana (2020a).

Resolução da SA 3 – Respondendo-se aos itens da atividade, tem-se:

a) Para 4 horas será pago: $9 + 1{,}5 \cdot (4 - 2) = 9 + 3 = 12$

b) Se foi pago R$ 16,50, então: $16{,}5 = 9 + 1{,}5 \cdot x\ (x - 2) \Rightarrow 16{,}5 - 6 = 1{,}5x \Rightarrow x = 7$ horas.

c) Para 1 hora pagará o valor fixo de R$ 9,00 para até 2 horas.

d) Se x estiver entre 0 e 2, o preço a pagar é R$ 9,00. Se x for maior do que 2, o preço a pagar é dado por 9 + 1,5 · (x - 2), em reais.
e) O valor fixo é o valor mínimo cobrado pelo tempo predeterminado na questão, já o valor variável, é o valor cobrado pelo tempo extra de permanência.
f) O valor cobrado pelo estacionamento público no centro de Rondonópolis atualmente é R$ 2,70 por hora por veículo estacionado nas vagas delimitadas pela secretaria de trânsito. Os estacionamentos particulares cobram a partir de R$ 10,00 a hora dependendo de cada estabelecimento. Pode-se conduzir a discussão para a comparação entre os dois tipos de estacionamentos, pedindo para os estudantes pontuarem as vantagens e desvantagens de cada um.

A situação de aprendizagem 4 apresenta a ideia de uma função do segundo grau que relaciona a temperatura em graus Celsius de um forno com o tempo em minutos de funcionamento desse forno, a partir do TCT ciência e tecnologia, conforme a Figura 41.

Figura 41 – SA 4 com a Ideia de função

(Enem/MEC-adaptada) A temperatura *T* de um forno (em graus centigrados) é reduzida por um sistema a partir do instante de seu desligamento (*t* = 0) e varia de acordo com a expressão $T(t) = -\frac{t^2}{4} + 400$, com *t* em minutos. Por motivos de segurança, a trava do forno só é liberada para abertura quando o forno atinge a temperatura de 39 °C. O novo funcionário da fábrica não tinha a informação do tempo em que o forno levava para destravar, nem sobre a fórmula para fazer esse cálculo, por isso a cada cinco minutos ele tentava abrir, começando 5 minutos após ter desligado. Quantas vezes esse funcionário tentou abrir o forno até obter sucesso?

Fonte: adaptada de Souza, J. R. (2020b).

Resolução da SA 4 – O tempo mínimo de espera é determinado pelo momento em que a trava de segurança do forno é liberada para abertura, o que ocorre quando sua temperatura atinge 39 °C. Assim, é necessário determinar o tempo t para o qual T(t) = 39.

$$39 = \frac{t^2}{4} + 400 \Longrightarrow \frac{t^2}{4} = 361 \Longrightarrow t^2 = 1444 \Longrightarrow \begin{cases} t = \sqrt{1444} = 38 \;\; ou \\ t = -\sqrt{1444} = -38 \;\; (não\ convém) \end{cases}$$

Sendo assim, a trava só seria liberada após 38 minutos. Como ele verificou a cada 5 minutos, na 7ª tentativa havia se passado 35 minutos, logo ele só conseguiu abrir na 8ª tentativa. Pode-se solicitar que os estudantes façam a reflexão: se o funcionário tivesse conhecimento da fórmula, ele teria poupado tempo.

A partir dessas situações apresentadas, pode-se definir que a ideia de função é uma relação de dependência entre duas variáveis ou grandezas, sendo uma dependente e a outra independente. Assim, por exemplo, na SA 2 (Figura 39), a variável dependente é a distância percorrida pelo veículo, medida em quilômetros, e a variável independente é a quantidade de combustível, medida em litros.

6.3.2 Atividades propostas sobre ideia de função

Nesta seção serão apresentadas algumas atividades nas quais podem ser explorados os TCT, a conversão e o tratamento dentro do RRS, bem como os conceitos da EMC. A Figura 42 apresenta as atividades que foram desenvolvidas com o TCT ciência e tecnologia.

Figura 42 – Atividades propostas para a ideia de função

AP 1 (adaptada de Souza, J. R., 2020a). Existem aplicativos de smartphone que permitem ao usuário comprar produtos em lojas e recebê-los em casa, mediante o pagamento de uma taxa de entrega. Em certo aplicativo, o cálculo da taxa de entrega considera um valor inicial fixo de R$ 5,50 mais R$ 0,25 a cada quilômetro percorrido entre a loja e o local da entrega. Pode-se afirmar que nessa situação existe uma relação de dependência entre as grandezas taxa de entrega e distância percorrida? Se existe, essa relação é uma função? Existe uma lei que pode expressar essa situação?

AP 2 (Smole; Diniz, 2020, p. 57). Um motorista entrou em uma estrada às 10 horas e manteve uma velocidade constante de 90 km/h durante 20 minutos. A correspondência entre a velocidade e o tempo pode ser descrita por uma tabela como a que está ao lado. A relação entre a velocidade e o tempo mostrada nessa tabela é uma função ou não? Justifique.

Velocidade (em km/h)	Tempo
90	10 h
90	10 h 5 min
90	10 h 10 min
90	10 h 15 min
90	10 h 20 min

AP 3 (adaptada de Souza, J. R., 2020a). Pode-se calcular o consumo de energia elétrica de um equipamento por meio de uma função. Observe o exemplo ao lado.

A potência do ferro em watt (W) foi dividida por 1 000 para obter a potência do ferro em quilowatts (kW) e, consequentemente, o consumo de energia elétrica em quilowatt-hora (kWh). Responda:

a) A expressão que representa o consumo de energia elétrica pode ser simplificada e expressa de outras maneiras? Registre algumas delas.

b) Determine o consumo de energia elétrica de um ferro de passar roupa desse modelo, considerando que tenha sido utilizado por 8 h em um mês.

c) Quantas horas um ferro de passar roupa desse modelo pode ser usado para que sejam consumidos, no máximo, 7,2 kWh?

d) Agora, indique quais aparelhos há na sua residência (dentre os aparelhos indicados no quadro ao lado) e escreva uma função que relacione o consumo c de energia elétrica (kWh) e o tempo t de uso de cada equipamento (h). Depois, estabeleça o tempo de uso mensal desse equipamento em sua residência e calcule o consumo de energia elétrica correspondente.

Equipamento	Potência (W)
Televisor	90
Computador	300
Aspirador de pó	600
Condicionador de ar	1 400
Micro-ondas	2 000

e) Apresente um plano de economia de energia (considere quais aparelhos podem ter uma redução de tempo de uso), calculando o total economizado de acordo com a redução do consumo.

AP 4 (Dante; Viana, 2020a, p. 27). O calor é a quantidade de energia trocada entre corpos, de acordo com a diferença de temperatura entre eles. Por exemplo, ao tirar um alimento da geladeira e colocá-lo sobre a pia, o calor passa do corpo de maior temperatura (a pia) para o corpo de menor temperatura (o alimento).

Existe uma função que relaciona a quantidade de calor de um objeto com a variação da medida de temperatura dele quando o objeto não passa por mudança de fase. Essa função é dada pela lei $Q = mc\Delta t$, na qual:

• m é a medida de massa do objeto, em g; • c é o calor específico da substância, em cal/g·°C;

• Q é a quantidade de calor sensível, em cal; • Δt é a variação de temperatura, em °C.

Calcule a medida de temperatura final, em Kelvin, de 500 g de água após receber 10 000 cal, sabendo que o calor específico da água é 1 cal/g·°C e que a água estava inicialmente a 10 °C.

Alternativas:

a) 20 K b) 273 K c) 333 K d) 293 K e) 303 K

Fonte: a pesquisa.

Destaca-se que a AP 03 (Figura 42) também permite a exploração do TCT educação para o consumo. Para o trabalho com TCT educação financeira, apresenta-se a atividade AP 3 apresentada na Figura 43.

Figura 43 – AP 5 sobre Ideia de função

AP 5. Joana trabalha em um centro comercial na cidade de Rondonópolis. Todos os meses, Joana deposita, em sua conta bancária, uma quantia *D*, em reais. A quantia *D* é calculada utilizando a fórmula $D = 0{,}75x + 50$, em que x representa a comissão de vendas mensal recebida por ela.

a) Identifique a variável dependente e a variável independente na fórmula descrita?

b) Determine a quantia depositada por Joana em março, sabendo que nesse mês ela recebeu uma comissão de R$ 1 200,00.

c) Qual deve ser a comissão de Joana para ela depositar R$ 1 250,00?

Fonte: adaptada de Teixeira (2020).

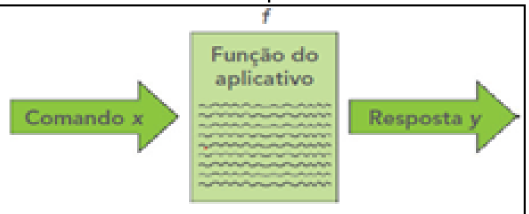
Na próxima seção, apresenta-se o conceito de função, que também foi explorado por meio de atividades contextualizadas com os TCT.

6.3.3 Conceito de função

Uma maneira intuitiva de entender a ideia de função é imaginá-la como sendo o atributo de um aplicativo que, ao toque de um comando (entra dado), gera uma resposta (sai efeito) (Cevada *et al.,* 2020b, p. 46), conforme apresentado na Figura 44.

Figura 44 – Ideia de função relacionada ao funcionamento de um aplicativo

O conjunto X é o conjunto dos valores de entrada. A função do aplicativo opera de alguma maneira com x e produz uma saída: um valor y do conjunto Y. O programa do aplicativo associa uma única resposta y para cada comando x.



Fonte: Cevada *et al.* (2020b, p. 46).

De modo formal: uma função é uma relação, regra ou lei que associa cada elemento de um conjunto a um elemento de um segundo conjunto, como afirma Bassanezi (2015, p. 28): "Uma função (real de variável real) é uma regra f que a cada número real *x* de algum subconjunto $A \subset R$ associa outro número real *y*, de maneira única e sem exceção". O autor apresenta a notação de função (Figura 45).

Figura 45 – Notação de função

$$\begin{aligned} f : A &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$

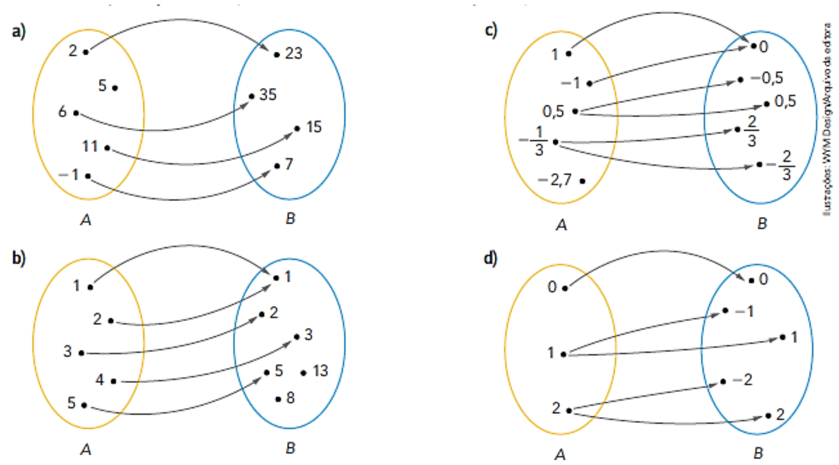
E lê-se: a função f está definida no conjunto A com valores reais. O conjunto A é chamado domínio de f e denotado por A = dom(f); *x* é a variável independente e $y = f(x)$ é o valor de f no ponto *x* ou variável dependente.

Fonte: Bassanezi (2015, p. 28).

Pode-se utilizar um diagrama de flechas para verificar se uma relação é uma função, como nos diagramas apresentados na Figura 46 (sendo comentados, separadamente, cada caso do diagrama).

Figura 46 – SA 5 sobre o conceito de função

Para cada item a seguir, avalie se o diagrama apresentado representa uma função de A em B. Caso não represente uma função, justifique:



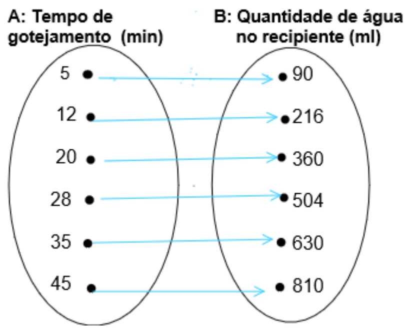
Fonte: Dante e Viana (2020a, p. 18).

Observa-se que há uma função somente na letra *b*. Na letra *a*, tem elemento no domínio sem correspondência no contradomínio; na letra *c* ocorre a mesma coisa e, além disso, tem-se elementos do domínio com mais de uma imagem correspondente; na letra *d*, também tem elementos do domínio com mais de uma imagem correspondente.

A situação apresentada na Figura 47 aborda o TCT educação para o consumo e permite a exploração do conceito de função de primeiro grau.

Figura 47 – SA 6 sobre o conceito de função afim

Benício trabalha como técnico em uma companhia de abastecimento de água. Ao identificar um vazamento constante em certa tubulação, ele colocou por algum tempo um recipiente medidor com capacidade de 5 litros para coletar a água que gotejava e realizou anotações em diferentes momentos. As anotações feitas por Benício foram dispostas no diagrama de flechas ao lado. Observe esse diagrama e resolva as questões.



a) Esse diagrama representa uma função? Justifique

b) Escreva uma função que relacione a quantidade q de água no recipiente (ml) e o tempo t de gotejamento (min). Em seguida, identifique as variáveis dependente e independente.

c) Quantos mililitros de água havia no recipiente após 12 min de gotejamento?

d) Calcule o valor de q para t = 60. O que esse cálculo indica?

e) Após quantas horas foi feito o reparo na tubulação, sabendo que havia nesse momento 4 320 ml de água no recipiente medidor?

f) Indique o domínio, o contradomínio e a imagem dessa função.

Fonte: adaptada de Souza, J. R. (2020a).

Resolução da SA 6 – Respondendo-se aos itens da atividade, tem-se:

a) No diagrama, para cada um dos elementos do conjunto A existe um único correspondente no conjunto B, logo a relação representa uma função.

b) De acordo com as anotações, a água enche o recipiente a uma velocidade de 18 mililitros por minuto, pois $\frac{90}{5} = 18$. Assim, tomando *q* como sendo a quantidade de água no recipiente (variável dependente) e *t* o tempo de gotejamento (variável independente), tem-se a função: $q = 18t$.

c) Olhando no diagrama a imagem de 12 é 216, logo após 12 minutos de gotejamento foram acumulados 216 mililitros de água.

d) Para $t = 60$, temos que: $q = 18 \cdot 60 = 1\,080$. Isso indica que após 60 minutos de gotejamento havia 1 080 ml de água no recipiente.

e) Para $q = 4320$, segue que: $4320 = 18t \Rightarrow t = 240$ min. Logo, o reparo foi feito após 4 horas.

f) Considerando-se que os elementos do conjunto A são os instantes (em minutos) em que Benício verificou a quantidade de água e que o reparo foi feito após quatro horas de gotejamento, pode-se afirmar que o domínio dessa função corresponde ao conjunto dos números reais compreendidos entre 0 e 240. Como o conjunto B indica a quantidade de água (em mililitros) desperdiçada, tem-se que o contradomínio dessa função é dado pelos números reais entre 0 e 4320. Como a função é dada por $q = 18t$, a imagem da função será dada por todos os números múltiplos de 18, compreendidos entre 0 e 4320.

A SA 6 (Figura 47) representa uma função afim, que é uma função polinomial de 1º grau com coeficientes *a* e *b* reais, sendo *a* não nulo, conforme definem Medeiros *et al*. (2013) na Figura 48.

Figura 48 – Definição de função afim

Seja a função $f \;:\; \underset{x}{A \subset \mathbb{R}} \;\underset{\mapsto}{\to}\; \underset{f(x)=y=ax+b}{B \subset \mathbb{R}}$. Se $a \neq 0$, ela é chamada *função afim*.

Fonte: Medeiros *et al.* (2013, p. 107).

Dessa forma pode-se representar a função afim como $f(x) = ax + b$ ou ainda como $y = ax + b$, sendo *a* o coeficiente angular ou declividade da função e *b* o coeficiente linear da função (*b* é a ordenada do ponto de interseção com o eixo *y*: (0,*b*).

Vejam alguns exemplos:

a) $f(x) = 2x + 1$, onde: $a = 2$ e $b = 1$

b) $f(x) = 6{,}3x - 5$, onde: $a = 6{,}3$ e $b = -5$

c) $y = 4{,}3x$, onde: $a = 4{,}3$ e $b = 0$

d) $f(x) = x$, com: $a = 1$ e $b = 0$

Destacam-se dois casos particulares da função afim: a função identidade (onde o valor de *y* vai sempre ser igual ao valor que *x* assumir); e a função linear (quando os valores de *x* e *y* são proporcionais). A letra *c* ($y = 4{,}3x$) é um exemplo de função linear e a letra *d* ($f(x) = x$) é uma função identidade. Para os autores, Anton, Bivens e Davis (2014), *x* e *y* são proporcionais entre si sempre que *y* é um múltiplo constante de *x*, ou seja, sempre que $y = kx$, sendo *k* uma constante diferente de zero.

As situações, apresentadas a seguir, possibilitam o entendimento da conceituação da função quadrática. Dante e Viana (2020a) apontam que o trabalho com funções quadráticas, como a determinação das raízes da função, a análise do gráfico e o cálculo dos valores máximos e mínimos, é utilizado em diversas situações da Matemática financeira, das Ciências da Natureza, das Ciências Humanas e de outras situações do cotidiano.

A Figura 49 retrata uma situação que aborda a questão de lucros em vendas e possibilita o trabalho com o TCT educação financeira.

Figura 49 – SA 7 sobre o conceito de função quadrática

Venda em brechó

Você já viu como funcionam campanhas de brechó? São vendas de roupas, sapatos, bolsas ou outros artigos usados, mas em boas condições, por um preço inferior ao desses mesmos artigos novos.

Um brechó é um empreendimento feito para negociar roupas e objetos usados, que pode ter como objetivo arrecadar dinheiro para ajudar projetos sociais ou gerar lucro para os proprietários.

Para planejar um brechó, a comunidade Juntos Pela Fé resolveu adotar a seguinte estratégia para o preço dos produtos: o comprador paga, para cada peça escolhida, o valor de 20 reais menos um valor, em reais, numericamente igual à quantidade de peças que estiver levando. A estratégia foi pensada considerando que o custo de cada produto é zero (produtos originados de doação), de maneira que o lucro é obtido multiplicando a quantidade de itens e o preço deles. Porém, era preciso analisar se em alguma situação não haveria lucro.

a) Considere x a quantidade de itens vendidos para uma pessoa. Escreva no caderno a expressão que indica o preço de cada peça.

b) Escreve uma lei da função que expressa o lucro L da venda de x itens para um cliente.

c) Há alguma quantidade de itens que, se for vendida, não gera lucro?

Fonte: adaptada de Dante e Viana (2020a).

Resolução da SA 7 – Respondendo-se aos itens da atividade, tem-se:

a) Para x peças vendidas, o preço de cada peça é 20 - x.

b) Como o lucro é obtido pelo produto da quantidade de itens pelo preço unitário, tem-se a expressão $L(x) = x(20 - x)$. Observa-se que, ao efetuar essa multiplicação, a lei da função é determinada por um polinômio de segundo grau: $L(x) = -x^2 + 20x$, por esse motivo, é chamada de função quadrática ou função do segundo grau.

c) Fazendo $L(x) = 0 \Longrightarrow x(20 - x) = 0 \Longrightarrow x = 0$ ou $x = 20$, ou seja, não terão lucro caso a quantidade de peças vendidas seja 0 ou 20. Observa-se que, nessa resolução, utilizou-se a forma fatorada da equação do segundo grau.

A situação apresentada na Figura 50 é uma atividade sobre função quadrática em que é possível explorar o TCT ciência e tecnologia.

Figura 50 – SA 8 sobre função quadrática

(UFPR - adaptada) A distância que um automóvel percorre a partir do momento em que um condutor pisa no freio até a parada total do veículo é chamada de distância de frenagem. Suponha que a distância de frenagem d, em metros, possa ser calculada pela fórmula:

$d(v) = \frac{1}{120}(v^2 + 8v)$, sendo v a velocidade do automóvel, em quilômetros por hora, no momento em que o condutor pisa no freio.

a) Marcelo está dirigindo pela Rua Irmã Bernarda a uma velocidade de 40 km/h, qual é a distância de frenagem de seu automóvel nessa situação?

b) Qual a velocidade que o automóvel de Marcelo deve estar para que sua distância de frenagem seja de 53,2 m?

Fonte: adaptada de Bonjorno, Giovanni Junior e Souza (2020a).

Resolução da SA 8 – A partir da fórmula fornecida para o cálculo da distância em função da velocidade $d(v) = \frac{1}{120} \cdot (v^2 + 8v)$, pode-se resolver os itens solicitados.

a) Sendo a velocidade v = 40, substituindo na fórmula dada, obtém-se a distância 16 metros, assim: $d(v) = \frac{1}{120} \cdot (v^2 + 8v) \Longrightarrow \mathrm{d}(40) = \frac{1}{120}(40^2 + 8 \cdot 40) = 16$

b) Sendo a distância de frenagem 53,2 metros, deve-se utilizar $d(v)$ = 53,2. Assim: $53{,}2 = \frac{1}{120} \cdot (v^2 + 8v) \Longrightarrow v^2 + 8v - 6384 = 0$. Para tanto, deve-se resolver essa equação do segundo grau para encontrar a velocidade.

Sendo $\Delta = (8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6\ 384) = 25\ 600$, então:

$x = \frac{-(8) \pm \sqrt{25600}}{2 \cdot (1)} = \frac{-8 \pm 160}{2} \Longrightarrow x' = -\ 84$ e $x'' = 76$. Desconsiderando o valor negativo, a velocidade é de 76 km/h.

Essas situações, SA 7 e SA 8 (Figura 49 e Figura 50), trazem uma função quadrática, ou função de segundo grau, que pode ser definida como na Figura 51.

Figura 51 – Definição de função quadrática

Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é chamada **função quadrática**, ou **função polinomial de 2º grau**, quando existem três números reais a, b, c, com $a \neq 0$, tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Escrevemos:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto ax^2 + bx + c$$

Fonte: Dante e Viana (2020a, p. 81).

Assim, os coeficientes *a*, *b* e *c* são números reais, sendo: *a* não nulo, por ser o coeficiente de x^2 que é quem determina o grau da função; *b* (coeficiente de *x*) e *c* (termo independente).

Dessa forma, nos exemplos anteriores apresenta-se:

$L(x) = -x^2 + 20x$ *ou* $y = -x^2 + 20x$, sendo a = -1, b = 20 e c = 0.

$d(v) = \frac{1}{120} \cdot (v^2 + 8v)$ ou $y = \frac{1}{120} v^2 + \frac{1}{15} v$, sendo $a = \frac{1}{120}$, $b = \frac{1}{15}$ e c = 0.

A próxima seção tem por objetivo abordar as diferentes representações de uma função.

6.3.4 Representação de função

Para Anton, Bivens e Davis (2014), há quatro formas mais usuais de se representar uma função:

Definida a função, ela pode ser representada de diversas formas:

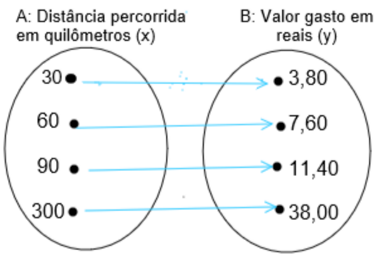
- numericamente – por meio de uma tabela relacionando os números da primeira coluna com os da segunda coluna;

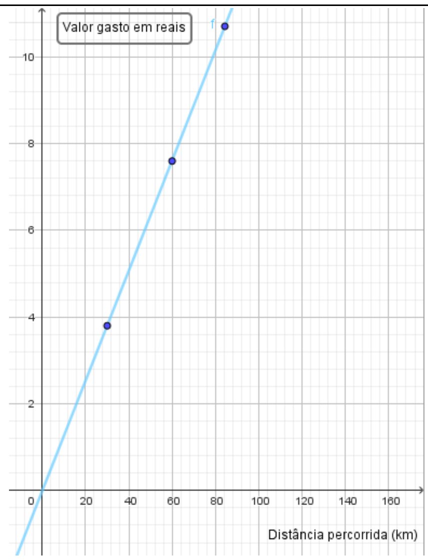
- algebricamente – por meio de uma fórmula algébrica relacionando duas variáveis;
- verbalmente – utilizando a língua materna para descrever a situação expressa pela função;
- geometricamente (ou graficamente) – por meio de uma representação, no plano cartesiano, da relação expressa pela função.

Quanto à utilização dos diagramas de flechas para representar essa relação expressa pela função, estes podem ser considerados como registro figural.

Retomando a situação de aprendizagem SA 1 (ideia de função), a partir da tabela construída (Figura 37), percebe-se que a função que relaciona a distância percorrida à quantidade de combustível consumido pode ser representada nos seguintes registros, conforme a Figura 52.

Figura 52 – SA 9 explorando os Registros de Representação Semiótica

<table>
<tr><td>Considerando uma motocicleta Honda CG fan 160cc (cilindrada) com um consumo de 30km/l (quilômetros com um litro de combustível) e que o preço do Etanol é de R$3,80, tem-se uma função em que o valor gasto em reais depende da distância percorrida em km.</td><td>Representação na língua natural.</td></tr>
<tr><td><table><tr><td>Distância percorrida em quilômetros (x)</td><td>30</td><td>60</td><td>90</td><td>300</td></tr><tr><td>Valor gasto em reais (y)</td><td>3,80</td><td>7,60</td><td>11,40</td><td>38,00</td></tr></table></td><td>Representação numérica por meio de uma tabela.</td></tr>
<tr><td>Tomando y como o valor gasto e x como a distância percorrida, pode - se representar essa função pela lei:
$y = (\frac{19}{150})\cdot x$ ou $y = 0,13x$</td><td>Representação algébrica, por meio da lei da função</td></tr>
<tr><td>
</td><td>Representação figural por meio do diagrama de flechas.</td></tr>
</table>

	Registro geométrico por meio do gráfico da função

Fonte: a pesquisa.

A Figura 53 apresenta uma situação de aprendizagem com o TCT educação para o consumo em que podem ser exploradas as conversões e os tratamentos dos Registros de Representações Semióticas (RRS).

Figura 53 – SA 10 com o conceito e representação de função afim

Combustível em automóveis

Ao planejarem viagens, motoristas costumam considerar a quantidade de quilômetros rodados por litro como referência para estimar a quantidade de combustível necessária para o trajeto.

Um automóvel pode percorrer determinada distância de acordo com a quantidade de combustível que há no tanque dele. A autonomia (medida de distância máxima percorrida utilizando um tanque cheio de combustível) é dada, entre outros fatores, em função da quantidade de litros de combustível existente no tanque.

Suponha que determinado veículo percorra 12 km com 1 litro de gasolina, mas se utilizar o etanol como combustível a autonomia passa a ser de 9 km por litro. Considere que nenhum outro fator interfira na autonomia.

Considerando que esse veículo tem x litros de gasolina no tanque, a expressão que indica a medida de distância máxima (d), em quilômetros, que pode ser percorrida sem necessidade de reabastecimento é $d = 12x$ para x menor ou igual a 45 litros.

a) Calcular os valores (distância percorrida) para as quantidades de litros de combustível (gasolina): $x = 40$, $x = 36$, $x = 25$ e $x = 18$.

b) Registre os dados da letra *a* em uma tabela;

c) Construa um gráfico que represente os valores dessa tabela no plano cartesiano.

d) Observe os pontos no plano cartesiano. Como esses pontos estão dispostos? É possível descrevê-los por meio uma lei de formação? Em caso afirmativo, qual é essa lei?

e) Obtenha os valores de f (10) e f (15).

f) Estime o valor de x para $f(x) = 43{,}2$.

g) Determine o domínio e a imagem dessa função.

Fonte: adaptada de Dante e Viana (2020a).

Resolução da SA 10 – Respondendo-se aos itens da atividade, tem-se:

a) A partir da expressão algébrica $d = 12x$: para x = 40, segue-se que d = 12·40 = 480; para x = 36, segue-se que d = 12·36 = 432; para x = 25, segue-se que d = 12·25 = 300; para x = 18, segue-se d = 12·18 = 216.

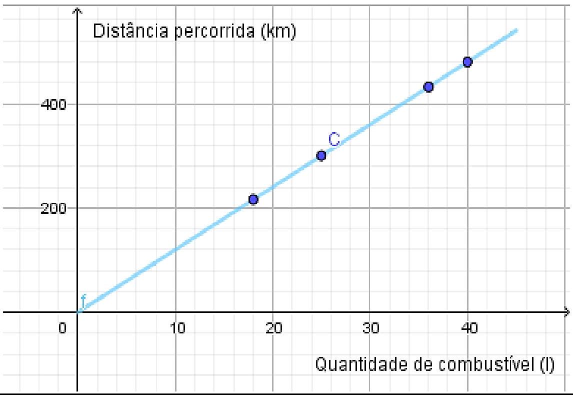
Os itens *b* e *c* da SA 10 estão resolvidos na Figura 54.

Figura 54 – Resolução SA 10

b)

Quantidade de combustível em litros (x)	40	36	25	18
Distância percorrida em quilômetros (d)	480	432	300	216

c)



Fonte: adaptada de Dante e Viana (2020a).

d) Os pontos estão dispostos sobre uma linha reta, logo representam uma função e podem ser expressos pela lei $f(x) = 12x$.

e) Tem-se que $f(10) = 12 \cdot 10 = 120$ e $f(15) = 12 \cdot 15 = 180$

f) Sendo $f(x) = 43{,}2$, tem-se que $43{,}2 = 12x \Rightarrow x = 3{,}6$.

g) Como a situação considera somente o valor máximo de combustível que há no tanque do veículo, sem considerar um reabastecimento, tem-se que o domínio dessa função será: $D(f) = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \le x \le 45\}$ e o conjunto imagem dessa função será $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} \mid 0 \le y \le 540\}$.

6.3.4.1 Função definida por mais de uma sentença

Funções definidas por mais de uma sentença são funções em que a lei de formação depende do valor de *x*, ou ainda se pode dizer, depende do intervalo ao qual esse valor de *x* pertence. Anton, Bivens e Davis (2014) definem esse tipo de função como uma função definida por partes, no sentido de que a fórmula para *f* varia dependendo do valor que *x* assume, ou seja, do intervalo em que a abscissa se encontra. A Figura 55 apresenta um exemplo de uma função afim definida por partes, ou seja, com mais de uma sentença.

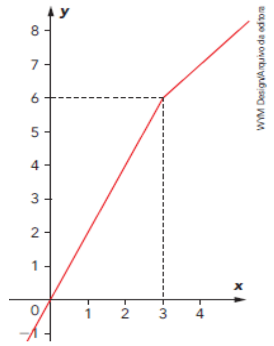
Figura 55 – SA 11 com um exemplo de função afim por partes

Observe o gráfico ao lado:

Ele é formado por dois segmentos, ou ainda, duas semirretas, logo ele não representa uma função afim.

Note que, nesse caso, cada um dos dois trechos da representação gráfica dessa função coincide com parte da representação gráfica de uma função afim, por isso essa função também é chamada função afim por partes.

A imagem da função será calculada de acordo com o intervalo ao qual o x pertence: para os valores de x menores que 3, utilizou-se f(x) = 2x; para os valores maiores de x ou iguais a 3, utilizou-se f(x) = x + 3. Nesse exemplo, a lei da função f é definida por: $f(x) = \begin{cases} 2x, se\ x < 3 \\ x + 3, se\ x \geq 3 \end{cases}$



Fonte: adaptada de Dante e Viana (2020a).

A Figura 56 apresenta uma situação que descreve o cálculo o valor a ser pago pela tarifa de água nas residências, que depende da faixa de consumo em metros cúbicos de cada residência. Essa atividade permite que seja explorado o conceito de função definida por mais de uma sentença. Essa situação possibilita o trabalho com os TCT educação financeira e educação para o consumo.

Figura 56 – SA 12 sobre função com mais de uma sentença

Conta de água

A água é considerada a maior riqueza natural em nosso planeta e por ser um recurso essencial para a sobrevivência humana, precisa ser utilizada sem desperdício. No Brasil, a tarifa a pagar pela água residencial é definida de acordo com o gasto de água: quanto maior for o gasto, maior é a tarifa a pagar. Isso geralmente ocorre de acordo com faixas de consumo.

Observe a tabela de faixa de consumo e tarifa de água residencial em Manaus (AM).

O cálculo da tarifa é feito considerando o consumo nas diferentes faixas. Por exemplo, veja como é calculada a tarifa para o consumo de 32 m³ de água.

• Primeiro, identifica-se que 32 m³ = 10m³ + 10m³ + 10m³ + 2m³. Para cada um desses termos, paga-se uma tarifa diferente.

• Pelos primeiros 10m³, pagam-se 3,9860 R\$/ m³, o que resulta em R\$ 39,86, pois 10·3,9860 = 39,86.

• Pelos próximos 10 m³, pagam-se 7,7260 R\$/ m³, o que resulta em R\$ 77,26, pois 10· 7,7260 = 77,26.

Tarifa de consumo de água residencial em Manaus

Faixa de consumo (em m³)	Tarifa de água (em R\$/m³)
0 a 10	3,9860
11 a 20	7,7260
21 a 30	11,7940
31 a 40	16,0660
41 a 60	18,5370
Acima de 60	21,1360

Fonte de consulta: ÁGUAS DE MANAUS. *Legislação e tarifas*. Disponível em: https://www.aguasdemanaus.com.br/legislacao-e-tarifas/. Acesso em: 29 maio 2020.

• Pelos próximos 10 m³, pagam-se 11,7940 R\$/ m³, o que resulta em R\$ 117,94, pois 10 ·11,7940 = 117,94.

• Pelos últimos 2 m³, pagam-se 16,0660 R\$/ m³, o que resulta em R\$ 32,13, arredondados, pois 2 · 16,0660 = 32,132.

O total então é R\$ 39,86 + R\$ 77,26 + R\$ 117,94 + R\$ 32,13 = R\$ 267,19.

a) Qual é a tarifa que uma família paga se o gasto mensal for de 18 m³?

b) Escreva no caderno as leis de 2 funções: a que fornece a tarifa, em reais, para um consumo de água entre 0 e 10 m³, e a que fornece a tarifa, em reais, para um consumo entre 11 e 20 m³.

c) Realize uma pesquisa para fazer uma tabela dos valores cobrados por faixa de consumo no seu município ou de algum município próximo.

Fonte: adaptada de Dante e Viana (2020a).

Resolução da SA 12 – Respondendo-se aos itens da atividade, tem-se:

a) 18 m^3 = 10 + 8, observando o valor na tabela, tem-se: $10{\cdot}3{,}9860 + 8{\cdot}7{,}7260 \cong 39{,}86 + 61{,}81 = 101{,}67$.

b) $t(c) = 3{,}9860{\cdot}c$, para $0 \leq c \leq 10$ e

$t(c) = 39{,}86 + 7{,}7260{\cdot}(c - 10)$, para $11 \leq c \leq 20$.

c) Tabela (Figura 57) de valores tarifários de água e esgoto de Cuiabá/MT (não foi encontrada de Rondonópolis).

Figura 57 – Tabela do valores do tarifário de água e esgoto de Cuiabá

Estrutura Tarifária			
Categoria	Tipo	Faixa de Consumo (R$/m³)	Tarifa Água (R$/m³)
1	Residencial Social	00 a 10	R$ 1,97
2	Residencial	00 a 10	R$ 3,93
		10,1 a 20	R$ 4,81
		20,1 a 30	R$ 8,05
		30,1 a 50	R$ 9,85
		>50,1	R$ 13,04
3	Comercial	00 a 10	R$ 6,12
		>10,1	R$ 9,25
4	Industrial	00 a 10	R$ 7,18
		>10,1	R$ 10,66
5	Pública	00 a 10	R$ 7,69
		>10,1	R$ 12,60

Fonte: https://g1.globo.com/mt/mato-grosso/noticia/2022/03/04/reajuste-de-11percent-na-tarifa-de-agua-e-esgoto-em-cuiaba-comeca-a-ser-cobrado-nesta-sexta-feira.ghtml.

A Figura 58 apresenta uma questão adaptada do Exame Nacional do Ensino Médio (Enem) em que se pode explorar o TCT educação financeira. Nesse exemplo, pode ser trabalhada uma função afim com as grandezas período e valor pago.

Figura 58 – SA 13 com uma função definida por partes

Leia a questão do Enem (adaptada):

Lucas precisa ir ao centro de Rondonópolis//MT para um compromisso e vai precisar estacionar o carro pelo período de 40 minutos. Sua irmã Clara também precisa ir ao centro, mas o compromisso dela vai demorar mais tempo e terá que estacionar o carro pelo período de 6 horas. Analisando o valor cobrado por três estacionamentos, o Verde, o Amarelo e o Preto, sabem que:

O estacionamento Verde cobra R$ 5,00 por hora de permanência.

O estacionamento Amarelo cobra R$ 6,00 por 4 horas de permanência e mais R$ 2,50 por hora ou fração de hora ultrapassada.

O estacionamento Preto cobra R$ 7,00 por 3 horas de permanência e mais R$ 1,00 por hora ou fração de hora ultrapassada.

Os estacionamentos mais econômicos para Lucas e Clara, respectivamente, são

a) Verde e Preto b) Verde e Amarelo c) Amarelo e Amarelo

d) Preto e Preto e) Verde e Verde

Fonte: adaptada de Cevada *et al.* (2020b).

Resolução da SA 13 – Sabe-se que cada irmão precisa estacionar o carro por um período de tempo diferente e cada estacionamento tem suas regras tarifárias. Além disso, é importante notar que a hora avulsa adiciona ao valor fixo um valor igual para cada hora excedida, mesmo que seja apenas uma fração da hora. Por exemplo, se um veículo permanecer em um estacionamento por 5 ou 60 minutos, pagará, igualmente, o valor de uma hora completa.

Organizando os dados:

• Clara: 6h de permanência;

• Lucas: 40 min ≅ 0,6h (transformar para a mesma unidade de medida);

• Estacionamento Verde: 5 · *x*, sendo *x* a quantidade de horas;

• Estacionamento Amarelo: $\begin{cases} 6 \; para \; 0 < x \leq 4 \\ 6 + 2{,}5 \cdot (x - 4) \; para \; x > 4 \end{cases}$

• Estacionamento Preto: $\begin{cases} 7 \; para \; 0 < x \leq 3 \\ 7 + 1 \cdot (x - 3) \; para \; x > 3 \end{cases}$

Com base nos dados pode-se construir a Figura 59.

Figura 59 – Resolução SA 13

Estacionamento	Lucas (40 min)	Clara (6 h)
Verde	R$ 5,00	5 · 6 = R$ 30,00
Amarelo	R$ 6,00	6 + 2,5 · (6 – 4) = = R$ 11,00
Preto	R$ 7,00	7 + 1 · (6 – 3) = = R$ 10,00

Fonte: Cevada *et al.* (2020b, p. 113).

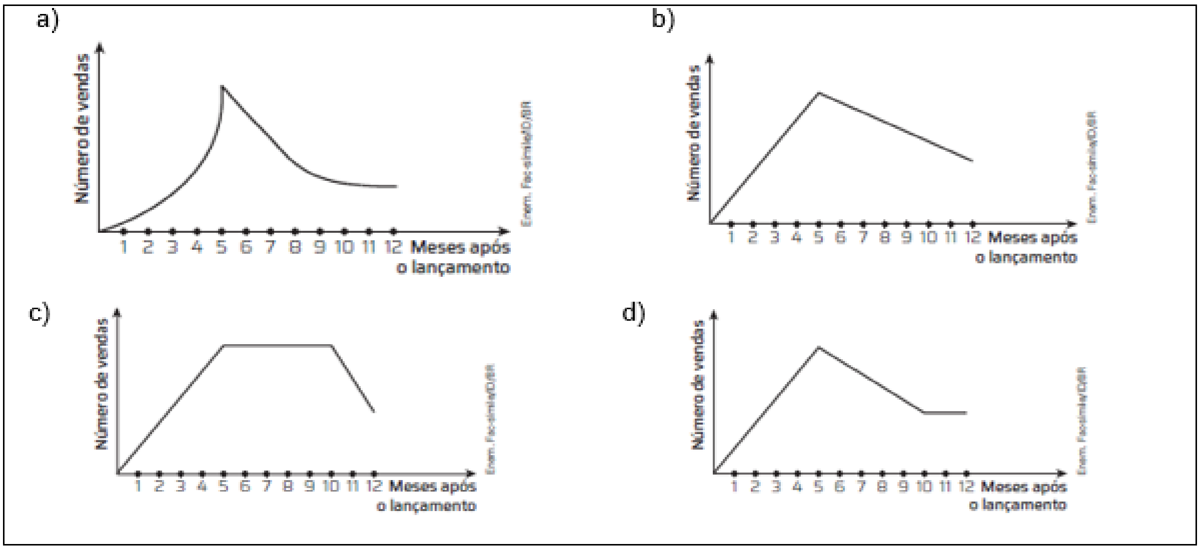
Assim, para Lucas, o estacionamento mais barato é o estacionamento Verde e para Clara, a opção mais barata é o estacionamento Preto.

A Figura 60 apresenta uma situação de vendas que deve ser interpretada para se verificar qual gráfico representa a situação financeira da empresa em cada momento. Essa atividade possibilita o trabalho com o tema educação financeira, além de explorar a conversão do RRS da língua natural para o registro gráfico.

Figura 60 – SA 14 envolvendo o gráfico de uma função definida por partes

(Enem) Uma empresa analisou mensalmente as vendas de um de seus produtos ao longo de 12 meses após seu lançamento. Concluiu que, a partir do lançamento, a venda mensal do produto teve um crescimento linear até o quinto mês. A partir daí, houve uma redução nas vendas, também de forma linear, até que as vendas se estabilizaram nos dois últimos meses da análise.

O gráfico que representa a relação entre o número de vendas e os meses após o lançamento do produto é:



Fonte: adaptada de Smole e Diniz (2020).

Resolução da SA 14 – Pelo enunciado da atividade, tem-se que:

• de 0 a 5 meses, a venda mensal do produto teve um crescimento linear (reta crescente);

• de 5 a 10 meses, houve uma redução nas vendas de forma linear (reta decrescente);

• de 10 a 12 meses, as vendas se estabilizaram (reta constante).

Assim, analisando os gráficos, o que representa a relação entre o número de vendas e os meses após o lançamento do produto, o item *d* corresponde a essa relação. Portanto, a resposta correta é a alternativa *d*.

6.3.5 Atividades propostas sobre conceito de função

Nesta seção, são apresentadas algumas atividades, sobre o tópico conceito e representação de função, em que podem ser explorados os TCT, a conversão e o tratamento dentro dos RRS, bem como os conceitos da EMC.

A Figura 61 apresenta as atividades propostas que exploram o TCT educação financeira.

Figura 61 – Atividades propostas sobre o conceito de função

AP 6 (adaptada de Smole; Diniz, 2020). Sara e suas amigas gostam de jogar voleibol nos fins de semana. Elas resolveram comprar duas bolas que custam, juntas, R$ 336,00 e dividir igualmente as despesas. Chamando de f a função que expressa a despesa *y* de cada um a partir do número *x* de meninas e sabendo que o grupo deve ter de 4 a 8 meninas, responda:

a) Qual é o domínio de f? b) Qual é o conjunto imagem? c) Qual é a lei que associa x e y?

d) Uma das meninas considerou a possibilidade de convidar mais colegas da escola para participarem dos jogos e ficar mais barato o custo individual da aquisição das bolas. Quantas meninas elas devem chamar (pelo menos) para que o custo fique menos que R$ 30,00 com todas colaborando na compra das bolas?

AP 7 (adaptada de Bonjorno; Giovanni Junior; Souza, 2020a). Marina é vendedora de uma loja de roupas no *Rondon* Shopping, seu salário mensal bruto é composto de uma parte fixa de R$ 1.500,00 mais uma comissão de 5% do valor total das vendas realizadas no mês.

a) Escreva a lei de formação que expressa o salário bruto de Marina.

b) Qual será o salário bruto de Marina se ela vender R$ 5.000,00 em mercadorias no mês?

c) Sabendo que no mês passado o salário bruto de Marina foi de R$ 2.750,00, qual foi o valor total das vendas por ela realizada?

d) Marina fez uma compra em seu cartão de crédito gerando uma parcela de R$ 800,00 durante cinco meses. Considerando que suas despesas mensais somam R$ 1300,00, quanto ela precisa vender para garantir uma comissão que seja suficiente para ela pagar seu cartão de crédito?

AP 8 (adaptada de Bonjorno; Giovanni Junior; Souza, 2020a). Elisa trabalha com artigos para dispositivos eletrônicos e, fazendo uma pesquisa na internet de preço de capas para celular, obteve uma função quadrática que modela o lucro diário L, em reais, de uma loja em relação ao preço pelo qual cada capa é vendida, também em reais. Essa função é dada pela lei $L(x) =- x^2 + 55x - 250$.

No site em que Elisa fez a pesquisa, havia a observação de que essa fórmula considerava certo preço de custo da capa e uma relação de dependência entre a quantidade de vendas e o preço de venda de cada capa.

Elisa calculou o lucro diário dessa loja supondo que cada capa fosse vendida a R$ 20,00. Veja como ela calculou.

$L(20) = - (20)^2 + 55 \cdot 20 – 250 \Longrightarrow L(20) = - 400 + 1\,100 – 250 \Longrightarrow L(20) = 450$

Assim, Elisa verificou que vender cada capa a R$ 20,00 gera um lucro diário de R$ 450,00, considerando a função L. Qual será o lucro vendendo essa capa a R$ 25,00?

AP 9 (adaptada de Bonjorno; Giovanni Junior; Souza, 2020a). Em uma marcenaria, o número N de móveis fabricados no mês varia em função do número x de funcionários que trabalham na marcenaria, de acordo com uma função quadrática dada por $N(x) = x^2 + 2x$.

a) Quantos móveis podem ser produzidos em um mês quando estão trabalhando 12 funcionários na marcenaria?

b) Querendo aumentar a produção, o dono da mercearia contratou mais 2 funcionários. Em quanto ele conseguiu aumentar a produção?

AP 10 (adaptada de Souza, J. R., 2020a). Numa loja de automóveis usados, a comissão paga a cada um dos vendedores consiste num percentual sobre o total de vendas do vendedor mais um bônus por meta atingida, conforme a tabela ao lado.

Total de vendas no mês	Percentual sobre o total de vendas	Bônus por meta atingida
Até R$ 80.000,00	0,8%	R$ 0,00
Entre R$ 80.000,00 e R$ 200.000,00	1,0%	R$ 600,00
Acima de R$ 200.000,00	1,2%	R$ 900,00

a) Qual é a comissão paga a um vendedor que consegue vender R$ 120.000,00 em um mês?

b) Quanto um vendedor precisará vender em um mês para receber uma comissão de R$ 3.900,00?

c) Um dos vendedores apresentou uma reclamação ao gerente da loja porque havia recebido R$ 1.000,00 de comissão. Explique por que esse valor está errado.

d) Escreva a lei de formação de uma função que expresse o valor da comissão $y = c\ (v)$ de um vendedor, em reais, de acordo com o total v de vendas no mês, em reais.

Fonte: a pesquisa.

A Figura 62mostra as atividades em que pode ser trabalhado o TCT ciência e tecnologia, explorando grandezas físicas, bem como assuntos relacionados com aplicativos de transporte.

Figura 62 – Atividades propostas envolvendo o conceito de função

AP 11 (adaptada de Bonjorno; Giovanni Junior; Souza, 2020a). Alguns estudantes foram selecionados para fazer um intercâmbio em Londres no mês de dezembro. O professor de Ciências explicou que a medida da temperatura da Inglaterra é dada em grau Fahrenheit (°F) e que a relação entre uma medida de temperatura expressa em grau Celsius (°C) e em grau Fahrenheit (°F) é dada pela fórmula $C = \frac{5}{9} \cdot (F - 32)$, em que C representa o valor em grau Celsius e F, o valor em grau Fahrenheit. Um dos estudantes disse que viu uma reportagem que dizia que em um período de 10 anos a média de temperatura no mês de dezembro, em Londres, variou de - 2 °C a 10 °C. e que a previsão dos termômetros nesse ano para o mesmo mês, seria a média de 56 °F no meio do dia. Essa previsão corresponde a um período mais quente, mais frio ou igual à média dos últimos dez anos?

AP 12 (Dante; Viana, 2020a, p. 22). Para as atividades a seguir, considere que os valores cobrados nos aplicativos A e B dependem apenas do valor fixo inicial e do valor por quilômetro rodado. Faça as atividades com um colega.

1. Em um aplicativo A, uma viagem de 20 km custa R$ 52,00. Com essa informação, é possível calcular o valor fixo inicial? E o valor por quilômetro rodado cobrado por esse aplicativo? Justifique suas repostas.

2. Em um aplicativo B, uma viagem de 10 km custa R$ 23,00 e uma viagem de 12,5 km custa R$ 26,75. Com essas informações, é possível calcular o valor fixo inicial cobrado por esse aplicativo? E o valor por quilômetro rodado? Justifique suas respostas.

3. A partir da resposta da atividade anterior, escreva no caderno a lei da função que relaciona a medida de distância percorrida, em quilômetros, ao valor da viagem, em reais, no aplicativo B.

4. Escreva no caderno as leis de pelo menos duas funções que poderiam ser a função que relaciona a medida de distância percorrida, em quilômetros, ao valor da viagem, em reais, no aplicativo A (isto é, que satisfaçam a condição de que uma viagem de 20 km custe R$ 52,00).

5. Um aplicativo que pratique um valor inicial fixo menor do que outro é necessariamente mais vantajoso do ponto de vista financeiro? Justifique.

AP 13 (Bonjorno; Giovanni Junior; Souza, 2020a, p. 118). Um objeto é lançado para cima, a partir do solo, e a altura *h*, em metro, varia em função do tempo *t*, em segundo, decorrido após o lançamento. Supondo que a lei dessa função seja $h(t) = 30t - 5t^2$, responda:

a) Qual é a altura do objeto 3 segundos após o lançamento?

b) Quanto tempo após o lançamento o objeto encontra-se a 40 metros de altura?

c) Como pode ser interpretado o resultado obtido no item ***b***?

Fonte: a pesquisa.

Destaca-se que na AP 12 também pode ser trabalhado o TCT educação financeira. As atividades propostas que foram trabalhadas junto com o TCT educação para o consumo estão apresentadas na Figura 63.

Figura 63 – Atividades propostas referente ao conceito de função

AP 14 (adaptada de Andrade, 2020). **Carro "flexível"**. A indústria automotiva tem buscado alternativas para substituir os combustíveis fósseis no segmento de mobilidade e transporte, visando, entre outras demandas, diminuir a emissão de gases poluentes. Veículos movidos a eletricidade já são uma realidade, assim como os veículos movidos a hidrogênio, porém os altos custos de aquisição ainda são um empecilho de popularidade para esses modelos. Sendo assim, o consumidor tem optado, muitas vezes, pelo carro bicombustível, conhecido como *flex*, que permite alternar o abastecimento entre etanol e gasolina (ou a mistura deles) conforme a economia de gasto ou a vantagem de autonomia.

A vantagem de abastecer com etanol ocorre, geralmente, quando o preço do litro é inferior a 70% do preço da gasolina.

O etanol proporciona uma autonomia de 25% a 30% inferior à da gasolina.

autonomia: capacidade de um veículo, uma aeronave ou um navio percorrer uma distância em determinado tempo sem que haja necessidade de reabastecimento

Atualmente, como o custo de aquisição de um carro elétrico é 4 vezes superior ao de um carro a gasolina, seria necessário rodar 570 mil quilômetros com um veículo desse tipo para a economia de combustível compensar financeiramente a aquisição.

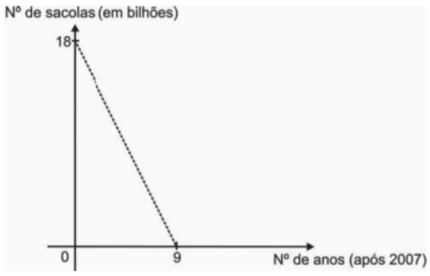
A partir das informações fornecidas, responda às seguintes perguntas:

a) Em sua opinião, é mais vantajoso abastecer um veículo *flex* com etanol ou com gasolina? Por quê?

b) Expressa a lei da função afim que relaciona o preço dos dois combustíveis, o etanol e a gasolina, segundo a informação acima.

c) Considerando o preço do etanol R$ 3,80 e o da gasolina a R$ 5,20, é mais vantajoso financeiramente abastecer o tanque de um automóvel de 45 litros com qual combustível?

AP 15 (adaptada de Cevada *et al.*, 2020b) As sacolas plásticas sujam florestas, rios e oceanos e quase sempre acabam matando por asfixia peixes, baleias e outros animais aquáticos. No Brasil, em 2007, foram consumidas 18 bilhões de sacolas plásticas. Os supermercados brasileiros se preparam para acabar com as sacolas plásticas até 2016. Observe o gráfico a seguir, em que se considera a origem como o ano 2007.



1- De acordo com as informações, quantos bilhões de sacolas plásticas serão consumidos em 2011?

a) 4,0 b) 6,5 c)7,0 d) 8,0 e) 10,0

2 - Escreva uma expressão algébrica para representar a lei dessa função.

3 - Pesquise como está a questão legal da utilização das sacolas plásticas no Brasil.

Fonte: a pesquisa.

Destaca-se que na AP 14 também pode ser trabalhado o TCT educação financeira.

A Figura 64 apresenta mais uma atividade proposta envolvendo o TCT educação para o consumo, destacando-se as conversões entre os RRS.

Figura 64 – AP 16 referente à função afim e os RRS

AP 16 O diretor da Escola Domingos emitiu uma notificação solicitando a todos os membros da comunidade escolar que buscassem meios para diminuir o consumo de água na escola, pois o bairro estava passando por um problema de reabastecimento desse recurso tão essencial. Pensando em uma maneira de conscientizar os estudantes sobre esse assunto, o professor de Matemática da turma do terceiro ano propôs a um grupo de estudantes que anotassem a quantidade de água que sai de uma torneira no pátio da escola que, com frequência, era esquecida aberta pelos estudantes. Os estudantes anotaram alguns dos valores no diagrama de flechas ao lado.

Em seguida o professor solicitou ao grupo de estudantes que:

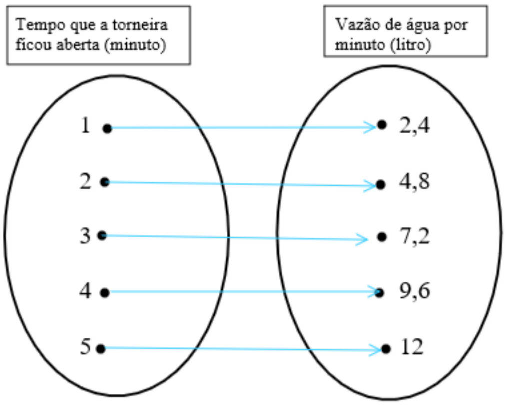
a) Registre esses dados em uma tabela.

b) Analise se essa relação é uma função, justifique.

c) Em caso afirmativo, determine o domínio e a imagem.

d) Construa um gráfico que represente os valores dessa tabela no plano cartesiano, utilizando o aplicativo GeoGebra.

e) Observe os pontos no plano cartesiano. Como esses pontos estão dispostos? É possível descrevê-los por meio de uma lei de formação? Em caso afirmativo, qual é essa lei?



f) Obtenha os valores de *f* (10) e *f* (15). O que esses resultados significam?

g) É possível determinar um valor de x para *f*(*x*) = 43,2. Qual seria esse valor?

h) É possível determinar *x* pertencente ao domínio tal que *f*(*x*) = –4,8?

i) Considerando a função encontrada, se a torneira for esquecida aberta durante 1 hora todos os dias durante uma semana, qual será a quantidade de litros de água que será desperdiçada nesse período?

Fonte: adaptada de Cevada *et al.* (2020b).

Com essas atividades, foram trabalhados os TCT e os diferentes RRS envolvidos no conceito e representação de funções.

6.3.6 Gráfico de funções

6.3.6.1 Sistema cartesiano ortogonal

Gay e Silva (2018, p. 228) apresentam uma situação-problema envolvendo o mapa da cidade de Porto Alegre/RS. Adaptando-se essa situação, a partir da Figura 65, que apresenta um recorte do mapa da cidade de Rondonópolis dividido em seis regiões por linhas horizontais e verticais, deve-se localizar a Escola Estadual Professor Domingos Aparecido dos Santos.

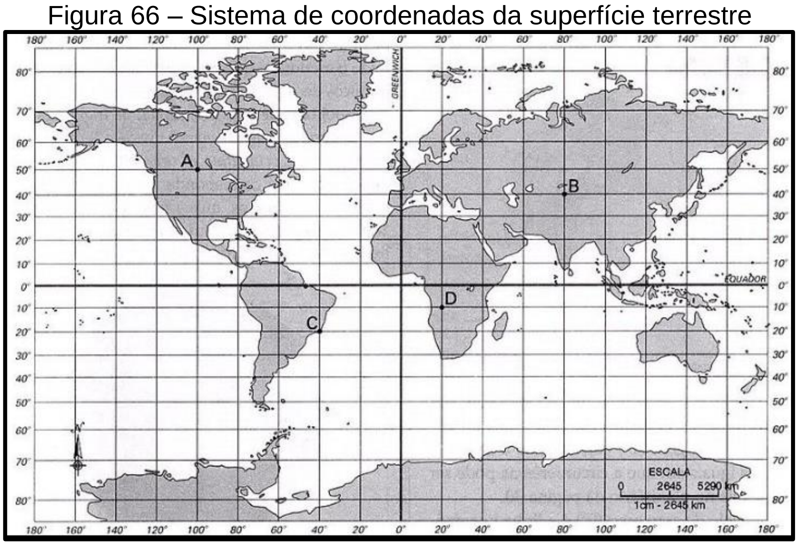
Figura 65 – Mapa parcial da cidade de Rondonópolis

Fonte: adaptada do site https://www.google.com/maps/@-16.4560758,-54.6454857,13.5z/data=!5m1!1e1?entry=ttu.

Nesse mapa, as regiões são identificadas pelo cruzamento das fileiras horizontais (representadas por letras) com as fileiras verticais (representadas por números). Dessa forma, a Escola Estadual Professor Domingos Aparecido dos Santos está localizada na região *A2*, que corresponde ao cruzamento da fileira horizontal A com a fileira vertical 2. Essa letra e esse número formam o que se chama de coordenadas da região em que se encontra a escola.

A localização de uma praça, escola, residência ou outros lugares, é indicada de várias formas, sendo uma delas por meio das coordenadas geográficas que são definidas pelas linhas horizontais chamadas paralelos e por linhas verticais chamadas meridianos, conforme a Figura 66.

Figura 66 – Sistema de coordenadas da superfície terrestre

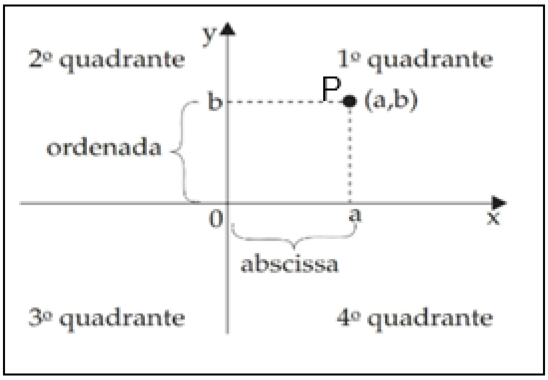


Fonte: https://pt.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_geogr%C3%A1ficas.

Gay e Silva (2018) apresentam que os paralelos indicam a latitude, e os meridianos, a longitude, sendo medidos em graus e têm como ponto de origem, respectivamente, a linha do Equador e o meridiano de Greenwich.

Em Matemática, a localização de pontos é dada em um plano cartesiano, também chamado de sistema cartesiano ortogonal, que é um sistema formado por dois eixos perpendiculares entre si, conforme Medeiros *et al.* (2013) apresentam, na Figura 67.

Figura 67 – Sistema cartesiano ortogonal



Fonte: Medeiros *et al.* (2013, p. 66).

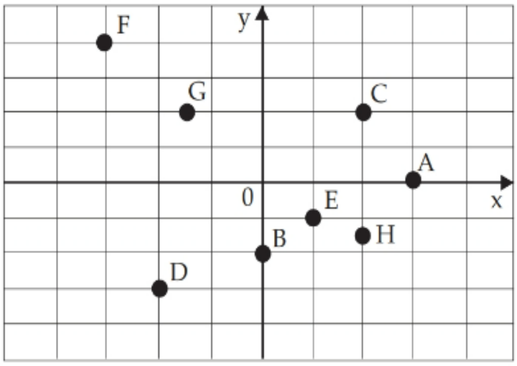
O sistema cartesiano ortogonal é utilizado para determinar a localização de um ponto no plano. Os eixos do sistema cartesiano representam retas reais, e o ponto *O*, de intersecção desses eixos, é a origem do sistema cartesiano. O eixo horizontal (eixo *x*) é denominado eixo das abscissas, e o eixo vertical (eixo *y*) é denominado eixo das ordenadas. Esses eixos dividem o plano em quatro regiões, chamadas de quadrantes, como indicado na figura acima. O ponto *P(a,b)* representado nessa figura tem coordenadas cartesianas *a* (abscissa) e *b* (ordenada), números reais que formam o par ordenado *(a, b).*

Medeiros *et al.* (2013) observam que, ao observar os sinais da abscissa e da ordenada de um ponto, pode-se indicar a qual quadrante esse ponto pertence, sendo: se abscissa e ordenada são positivas, o ponto pertence ao 1º quadrante; se a abscissa é negativa e a ordenada é positiva, o ponto está no 2º quadrante; se o ponto tem abscissa e ordenada negativas, ele pertence ao 3º quadrante; e se ele tem abscissa positiva e ordenada negativa, pertence ao 4º quadrante. Os autores apresentam um exemplo na Figura 68.

Figura 68 – SA 15 com a representação de pontos no plano cartesiano

Localizar, no plano cartesiano, os pontos A(3,0), B(0,-2), C(2,2), D(-2,-3), E(1,-1), F(-3,4), G($\frac{-3}{2}$, 2), H(2,$\frac{-3}{2}$).

Solução: Observando os sinais das abscissas e ordenadas, determina-se a localização, que pode ser comprovada, no sistema cartesiano a seguir:



O ponto A(3,0), tem abscissa positiva e ordenada nula. Logo, ele se localiza na parte positiva do eixo x.

O ponto B(0,-2) tem abscissa nula e ordenada negativa. Logo, ele se localiza na parte negativa do eixo y.

O ponto C(2,2) tem abscissa positiva e ordenada também positiva. Logo, ele se localiza no 1º quadrante.

O ponto D(-2,-3) tem abscissa negativa e ordenada também negativa. Logo, ele se localiza no 3º quadrante.

O ponto E(1,-1) tem abscissa positiva e ordenada negativa. Logo, ele se localiza no 4º quadrante.

O ponto F(-3,4) tem abscissa negativa e ordenada positiva. Logo, ele se localiza no 2º quadrante.

O ponto G($\frac{-3}{2}$, 2), tem abscissa negativa e ordenada positiva. Logo, ele se localiza no 2º quadrante.

O ponto H(2,$\frac{-3}{2}$) tem abscissa positiva e ordenada negativa. Logo, ele se localiza no 4º quadrante.

Fonte: Medeiros *et al.* (2013, p. 67).

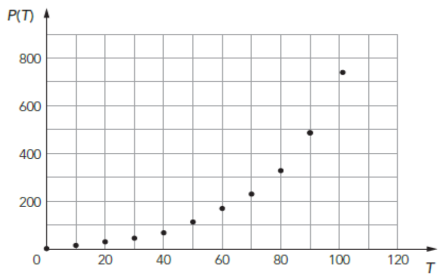
A Figura 69 apresenta um exemplo de representação gráfica no plano cartesiano de uma experiência em que foram coletados dados sobre a influência da temperatura na pressão máxima de vapor da água em um recipiente. Nesse exemplo, pode ser explorado o tema ciência e tecnologia.

Figura 69 – SA 16 com o conceito e a representação gráfica

Foi realizado um experimento sobre a influência da temperatura na pressão máxima de vapor. Os dados foram organizados na tabela abaixo.

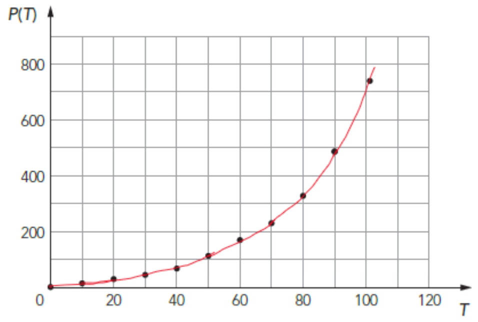
ÁGUA PURA	TEMPERATURA (ºC)	0	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
	PRESSÃO MÁXIMA DE VAPOR (mmHg)	4,6	9,2	17,5	31,8	55,3	92,5	149,4	233,7	355,1	525,8	760,0

A elevação da temperatura faz as partículas do líquido, nesse caso água pura, ficarem mais agitadas, aumentando cada vez mais a pressão de vapor. Isso faz o líquido evaporar mais intensamente. A pressão máxima de vapor P(T), dada em milímetros de Mercúrio (mmHg), está em função de T, dada em ºC. Os dados coletados e organizados na tabela serão utilizados para fazer o gráfico dessa função.



Ao dispor os pontos no plano cartesiano, observa-se que os dados parecem muito “bem-comportados”: isso favorece o traçado de uma linha contínua suave, passando por todos eles.

Pode-se usar o gráfico para estimar a pressão do vapor quando a temperatura estiver em, por exemplo, 55 ºC.



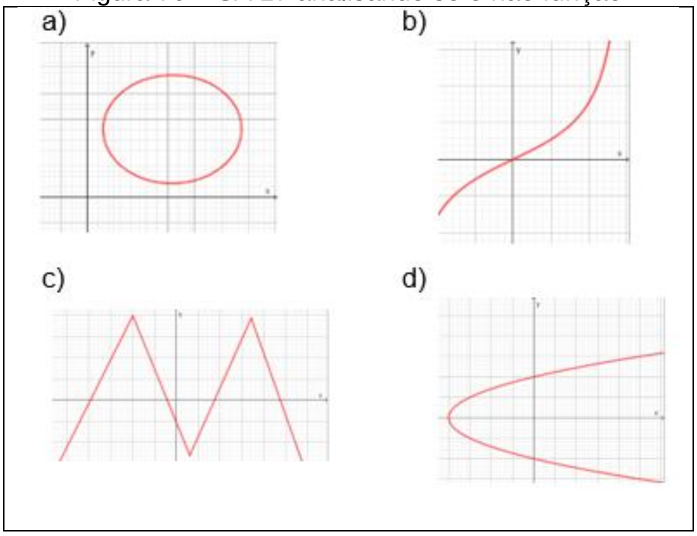
Fonte: Cevada *et al.* (2020b, p. 59).

6.3.6.2 Gráfico de funções

Pela definição de função, cada elemento do domínio tem um único correspondente no contradomínio, ou seja, uma única imagem. Sendo assim, também é possível verificar se uma representação gráfica corresponde ou não a uma função. Para tanto, pode-se traçar retas paralelas ao eixo *y* de forma que o gráfico será a representação de uma função se qualquer reta vertical traçada por pontos de abscissa x cruzar o gráfico em um único ponto, de coordenadas *(x, f(x)).* Do contrário, será uma representação de algum outro objeto, mas não de uma função.

Na Figura 70, pode-se observar algumas representações e analisar quais representam uma função de *x* em *y*.

Figura 70 – SA 17 analisando se é não função

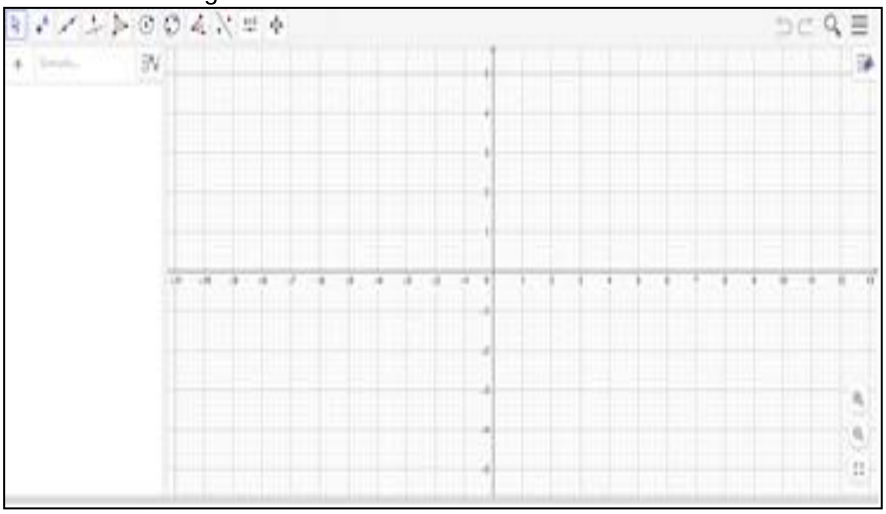


Fonte: adaptada de Bonjorno, Giovanni Junior e Souza (2020a, p. 78).

Observando-se a própria malha quadriculada ao fundo das representações, tem-se que alternativas *a* e *d* não representam uma função, pois existem retas paralelas ao eixo *y* que cruzam o gráfico em dois pontos. Já as alternativas *b* e *c* representam uma função porque qualquer reta que seja paralela ao eixo *y* cruza o gráfico em um único ponto.

Há *softwares* e planilhas eletrônicas que podem auxiliar na construção do gráfico de uma função. Um deles é o GeoGebra que possui uma calculadora gráfica, dentre outros atributos, que facilitam o trabalho com álgebra e com geometria. Esse *software* pode ser utilizado de forma *on-line* ou ser baixado gratuitamente no endereço https://www.geogebra.org/classic?lang=pt, podendo ser utilizado no computador, no celular ou em outros dispositivos móveis A Figura 71 mostra a interface da versão *on-line*.

Figura 71 – Interface do *software* GeoGebra



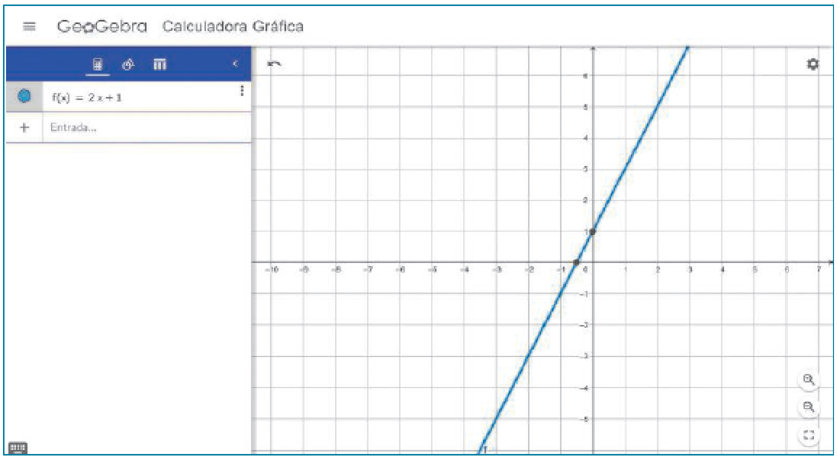
Fonte: https://www.geogebra.org/classic?lang=pt.

Nessa versão, pode-se observar, na parte superior esquerda, as ferramentas que auxiliam nas construções e, logo abaixo, no lado esquerdo, o campo de entrada, utilizado para digitar todos os comandos. Abaixo do campo de entrada, encontra-se a janela de álgebra, onde são descritas algebricamente todas as figuras, pontos, retas e outros objetos que estão representados na janela gráfica, que contém o plano cartesiano. Essa janela gráfica está no formato *2d,* há também a possibilidade de se usar a janela *3d*, que é mais utilizada para o trabalho com geometria espacial. Na utilização do campo de entrada, deve-se ficar atento ao formato de digitação dos símbolos das operações matemáticas, pois alguns são diferentes da forma usual de escrita matemática. Por exemplo, o sinal de multiplicação não é o ponto ou a letra x, mas sim o asterisco (*). A Figura 72 apresenta um exemplo proposto por Dante e Viana (2020a) para explicar o passo a passo da construção de um gráfico no GeoGebra, que possibilita explorar o tema ciência e tecnologia.

Figura 72 – SA 18 com um exemplo de utilização do GeoGebra (parte 1)

Vamos construir o gráfico da função afim dada por $f(x) = 2x + 1$ e destacar alguns pontos importantes. Para isso, siga os passos indicados.

1º passo: No campo de Entrada, digite a lei da função **f(x)=2*x+1** e tecle "Enter". Observe que "*" indica a operação de multiplicação.



Tela do GeoGebra após o 1º passo.

Fique atento

Você pode mover a imagem no GeoGebra clicando em algum ponto da tela e arrastando. Você também pode ampliar ou reduzir a imagem usando as ferramentas de *zoom* (na parte inferior direita da tela) ou utilizando o *scroll* do *mouse* (a "rodinha" que fica na parte superior da maioria dos *mouses*).

2º passo: No campo de Entrada, digite as coordenadas dos pontos **A=(-2, -3)**, **B=(-1, -1)**, **C=(-1/2, 0)**, **D=(0, 1)** e **E=(1, 3)** (a cada ponto inserido tecle "Enter"). Verifique que todos os pontos pertencem ao gráfico da função, que é uma reta.

Fique atento

Neste livro denotamos os pontos como $A(-2, -3)$. Mas no *software* GeoGebra os pontos devem ser escritos na forma **A=(-2,-3)**, usando o sinal de igual.

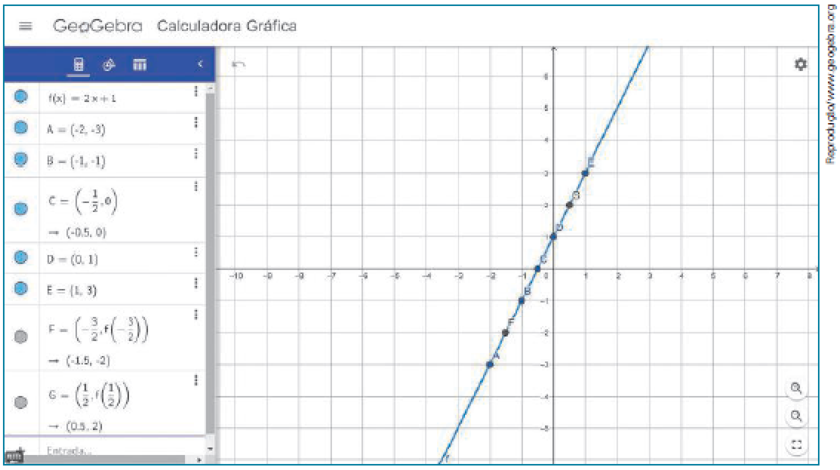
Fonte: Dante e Viana (2020a, p. 34).

Na primeira parte do exemplo, tem-se a construção do gráfico da função a partir da lei de formação, e os pontos foram adicionados na sequência, verificando-se que estão sobre a reta que representa a função. Na segunda parte do exemplo, na Figura 73, foram acrescentados pontos construídos como imagens a partir de algum dos valores do domínio e, nesse caso, esses pontos ficam vinculados à reta da função, logo, se alterar a lei da função, a imagem desses pontos também será alterada.

Figura 73 – SA 18 com um exemplo de utilização do GeoGebra (parte 2)

3º passo: Agora vamos criar pontos de uma maneira diferente: Digite no campo de Entrada **F=(-3/2, f(-3/2))** e **G=(1/2, f(1/2))**, para criar os pontos $F\left(-\frac{3}{2}, f\left(-\frac{3}{2}\right)\right)$ e $G\left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right)\right)$.

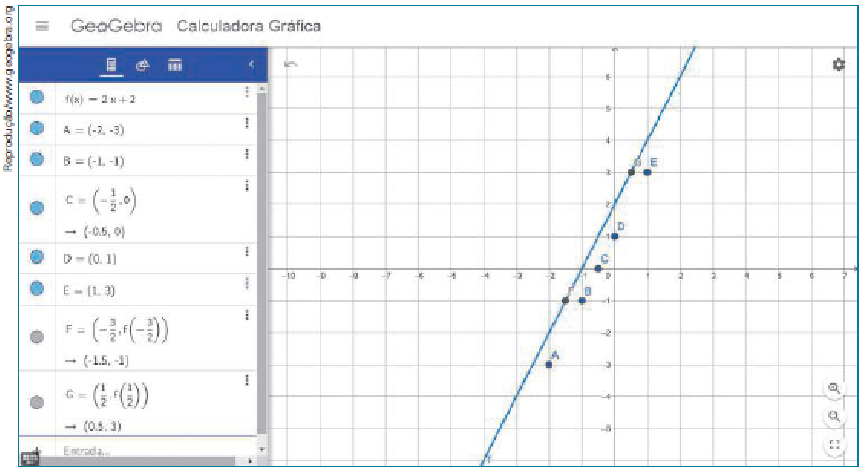
Podemos perceber que o GeoGebra identificou as maneiras diferentes de representação dos pontos e atribuiu cores diferentes a eles. Os pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E* não dependem da função, enquanto os pontos *F* e *G* são dependentes. Tente clicar, segurar e arrastar os pontos para fora da reta e observe que com os primeiros conseguirá e com os últimos não.



Tela do GeoGebra após o 3º passo.

4º passo: Agora, vamos alterar a lei da função *f* para observar e verificar o comportamento do gráfico dessa nova função e dos pontos inseridos anteriormente.

Para isso, dê um duplo clique na função (no campo de Entrada) e substitua o coeficiente *b* (valor inicial) de 1 por 2.



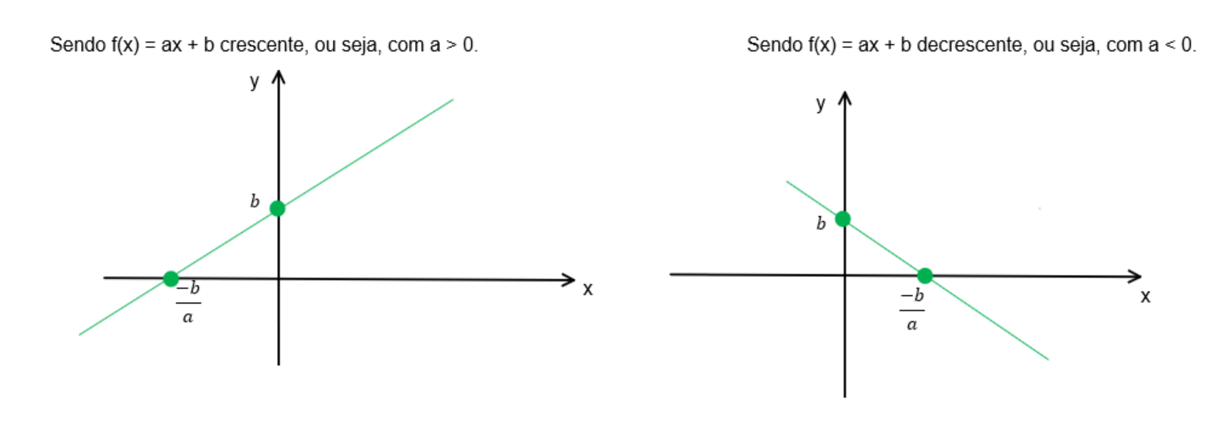
Tela do GeoGebra após o 4º passo.

Podemos perceber que os pontos que foram inseridos no GeoGebra na forma $(x, f(x))$, que são os pontos *F* e *G*, continuaram pertencendo ao gráfico da função *f* depois da alteração da lei dela. Já os pontos que não foram inseridos dessa maneira (os pontos *A*, *B*, *C*, *D* e *E*) não mudaram de posição e, por isso, não são mais pontos pertencentes ao gráfico da função *f*.

Fonte: Dante e Viana (2020a, p. 35).

No exemplo anterior, tem-se a construção da representação gráfica de uma função afim. Bonjorno, Giovanni Junior e Souza (2020a) apresentam que a representação gráfica de uma função afim *f* é uma reta que contém todos os pontos *(x, y)* tais que que *x* pertence ao domínio da função e $y = f(x)$. Assim, para $f(x) = ax + b$, têm-se as representações gráficas na Figura 74, considerando que a primeira (lado esquerdo da figura) representa uma função crescente e a segunda (lado direito da figura), uma função decrescente.

Figura 74 – Representação gráfica de função afim



Fonte: a pesquisa.

O coeficiente *a,* que é a taxa de variação da função *f*, também é conhecido como declividade ou coeficiente angular da reta em relação ao eixo *x*. O coeficiente *b* é o coeficiente linear da reta. O ponto ($\frac{-b}{a}$,*0*) é a raiz ou zero da função. Dessa forma, a representação gráfica da função afim (a reta) corta o eixo das abscissas no ponto ($\frac{-b}{a}$,*0*) e o eixo das ordenadas no ponto (*0,b*) (Bonjorno; Giovanni Junior; Souza*,* 2020a).

A Figura 75 traz uma atividade que remete ao TCT educação financeira. A partir desse exemplo, pode-se explorar o plano cartesiano, bem como os gráficos de funções, utilizando o *software* GeoGebra.

Figura 75 – SA 19 com o gráfico de função

Nestor está começando um negócio próprio, uma fábrica de móveis. Ele está analisando o custo de produção. Considerando todas as despesas, o custo de uma cadeira é calculado pela lei c = 10 + 20q, na qual c indica o custo (em reais) e q, a quantidade produzida (em unidades). Utilize o GeoGebra para construir o gráfico dessa função e analisar o seu comportamento. Se Nestor vender 10 cadeiras ao preço individual de R$50,00, qual será o seu lucro?

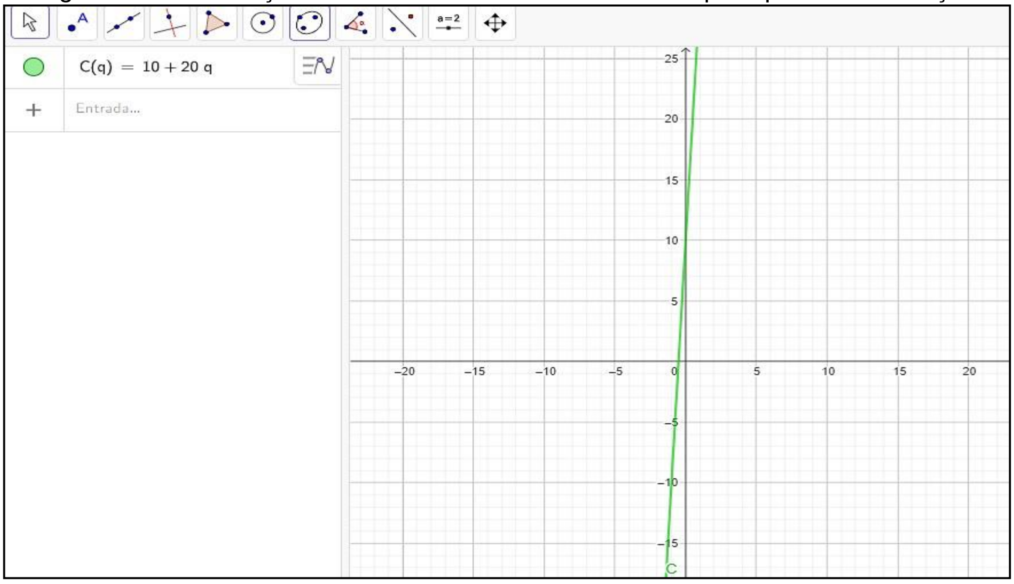
Fonte: adaptada de Dante e Viana (2020a).

O objetivo dessa atividade foi trabalhar a construção do gráfico no GeoGebra, sendo explorados os conceitos de domínio e imagem da função.

Resolução da SA 19 – Utilizando a versão *on-line* do GeoGebra:

1º passo: digitar no campo de entrada: *c(q) = 10* + *20q* e pressionar *Enter*. O comando *Enter plota* a função automaticamente, como se pode observar na Figura 76.

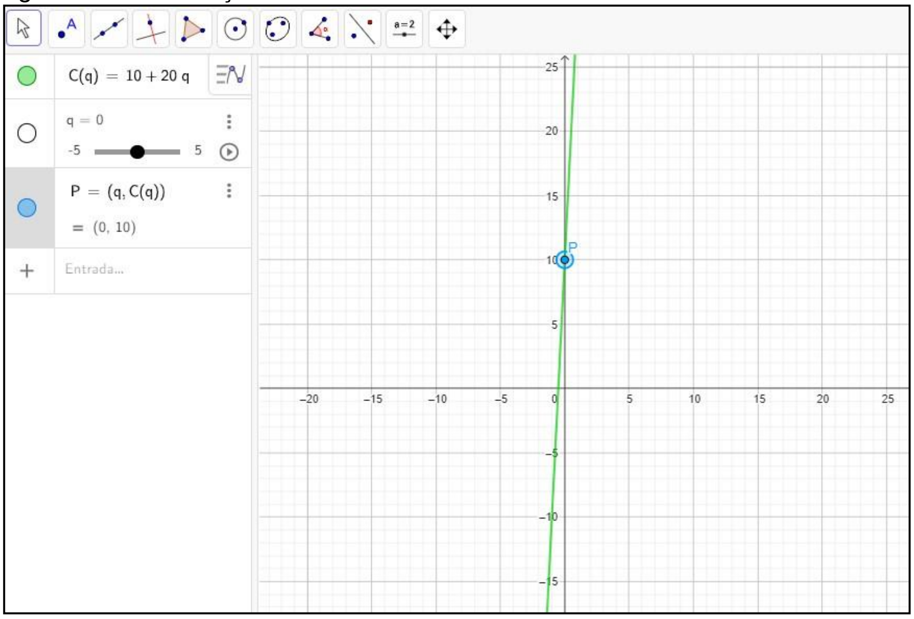
Figura 76 – Resolução da SA 19 utilizando o GeoGebra para p*lotar* uma função



Fonte: a pesquisa.

2º passo: criar um ponto *P*. No campo de entrada, digitar *P=(q,c(q))* e pressionar *Enter*. O GeoGebra vai criar automaticamente um controle deslizante como mostra a Figura 77. Esse controle deslizante, ao ser movimentado, desloca o ponto *P*, permitindo, assim, verificar qualquer ponto sobre essa função.

Figura 77 – Resolução da SA 19 criando um controle deslizante no GeoGebra

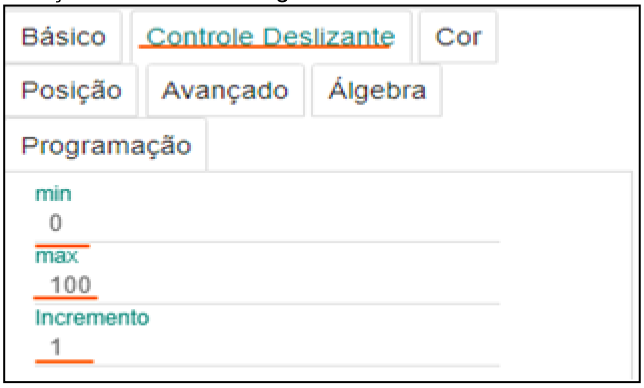


Fonte: a pesquisa.

Vale ressaltar, nesse exemplo, que *q* é a quantidade em unidades, logo o conjunto domínio da função (os valores de *q*) é formado pelos números inteiros positivos. Já o conjunto imagem é formado pelos valores do custo de produção, assim será o conjunto dos números reais positivos. Por isso, há a necessidade de se configurar o controle deslizante para esse domínio.

3º passo: clicar com o botão direito do mouse sobre o controle deslizante e escolher a opção *configurações*; deixar as opções: *mín* 0; *max* 100, incremento 1 e cor desejada. As demais opções permanecem as mesmas, como na Figura 78.

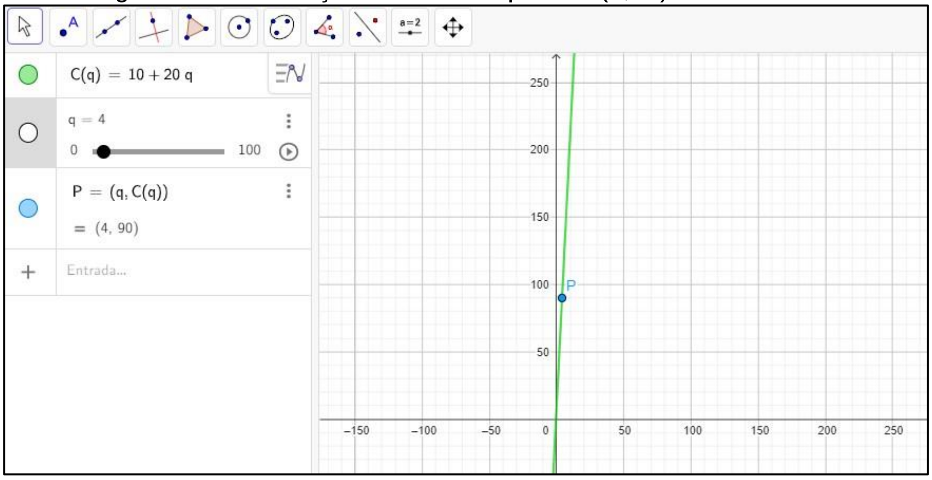
Figura 78 – Resolução da SA 19 configurando um controle deslizante no GeoGebra



Fonte: a pesquisa.

Dessa forma, o ponto criado pelo controle deslizante vai andar de 1 em 1 unidade, somente a partir do zero, permitindo analisar os custos da produção que variam de acordo com a quantidade produzida. Por exemplo, quando o controle deslizante está no valor 4, tem-se o ponto *P(4,90)* como mostra a Figura 79. Deve ser alterado o *zoom* da visualização da janela gráfica para melhor visualização do ponto *P*.

Figura 79 – Resolução da SA 19 o ponto *P*(4,90) no GeoGebra

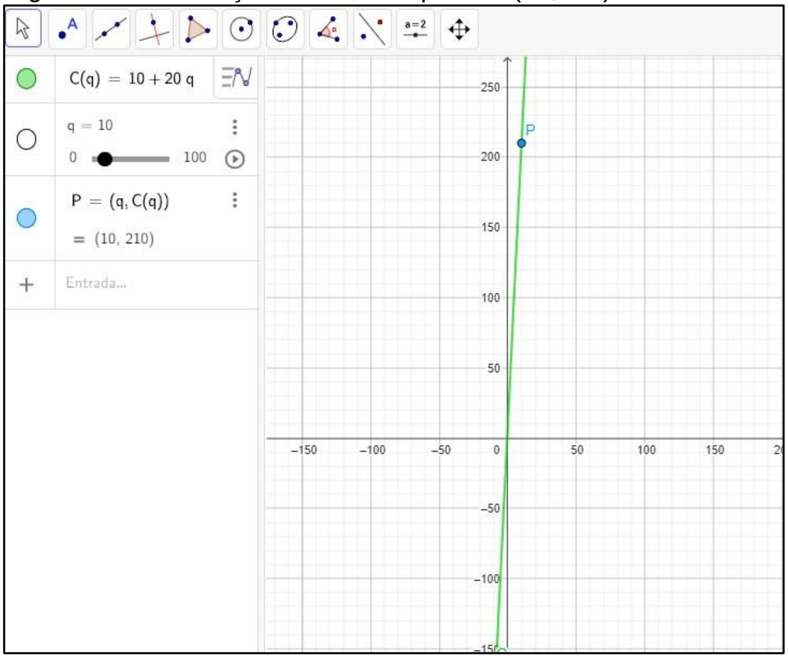


Fonte: a pesquisa.

Para a solução do problema, considerando uma venda de 10 cadeiras ao preço individual de R$50,00 e, observando no gráfico, o custo de 10 cadeiras é R$ 210,00

(Figura 80), assim Nestor obterá um lucro de R$ 290,00, pois: $10 \cdot 50 = 500 \Longrightarrow 500 - 210 = 290$.

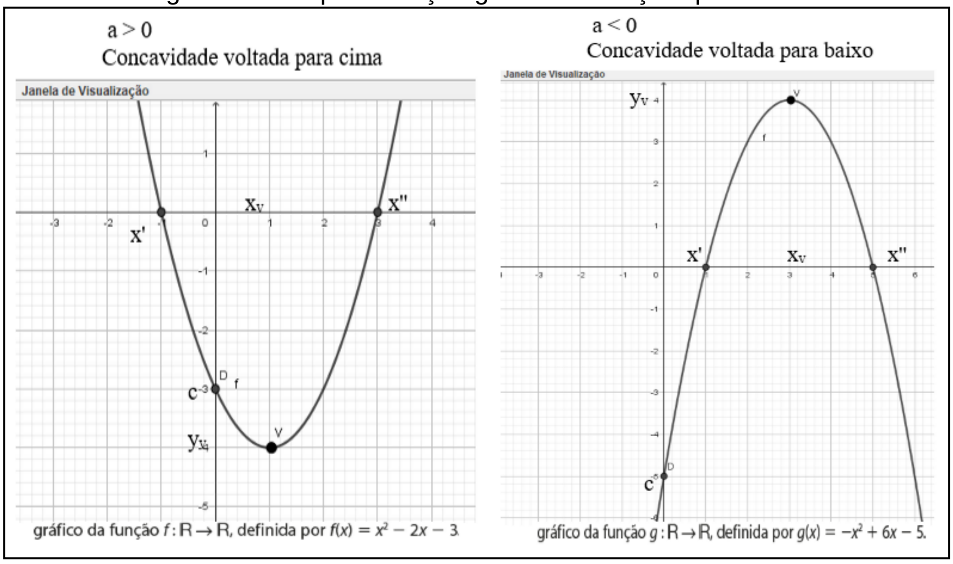
Figura 80 – Resolução da SA 19 o ponto *P*(10,210) no GeoGebra



Fonte: a pesquisa.

A Figura 81 apresenta o gráfico da função quadrática, que é uma parábola e, dependendo do valor do coeficiente a, pode ser voltada para cima ou para baixo.

Figura 81 – Representação gráfica da função quadrática



Fonte: a pesquisa.

Os elementos destacados nos gráficos da Figura 81 são os pontos necessários para a construção do mesmo a partir da lei de formação da função quadrática, sendo:

✓ Os pontos de interseção com o eixo *x* são os pontos cuja ordenada é zero e cujas abscissas são iguais às raízes da função: (*x',0*) e (*x'',0*);

✓ O ponto de interseção com o eixo *y* é o ponto (*0,c*), onde *c* é o termo independente da função;

✓ O vértice é o ponto formado pelas coordenadas x_v e y_v, que são calculadas pelas fórmulas: $x_v = \frac{-b}{2a}$ e $y_v = \frac{-\Delta}{4a}$.

Pode-se destacar que:

✓ O x_v é chamado de ponto de mínimo quando a parábola está voltada para cima e ponto de máximo, quando a parábola está voltada para baixo;

✓ O y_v corresponde ao ponto mínimo (menor valor da imagem) da parábola quando ela está voltada para cima, e é chamado de ponto máximo (maior valor da imagem) quando a parábola está voltada para baixo.

O gráfico da função quadrática também pode ser explorado utilizando o *software* GeoGebra. Na construção e na análise da parábola podem ser trabalhadas a conversão e o tratamento dos RRS.

A Figura 82 traz um exemplo com possibilidades de exploração dos diferentes RRS da função quadrática, abrangendo o TCT educação financeira.

Figura 82 – SA 20 o conceito e representação de função quadrática

Registro língua materna: questão da UFJF-MG (adaptada):

Um ônibus de 54 lugares foi fretado para uma excursão. A empresa cobrou de cada passageiro a quantia de R$ 55,00 e mais R$ 2,50 por lugar vago. O número de passageiros que dá à empresa rentabilidade máxima é:

a) 16 b) 24 c) 38 d) 49 e) 54

Interpretação: A receita (ou rentabilidade) depende da quantidade de passageiros.

O valor de cada passagem é composto de duas parcelas: uma tarifa fixa de R$ 55,00 e uma adicional de R$ 2,50 por assento vago.

A quantidade de assentos vagos é calculada subtraindo o número de passageiros do total de assentos disponíveis.

Assim, a empresa terá sua receita com base nessas duas tarifas. Dessa forma, é conveniente descrever uma lei para modelar essa situação.

Conversão para o registro algébrico numérico: Para expressar um modelo da situação, tomando os assentos vagos por 54 – p, p o número de passageiros e a receita por r(p), assim:

$r(p) = (55 + 2{,}5(54 - p)) \cdot p \Rightarrow r(p) = 55p + 135p - 2{,}5p^2 \Rightarrow r(p) = 190p - 2{,}5p^2$

Tratamento para obtenção do resultado: Essa lei de formação descreve uma função polinomial de 2º grau. Desse modo, o ponto que corresponde ao número de passageiros que proporciona a maior rentabilidade é o vértice. Para encontrar a abscissa desse vértice emprega-se a fórmula: $p_v = \frac{-b}{2a} \Rightarrow p_v = \frac{-190}{2(-2{,}5)} = \frac{-190}{-5} = 38.$

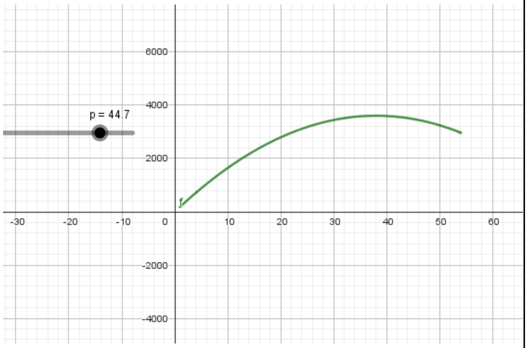
Resposta: **registro da língua materna**: Portanto, 38 passageiros é a quantidade que proporciona a maior rentabilidade. Alternativa c.

Análise para validação do resultado: É comum conjecturar que a maior receita da empresa, nessa situação, será quando ocorrer a lotação desse ônibus. Entretanto, ao se comparar a receita quando o ônibus está com todos os assentos ocupados e quando estão ocupados somente 38 assentos, obtém-se:

r(54) = 190 · 54 – 2,5 · 542 = 10 260 – 7 290 = 2 970 reais

r(38) = 190 · 38 – 2,5 · 382 = 7 220 – 3 610 = 3 610 reais

Para visualizar esse resultado graficamente, pode-se utilizar o GeoGebra, colocando a função no campo de entrada, limitando os valores de x de 1 a 54. Para facilitar utiliza-se, no campo de entrada a função com o comando se: f(x) = Se(1 ≤ x ≤ 54, 190*x – (5 / 2)* x^2). Criando um ponto P=(p,f(p)), com um controle deslizante variando de 1 a 54, com incremento 1 e, assim, pode-se observar os valores para a receita variando o valor de p. O resultado é o gráfico ao lado: **Registro gráfico**. O ponto P(38,3610) é o vértice da parábola, sendo o xv, o número de passageiros que dá a receita máxima.



Logo, verifica-se que vender todos os assentos não é o que gera a maior rentabilidade, dadas as condições propostas pelo exercício.

Fonte: adaptada de Cevada *et al.* (2020b).

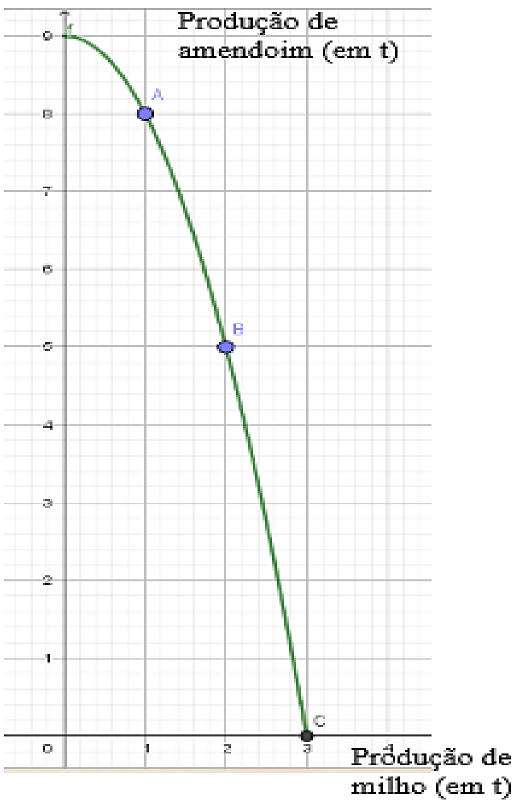
A Figura 83 apresenta uma situação de aprendizagem que também envolve o TCT educação financeira em uma produção de grãos. Nessa situação, pode-se explorar as raízes da função quadrática, bem como sua forma fatorada.

Figura 83 – SA 21 o conceito e representação de função quadrática

Em Economia, uma das estratégias para comparar a capacidade produtiva entre dois ou mais produtos é utilizar uma representação gráfica em que seja possível identificar, por meio da curva, o máximo na combinação da produção. Esse gráfico e chamado de curva de possibilidade de produção. Suponha que uma empresa alimentícia produza amendoim e milho de pipoca. Algumas possíveis combinações da quantidade (em toneladas) de grãos produzidos por semana estão descritas no gráfico ao lado. Essa curva representa um arco de parábola que passa pelos pontos indicados.

Determine a lei de formação f(x) que corresponde a essa curva nesse intervalo.

Controlar e planejar a produção agrícola estão entre os requisitos para boas colheitas e estocagens adequadas sem perdas na comercialização.



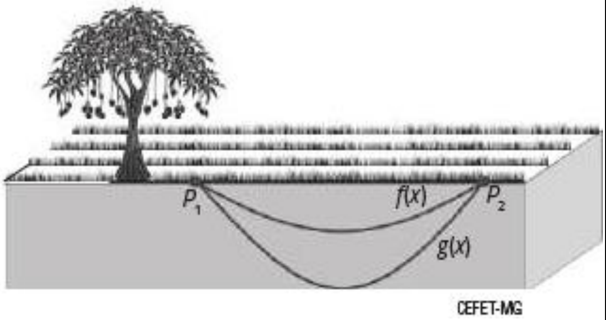
Fonte: Cevada *et al.* (2020b, p. 141).

Resolução da SA 21 – Analisando a curva no gráfico, observa-se que, para $x = 0$, tem-se $f(0) = 9$, que coincide com o termo independente $c = 9$. Se a primeira raiz $x' = 3$, a outra raiz simétrica será $x'' = -3$. Dessa forma, substituindo na expressão fatorada da equação do 2º grau, obtém-se: $f(x) = a \cdot (x - x_1) \cdot (x - x_2) \Longrightarrow f(x) = a \cdot (x + 3) \cdot (x - 3) \Longrightarrow f(x) = a \cdot (x^2 - 9)$ Sendo $f(0) = 9$, segue-se que: $9 = a \cdot (0^2 - 9) \Longrightarrow 9 = -9a \Longrightarrow a = -1$. Logo, pode-se escrever a equação como sendo $f(x) = -x^2 + 9$. Outras resoluções poderiam ser utilizadas, como por exemplo, montar um sistema de equações a partir dos pontos observados no gráfico, para encontrar os coeficientes da função quadrática.

A atividade da Figura 84 possibilita o trabalho com a utilização do *software* GeoGebra para a construção e interpretação do gráfico da função quadrática, por meio de uma situação-problema envolvendo o tema educação para o consumo.

Figura 84 – SA 22 o gráfico de função quadrática

(Cefet-MG - adaptada). Após uma aula de Matemática sobre função quadrática, Lucas solicitou ao professor para falar sobre sua ida ao sítio da família. Ele contou que seu avô quer construir, ao lado da mangueira do sítio, um lago para criar peixes e que um engenheiro amigo da família fez um projeto respeitando as normas ambientais. O professor ficou bastante interessado e pediu que Lucas trouxesse uma foto do desenho do projeto. A figura ao lado mostra o projeto do engenheiro ambiental no qual a lagoa, vista por um corte horizontal do terreno, é representada por uma parábola, com raízes P_1 e P_2 distantes 8 metros. O projeto inicial previa a parábola $g(x) = x^2 - 8x$. Para conter gastos, essa parábola foi substituída pela parábola $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x$.



O professor compartilhou o desenho com os estudantes e solicitou que fizessem o gráfico das funções utilizando o GeoGebra e em seguida respondessem à seguinte questão: com essa mudança, a maior profundidade da lagoa, diminuiu quantos metros?

a) 4. **b)** 8. **c)** 12. **d)** 16.

Fonte: adaptada de Souza, J. R. (2020b).

Resolução da SA 22 – Utilizando o GeoGebra, pode-se construir a parábola de ambas as funções e realizar a interpretação adequada para responder à questão, seguindo os seguintes passos:

1º - digitar cada uma das funções (separadamente) no campo de entrada do GeoGebra; alterar as cores da parábola em *propriedades*;

2º - utilizar a ferramenta *ponto em intersecção de dois objetos*, selecionando a função e o eixo *x*, para encontrar as raízes da função; fazer o mesmo com a outra função; na janela de álgebra aparecerá os pontos com suas coordenadas;

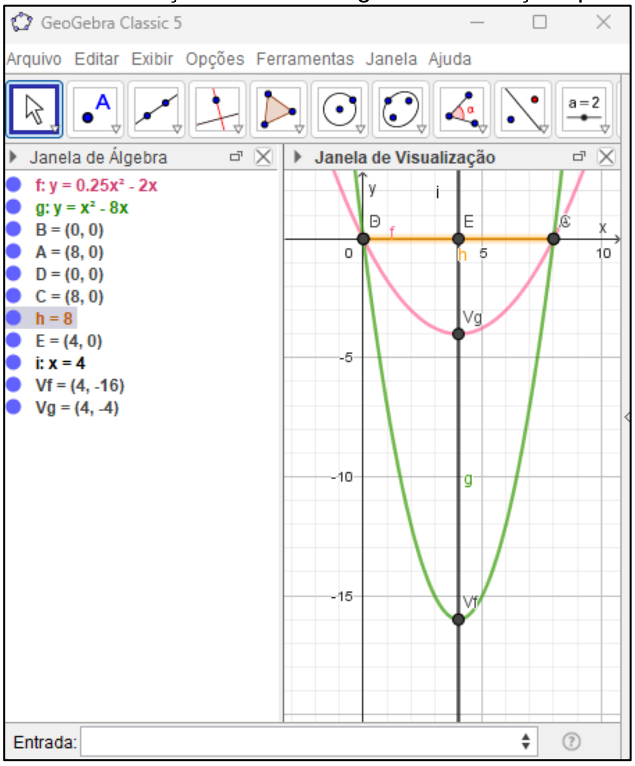
3º - usar a ferramenta *segmento* para unir as duas raízes; usar a ferramenta *ponto médio* para encontrar o centro desse segmento.

4º - usar a ferramenta *reta perpendicular* para traçar a perpendicular em relação ao eixo *x*, passando pelo ponto médio encontrado no passo anterior;

5º - utilizar novamente a ferramenta *ponto de interseção de dois objetos* selecionando a parábola e a reta perpendicular, encontrando assim o ponto do vértice; fazer o mesmo procedimento com a outra parábola; na janela de álgebra aparecerá o vértice, renomear para ponto V_f e V_g em *propriedades*.

Para responder à pergunta da atividade, deve-se observar o resultado do gráfico após a utilização desses passos, na Figura 85. Nota-se que o y_v da função *f*, ou seja, seu valor mínimo é -16 e o y_v da função *g* é -4. Dessa forma, a profundidade inicial era de 16 metros e passou a ser de 4 metros, portanto a diferença na profundidade é de 12 metros, alternativa *c*.

Figura 85 – Resolução da SA 22 o gráfico de função quadrática



Fonte: a pesquisa, utilizando o *software* GeoGebra.

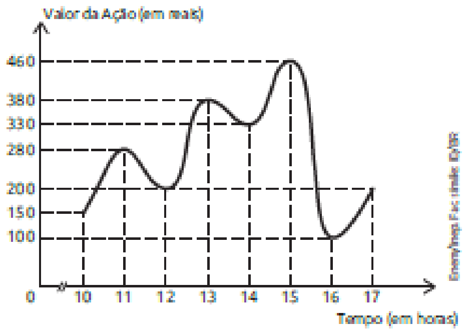
A atividade da Figura 86, permite a exploração do TCT educação financeira por meio de um exercício que envolve leitura e interpretação de gráficos. Além de que, permite a conversão do registro gráfico para a representação numérica (por meio de uma tabela).

Figura 86 – SA 23 a interpretação de gráficos

(Enem/Inep - adaptada) O gráfico ao lado fornece os valores das ações da empresa XPN, no período das 10 às 17 horas, num dia em que elas oscilaram acentuadamente em curtos intervalos de tempo.

Nesse dia, cinco investidores compraram e venderam o mesmo volume de ações, porém em horários diferentes, de acordo com o seguinte quadro.

Investidor	Hora da compra	Hora da venda
Alonso	10:00	15:00
Bento	10:00	17:00
Cícero	13:00	15:00
Douglas	15:00	16:00
Emanoel	16:00	17:00



O símbolo # indica que houve uma quebra no eixo, permitindo melhor visualização dos dados.

Com relação ao capital adquirido na compra e venda das ações, qual investidor fez o melhor negócio?

a) Alonso b) Bento c) Cícero d) Douglas e) Emanoel

Resolução:

Para resolver o problema, é preciso compreender a relação entre o gráfico e o quadro, analisar qual é o melhor negócio nesse contexto e, assim, identificar qual investidor fez o melhor negócio.

Com base nas informações do gráfico, pode-se construir um quadro para cada investidor (ao lado):

Investidor	Valor da venda – valor da compra
Alonso	460 - 150 = 310
Bento	200 - 150 = 50
Cícero	460 - 380 = 80
Douglas	100 - 460 = - 360
Emanoel	200 - 100 = 100

Note que a diferença entre o valor de compra e o valor de venda, sendo o valor de venda maior, é a mais alta para o investidor Alonso. Logo, Alonso fez o melhor negócio. Portanto, a alternativa correta é a letra *a*.

Fonte: adaptada de Chavante e Prestes (2020).

A próxima seção traz as atividades propostas do tópico gráfico de funções.

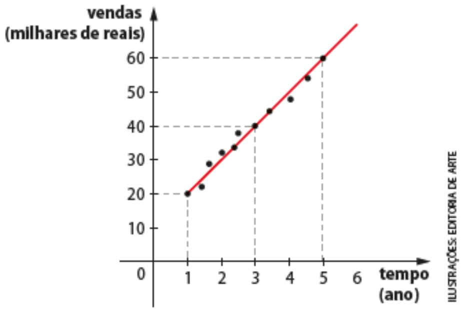
6.3.7 Atividades propostas envolvendo gráfico de funções

Nesta seção estão as atividades propostas sobre o tópico gráfico de funções. A Figura 87 apresenta as atividades que podem ser trabalhadas juntamente com o TCT educação financeira.

Figura 87 – Atividades propostas sobre gráfico de função afim

AP 17 (Bonjorno; Giovanni Junior; Souza, 2020a, p. 97). O gerente da loja de artigos para *pets* fez um levantamento das vendas da loja ao longo dos últimos cinco anos e observou que os valores poderiam ser aproximados por uma reta. Com base nos dados obtidos, construiu o gráfico que representa as vendas (em milhares de reais) em função do tempo (em ano).

Observe o gráfico e faça o que se pede em cada caso.



a) Determine a lei de formação da função representada pelo gráfico.

b) Se as vendas da loja mantiverem a evolução apresentada nos últimos cinco anos, qual será a projeção de vendas para o sétimo ano de observação?

c) Reúna-se a um colega, e respondam: as informações disponíveis são suficientes para responder aos itens anteriores? Há algum dado que não foi utilizado? Justifiquem suas respostas.

AP 18 (adaptada de Cevada *et al.,* 2020b).Se João toma café da manhã na padaria, ele gasta R$ 5,50; se ele toma em casa, gasta R$ 1,75.

a) Para cada uma dessas situações determine uma lei de formação que relacione o custo *c* (em R$) do café da manhã de João com o tempo *t* (em dias).

b) Esboce o gráfico das duas funções no mesmo sistema cartesiano, utilizando o GeoGebra.

c) Calcule o gasto anual de cada uma das opções. Qual é a economia que João fará se tomar café da manhã somente em casa?

d) Com quantas pessoas ele pode compartilhar o café da manhã se estiver disposto a usar essa economia para uma causa social?

AP 19 (adaptada de Longen; Blanco, 2020). O estudante Carlos relatou ao seu professor de Matemática que trabalha em um lava a jato chamado “Brilho e Cera” e seu patrão pediu que ele auxiliasse na situação de maximização da arrecadação semanal. Sabe-se que: o lava a jato tem 50 clientes fixos por semana; cada lavagem custa R$ 20,00; e a cada um real que o dono desse lava a jato aumento no preço da lavagem, ele perde 2 clientes. O professor sugeriu ao Carlos para escrever a função quadrática que descreve a situação e utilizar o GeoGebra para construir o gráfico dessa função, para então determinar qual é o valor do aumento que maximiza a arrecadação semanal do lava-jato e qual será essa arrecadação máxima. Siga os passos sugeridos pelo professor. O que essa maximização significa?

a) R$ 25,00 b) R$ 20,00 c) R$ 2,5 d) R$ 10,00 e) R$ 2,00

Fonte: a pesquisa.

Destaca-se que a atividade AP 19 também permite o trabalho com o TCT educação para o consumo, assim como AP 20 e AP 21 apresentadas na Figura 88. Observa-se que a AP 20 também trabalha o TCT ciência e tecnologia por meio dos conceitos das grandezas físicas: potência, *kilowatt* e hora.

Figura 88 – Atividades propostas referentes aos gráficos de função afim

AP 20 (adaptada de Souza, J. R., 2020b). Os fabricantes de ar-condicionado geralmente disponibilizam informações que auxiliam na escolha da melhor opção para a compra do equipamento, de acordo com alguns aspectos. Um dos aspectos que deve ser considerado, por exemplo, é a relação entre a quantidade de *BTUs* do ar-condicionado e a área da região que se pretende resfriar de forma que o uso seja mais eficiente e mais sustentável no gasto de energia elétrica.

Observe, na tabela ao lado, as recomendações de certo fabricante no que se refere à relação entre a medida do lado de uma região quadrada e a quantidade mínima de *BTUs* de um ar-condicionado. Nesse caso, está sendo desconsiderada a existência de aparelhos elétricos e de pessoas na região.

Medida do lado (m)	1	2	3	4	5
Quantidade de BTUs	600	2 400	5 400	9 600	15 000

a) Utilize o GeoGebra para representar, no plano cartesiano, a relação indicada acima.

b) Agora, com base no item *a*, escreva a lei de formação de uma função que relaciona a quantidade q de *BTUs* do ar-condicionado à medida do lado *l* de uma região quadrada, em metro, com $l > 0$

c) Calcule quantos *BTUs*, no mínimo, esse fabricante recomendaria para uma região quadrada cuja medida do lado é igual a:

■ 2,5 m; ■ 6 m; ■ 10 m.

d) Para utilizar um ar-condicionado de 48 600 *BTUs*, é necessário que a região quadrada tenha quantos metros de lado, no máximo?

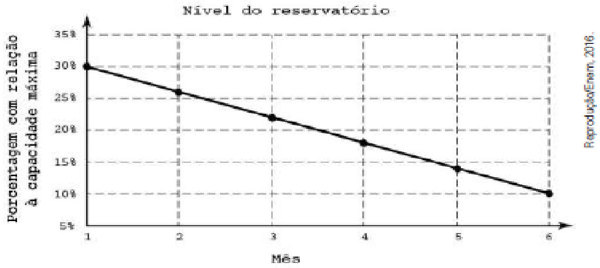
e) Qual a importância de seguir essas recomendações dos fabricantes de ar-condicionado?

AP 21 (adaptada de Dante; Viana, 2020a). Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.

1- Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

a) 2 meses e meio. b) 3 meses e meio. c) 1 mês e meio. d) 4 meses. e) 1 mês.

2- Para reflexão: quais ações poderiam ser eficazes na redução do consumo de água nas residências abastecidas por esse reservatório?



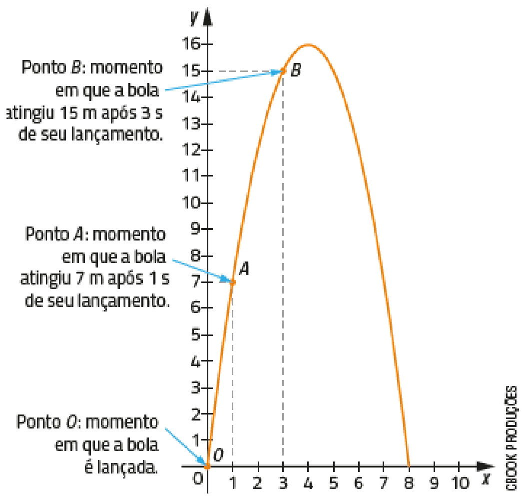
Fonte: a pesquisa.

A Figura 89 apresenta uma atividade (AP 22) que pode ser trabalhada juntamente com o TCT ciência e tecnologia.

Figura 89 – Gráfico e taxa de variação média da função quadrática

AP 22 – Atualmente, existem diferentes robôs que podem ser utilizados em treinamentos de diversas modalidades esportivas. Por exemplo, robôs lançadores de bolas de tênis, que possibilitam ao atleta treinar sozinho. Em um experimento ao ar livre, utilizando um robô instalado em um piso plano, uma bola de tênis foi lançada do chão de maneira que sua trajetória pode ser descrita pela função f: $[0, 8] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2 + 8x$, em que $y = f(x)$ corresponde à altura dessa bola, em metros, após x segundos do momento em que ela foi lançada.

Para analisar quanto variou em média a altura da bola durante parte dessa trajetória, pode-se calcular a taxa de variação média de f, para x variando de x_1 até x_2, com $x_1 \neq x_2$, dada por: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}$.



Por exemplo, a taxa de variação média de f no intervalo de tempo de 1s até 3s é dada por: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \frac{15-7}{2} = 4$

Portanto, pode-se dizer que, no intervalo de tempo de 1s até 3s após o momento em que a bola foi lançada, sua altura variou, em média, 4 m a cada segundo.

Agora, calcule a taxa de variação média dessa função para x variando de $x_1 = 0$ até $x_2 = 3$. Depois, interprete esse resultado de acordo com o contexto apresentado.

Fonte: Souza, J. R. (2020b, p. 30).

A Figura 90 destaca uma atividade (AP 23) cujo objetivo principal é o trabalho com a conversão do registro gráfico para o registro na língua natural, para tanto, o estudante pode escolher qualquer um dos três TCT trabalhados: educação financeira; educação para o consumo; ciência e tecnologia.

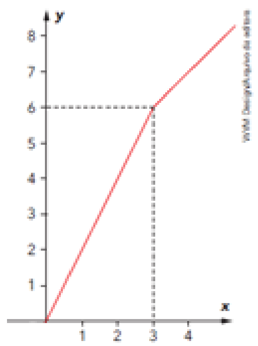
Figura 90 – AP 23 explora a conversão entre os registros

Observe o gráfico ao lado. Ele é formado por dois segmentos, ou ainda, duas semirretas, logo ele não representa uma função afim.

Note que, nesse caso, cada um dos dois trechos da representação gráfica dessa função coincide com parte da representação gráfica de uma função afim, por isso essa função também é chamada função afim por partes.

A imagem da função será calculada de acordo com o intervalo ao qual o x pertence: para os valores de x menores que 3, utilizou-se f(x) = 2x; para os valores maiores de x ou iguais a 3, utilizou-se f(x) = x + 3. Nesse exemplo, a lei da função f é definida por: $f(x) = \begin{cases} 2x, se\ x < 3 \\ x + 3, se\ x \geq 3 \end{cases}$

Elabore uma situação-problema que possa ser representada por esse gráfico. Essa situação deve envolver um dos TCT desenvolvidos: educação financeira, educação para o consumo ou ciência e tecnologia.



Fonte: adaptada de Dante e Viana (2020a).

O objetivo das atividades propostas foi o trabalho com os TCT em situações resolvidas por meio da análise, interpretação ou mesmo a construção dos gráficos de funções.

6.3.8 Algumas características de função

6.3.8.1 Injetividade, sobrejetividade e bijetividade de uma função

Uma função $f{:}A \to B$, ou seja, uma função cujo domínio é o conjunto A e o contradomínio é o conjunto B, pode ser classificada como sobrejetiva, injetiva ou bijetiva, conforme apresentam Chavante e Prestes (2020):

- sobrejetiva (ou sobrejetora) quando, para qualquer $y \in B$, existe $x \in A$ tal que $f(x) = y$, em outras palavras, quando todos os elementos do contradomínio também são elementos do conjunto imagem da função;
- injetiva (ou injetora) quando, para quaisquer $x_1, x_2 \in A$, com $x_1 \neq x_2$, tem-se $f(x_1) \neq f(x_2)$, ou seja, não existe elemento do contradomínio que seja imagem de mais de um elemento do domínio da função;
- bijetiva (ou bijetora) quando é sobrejetora e injetora simultaneamente, ou seja, cada um dos elementos do contradomínio é imagem de apenas um elemento do domínio.

A Figura 91 apresenta exemplos de funções que são sobrejetoras, injetoras ou bijetoras, contextualizadas com o TCT educação financeira.

Figura 91 – SA 24 com exemplos de funções injetora, sobrejetora e bijetora

1- Um estacionamento cobra R$ 6,00 pela primeira hora e mais R$ 3,00 para cada hora seguinte que o veículo permanece estacionado. Essa situação representa uma função com domínio igual ao conjunto dos números inteiros não negativos e contradomínio igual ao conjunto formado pelos números inteiros maiores ou iguais a 6, definida por $y = 6 + 3x$, sendo *y* o total a pagar e *x* a quantidade de horas de estacionamento. Essa função é **sobrejetora**, pois para qualquer *y*, haverá um *x* correspondente.
2- Dada uma função $f: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}_+$, em que o valor a pagar *y* por um pacote de café depende da quantidade de pacotes *x* comprados. Essa é uma função **injetora**, pois cada valor a pagar *y* está relacionado com uma quantidade *x* diferente.
3- A quantia *y* que uma pessoa desembolsa para abastecer seu veículo depende da quantidade de litros de combustível *x* que são colocados, definindo a função $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, que é uma função sobrejetora, pois para qualquer valor a pagar *y* vai corresponder a uma quantidade *x* abastecida. Essa função também é injetora, pois cada *y* corresponderá a um *x* diferente. Como ela é ao mesmo tempo injetora e sobrejetora, diz-se que ela é **bijetora**.

Fonte: adaptada de Costa e Carvalho (1998).

A próxima seção apresenta a função inversa, indicando os casos em que ela existe.

6.3.8.2 Função inversa

Dada uma função $f:A \rightarrow B$, Chavante e Prestes (2020) apresentam que, se *f* é bijetora, então existe uma função que inverte *f*, chamada de função inversa de *f* e indicada por $f^{-1}: B \rightarrow A$.

No exemplo anterior, a função $f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$, que relaciona a quantia *y* paga pelo abastecimento do veículo à quantidade de litros de combustível *x,* é bijetora. A função inversa correspondente será a função que relaciona a quantidade de litros ao valor pago correspondente. Considerando o valor do combustível de R$ 3,50, tem-se $y = 3{,}5x$ e a inversa $x = \frac{y}{3{,}5}$.

A Figura 92 apresenta um exemplo em que a utilização da função inversa possibilita resolver uma situação-problema que envolve o TCT educação financeira.

Figura 92 – SA 25 referente à função inversa

Todos os meses, Joana deposita, em sua conta bancária, uma quantia *y*, em reais. A quantia *y* é calculada utilizando a fórmula $y = 0{,}75x + 50$, em que *x* representa a comissão de vendas mensal recebida por ela.
a) Determine a quantia depositada por Joana em março, sabendo que nesse mês ela recebeu uma comissão de R$ 1 200,00.
b) Determine a função inversa de *y* e descreva o que a inversa representa.
c) Qual deve ser a comissão de Joana para ela depositar R$ 1 250,00?

Fonte: adaptada de Teixeira (2020).

Resolução da SA 25 – Respondendo aos itens solicitados na atividade:

a) Para x = 1200, obtém-se: $y = 0{,}75 \cdot 1200 + 50 = 950$. Logo, Joana depositou R$ 950,00.

b) Para encontrar a função inversa, deve-se isolar o x na função:

$y = 0{,}75x + 50 = \frac{3}{4}x + 50 \Rightarrow \frac{3}{4}x = y - 50 \Rightarrow x = \frac{4}{3} \cdot (y - 50)$. A inversa significa que agora há uma relação de x para a y, ou seja, o valor de x (comissão de vendas) passa a depender de y (valor depositado).

c) Pode-se utilizar a função inversa para responder a esse item, assim:

$x = \frac{4}{3} \cdot (y - 50) \Rightarrow x = \frac{4}{3} \cdot (1250 - 50) \Rightarrow x = \frac{4}{3} \cdot 1200 = 1600$. Assim, a comissão deverá ser de R$ 1 600,00.

6.3.8.3 Crescimento ou decrescimento de uma função

Algumas funções apresentam intervalos de crescimento ou decrescimento, mas a função afim é definida inteiramente como crescente ou decrescente. Dessa forma, uma função afim é crescente quando aumentando-se (ou diminuindo-se) os valores para *x,* consequentemente os valores de *y* também aumentam (ou diminuem). Já para a função afim decrescente, aumentando-se os valores de *x*, os valores de *y* diminuem. Medeiros *et al.* (2013, p. 113) definem que: "em uma função afim, para quaisquer valores reais de x_1 e x_2 tem-se que: função crescente, se $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$ ou se $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$; função decrescente, se $x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2)$ ou se $x_1 > x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2)$". Na função afim crescente tem-se que o coeficiente *a* é positivo e, na função afim decrescente, *a* é negativo.

A situação apresentada na Figura 93 ilustra o crescimento ou decrescimento de uma função que envolve o TCT educação financeira.

Figura 93 – SA 26 sobre crescimento ou decrescimento de funções

A loja de tintas "Mil Cores" fez uma alteração nos preços de suas latas de tintas conforme a tabela abaixo:

Preço antigo (x)	10	25	90
Novo preço (y)	12	30	108

Essa situação representa uma função crescente ou decrescente?

Fonte: adaptada de Andrade (2020).

Resolução da SA 26 – Observando o registro figural da tabela, percebe-se que é uma função crescente, pois, quando o valor de *x* aumenta o valor de *y* também aumenta.

A Figura 94 mostra uma situação que envolve o TCT ciência e tecnologia e aborda o crescimento ou decrescimento de uma função.

Figura 94 – SA 27 sobre crescimento ou decrescimento de funções

No infográfico, estão representadas as camadas da atmosfera.

Suponha que a temperatura diminui cerca de 5 °C a cada quilômetro que é aumentado na altitude, e considere que em um ponto R, situado na linha do equador, a temperatura ao nível do mar é de aproximadamente 30 °C.

a) Escreva a lei de formação de uma função que expresse a temperatura T, em função da altitude x em quilômetros, acima do ponto R.

b) A função que você escreveu é crescente ou decrescente?

c) Qual deve ser a altitude para que a temperatura seja inferior a 5 °C?

Fonte: adaptada de Andrade (2020).

Resolução da SA 27 – Respondendo aos itens da atividade, obtém-se que:

a) A temperatura T diminui cerca de 5 ºC a cada quilômetro que se aumenta na altitude, o que pode ser representado pela expressão $-5x$, sendo x a altitude em quilômetro. Como a temperatura no ponto R é de aproximadamente 30º, logo a temperatura acima desse ponto será dada pela função $T = f(x) = -5x + 30$.

b) Como $a = -5$, tem-se que $a < 0$, logo a função é decrescente.

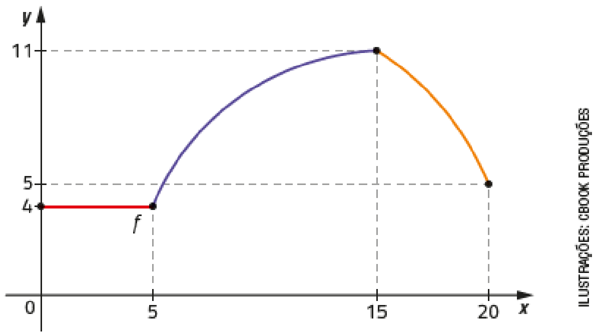
c) Uma temperatura inferior a 5 ºC equivale a $-5x + 30 < 5 \Rightarrow -5x < -25 \Rightarrow x > 5$. Portanto, a altitude deve ser maior do que 5 km.

Quando a função não é função afim, o crescimento ou decrescimento pode ser determinado em alguns intervalos da função, como pode ser observado na SA 28 que possibilita o trabalho com o tema ciência e tecnologia (Figura 95).

Figura 95 – SA 28 trabalhando o crescimento ou decrescimento de uma função

Em determinado dia, Vanessa decidiu realizar um treino aeróbico de 20 min de corrida. Esse treino consistia em 5 min de caminhada para aquecimento, 10 min de corrida com aumento de velocidade e 5 min de corrida com redução gradual da velocidade até finalizá-lo, ainda em movimento.

Pensando em acompanhar seu desempenho, ela utilizou um aplicativo de *smartphone* para gerar o gráfico da velocidade aproximada *y* (em quilômetros por hora) alcançada durante o treinamento em função do tempo aproximado *x* (em minutos) de duração do treino. Observe, ao lado, o gráfico apresentado por esse aplicativo.



Qual a velocidade de Vanessa quando ela inicia e termina o registro do treino no aplicativo? Justifique.

Resposta: Vanessa inicia o treino a 4 km/h, correspondente ao ponto de coordenadas (0, 4) do gráfico, e termina o treino a 5 km/h, correspondente ao ponto de coordenadas (20, 5).

Fonte: Souza, J. R. (2020a, p. 83).

Para a resolução da SA 28, analisa-se o gráfico para identificar que o domínio da função é: *D* (*f*) = [0, 20]. Pode-se observar o comportamento de *f* em intervalos reais que representam subconjuntos de *D*(*f*):

- a função é constante no intervalo de [0,5], ou seja, para qualquer valor de *x* nesse intervalo, o valor de *y* correspondente é sempre o mesmo;
- a função é crescente no intervalo [5,15], ou seja, conforme os valores de *x* aumentam nesse intervalo, o valor de *y* correspondente também aumenta;
- a função é decrescente no intervalo [15,20], ou seja, conforme os valores de *x* aumentam nesse intervalo, o valor de *y* correspondente diminui.

6.3.8.4 Estudo do sinal de uma função para a resolução de uma inequação

Estudar o sinal de uma função definida por *y = f(x)* consiste em determinar os valores reais de *x ϵ D(f)* que tornam a função positiva (*f(x)* > 0), negativa (f(*x*) < 0) ou nula (*f(x)* = 0). Esse estudo do sinal pode ser feito analisando-se o gráfico que representa a função considerada.

A resolução de uma inequação, seja do primeiro grau ou do segundo grau, é realizada a partir do estudo do sinal da função correspondente, verificando-se os elementos do domínio para os quais a imagem pela função é um valor positivo, um valor negativo ou um valor nulo, conforme definem Medeiros *et al*. (2013, p. 117):

> Para saber quando f(x) > 0, temos de determinar os valores de x, onde y > 0, ou seja, os valores de x em que o gráfico está acima do eixo x. Para sabermos quando f(x) = 0, devemos determinar as raízes da função, ou seja, os valores

> de x onde o gráfico corta esse eixo. Para sabermos quando f(x) < 0, temos de determinar os valores de x onde y < 0, ou seja, os valores de x onde o gráfico está abaixo do eixo x.

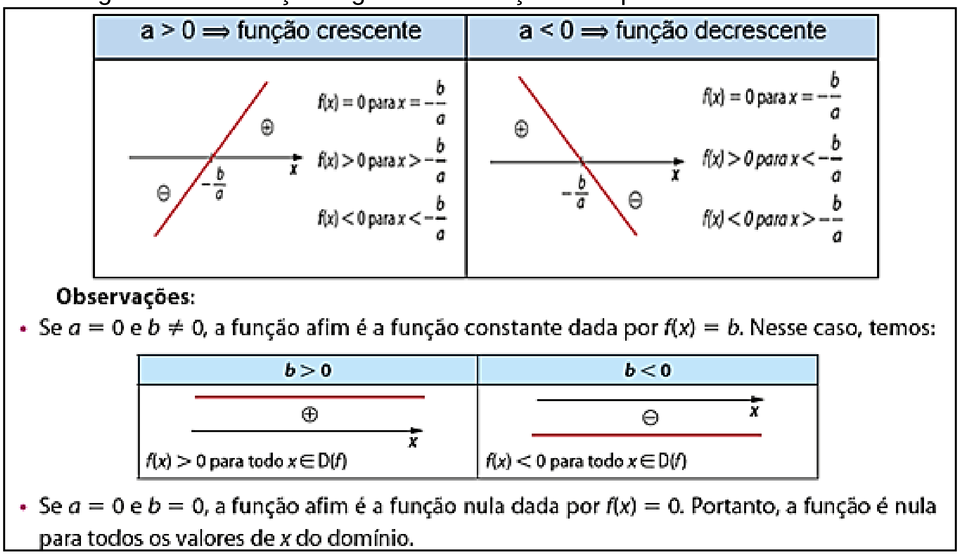
Sendo a raiz, ou zero da função, a abscissa do ponto de interseção do gráfico de uma função com o eixo *x*, que é dado por (*x*,0). Assim, para encontrar a raiz de uma função, é suficiente calcular x para o qual *f(x)* = 0. Para a função afim, por exemplo, tem-se: $ax + b = 0 \Longrightarrow ax = -b \Longrightarrow x = \frac{-b}{a}$.

6.3.8.5 Inequação do primeiro grau

Bonjorno, Giovanni Junior e Souza (2020a) denominam como inequação do 1º grau na incógnita *x* toda desigualdade que pode ser escrita em uma das formas a seguir, com $a, b \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$: $ax + b > 0$; $ax + b \geq 0$; $ax + b < 0$; e $ax + b \leq 0$. Sendo utilizado o estudo do sinal da função afim correspondente para resolver a inequação dada.

Assim, para o estudo do sinal de uma função afim, deve-se inicialmente determinar a raiz da função, fazer um esboço do gráfico e analisar a imagem da função a partir desse esboço, como na Figura 96.

Figura 96 – Esboço do gráfico da função afim para o estudo do sinal

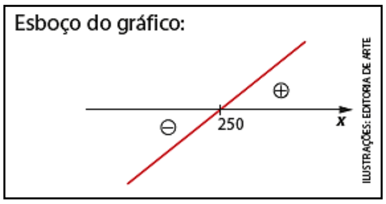


Fonte: adaptada de Bonjorno, Giovanni Junior e Souza (2020a).

A situação apresentada na Figura 97 possibilita a exploração do TCT educação financeira juntamente com a resolução de inequação do primeiro grau.

Figura 97 – SA 29 com inequação de primeiro grau

Anderson foi trabalhar em uma indústria de móveis na cidade de Rondonópolis. Sabe-se que o faturamento líquido relativo à venda de uma cadeira, em reais, é calculado por $f(x) = 4x - 1000$. Nessa lei, $f(x)$ representa o faturamento líquido de x cadeiras vendidas. Determine a quantidade mínima de cadeiras que devem ser vendidas para que haja lucro nessa indústria.



Fonte: adaptada de Bonjorno, Giovanni Junior e Souza (2020a).

Resolução da SA 29 – Determinar a quantidade mínima de cadeiras vendidas para que a indústria tenha lucro é determinar o valor mínimo de x para que se tenha $f(x) > 0$. Observe que o domínio de $f(x)$ é o conjunto $\mathbb{N}$, pois x representa o número de cadeiras vendidas. Assim, o gráfico de f é formado por pontos alinhados. No entanto, como será feito apenas um esboço do gráfico, traça-se uma reta como se o domínio fosse o conjunto $\mathbb{R}$ (Figura 97). Essa função é crescente, pois $a > 0$. Determinando-se o zero da função: $4x – 1\,000 = 0 \Rightarrow 4x = 1\,000 \Rightarrow x = 250$. Analisando o esboço do gráfico, tem-se que:

- $f(x) = 0$ para $x = 250$ (lucro zero);
- $f(x) > 0$ para $\{x \in |N \mid x > 250\}$ (lucro);
- $f(x) < 0$ para $\{x \in |N \mid x < 250\}$ (prejuízo).

Portanto, para haver lucro, é necessário vender pelo menos 251 unidades dessa cadeira.

A próxima situação-problema (Figura 98) com o TCT educação financeira e sua resolução envolve o estudo do sinal a partir de duas funções.

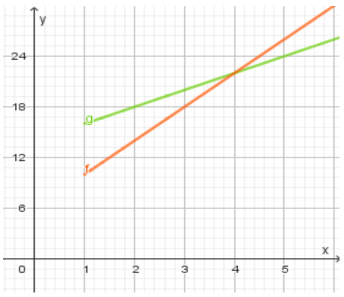
Figura 98 – SA 30 sobre inequação de primeiro grau

Paula mora em Cuiabá e precisa ir até o centro da cidade. Ela vai estacionar seu carro e está analisando os preços de dois estacionamentos.

• Estacionamento Alfa: R$ 10,00 a primeira hora; R$ 4,00 cada hora adicional.

• Estacionamento Beta: R$ 16,00 a primeira hora; R$ 2,00 cada hora adicional.

a) Sabendo que a previsão é de que o carro fique estacionado durante 5 horas, qual é a opção mais vantajosa para Paula?



b) Existe alguma quantidade de horas que torna a escolha indiferente?

c) Faça a análise de para quais intervalos de valores há vantagem em cada um dos estacionamentos.

Pode-se representar essas duas funções em um mesmo sistema cartesiano e interpretá-las geometricamente, o resultado é o gráfico ao lado:

Fonte: adaptada de Bonjorno, Giovanni Junior e Souza (2020a).

Resolução da SA 30 – Em cada caso, pode-se escrever a equação que representa o valor cobrado pelo estacionamento, em reais, em função do tempo em hora, considerando as horas adicionais já que a primeira hora é um valor fixo, assim para calcular o valor da função para 5 horas, tem-se que $x = 4$, logo pode-se escrever como (x-1). Assim:

- Estacionamento Alfa: $f(x) = 10 + 4(x - 1)$; por 5 horas: $f(5) = 10 + 4 \cdot (5 - 1) = 26$
- Estacionamento Beta: $g(x) = 16 + 2(x - 1)$; por 5 horas: $g(5) = 16 + 2 \cdot (5 - 1) = 24$

Nessas condições, a opção mais vantajosa para Paula é o estacionamento Beta (resposta do item *a*).

Para a resposta do item *b*, considera-se que $f(x) = g(x)$, então:

$10 + 4(x - 1) = 16 + 2(x - 1) \Longrightarrow 2x = 8 \Longrightarrow x = 4$ (resposta do item *b*).

Observando-se as representações das duas funções no sistema cartesiano, pode-se interpretá-las geometricamente, a partir do valor de x em que $f(x) = g(x)$, observando o ponto de interseção entre as duas retas (4,22), logo $x = 4$ é a resposta do item *b*.

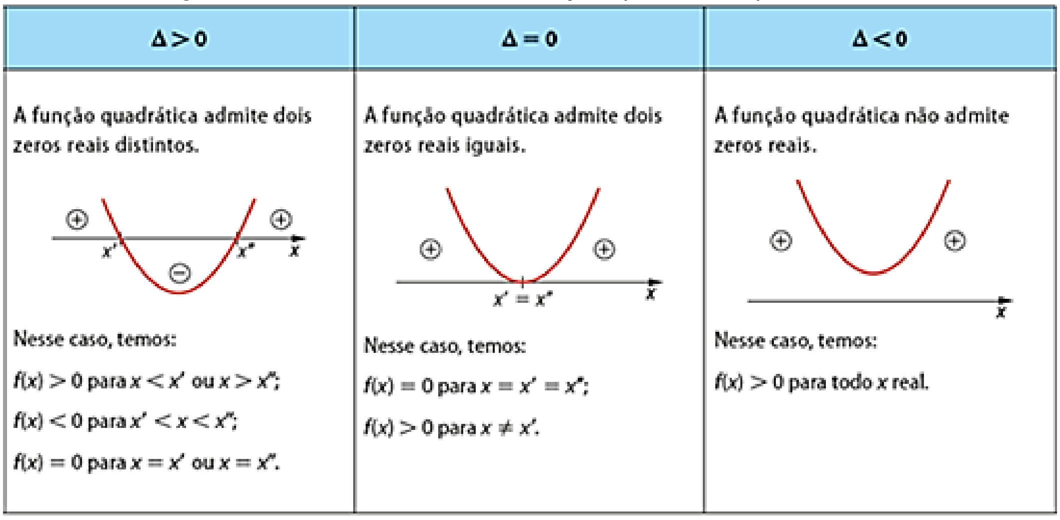
Para a resposta do item *c*, faz-se o estudo do sinal das funções a partir da abscissa do ponto de interseção entre elas, $x = 4$. Assim, se o carro ficar estacionado durante 4 horas, ela paga o mesmo valor em qualquer dos estacionamentos e, se $x < 4$, ou seja, o tempo de estacionamento for inferior a 4 horas, tem-se $f(x) < g(x)$, portanto, o estacionamento Alfa é mais vantajoso. Se $x > 4$, ou seja, se ficar mais que 4 horas no estacionamento, $g(x) < f(x)$, portanto, o estacionamento Beta é mais vantajoso.

6.3.8.6 Inequação do segundo grau

A partir do estudo do sinal de uma função quadrática, é possível resolver uma inequação do 2º grau. Medeiros *et al.* (2013) apresentam que uma inequação do 2º grau na incógnita x é qualquer desigualdade que pode ser reduzida a uma das formas, considerando $a, b, c \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$: $ax^2 + bx + c > 0$; $ax^2 + bx + c \geq 0$; $ax^2 + bx + c < 0$; e $ax^2 + bx + c \leq 0$.

O estudo do sinal de uma função quadrática pode ser realizado observando-se o esboço da parábola. Quando a é positivo, há três possibilidades para o estudo do sinal da função (Figura 99).

Figura 99 – Estudo do sinal da função quadrática quando *a* > 0

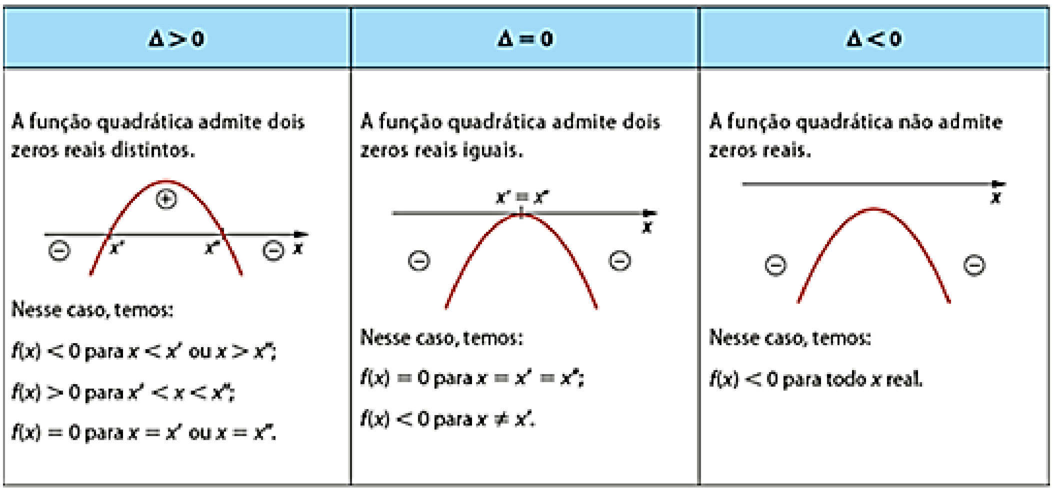


$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
A função quadrática admite dois zeros reais distintos.	A função quadrática admite dois zeros reais iguais.	A função quadrática não admite zeros reais.
Nesse caso, temos: $f(x) > 0$ para $x < x'$ ou $x > x''$; $f(x) < 0$ para $x' < x < x''$; $f(x) = 0$ para $x = x'$ ou $x = x''$.	Nesse caso, temos: $f(x) = 0$ para $x = x' = x''$; $f(x) > 0$ para $x \neq x'$.	Nesse caso, temos: $f(x) > 0$ para todo x real.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Junior e Souza (2020a, p. 143).

Da mesma forma, quando *a* é negativo, também há três possibilidades para o estudo do sinal da função (Figura 100).

Figura 100 – Estudo do sinal da função quadrática quando *a* < 0



$\Delta > 0$	$\Delta = 0$	$\Delta < 0$
A função quadrática admite dois zeros reais distintos.	A função quadrática admite dois zeros reais iguais.	A função quadrática não admite zeros reais.
Nesse caso, temos: $f(x) < 0$ para $x < x'$ ou $x > x''$; $f(x) > 0$ para $x' < x < x''$; $f(x) = 0$ para $x = x'$ ou $x = x''$.	Nesse caso, temos: $f(x) = 0$ para $x = x' = x''$; $f(x) < 0$ para $x \neq x'$.	Nesse caso, temos: $f(x) < 0$ para todo x real.

Fonte: Bonjorno, Giovanni Junior e Souza, (2020a, p. 143).

Por meio do estudo do sinal, pode-se resolver as inequações do segundo grau, como no próximo exemplo, abordado na Figura 101. Essa figura apresenta uma situação para ser interpretada a partir do estudo do sinal da função quadrática, podendo ser trabalhada juntamente com os TCT ciência e tecnologia e educação financeira.

Figura 101 – SA 31 com o estudo do sinal da função quadrática

Um grupo de adolescentes abriu um negócio pela *internet*, uma página de humor com imagens de animais de estimação. O sucesso da audiência, alavancado pelas redes sociais, possibilitou a oferta de espaço para anúncios de produtos destinados aos pequenos animais. Cada anúncio padrão publicado na página custa x reais, sendo x o valor que os sócios precisam determinar.

O custo com a aquisição, produção e edição de imagens precisou de um estudo cuidadoso pelo grupo de adolescentes, assim como a receita e o lucro. Com o auxílio de um adulto, que os instruiu a respeito da modelagem desses conceitos, eles sintetizaram as ideias envolvendo essas funções do seguinte modo:

Função Custo: *C(x)* – A função custo reúne os custos dos conteúdos disponibilizados. Esses custos estão relacionados à produção das postagens humorísticas e à estrutura do negócio.

Função Receita: *R(x)* – A função receita expressa o dinheiro arrecadado com os anúncios dos produtos direcionados aos donos de animais de estimação.

Função Lucro: *L(x)* – A diferença entre a receita e o custo determina a função lucro. Pode-se, então, avaliar se o resultado foi positivo, nulo ou negativo (ganhos, equilíbrio ou perdas).

Em síntese: $L(x) = R(x) - C(x)$.

Os jovens empreendedores sabem que, para produzir cada *post* de humor, o custo é de R$ 10,00 e estimam que, cobrando x reais por *post*, produzirão por semana $18 - x$ ($0 \leq x \leq 18$) *posts*. Com essas informações é possível representar algebricamente o custo, a receita e o lucro semanais:

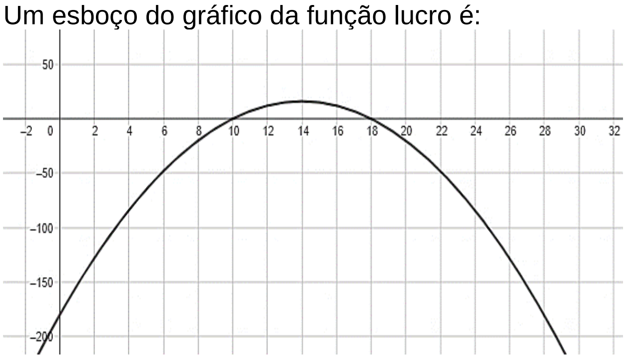
Custo: *C(x)*
$C(x) = 10(18 - x)$

Receita: *R(x)*
$R(x) = (18 - x) \cdot x$

Lucro: *L(x)*
$L(x) = (18 - x) \cdot x - 10 \cdot (18 - x)$
$L(x) = 18x - x^2 - 180 + 10x$
$L(x) = -x^2 + 28x - 180$

Assim, o lucro é representado por uma função polinomial do 2º grau. A concavidade de seu gráfico é voltada para baixo ($a = -1$). Deseja-se saber para quais valores cobrados por um anúncio padrão os jovens empreendedores terão lucro efetivo ou prejuízo, ou seja, para quais valores de x os jovens alcançarão ganhos ou perdas.

Um esboço do gráfico da função lucro é:



Os zeros dessa função são 10 e 18, ou seja, a parábola intersecta o eixo *Ox* nos pontos: (10, 0) e (18, 0).

Fazendo o estudo do sinal da função lucro, obtém-se:

- $L(x) < 0$ (prejuízo) para $0 < x < 10$ ou $x > 18$;
- $L(x) > 0$ (lucro efetivo) para $10 < x < 18$.

Deve-se desconsiderar os valores de $x < 0$, sabendo que o significado da variável x, nesse contexto, é de valor monetário, ou seja, o preço do anúncio padrão.

Fonte: Cevada *et al.* (2020b, p. 142).

As atividades desta seção, relacionadas aos TCT, podem possibilitar a compreensão das características das funções trabalhadas para a resolução das situações apresentadas.

6.3.9 Atividades propostas sobre características de função

Nesta seção, estão as atividades propostas no tópico características de função, abrangendo: crescimento ou decrescimento, estudo do sinal e inequação. As atividades, apresentadas na Figura 102, permitem a exploração do TCT ciência e tecnologia.

Figura 102 – Atividades propostas sobre características de função

AP 24 (Souza, J. R., 2020a, p. 127). Em um experimento realizado em laboratório, certo líquido foi submetido a um resfriamento por 10 min e sua temperatura foi registrada em um termômetro em dois momentos. Observe as informações ao lado:

Considerando que a variação da temperatura durante o período de realização do experimento pode ser modelada por uma função afim, descreva em quais momentos essa temperatura, em graus Celsius, foi negativa, positiva e igual a zero.

AP 25 (adaptada de Bonjorno; Giovanni Junior; Souza, 2020a). Marcelo mora em um município onde é possível alugar patinetes elétricos para se locomover. A velocidade máxima permitida desses aparelhos é de 20 km/h, mas é recomendado que pessoas sem experiência não ultrapassem 12 km/h. Fazendo alguns cálculos para estimar o tempo que levaria utilizando um patinete elétrico de uma estação de metrô até o local onde trabalha, Marcelo considerou que manteria uma velocidade constante de 3 metros por segundo e fez uma tabela para relacionar a distância percorrida, em metro, em função do tempo, em segundo.

Distância *d* (em metro)	3	6	9	12	15	...
Tempo *t* (em segundo)	1	2	3	4	5	...

Com base nessas informações, responda:

a) Qual é a lei da função que relaciona a distância *d*, em metro, a ser percorrida por Marcelo e o tempo *t*, em segundo?

b) Essa função é classificada como crescente ou decrescente? Justifique sua resposta.

c) Marcelo levou 10 minutos para realizar o deslocamento que pretendia nas condições que tinha planejado. Qual distância ele percorreu?

d) Considerando a situação do trânsito em Rondonópolis/MT, você considera que esse serviço de aluguel de patinete elétrico seria interessante para a população?

Fonte: a pesquisa.

Na Figura 103, estão as atividades propostas que foram trabalhadas juntamente com o TCT educação financeira.

Figura 103 – Atividades propostas referentes às características de função

AP 26 (adaptada de Andrade, 2020). Uma microempresa fabrica embalagens plásticas de mesmo valor. Seu lucro pode ser determinado pela função $L: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}$, dada por $L(x) = 3x - 1125$, em que L representa o lucro, em reais, e x a quantidade de embalagens vendidas. De acordo com a função L, qual a quantidade de embalagens a ser vendida para que haja lucro?

AP 27 (adaptada de Teixeira, 2020). Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do

imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava R$ 1 200,00 por hectare plantado, e vendia por R$ 50,00 cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro L que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas. Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas. a) Qual é a expressão que determinou o lucro L em função de x obtido por esse produtor nesse ano? b) Qual a função inversa dessa função? O que essa inversa significa? c) Faça uma pesquisa para verificar qual a média de sacas produzidas por hectare e calcule o lucro obtido por esse produtor para essa quantidade. d) Para obter um lucro de R$ 263 000, qual teria que ser a quantidade de sacas de soja produzida? **AP 28** (adaptada de Bonjorno; Giovanni Junior; Souza, 2020a). Para se produzir um artigo, verificou que o custo da produção é dado pela fórmula: $C = 50 + 2x + 0{,}1x^2$, onde x é a quantidade diária produzida. Cada unidade do produto é vendida por R$ 6,50. a) Entre que valores deve variar x para não haver prejuízo? b) Com uma produção de 30 unidades do produto, haverá lucro ou prejuízo, nessa situação? **AP 29** (Smole; Diniz, 2020, p. 131). Uma empresa freta aviões com 100 lugares para grupos de turistas. Cada passageiro paga R$ 400,00 pela passagem e mais R$ 10,00 para cada lugar que ficar vazio. Qual é a quantidade de pessoas que devem compor um grupo para que, ao fretar o avião, a empresa receba no mínimo R$ 33 000,00 a fim de não ter prejuízo?

Fonte: a pesquisa.

Todas as atividades apresentadas e desenvolvidas durante a aplicação da sequência didática tiveram como objetivo o trabalho com os TCT contextualizando os tópicos abordados sobre o objeto função, utilizando os RRS e visando uma EMC. O próximo capítulo é dedicado à apresentação das análises dos resultados dessa pesquisa.

7 ANÁLISES DOS RESULTADOS

Esse capítulo destina-se à apresentação das análises dos resultados da sequência didática aplicada aos estudantes participantes da pesquisa, bem como aos resultados do questionário final respondido por eles.

7.1 APLICAÇÃO DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Para a aplicação da sequência didática, as aulas foram ministradas a partir das atividades expostas aos estudantes pela professora pesquisadora. A situação foi apresentada por meio do *site*[11]*, O Estudo de Funções e os Temas Contemporâneos Transversais,* criado no Google Sites, que os estudantes acessaram utilizando os *Chromebooks* ou seus próprios celulares. Na Figura 104, apresenta-se a página inicial do *site* utilizado.

Figura 104 – Página inicial do *site* da sequência didática

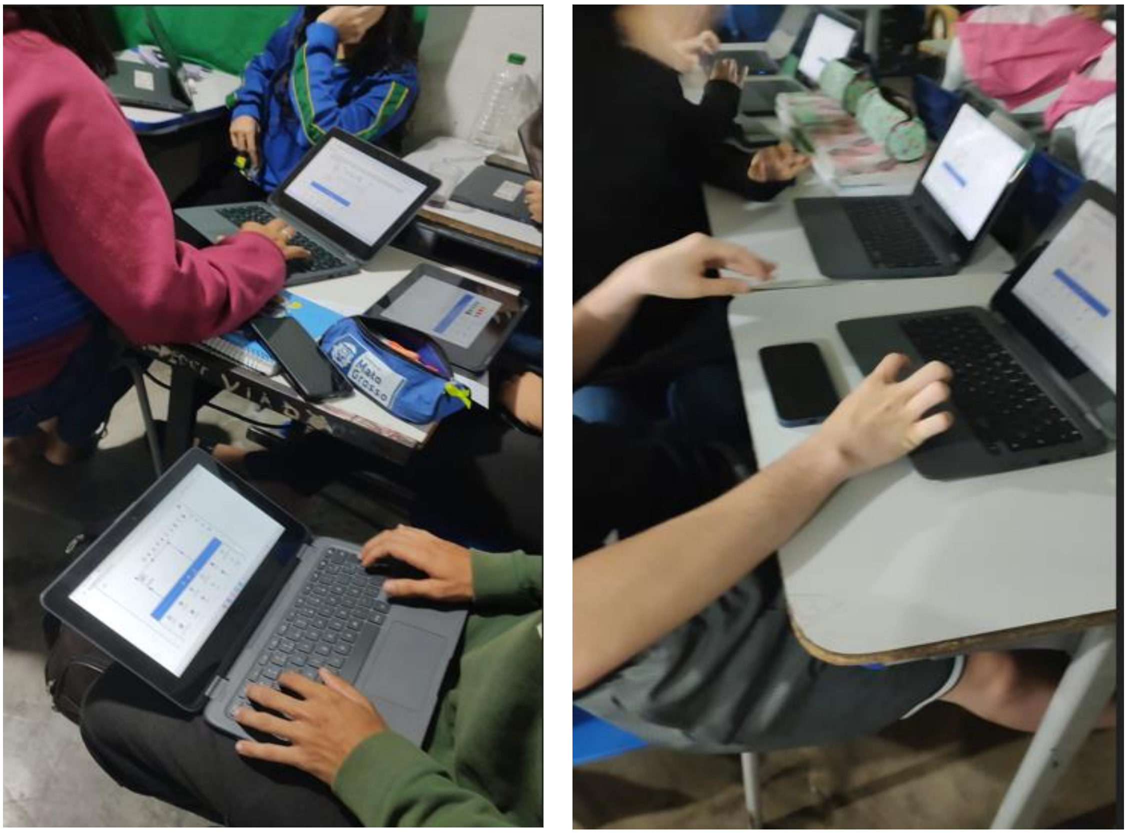
Fonte: a pesquisa.

[11] O *site,* que foi elaborado para ser utilizado durante as aulas ministradas pela professora pesquisadora, pode ser acessado pelo *link*: https://sites.google.com/edu.mt.gov.br/sequenciadidatica/in%C3%ADcio Como o site não é de acesso público, os estudantes foram adicionados como leitores, tendo acesso pelo e-mail institucional. Outros leitores precisam solicitar autorização para ter acesso ao conteúdo do *site*.

O *site* apresenta o resultado do questionário inicial da pesquisa, os TCT, a parte teórica dos assuntos abordados, as atividades desenvolvidas e as atividades propostas com os *links* para a resolução no GeoGebra Classroom.

Após a leitura da situação abordada na atividade, os estudantes eram incentivados a propor caminhos para a resolução da situação e, ao mesmo tempo, a professora pesquisadora os direcionava para a conceituação formal do tópico abordado na questão. Ao final de cada tópico, uma lista de atividades era proposta aos estudantes para resolverem em grupos ou individualmente, sendo que cada um deveria apresentar sua resposta. A Figura 105 mostra um dos momentos de desenvolvimento das atividades.

Figura 105 – Foto dos estudantes desenvolvendo as atividades



Fonte: a pesquisa.

A sequência didática foi composta com 60 atividades que foram organizadas em duas categorias: situações de aprendizagem (SA) e atividades propostas (AP). A Figura 106 mostra como foram dispostas as atividades da sequência didática conforme os tópicos abordados e os TCT.

Figura 106 – Disposição das atividades da sequência didática

TÓPICO: A IDEIA DE FUNÇÃO – 05 aulas		
TCT	Situação de aprendizagem (SA)	Atividade proposta (AP)
Educação para o consumo	2	1
Educação financeira	2	1
Ciência e tecnologia	1	4
TÓPICO: CONCEITO E REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÃO – 05 aulas		
TCT	Situação de aprendizagem (SA)	Atividade proposta (AP)
Educação para o consumo	4	3
Educação financeira	3	7
Ciência e tecnologia	1	3
TÓPICO: GRÁFICOS DE FUNÇÃO – 06 aulas		
TCT	Situação de aprendizagem (SA)	Atividade proposta (AP)
Educação para o consumo	1	4
Educação financeira	4	4
Ciência e tecnologia	2	3
TÓPICO: CARACTERÍSTICAS DE FUNÇÃO – 05 aulas		
TCT	Situação de aprendizagem (SA)	Atividade proposta (AP)
Educação para o consumo	0	0
Educação financeira	6	4
Ciência e tecnologia	3	2

Fonte: a pesquisa.

As SA envolvem exemplos, situações-problema e atividades com o objetivo de construção dos conceitos abordados nos tópicos, além de situações-problema nas quais devem ser utilizados os conceitos desenvolvidos para sua solução. Já as AP foram realizadas com o intuito de verificação da aprendizagem. Vale ressaltar que as atividades propostas também contemplam situações-problema. Além disso, todas as atividades foram selecionadas para serem trabalhadas dentro de um ambiente de aprendizagem envolvendo a realidade ou a semirrealidade, com exercícios ou cenários de investigação que, conforme a classificação de Skovsmose (2010), são os ambientes 3, 4, 5 e 6.

As aulas para a aplicação da sequência didática aconteceram no período de agosto a novembro de 2023, em horários cedidos pela professora titular de Matemática da turma totalizando 23 aulas de trabalho realizadas com os estudantes, detalhadas na Figura 107.

Figura 107 – Distribuição das aulas da sequência didática

TÓPICO ABORDADO	AULAS (55min)	DATA
Apresentação do projeto e do resultado do questionário inicial	01	10/08
Ideia de função	02	17/08
	03	24/08
	04	01/09
	05	12/09
	06	13/09
Conceito e representação de função	07 e 08	28/09
	09	03/10
	10	05/10
	11	09/10
Gráfico de função	12	10/10
	13 e 14	16/10
	15	23/10
	16	30/10
	17	07/11
Características de função	18 e 19	14/11
	20 e 21	21/11
	22	27/11
Aplicação do questionário final	23	27/11

Fonte: a pesquisa.

Para garantir o anonimato dos estudantes participantes, eles foram nomeados de Estudante 1 até o Estudante 20, conforme a ordem alfabética dos seus nomes. Na próxima seção, faz-se uma apresentação de como foi a abordagem dos TCT a partir das atividades.

7.1.1 Atividades envolvendo o TCT educação para o consumo

O TCT educação para o consumo foi trabalhado com o objetivo de despertar o consumo consciente dos estudantes, abordando situações que envolvem sustentabilidade. Os TCT na BNCC (Brasil, 2022b, p. 27) dispõem que esse tema visa “educar os indivíduos para que conheçam os seus direitos de consumidor de bens e serviços, assim como os impactos de seus atos de consumo sobre os recursos naturais”, o que deve ser refletido em suas ações como participante ativo na comunidade ou sociedade em que vive, bem como no meio ambiente. Assim, as atividades contextualizadas com esse tema abordam assuntos como consumo de energia elétrica, cálculo do valor da tarifa de água, consumo de combustíveis fósseis e biocombustível, entre outros.

Na Figura 108, pode-se observar como foi estruturada a sequência didática proposta, a partir dos referenciais teóricos da pesquisa, com relação aos aspectos da

EMC envolvidos e os RRS que foram trabalhados no desenvolvimento do TCT educação para o consumo.

Figura 108 – Atividades da sequência didática envolvendo a educação para o consumo

TÓPICO: A IDEIA DE FUNÇÃO		
Atividades	Aspectos da EMC	RRS
SA 1	Conhecimento reflexivo; ambientes de aprendizagem 4 e 6; desenvolvimento da *matemacia*.	Língua natural, registros: figural, numérico e gráfico.
SA 2	Conhecimento reflexivo; ambiente de aprendizagem 3.	Língua natural, registros: algébrico e numérico.
AP 3	Conhecimento reflexivo; ambientes de aprendizagem 5 e 6, desenvolvimento da *matemacia*.	Língua natural, registros: figural, algébrico e numérico.
TÓPICO: CONCEITO E REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÃO		
Atividades	Aspectos da EMC	RRS
SA 6	Ambientes de aprendizagem 3 e 4.	Língua natural, registros: algébrico, figural e numérico. Conversão do registro figural para o numérico e língua natural.
SA 9	Ambientes de aprendizagem 5 e 6.	Língua natural, registros: algébrico e numérico.
SA 10	Conhecimento reflexivo; ambientes de aprendizagem 3 e 4; desenvolvimento da *matemacia*.	Língua natural, registros: algébrico, numérico e gráfico. Conversão no sentido da língua natural para o gráfico e para o algébrico.
SA 12	Conhecimento reflexivo; ambientes de aprendizagem 5 e 6; desenvolvimento da *matemacia*.	Língua natural, registros: algébrico e numérico. Conversão no sentido do registro numérico (tabela) para o algébrico.
AP 14, AP 15, AP 16	Conhecimento reflexivo; ambientes de aprendizagem 3, 4, 5 e 6; desenvolvimento da *matemacia*.	Língua natural, registros: algébrico, gráfico e numérico. Conversão entre todos os registros e inclusive do sentido gráfico para o algébrico.
TÓPICO: GRÁFICOS DE FUNÇÃO		
Atividades	Aspectos da EMC	RRS
SA 22	Ambientes de aprendizagem 3 e 4.	Língua natural, registros: algébrico, numérico e registro gráfico.
AP 19, AP 20, AP 21, AP 23	Ambientes de aprendizagem 3, 4, 5 e 6; conhecimento reflexivo, desenvolvimento da *matemacia*.	Língua natural, registro: numérico, algébrico e gráfico. Conversão entre todos os registros, inclusive do registro gráfico para os demais.

Fonte: a pesquisa.

Com o TCT educação para o consumo foi possível desenvolver atividades em quase todos os tópicos de função que foram abordados na sequência didática, com exceção do tópico características de função. Para esse tópico, seria necessário explorar mais e desenvolver atividades que o contemplem.

7.1.2 Atividades envolvendo o TCT educação financeira

O TCT educação financeira foi trabalhado com o objetivo de possibilitar, aos estudantes, conhecimentos para que possam ser capazes de estabelecer julgamentos, tomar decisões e atuar de forma crítica e reflexiva em relação aos problemas, e possíveis soluções, impostos pela vida econômica na sociedade em que vivem (Brasil, 2022a). A Figura 109 retrata como foi estruturada a sequência didática, quais os aspectos da EMC envolvidos e quais os RRS trabalhados por meio do TCT educação financeira.

Figura 109 – Atividades da sequência didática explorando a educação financeira

TÓPICO: A IDEIA DE FUNÇÃO		
Atividades	Aspectos da EMC	RRS
SA 1	Conhecimento reflexivo; ambiente de aprendizagem 4; desenvolvimento da *matemacia*.	Língua natural, registros: figural, numérico e gráfico.
SA 3	Conhecimento reflexivo; ambiente de aprendizagem 3; desenvolvimento da *matemacia*.	Língua natural, registro: algébrico e numérico.
AP 5	Ambiente de aprendizagem 3; conhecimento reflexivo; desenvolvimento da matemacia.	Língua natural, registros: algébrico e numérico.
TÓPICO: CONCEITO E REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÃO		
Atividades	Aspectos da EMC	RRS
SA 7	Conhecimento reflexivo; desenvolvimento da *matemacia*; ambiente de aprendizagem 4.	Língua natural, registros: algébrico e numérico. Conversão do registro da língua natural para o algébrico.
SA 13	Conhecimento reflexivo; desenvolvimento da *matemacia*; ambiente de aprendizagem 4.	Língua natural, registros: algébrico e numérico. Conversão do registro da língua natural para o algébrico.
SA 14	Ambiente de aprendizagem 4.	Língua natural e registro gráfico. Conversão do registro gráfico para a língua natural.
AP 6, AP 7, AP 8, AP 9, AP 10, AP 12, AP 14	Conhecimento reflexivo; ambientes de aprendizagem 3, 4, 5 e 6; desenvolvimento da *matemacia*.	Língua natural, registros: algébrico, gráfico e numérico. Conversão do sentido gráfico para o algébrico e algébrico para a língua natural.
TÓPICO: GRÁFICOS DE FUNÇÃO		
Atividades	Aspectos da EMC	RRS
SA 19	Ambientes de aprendizagem 3 e 4.	Língua natural, registros: numérico e gráfico. Trabalha a conversão do sentido algébrico para o gráfico.
SA 20	Conhecimento reflexivo; desenvolvimento da *matemacia*; ambiente de aprendizagem 4.	Língua natural, registros: algébrico, numérico e gráfico. Conversão do registro da língua natural para os demais registros.

SA 21	Ambiente de aprendizagem 3.	Língua natural, registros: algébrico e gráfico. Conversão do registro do registro gráfico para o algébrico.
SA 23	Ambiente de aprendizagem 4.	Língua natural, registros: numérico e gráfico. Conversão do registro gráfico para o numérico e para a língua natural.
AP 17, AP 18, AP 19, AP 23	Ambientes de aprendizagem 3 e 4. conhecimento reflexivo, desenvolvimento da *matemacia*.	Língua natural, registros: numérico, gráfico e algébrico. Conversão entre todos os registros, inclusive do gráfico para o algébrico e para a língua natural.
TÓPICO: CARACTERÍSTICAS DE FUNÇÃO		
Atividades	Aspectos da EMC	RRS
SA 24	Ambiente de aprendizagem 3.	Língua natural e registro algébrico.
SA 25	Ambientes de aprendizagem 3 e 4.	Língua natural, registros: algébrico e numérico.
SA 26	Ambiente de aprendizagem 3.	Língua natural e registro numérico.
SA 29	Conhecimento reflexivo; desenvolvimento da *matemacia*; ambiente de aprendizagem 3 e 4.	Língua natural, registros: numérico, algébrico, gráfico e figural. Conversão nos dois sentidos entre o registro gráfico, algébrico e língua natural.
SA 30	Conhecimento reflexivo; desenvolvimento da *matemacia*; ambiente de aprendizagem 3 e 4.	Língua natural, registros: numérico, algébrico, gráfico e figural. Conversão nos dois sentidos entre o registro gráfico, algébrico e língua natural.
SA 31	Conhecimento reflexivo; desenvolvimento da *matemacia*; ambientes de aprendizagem 3 e 4.	Língua natural, registros: numérico, algébrico e gráfico. Conversão do registro gráfico para o algébrico e língua natural
AP 26, AP 27, AP 28, AP 29	Ambiente de aprendizagem 3. Conhecimento reflexivo.	Língua natural, registros: numérico, algébrico e figural. Conversão do registro figural (esboço) para a língua natural.

Fonte: a pesquisa.

Dessa forma, observa-se que, com o TCT educação financeira, foi possível abranger todos os tópicos de função abordados na sequência didática.

7.1.3 Atividades envolvendo o TCT ciência e tecnologia

As atividades que foram selecionadas para serem trabalhadas com o TCT ciência e tecnologia apresentam aspectos relacionados às ciências (física, química, biologia e computação) e a questões de evolução tecnológica (internet, robótica e outros). A Figura 110 apresenta o desenvolvimento das atividades, destacando os aspectos da EMC envolvidos e os RRS trabalhados com esse TCT.

Figura 110 – Atividades da sequência didática com o tema ciência e tecnologia

TÓPICO: A IDEIA DE FUNÇÃO		
Atividades	Aspectos da EMC	RRS
SA 4	Ambiente de aprendizagem 3.	Língua natural e registro numérico.
AP 1, AP 2, AP 3, AP 4	Conhecimento reflexivo, ambientes de aprendizagem 3, 5 e 6, desenvolvimento da *matemacia*.	Língua natural, registros: figural, algébrico e registro numérico.
TÓPICO: CONCEITO E REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÃO		
Atividades	Aspectos da EMC	RRS
SA 8	Ambiente de aprendizagem 3.	Língua natural, registro algébrico e numérico.
AP 11, AP 12, AP 13	Conhecimento reflexivo; desenvolvimento da *matemacia*; ambientes de aprendizagem 3 e 4.	Língua natural, registros: algébrico e numérico. Conversão da língua natural para o registro algébrico.
TÓPICO: GRÁFICOS DE FUNÇÃO		
Atividades	Aspectos da EMC	RRS
SA 16	Ambiente de aprendizagem 5.	Língua natural, registros: gráfico, figural e numérico. Conversão do registro numérico para o gráfico e do gráfico para a língua natural.
SA 18	Ambientes de aprendizagem 3.	Língua natural, registros: numérico, algébrico e gráfico. Conversão entre registro algébrico e gráfico.
AP 20, AP 22, AP 23	Ambientes de aprendizagem 3, 4 e 5; conhecimento reflexivo; desenvolvimento da *matemacia.*	Língua natural, registros: numérico, algébrico e gráfico. Conversão do registro gráfico para o numérico e para a língua natural.
TÓPICO: CARACTERÍSTICAS DE FUNÇÃO		
Atividades	Aspectos da EMC	RRS
SA 31	Ambientes de aprendizagem 3 e 4.	Língua natural, registros: algébrico, gráfico, figural e numérico. Conversão do registro numérico para o gráfico e do gráfico para a língua natural.
SA 27	Ambiente de aprendizagem 4.	Língua natural, registros: numérico, gráfico e figural. Conversão do registro figural para o numérico e para a língua natural.
SA 28	Ambiente de aprendizagem 5.	Língua natural, registros: numérico e gráfico. Conversão do registro gráfico para o numérico e para a língua natural.
AP 24, AP 25	Ambientes de aprendizagem 3 e 5. Conhecimento reflexivo; desenvolvimento da *matemacia*	Língua natural, registros: numérico, algébrico e figural. Conversão do registro figural para o algébrico, numérico e para a língua natural.

Fonte: a pesquisa.

Com o TCT ciência e tecnologia foi possível contextualizar todos os tópicos de função abordados na sequência didática.

7.2 ANÁLISE DAS ATIVIDADES

Para a realização dessa análise, foram escolhidas algumas atividades, separadas pelos tópicos trabalhados no objeto matemático função: ideia de função, conceito e representação de função, gráficos de função e algumas características de função. Na seleção dessas atividades, considerou-se a representatividade do tema abordado, os RRS utilizados e os aspectos da EMC envolvidos, bem como a participação dos estudantes no desenvolvimento. Dessa forma, foram selecionadas 4 atividades da categoria situação de aprendizagem (SA) e 6 da categoria atividades propostas (AP), que estão apresentadas na Figura 111.

Figura 111 – Atividades da sequência didática escolhidas para a análise

TÓPICO: A IDEIA DE FUNÇÃO			
Atividade	TCT	Aspectos da EMC	RRS
SA 1	Educação para o consumo, educação financeira.	Conhecimento reflexivo; ambientes de aprendizagem 4 e 6; desenvolvimento da *matemacia*.	Língua natural, registros: figural, numérico, algébrico e gráfico.
AP 3	Educação para o consumo, ciência e tecnologia.	Conhecimento reflexivo; ambientes de aprendizagem 5 e 6, desenvolvimento da *matemacia*.	Língua natural, registros: figural, algébrico e numérico.
TÓPICO: CONCEITO E REPRESENTAÇÃO DE FUNÇÃO			
Atividade	TCT	Aspectos da EMC	RRS
SA 8	Ciência e tecnologia	Ambiente de aprendizagem 3.	Língua natural, registro algébrico e numérico.
AP 14	Educação financeira e educação para o consumo	Conhecimento reflexivo; desenvolvimento da *matemacia*; ambientes de aprendizagem 3 e 4.	Língua natural, registros: algébrico e numérico. Conversão da língua natural para os registros numérico e algébrico.
AP 16	Educação para o consumo	Conhecimento reflexivo; desenvolvimento da *matemacia*; ambientes de aprendizagem 5 e 6.	Língua natural, registros: numérico, algébrico, figural e gráfico. Conversão entre todos os registros.
TÓPICO: GRÁFICOS DE FUNÇÃO			
Atividade	TCT	Aspectos da EMC	RRS
SA 22	Educação para o consumo	Ambientes de aprendizagem 3 e 4.	Língua natural, registros: algébrico, numérico e registro gráfico.
AP 18	Educação financeira	Ambientes de aprendizagem 3 e 4, conhecimento reflexivo, desenvolvimento da *matemacia*.	Língua natural, registros: numérico, gráfico e algébrico. Conversão entre todos os registros utilizados.
AP 23	Educação para o consumo, educação financeira, ciência e tecnologia	Conhecimento reflexivo; desenvolvimento da *matemacia*; ambientes de aprendizagem 3 e 4.	Língua natural, registros: algébrico e gráfico. Conversão do sentido gráfico para o algébrico.

TÓPICO: ALGUMAS CARACTERÍSTICAS DE FUNÇÃO			
Atividade	TCT	Aspectos da EMC	RRS
SA 30	Educação financeira	Conhecimento reflexivo; desenvolvimento da *matemacia*; ambiente de aprendizagem 4.	Língua natural, registros: numérico, algébrico, gráfico e figural. Conversão entre os registros, inclusive do registro gráfico para o algébrico e língua natural.
AP 25	Ciência e tecnologia	Ambientes de aprendizagem 3 e 5. Conhecimento reflexivo; desenvolvimento da *matemacia.*	Língua natural, registros: numérico, algébrico e figural. Conversão entre todos os registros utilizados.

Fonte: a pesquisa.

Nas próximas seções, serão apresentadas as atividades escolhidas para a análise em cada um dos tópicos, começando pela ideia de função.

7.2.1 Ideia de função

As atividades que envolvem a ideia de função são situações que remetem a um ou mais TCT e exploram a relação de dependência entre duas grandezas, quantidades ou objetos. Assim, observa-se que é possível utilizar os TCT para contextualizar o conteúdo de funções e, no desenvolvimento das atividades, pode-se trabalhar distintos RRS, como no exemplo apresentado na Figura 112.

Figura 112 – SA 1 para o início do desenvolvimento da sequência didática

A Matemática pode e deve ser aplicada para tomada de decisões diárias. O conteúdo de função é muito utilizado para as práticas do cotidiano. Pode-se analisar uma situação que envolve função, para se compreender sua aplicabilidade.

Parte 1 – Perguntas para os estudantes:

- ✓ Alguém vem de motocicleta para a escola?
- ✓ Qual o consumo (quantidade de km com um litro de combustível) de uma moto específica (escolhida por eles)?
- ✓ Qual o preço do combustível?

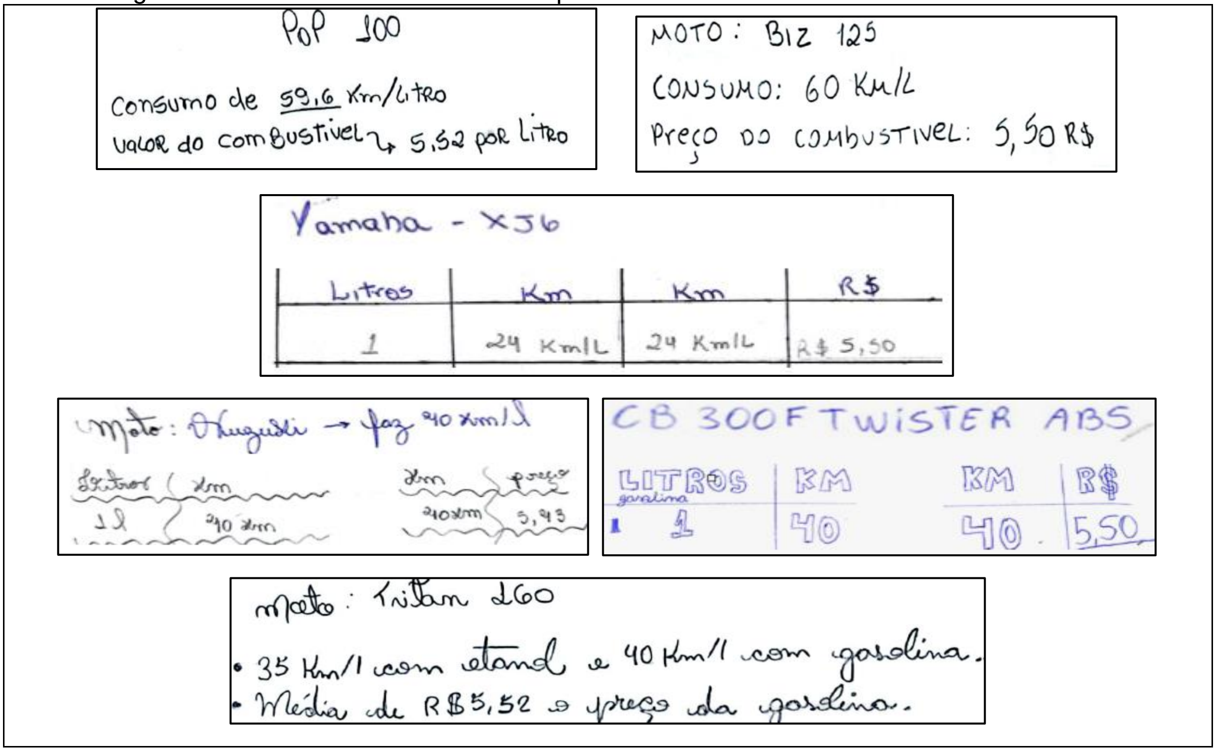
A partir dos dados fornecidos por eles, construir uma tabela relacionando a quantidade de quilômetros percorridos com a quantidade de litros. Pode-se fazer uma segunda tabela relacionando a quilometragem e o preço do combustível.

Parte 2 – Alcindo mora no Bairro Conjunto São José e trabalha em um comércio no centro da cidade de Rondonópolis. Ele vai e volta de ônibus para o trabalho, gastando R$ 8,20 (preço da passagem de ônibus urbano em Rondonópolis). Ele trabalha 6 dias por semana. Alcindo está analisando a possibilidade de comprar uma moto para ir para o trabalho. Considerando que o percurso até o trabalho é de 6 km, ele vai percorrer 12 km por dia, caso ele tenha o dinheiro para comprar a moto, será viável financeiramente essa alternativa (ele vai gastar mais ou vai gastar menos do que com as passagens de ônibus, considerando somente o custo do combustível)?

Fonte: a pesquisa.

Essa situação de aprendizagem abordou um assunto que pode despertar o interesse em muitos estudantes do Ensino Médio, principalmente na cidade em que foi realizada a pesquisa, pois se trata de uma cidade que tem um grande número de motocicletas[12] circulando no trânsito local. Essa atividade foi um exemplo de ambiente tipo 6 (Skovsmose, 2010), pois foi necessário que os estudantes buscassem as informações sobre o consumo de combustível referente ao tipo de motocicleta escolhido por eles, sendo assim, foi possível verificar uma variedade de marcas e modelos apresentados na Figura 113.

Figura 113 – Motocicletas escolhidas pelos estudantes no desenvolvimento da SA 1



Fonte: produção dos participantes da pesquisa.

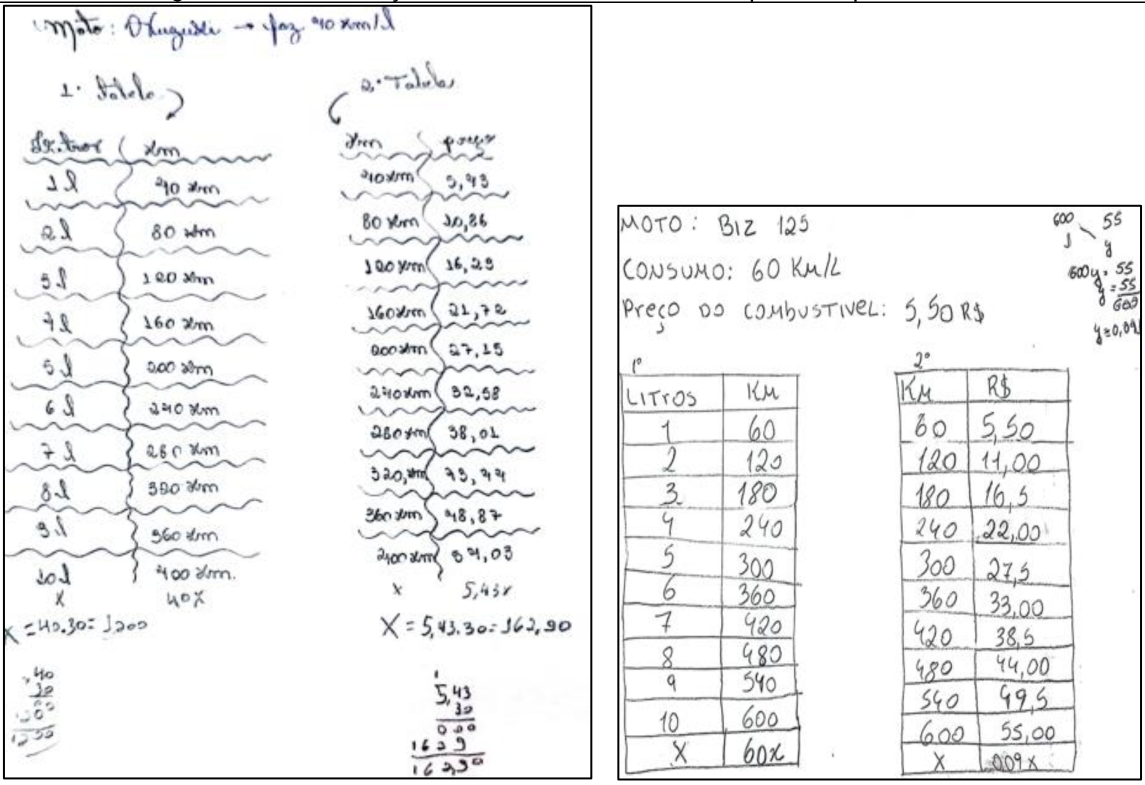
Observa-se que foram escolhidas motocicletas bem variadas, com consumo entre 24 km/l e 60 km/l, ou seja, bem econômicas, comparando-se com o consumo médio de um automóvel que é de aproximadamente 10 km/l, além do preço de aquisição que também é variável, motocicletas de preço mais acessível como a *POP 100* e outras de alto custo como a *CB 300.*

Na parte 1 da atividade, os estudantes fizeram as pesquisas relacionadas e montaram as tabelas solicitadas. É possível observar (Figura 114) que eles não apresentaram dificuldades para o preenchimento da tabela, mas quando a professora pesquisadora solicitou a generalização, ou seja, uma expressão para o cálculo de uma

[12] Segundo o *site Icarros*, Rondonópolis ocupa a quinta colocação entre os municípios brasileiros com o maior número de motocicletas por habitantes, sendo 24 motocicletas por 100 habitantes. Disponível em: https://shre.ink/icarros-cidades-motocicletas. Acesso em 15 abr. 2024.

quantidade qualquer *x* na segunda tabela, eles só conseguiram após um exemplo por meio de regra de três, como pode ser observado nas resoluções apresentadas.

Figura 114 – Resolução dos Estudantes 3 e 11 na primeira parte da SA 1



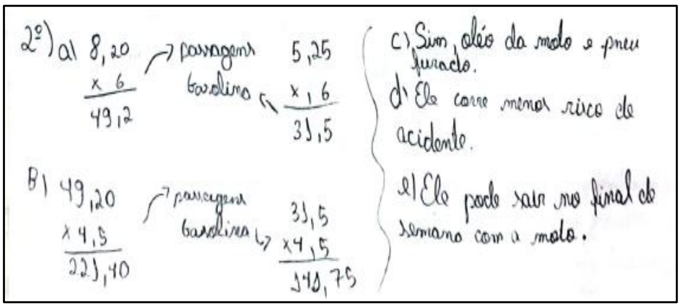
Estudante 3 Estudante 11

Fonte: produção dos participantes da pesquisa.

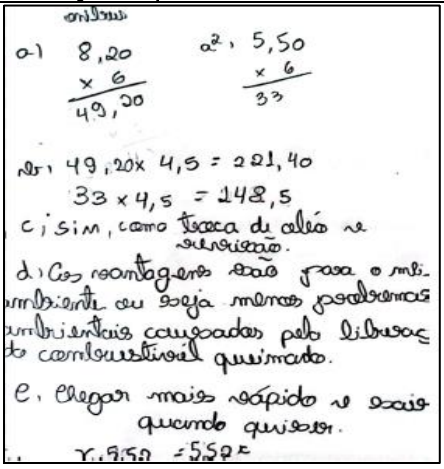
Observa-se que, na segunda tabela do Estudante 3, há um erro para a quantidade 400 litros de combustível, o total em reais deveria ser 54,30 e não 54,03, o que provavelmente foi um erro de distração, mas esse estudante não conseguiu encontrar a expressão para *x* na segunda tabela. Já o estudante 11 não apresentou erros nas tabelas e conseguiu generalizar para *x* com o cálculo utilizando a regra de três. Assim, por meio da criação da tabela e da generalização para um valor *x*, começou-se a trabalhar a ideia de função junto a esses estudantes. Além disso, foram trabalhados os RRS (Duval, 2009): língua natural, registro figural, registro numérico e registro gráfico, sendo que, a partir da representação feita pelos estudantes, a professora pesquisadora apresentou também a representação gráfica, considerando os valores apresentados por eles como pares ordenados.

Para a segunda parte da SA 1, os estudantes precisaram realizar alguns cálculos para realizar *reflexões com* a Matemática que, para Skovsmose (2015), são reflexões que envolvem situações que exigem a tomada de decisões utilizando dados matemáticos. Nessa etapa, a professora pesquisadora, na orientação aos estudantes, propôs que eles realizassem as seguintes atividades: a) calculassem o gasto semanal com as passagens de ônibus e com o combustível da moto escolhida por eles; b) do mesmo modo, calculassem o gasto mensal com passagens de ônibus e com o combustível; c) respondessem se há outros gastos para a utilização da motocicleta; d) analisassem as vantagens e desvantagens não financeiras na utilização do transporte público; e) analisassem as vantagens e desvantagens não financeiras na utilização da motocicleta. A Figura 115 apresenta as resoluções de dois estudantes.

Figura 115 – Resolução dos Estudantes 7 e 15 na segunda parte da SA 1



Estudante 7



Estudante 15

Fonte: produção dos participantes da pesquisa.

Com essa atividade, foi possível explorar o TCT educação para o consumo, pois permitiu uma reflexão por parte dos estudantes sobre os impactos que as suas decisões podem causar no meio ambiente, por exemplo, quando tomam uma decisão referente ao tipo de transporte utilizar, como evidencia a resposta do Estudante 15: *as vantagens são para o meio ambiente ou seja menos problemas ambientais causados pela liberação de combustível queimado*. Essa reflexão foi possível devido à análise dos cálculos matemáticos realizados pelos estudantes, o que se alinha aos conceitos de desenvolvimento da *matemacia* (Skovsmose, 2015). Além disso, os estudantes puderam relacionar a situação estudada com o TCT educação financeira por meio dos cálculos realizados para a tomada de decisão sobre qual é o melhor meio de transporte do ponto de vista financeiro.

O próximo exemplo (Figura 116) é a atividade proposta 3 (AP 3) da sequência didática, que está relacionada ao TCT educação para o consumo e ao TCT ciência e tecnologia. A atividade envolve uma situação de consumo de energia elétrica de alguns aparelhos que provavelmente sejam utilizados nas residências dos estudantes participantes.

Figura 116 – Atividade proposta no tópico ideia de função (AP 3)

Pode-se calcular o consumo de energia elétrica de um equipamento por meio de uma função. Observe o exemplo ao lado.

A potência do ferro em watt (W) foi dividida por 1 000 para obter a potência do ferro em quilowatts (kW) e, consequentemente, o consumo de energia elétrica em quilowatt-hora (kWh). Responda:

a) A expressão que representa o consumo de energia elétrica pode ser simplificada e expressa de outras maneiras? Registre algumas delas.

b) Determine o consumo de energia elétrica de um ferro de passar roupa desse modelo, considerando que tenha sido utilizado por 8 h em um mês.

c) Quantas horas um ferro de passar roupa desse modelo pode ser usado para que sejam consumidos, no máximo, 7,2 kWh?

d) Agora, indique quais aparelhos há na sua residência (dentre os aparelhos indicados no quadro ao lado) e escreva uma função que relacione o consumo c de energia elétrica (kWh) e o tempo t de uso de cada equipamento (h). Depois, estabeleça o tempo de uso mensal desse equipamento em sua residência e calcule o consumo de energia elétrica correspondente.

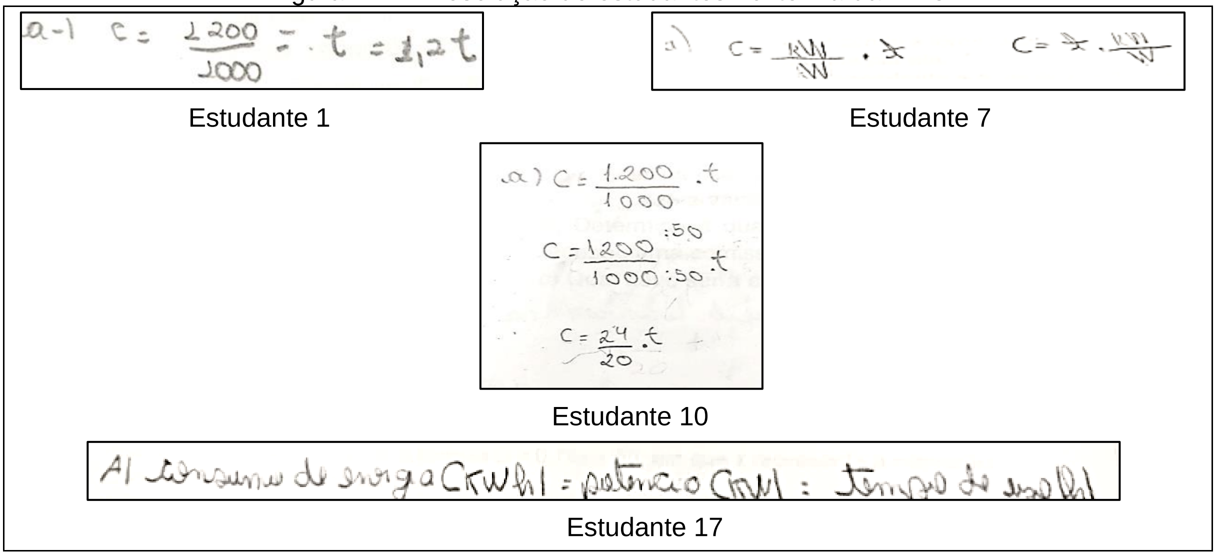
e) Apresente um plano de economia de energia (considere quais aparelhos podem ter uma redução de tempo de uso), calculando o total economizado de acordo com a redução do consumo.

Equipamento	Potência (W)
Televisor	90
Computador	300
Aspirador de pó	600
Condicionador de ar	1 400
Micro-ondas	2 000

Fonte: adaptada de Souza, J. R. (2020a).

Essa atividade (AP 3) foi realizada por 19 dos 20 participantes, e a maioria deles não apresentou dificuldades na resolução. Para a resolução, foi necessário, inicialmente, fazer a conversão do registro da língua natural para o registro algébrico, como no item *a,* o que pode ser visto nas resoluções dos Estudantes 1, 7, 10 e 17 (Figura 117). Ressalta-se que a resolução do Estudante 17 não apresenta o registro algébrico, além dele, outro estudante resolveu da mesma forma. Destaca-se que mais nove participantes responderam como o Estudante 1, transformando a fração em número decimal. Também, mais cinco participantes fizeram como o Estudante 10, que somente simplificou o resultado, mantendo a fração. Já o Estudante 7 não utilizou o exemplo dado no exercício sobre o consumo do ferro de passar e se equivocou com os símbolos. Assim, pode-se observar que três estudantes não conseguiram fazer a conversão adequada da língua natural para o registro algébrico.

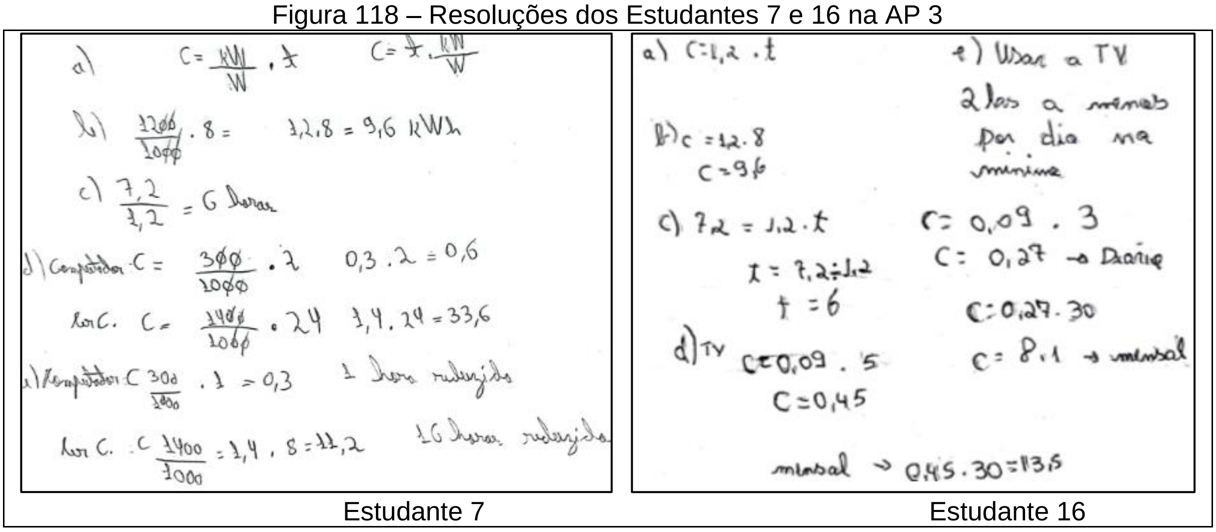
Figura 117 – Resolução de estudantes no item *a* da AP 3



Fonte: produção dos participantes da pesquisa.

Para a resolução dos itens *b*, *c* e *d* da atividade, foi necessário fazer a conversão para o registro numérico por meio da substituição do valor informado no quadro, além do tratamento dentro desse mesmo registro para chegar ao resultado desejado, conforme proposto por Duval (2016b). Em relação ao item *b* da AP 3, ressalta-se que, para a resposta, os estudantes deveriam encontrar a imagem da função, fazendo a conversão do registro algébrico para o numérico, pode-se observar pelas resoluções dos estudantes (Figura 118) que eles não apresentaram dificuldades nessa conversão.

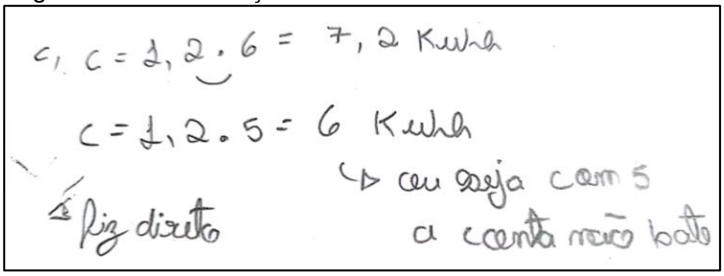
Figura 118 – Resoluções dos Estudantes 7 e 16 na AP 3



Fonte: produção dos participantes da pesquisa.

No item *c* da atividade, os participantes precisaram utilizar a imagem para encontrar o valor correspondente por meio da equação resultante. Três estudantes apresentaram dificuldades nesse item, mas com o auxílio dos colegas e da professora pesquisadora durante a realização do exercício, conseguiram chegar ao resultado correto. Destaca-se que o Estudante 15 fez essa resolução por meio de tentativas, verificando valores para o tempo *t* e buscando chegar ao valor da imagem 7,2, como pode ser observado na Figura 119.

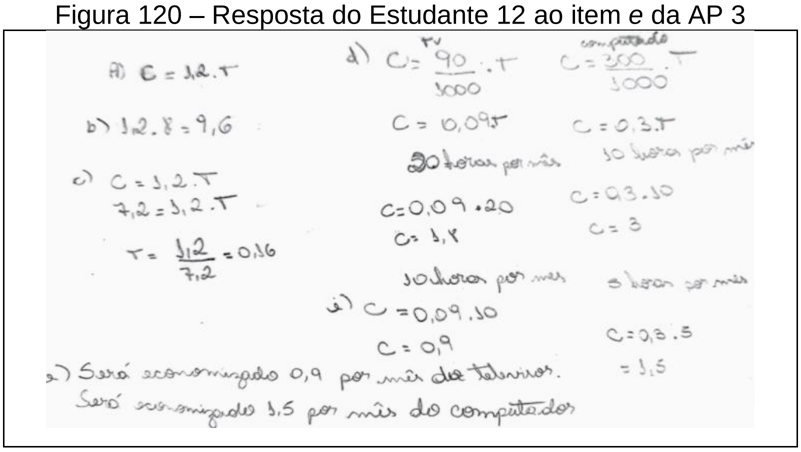
Figura 119 – Resolução do item *c* da AP 3 do Estudante 15



Fonte: produção dos participantes da pesquisa.

O item *e* exigiu reflexão por se tratar de um ambiente do tipo 6 (Skovsmose, 2010), pois, além de investigar quais aparelhos elétricos consomem mais energia elétrica, os estudantes tiveram que tomar a decisão do quanto deveriam reduzir em horas de utilização dos aparelhos escolhidos para diminuir o consumo mensal. Ressalta-se que 15 estudantes utilizaram os dados obtidos no item *d* para concluir o item *e*, como, por exemplo, a resolução do Estudante 12 (Figura 120).

Figura 120 – Resposta do Estudante 12 ao item *e* da AP 3



Fonte: produção dos participantes da pesquisa.

Esse estudante calculou o consumo dos aparelhos escolhidos por ele para o plano de economia e fez a conversão para o registro na língua natural a fim de apresentar o seu resultado de forma mais clara. Essa conversão entre os registros é importante para o desenvolvimento cognitivo da aprendizagem em Matemática (Duval, 2016b).

A atividade (AP 3) envolveu um exemplo de aplicação do conteúdo de função em uma situação do cotidiano, mostrando que é possível utilizar a Matemática para a tomada de decisões por meio da reflexão, como sugere Skovsmose (2001). O TCT educação para o consumo foi abordado com o propósito de que os estudantes possam perceber que a ação humana pode influenciar de forma positiva nos impactos no meio ambiente, como, por exemplo, com a redução do consumo de energia elétrica. Para os cálculos do gasto mensal com o consumo de energia elétrica, os estudantes utilizaram os conceitos das ciências físicas: potência, quilowatt e quilowatt-hora.

A reflexão utilizando a Matemática na resolução dessa atividade propicia o desenvolvimento da *matemacia,* que Skovsmose (2015) destaca ser necessária na formação do estudante, como cidadão, no preparando-o para agir em sociedade, seja em situação de consumo, economia ou em outras que possam vir a surgir em suas futuras profissões.

Considerando as atividades SA 1 e AP 3, que exploram os conceitos matemáticos relativos à ideia de funções de forma contextualizada por meio dos TCT, pode-se observar que os participantes da pesquisa conseguiram aprofundar e ampliar seus conhecimentos sobre esse tópico. Na próxima seção, apresenta-se a análise das atividades escolhidas para o conceito e representação de função.

7.2.2 Conceito e representação de função

Nesta seção, serão apresentadas as análises das atividades que envolvem o conceito e a representação de função. As atividades trabalhadas nesse tópico foram selecionadas por estarem relacionadas aos TCT escolhidos para a sequência didática. de forma a abranger o conteúdo. bem como o trabalho com o RRS. A primeira atividade (SA 8) envolve o conceito de função relacionado ao TCT ciência e tecnologia (Figura 121).

Figura 121 – Situação-problema no tópico conceito de função (SA 8)

(UFPR - adaptada) A distância que um automóvel percorre a partir do momento em que um condutor pisa no freio até a parada total do veículo é chamada de distância de frenagem. Suponha que a distância de frenagem *d*, em metros, possa ser calculada pela fórmula:

$d(v) = \frac{1}{120}(v^2 + 8v)$, sendo *v* a velocidade do automóvel, em quilômetros por hora, no momento em que o condutor pisa no freio.

a) Marcelo está dirigindo pela Rua Irmã Bernarda a uma velocidade de 40 km/h, qual é a distância de frenagem de seu automóvel nessa situação?

b) Qual a velocidade que o automóvel de Marcelo deve estar para que sua distância de frenagem seja de 53,2 m?

Fonte: adaptada de Bonjorno, Giovanni Junior e Souza. (2020a).

Essa atividade foi trabalhada. juntamente com os estudantes. com o objetivo de explorar o conceito de função quadrática em um ambiente do tipo 3 (Skovsmose, 2010), por se tratar de um exercício baseado em uma semirrealidade. Buscou-se utilizar uma localização conhecida pelos estudantes, sendo que a Rua Irmã Bernarda, citada no exercício, é próxima à escola em que estudam.

Durante a realização da atividade, utilizando os conceitos das ciências físicas, os estudantes se mostraram bastante interessados nos cálculos de tempo e distância de frenagem, fazendo relação com situações vivenciadas por eles na rua citada. No item *a* dessa atividade, calculou-se a distância de frenagem considerando a velocidade de 40 km/h (Figura 122).

Figura 122 – Resolução do item a da SA 8

a) Marcelo está dirigindo pela Rua Irmã Bernarda a uma velocidade de 40 km/h, qual é a distância de frenagem de seu automóvel nessa situação?

Resolução: $d(v) = \frac{1}{120} \cdot (v^2 + 8v)$

a) $d(v) = \frac{1}{120} \cdot (v^2 + 8v) \Longrightarrow d(40) = \frac{1}{20}(40^2 + 8 \cdot 40) = 16$

Sendo a velocidade v = 40, substituindo na fórmula dada, obtém-se a distância 16 m.

Fonte: a pesquisa.

Destaca-se que, nessa resolução, os estudantes comentaram o quanto a rua é movimentada, tanto com circulação de veículos quanto de pedestres, relatando, inclusive, alguns acidentes que ocorreram no local com pessoas conhecidas por eles. Ressaltaram a necessidade de conscientização dos motoristas e melhoria na sinalização de trânsito da rua para a redução do número de acidentes no local, sendo esse um indício do desenvolvimento do conhecimento reflexivo (Skovsmose, 2001).

Para a resolução do item *b* da SA 8 (Figura 123), foi dada uma distância de frenagem e solicitada a realização do cálculo da velocidade correspondente.

Figura 123 – Resolução do item *b* da SA 8

b) Qual a velocidade que o automóvel de Marcelo deve estar para que sua distância de frenagem seja de 53,2 m?

Resolução:

Sendo a distância de frenagem 53,2 m, deve-se calcular d(v) = 53,2. Assim:

$53{,}2 = \frac{1}{120} \cdot (v^2 + 8v) \Longrightarrow v^2 + 8v - 6384 = 0.$

Resolvendo essa equação do segundo grau para encontrar a velocidade:

Sendo $\Delta = (8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6\,384) = 25\,600$, então:

$x = \frac{-(8) \pm \sqrt{25600}}{2 \cdot (1)} = \frac{-8 \pm 160}{2} \Longrightarrow x' = -84 \text{ e } x'' = 76.$

Desconsiderando o valor negativo, a velocidade é de 76 km/h.

Fonte: a pesquisa.

Nessa resolução, os estudantes comentaram que constantemente observam veículos, principalmente motocicletas, sendo conduzidos por essa rua com velocidade bem superior à mencionada no problema. Destaca-se que, na utilização do cálculo da raiz da função, gerada para obtenção do resultado, foi utilizado um ambiente de aprendizagem do tipo 3 (Skovsmose, 2010) para desenvolver esses conceitos relacionados à função quadrática e verificar como eles podem ser utilizados em situações reais. Salienta-se que, para a resolução dessa atividade, a professora pesquisadora, a todo momento da aula, incentivou a discussão e o diálogo entre os estudantes, estimulando-os a questionar e analisar as possibilidades de resolução. Isso é um dos pressupostos da EMC, pois ajuda a desenvolver a capacidade de argumentação lógica e a apreciação da diversidade de soluções matemáticas (Skovsmose, 2015).

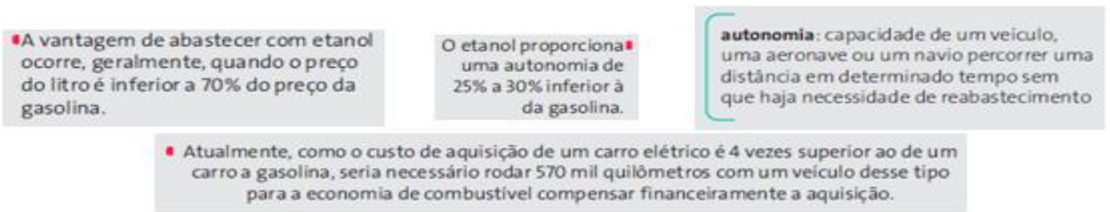
Foram utilizados os RRS, bem como as conversões do registro algébrico para o numérico, com o objetivo de que os estudantes pudessem conhecer os aspectos desse objeto matemático em mais de um registro, ressaltando o que Damm (2010) considera essencial para a compreensão.

A Figura 124 apresenta a atividade AP 14, que é contextualizada pelos TCT educação financeira e educação para o consumo.

Figura 124 – Atividade proposta no tópico conceito de função (AP 14)

Carro “flexível”

A indústria automotiva tem buscado alternativas para substituir os combustíveis fósseis no segmento de mobilidade e transporte, visando, entre outras demandas, diminuir a emissão de gases poluentes. Veículos movidos a eletricidade já são uma realidade, assim como os veículos movidos a hidrogênio, porém os altos custos de aquisição ainda são um empecilho de popularidade para esses modelos. Sendo assim, o consumidor tem optado, muitas vezes, pelo carro bicombustível, conhecido como *flex*, que permite alternar o abastecimento entre etanol e gasolina (ou a mistura deles) conforme a economia de gasto ou a vantagem de autonomia.



A partir das informações fornecidas, responda às seguintes perguntas:

a) Em sua opinião, é mais vantajoso abastecer um veículo *flex* com etanol ou com gasolina? Por quê?

b) Expressa a lei da função afim que relaciona o preço dos dois combustíveis, o etanol e a gasolina, segundo a informação acima.

c) Considerando o preço do etanol R$ 3,80 e o da gasolina a R$ 5,20, é mais vantajoso financeiramente abastecer o tanque de um automóvel de 45 litros com qual combustível?

Fonte: adaptada de Andrade (2020).

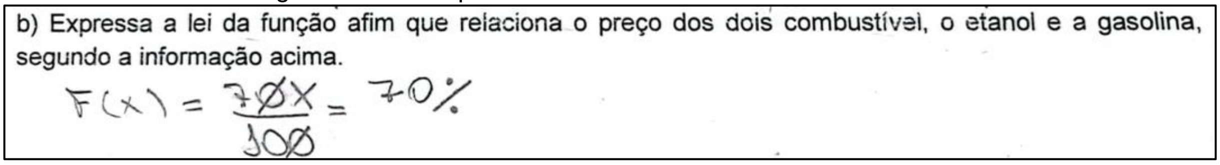
Essa atividade tem o objetivo de trabalhar o conceito de função nos ambientes de aprendizagem 3 e 4, explorando o conhecimento reflexivo e promovendo o desenvolvimento da *matemacia*. Os ambientes de aprendizagem do tipo 3 e 4 foram explorados, pois a atividade trabalha tanto um exercício quanto um cenário de investigação baseado na semirrealidade (Skovsmose, 2010). Para o trabalho com educação financeira, foi explorada a questão de qual combustível é mais vantajoso financeiramente e, para o trabalho com a educação para o consumo, foram analisados os impactos causados ao meio ambiente pelo uso de combustíveis fósseis. Nesse sentido, buscou-se a reflexão sobre se os custos compensam ou não os benefícios, pois nem sempre o combustível mais barato é o melhor para a autonomia do veículo, ou ainda, para a sua manutenção e, do ponto de vista da sustentabilidade, precisa-se analisar se há alternativas realmente benéficas ao meio ambiente.

Somente seis estudantes responderam a essa atividade, acredita-se que esse número reduzido de respostas foi pelo fato de a atividade ter sido desenvolvida em uma aula um tanto tumultuada, pois os estudantes passaram parte da aula em uma sessão de fotos para a formatura. Mesmo em número reduzido nessa aula, os estudantes foram bem participativos em suas respostas, evidenciando que o assunto era de interesse deles, sendo isso uma das considerações que Skovsmose (2001) destaca para a concepção de um currículo crítico.

Em relação ao item *a* dessa atividade (AP 14), todos os estudantes responderam ser mais vantajoso o uso da gasolina como combustível para o carro *flex*, justificando: *a gasolina tem componente mais eficaz, fazendo o carro andar melhor e por mais tempo* – Estudante 16; *gasolina, pois tem mais autonomia e no frio, é melhor para ligar* – Estudante 14; *seria mais vantajoso abastecer com gasolina porque a capacidade de um veículo percorrer uma distância maior sem precisar reabastecer* – Estudante 11. Os demais, Estudantes 3,7 e 12, deram respostas semelhantes. Para esse item, esperava-se que os estudantes analisassem também a questão dos benefícios para o meio ambiente, na utilização do biocombustível, mas isso não transparece nas respostas, logo, é um tema que deve ser mais explorado. Percebe-se também que não houve compreensão por parte dos estudantes de que a vantagem financeira depende da relação entre os preços dos dois combustíveis, mas conseguiram justificar suas respostas baseados em questões que consideram importantes para eles.

Para a resposta do item *b* da AP 14, tem-se a necessidade da conversão do registro na língua natural para o registro algébrico. Todos os estudantes apresentaram a mesma resposta, que não era a correta, pois seria $y = 0,7x$, mas pode-se observar que a estrutura da função foi construída adequadamente, podendo ter ocorrido um equívoco no momento de finalização da resolução do item (Figura 125).

Figura 125 – Resposta do Estudante 11 ao item *b* da AP 14

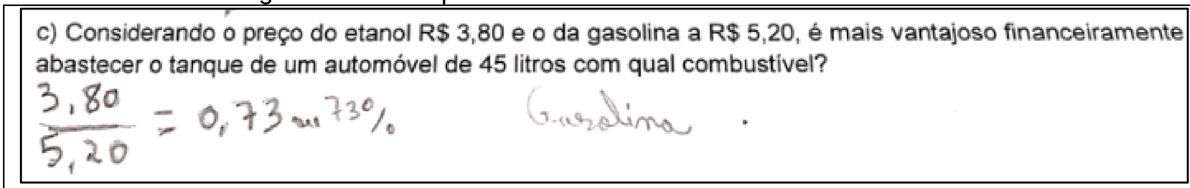

b) Expressa a lei da função afim que relaciona o preço dos dois combustível, o etanol e a gasolina, segundo a informação acima.

$F(x) = \frac{7\cancel{0}x}{10\cancel{0}} = 70\%$

Fonte: produção dos participantes da pesquisa.

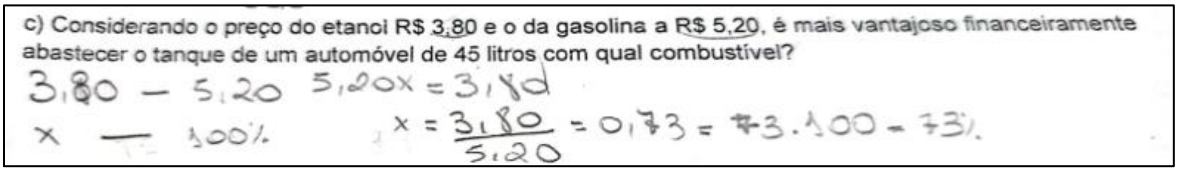
Já para o item *c*, que dependia de uma conversão para o registro numérico, as respostas foram todas assertivas, como por exemplo as respostas dos Estudantes 7, 12 e 14, apresentadas na Figura 126.

Figura 126 – Respostas de três estudantes ao item *c* da AP 14


c) Considerando o preço do etanol R$ 3,80 e o da gasolina a R$ 5,20, é mais vantajoso financeiramente abastecer o tanque de um automóvel de 45 litros com qual combustível?

$\frac{3,80}{5,20} = 0,73$ ou 73% Gasolina.

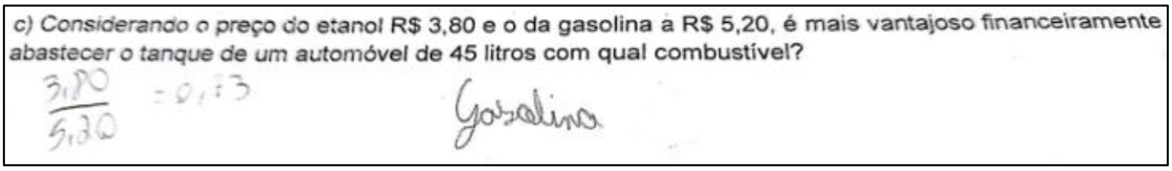
Estudante 7


c) Considerando o preço do etanol R$ 3,80 e o da gasolina a R$ 5,20, é mais vantajoso financeiramente abastecer o tanque de um automóvel de 45 litros com qual combustível?

3,80 — 5,20 $\quad 5,20x = 3,80$

x — 100% $\quad x = \frac{3,80}{5,20} = 0,73 = 73 \cdot 100 = 73\%$

Estudante 12


c) Considerando o preço do etanol R$ 3,80 e o da gasolina a R$ 5,20, é mais vantajoso financeiramente abastecer o tanque de um automóvel de 45 litros com qual combustível?

$\frac{3,80}{5,20} = 0,73$ Gasolina

Estudante 14

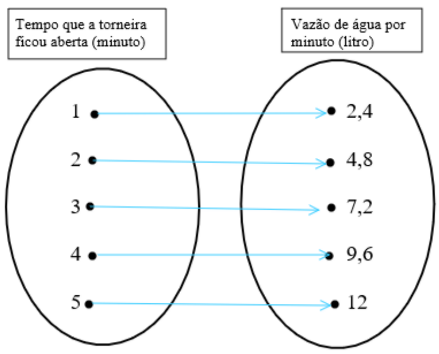
Fonte: produção dos participantes da pesquisa.

Nessa atividade (AP 14), os estudantes não conseguiram fazer a conversão corretamente para o registro algébrico no item *b*, o que também facilitaria a resolução no item *c*. Mesmo assim, pode-se dizer que houve um desenvolvimento dos participantes no que se refere ao trabalho com os tratamentos dentro do registro numérico e também à compreensão do conceito de função, pois os estudantes conseguiram, por meio de regra de três ou da razão entre os valores, realizar os cálculos necessários e chegar ao resultado adequado para a questão, para então fazer a análise de qual combustível é mais vantajoso financeiramente perante a situação apresentada. Sendo assim, considera-se que a utilização do TCT possibilitou a aprendizagem nessa atividade (Brasil, 2019b).

A Figura 127 apresenta uma atividade (AP 16) que aborda o TCT educação para o consumo. Essa atividade foi proposta aos estudantes participantes da pesquisa para trabalhar com o conceito e as diferentes representações de função.

Figura 127 – Atividade proposta com conceito e representação de função (AP 16)

AP 16 (adaptada de Cevada *et al.*, 2020). O diretor da Escola Domingos emitiu uma notificação solicitando a todos os membros da comunidade escolar que buscassem meios para diminuir o consumo de água na escola, pois o bairro estava passando por um problema de reabastecimento desse recurso tão essencial. Pensando em uma maneira de conscientizar os estudantes sobre esse assunto, o professor de Matemática da turma do terceiro ano propôs a um grupo de estudantes que anotassem a quantidade de água que sai de uma torneira no pátio da escola que, com frequência, era esquecida aberta pelos estudantes. Os estudantes anotaram alguns dos valores no diagrama de flechas ao lado.



Em seguida o professor solicitou ao grupo de estudantes que:

a) Registre esses dados em uma tabela.

b) Analise se essa relação é uma função, justifique.

c) Em caso afirmativo, determine o domínio e a imagem.

d) Construa um gráfico que represente os valores dessa tabela no plano cartesiano, utilizando o aplicativo GeoGebra.

e) Observe os pontos no plano cartesiano. Como esses pontos estão dispostos? É possível descrevê-los por meio de uma lei de formação? Em caso afirmativo, qual é essa lei?

f) Obtenha os valores de f (10) e f (15). O que esses resultados significam?

g) É possível determinar um valor de x para $f(x) = 43{,}2$. Qual seria esse valor?

h) É possível determinar x pertencente ao domínio tal que $f(x) = –4{,}8$?

i) Considerando a função encontrada, se a torneira for esquecida aberta durante 1 hora todos os dias durante uma semana, qual será a quantidade de litros de água que será desperdiçada nesse período?

Fonte: adaptada de Cevada *et al.* (2020b).

Essa atividade (AP 16) foi adaptada para envolver a realidade dos estudantes, utilizando o nome da escola onde eles estudam e uma situação que poderia ocorrer. Além de explorar as diferentes representações da função, possibilitou o início do trabalho com o *software* GeoGebra. Para isso, foi utilizado o GeoGebra Classroom, que os estudantes acessaram por meio dos *Chromebooks* disponibilizados pela escola.

O item *a* dessa atividade trabalha a conversão do registro figural para o registro numérico. Destaca-se que os estudantes não apresentaram dificuldades nesse item. A Figura 128 apresenta imagens das resoluções de três estudantes.

Figura 128 – Resolução de três estudantes no item *a* da AP 16

Minutos	Agua em litros
1	2,4
2	4,8
3	7.2
4	9.6
5	12

Estudante 4

TEMPO (min)	LItros
1	2,4
2	4,8
3	7,2
4	9,6
5	12

Estudante 11

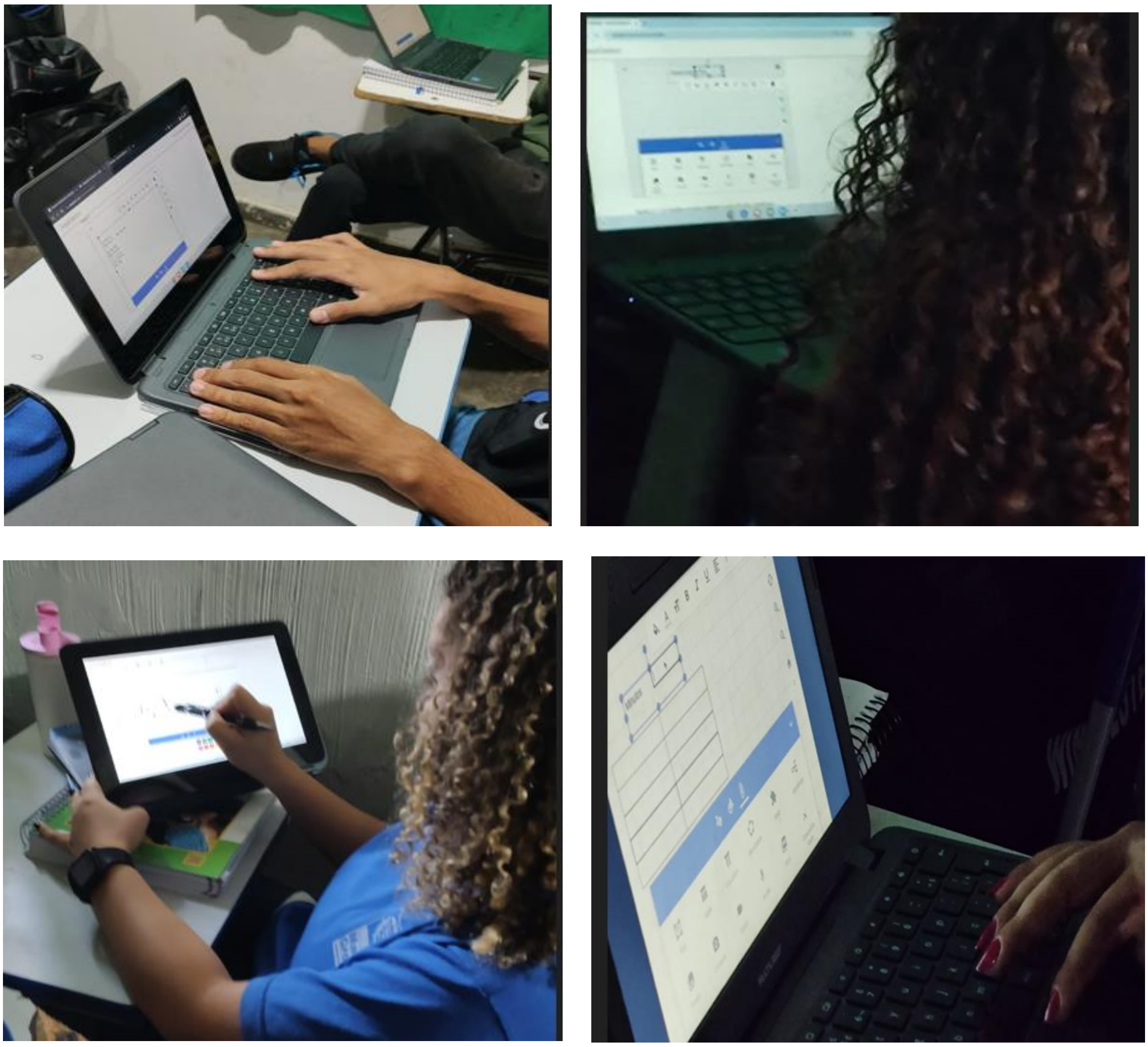
Tempo (min)	Litros
1	2,4
2	4,8
3	7,2
4	9,6
5	12

Estudante 18

Fonte: produção dos participantes da pesquisa.

Ressalta-se que os estudantes utilizaram os recursos do *Chromebook* e do GeoGebra Classroom com bastante facilidade para o desenvolvimento das resoluções, como pode ser observado na Figura 129.

Figura 129 – Estudantes utilizando o GeoGebra Classroom com os *Chromebooks*



Fonte: a pesquisa.

Nessa atividade, os estudantes construíram as tabelas numéricas utilizando os dados do diagrama de flechas apresentado no enunciado, fazendo a conversão do registro figural para o numérico.

No item *b*, os estudantes precisaram julgar se a relação apresentada era ou não função fazendo uso do conhecimento reflexivo (Skovsmose, 2001). Percebeu-se que os estudantes fizeram buscas na *internet* e também utilizaram o *site* da sequência didática, apresentando respostas diversas (Figura 130).

Figura 130 – Respostas apresentadas para o item *b* da AP 16

Estudante 3: Sim, porque sim.
Estudante 4: É uma função pois irá ter valor final
Estudantes 7, 14, 17 e 18: O conjunto X é o conjunto dos valores de entrada. A função do aplicativo opera de alguma maneira com x e produz uma saída: um valor y do conjunto Y. O programa do aplicativo associa uma única resposta y para cada comando x.
Estudantes 3 e 11: Sim. Conhecemos como função a relação entre os conjuntos A e B na qual, para todo elemento do conjunto A, há um único correspondente no conjunto B. Quando essa relação existe, ela é descrita da seguinte maneira f: A → B (função de A em B).
Estudante 12: O conjunto x é o conjunto de valores que de alguma maneira produz um valor y do conjunto y.
Estudante 16: Sim, pois Função é uma regra que relaciona cada elemento de um conjunto (representado pela variável x) a um único elemento de outro conjunto (representado pela variável y). Para cada valor de x, podemos determinar um valor de y, dizemos então que "y está em função de x".
Estudante 19: Sim, porque ela segue as regras, o conjunto X é o conjunto dos valores de entrada, cada tempo vai gerar um valor diferente de água (o valor não se repete).

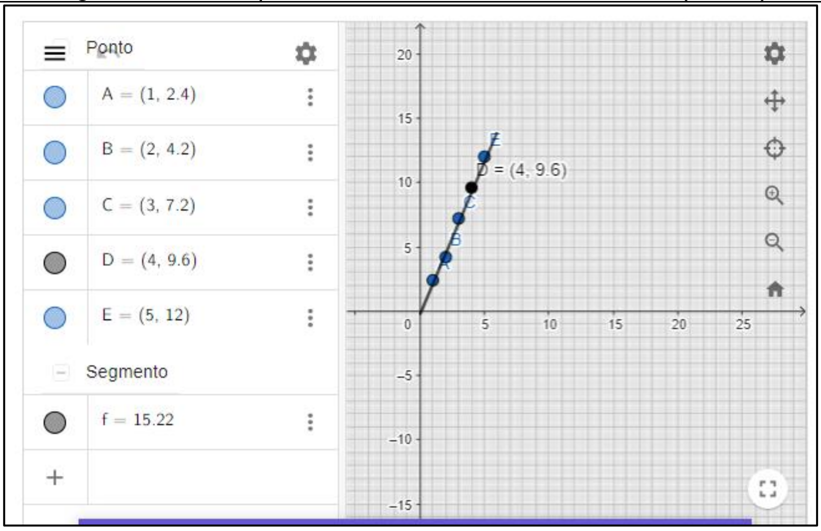
Fonte: produção dos participantes da pesquisa.

Observa-se que, mesmo tendo acesso a instrumentos de pesquisa, somente 10 estudantes responderam e as respostas não foram totalmente adequadas à questão, pois não relacionaram corretamente os dados da atividade, 8 participantes apenas copiaram a definição que encontraram em suas pesquisas e um sequer justificou. Destaca-se que o Estudante 19, nesse item, conseguiu adequar a resposta às grandezas apresentadas no exercício. Assim, pode-se concluir, nessa fase da pesquisa, que os estudantes ainda apresentaram dificuldades na formalização do conceito de função.

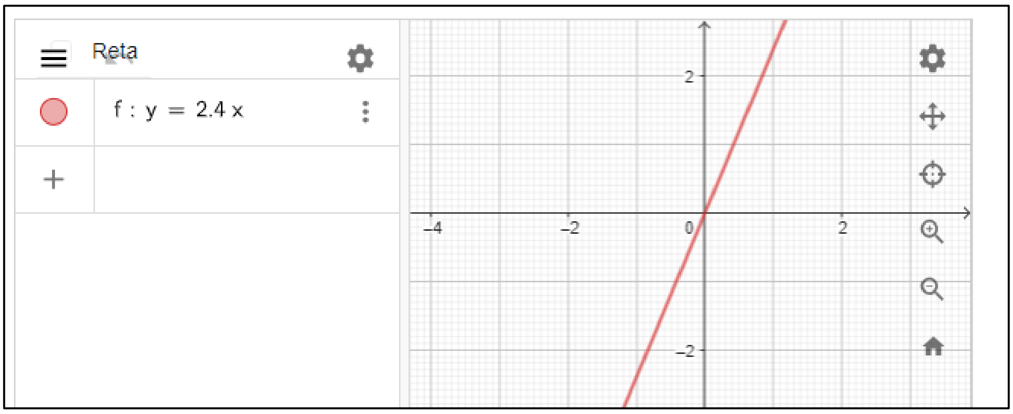
Em relação ao item *c* da AP 16, que solicitava a identificação dos conjuntos domínio e imagem da função: sete estudantes responderam que o domínio era o tempo e a imagem, os litros; e três estudantes indicaram como domínio os valores apresentados no primeiro diagrama e como imagem os valores do segundo diagrama. Conclui-se que os estudantes assimilaram o conceito de domínio e imagem, mas não compreenderam que os valores expressos no diagrama representam apenas uma fração do que seriam os conjuntos domínio e imagem, ou seja, todos os valores reais não negativos.

Para a construção do gráfico, solicitado no item *d* dessa atividade (AP 16), sete estudantes fizeram primeiro a conversão para o registro algébrico, escrevendo a lei da função *y = 2,4x*, para depois realizarem a conversão para o registro gráfico. Já os outros três estudantes que resolveram essa atividade, utilizaram os pares ordenados obtidos por meio do registro figural. Na Figura 131, pode-se observar dois exemplos dessas construções.

Figura 131 – Resposta de dois estudantes ao item *d* (AP 16)



Estudante 3



Estudante 19

Fonte: produção dos participantes da pesquisa.

Na resposta do Estudante 19 (item *d*) e dos outros seis estudantes que resolveram da mesma forma, o domínio não foi limitado ao conjunto dos números reais não negativos para que a reta da função realmente representasse os dados do problema. Pode-se considerar que esse erro tenha ocorrido por não terem compreendido essa questão no item anterior.

Em relação ao item *e*, os 10 estudantes responderam corretamente. Já no item *f*, os 10 estudantes acertaram o cálculo referente às imagens solicitadas, mas somente dois justificaram a resposta. No item *g*, foi fornecida uma imagem e solicitado o valor de *x* correspondente, cinco estudantes resolveram a equação resultante desse dado e os outros cinco fizeram por tentativas, escolhendo valores e calculando as imagens para chegar ao resultado, mas todos os 10 estudantes responderam corretamente a esse item. Para o item *i*, a resposta correta seria que não é possível determinar um valor de *x,* pois a imagem deve ser positiva, mas somente o Estudante 4 se atentou para esse fato, os outros estudantes erraram essa questão. O último item dessa atividade (AP 16) exigia as conversões entre os registros e também os tratamentos no registro numérico, transformando as unidades de tempo em minutos para horas, dias e meses. Dessa forma, seis estudantes conseguiram responder corretamente ao item *i* e quatro estudantes fizeram apenas cálculos parciais. Esse último item permitiu a exploração do tema educação para o consumo, considerando-se a reflexão sobre o desperdício de água. Isso possibilitou a associação dos conceitos matemáticos ao TCT utilizado (Brasil, 2019a).

A AP 16 proporcionou o trabalho com a conversão, bem como os tratamentos dentro de um mesmo registro, respeitando as regras de cada registro, como Damm (2010) destaca ser significativo para a compreensão do objeto matemático em estudo. O TCT educação para o consumo tem destaque no item *i* da atividade a partir do cálculo do desperdício de água em um mês, considerando a torneira aberta uma hora por dia. Esse trabalho despertou a reflexão sobre o quanto se pode economizar no consumo de água ao adotar um cuidado considerado simples, como o de fechar uma torneira. Essa *reflexão com a Matemática*, para Skovsmose (2010), é utilizada para a tomada de decisões também de ordem econômica, política ou social.

As atividades selecionadas para análise neste tópico, conceito e representação de função, permitiram visualizar como ocorreu o ensino durante a sequência didática. Por conseguinte, as análises mostraram como foi a participação dos estudantes e de que forma compreenderam as atividades trabalhadas.

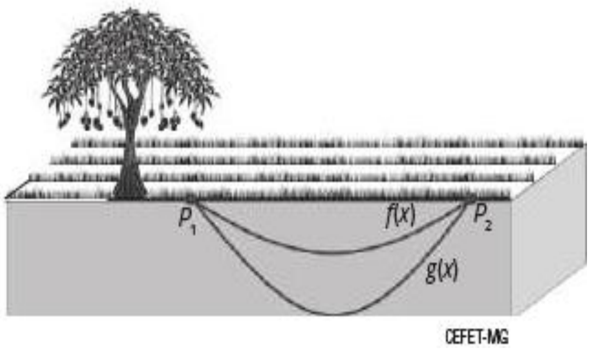
7.2.3 Gráfico de função

As atividades do tópico gráfico de função foram escolhidas para o trabalho com a construção do gráfico e com a análise gráfica para a resolução das situações propostas que foram contextualizadas pelos TCT. Para o desenvolvimento dessas atividades, também foram utilizados os recursos GeoGebra Classic, GeoGebra Classroom, *Chromebooks*, além dos já mencionados anteriormente. Foram utilizados os RRS (língua natural, numérico, algébrico, figural e gráfico), visando à compreensão dos estudantes sobre o objeto função como um todo.

A atividade SA 22, apresentada na Figura 132, aborda uma função quadrática, cujo objetivo é utilizar o gráfico dessa função para compreender uma situação relacionada ao tema educação para o consumo.

Figura 132 – Situação de aprendizagem no tópico gráfico de função quadrática (SA 22)

(Cefet-MG - adaptada). Após uma aula de Matemática sobre função quadrática, Lucas solicitou ao professor para falar sobre sua ida ao sítio da família. Ele contou que seu avô quer construir, ao lado da mangueira do sítio, um lago para criar peixes e que um engenheiro amigo da família fez um projeto respeitando as normas ambientais. O professor ficou bastante interessado e pediu que Lucas trouxesse uma foto do desenho do projeto. A figura ao lado mostra o projeto do engenheiro ambiental no qual a lagoa, vista por um corte horizontal do terreno, é representada por uma parábola, com raízes P_1 e P_2 distantes 8 metros. O projeto inicial previa a parábola $g(x) = x^2 - 8x$.



Para conter gastos, essa parábola foi substituída pela parábola $f(x) = \frac{x^2}{4} - 2x$.

O professor compartilhou o desenho com os estudantes e solicitou que fizessem o gráfico das funções utilizando o GeoGebra e em seguida respondessem à seguinte questão: com essa mudança, a maior profundidade da lagoa, diminuiu quantos metros?

a) 4. **b)** 8. **c)** 12. **d)** 16.

Fonte: adaptada de Souza, J. R. (2020b).

Essa atividade (SA 22) foi trabalhada com os estudantes durante a sequência didática, na qual a professora pesquisadora projetou a questão. Os estudantes foram auxiliando na resolução, utilizando *on-line* o GeoGebra Classic para irem experienciando o programa e conhecendo os seus recursos. Esse trabalho, utilizando recursos com tecnologia digital, favorece o que Skovsmose (2001) destaca ser importante em todos os níveis educacionais, o conhecimento tecnológico. Para isso, a professora explicou o passo a passo da construção, como se pode observar na Figura 133.

Figura 133 – Orientações para resolução da SA 22 (parte 1)

Utilizando o *GeoGebra Classic*, pode-se construir a parábola de ambas as funções e realizar a interpretação adequada para responder à questão. Para a construção, seguir os seguintes passos:

1º - digitar cada uma das funções (separadamente) no campo de entrada do *GeoGebra*; alterar as cores da parábola em propriedades;

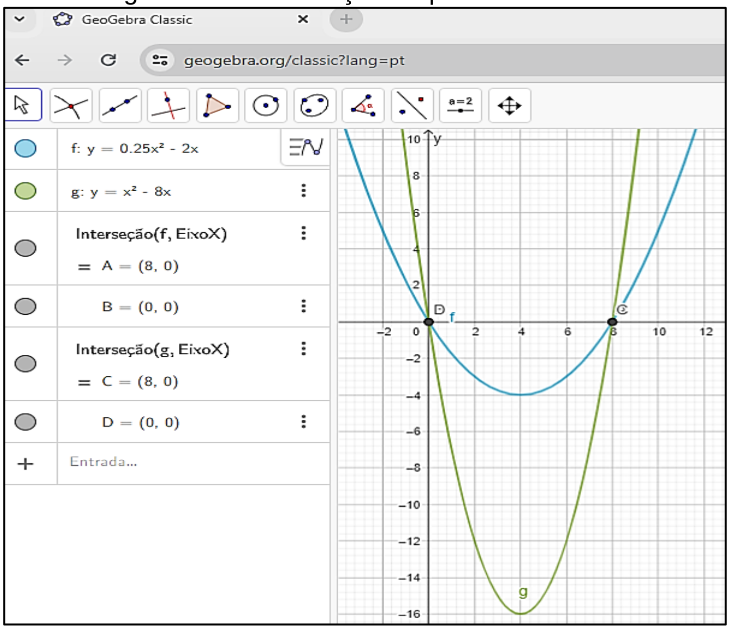
f: y = 0,25x^2-2x
g: y = x^2-8x

2º - utilizar a ferramenta ponto em intersecção de dois objetos, selecionando a função e o eixo x, para encontrar as raízes da função; fazer o mesmo com a outra função; na janela de álgebra aparecerá os pontos com suas coordenadas;

Fonte: a pesquisa.

Observa-se, nessa primeira parte da resolução, a construção gráfica das funções por meio do *software*, destacando as ferramentas utilizadas e resultando no registro gráfico apresentado na Figura 134.

Figura 134 – Resolução da parte 1 da SA 12



Fonte: a pesquisa.

Nessa parte da resolução, vale destacar os comentários de alguns estudantes: Estudante13 – *os pontos de interseção coincidiram*; Estudante 17 – *ah é porque as duas funções têm as mesmas raízes*; Estudante 1 – *ficou fácil construir o gráfico assim*. As orientações para finalizar a construção estão apresentadas na Figura 135.

Figura 135 – Orientações para resolução da SA 22 (parte 2)

3º - usar a ferramenta segmento para unir as duas raízes; usar a ferramenta ponto médio para encontrar o centro desse segmento.

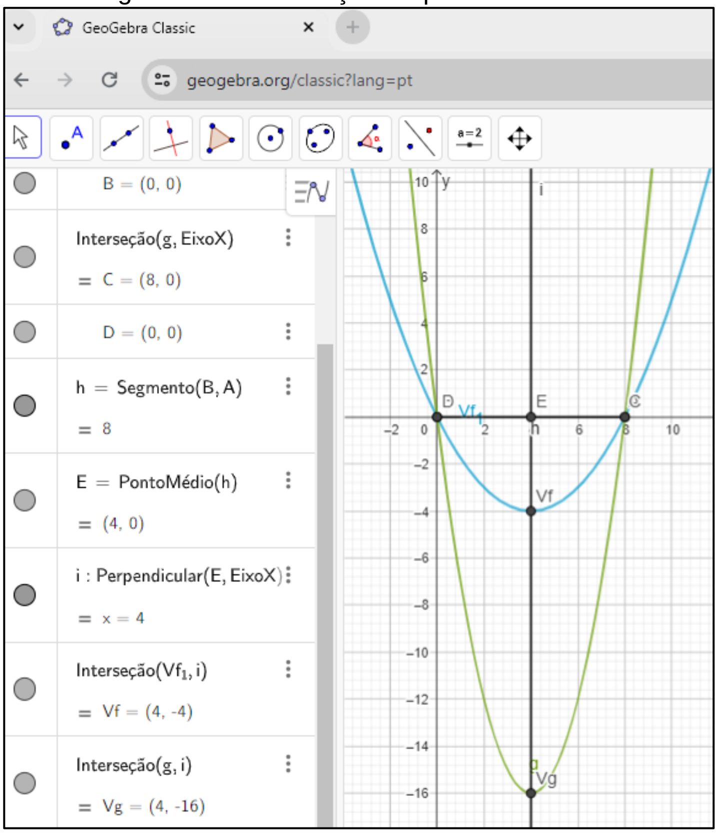
4º - usar a ferramenta reta perpendicular para traçar a perpendicular em relação ao eixo x, passando pelo ponto médio encontrado no passo anterior;

5º - utilizar novamente a ferramenta ponto de interseção de dois objetos selecionando a parábola e a reta perpendicular, encontrando assim o ponto do vértice; fazer o mesmo procedimento com a outra parábola; na janela de álgebra aparecerá o vértice, renomear para ponto V_f e V_g em propriedades.

Fonte: a pesquisa.

A segunda parte da resolução da SA 22 concluiu a construção no *software,* cujo resultado está apresentado na Figura 136. Os estudantes que concluíam a construção mais rápido auxiliavam os colegas que apresentavam alguma dificuldade.

Figura 136 – Resolução da parte 2 da SA 22



Fonte: a pesquisa.

Para chegar à solução da situação proposta pela atividade, foi necessário analisar a representação gráfica construída. Para tanto, a professora pesquisadora perguntou o que representava a profundidade do lago. O Estudante 16 respondeu, de forma correta, que seria a coordenada *y* do ponto *Vf* e do ponto *Vg*. Na sequência, o Estudante 3 disse que a resposta seria então a alternativa *c* (12 metros) por ser a diferença entre os valores das duas coordenadas. O Estudante 14 questionou como seria a resolução se não tivesse o recurso do *software*. A professora pesquisadora então relembrou as fórmulas para o cálculo das raízes da equação e das coordenadas dos vértices e reforçou que teriam que ser construídos os gráficos das funções, mesmo que apenas um esboço, para facilitar a análise final.

A utilização do GeoGebra Classic possibilitou a visualização da conversão entre os registros, ressaltando as características que Duval (2016b) considera essenciais para o desenvolvimento do pensamento matemático, a variedade e a importância das representações semióticas. Assim, enquanto os estudantes construíam os gráficos das funções, utilizando o registro algébrico, já podiam observar também o registro numérico (os pares ordenados dos pontos construídos) e o registro figural (as parábolas que representam as funções). Observa-se que, nessa atividade (SA 22), o conhecimento tecnológico foi utilizado juntamente com o conhecimento reflexivo, objetivando a resolução de um problema, como preconiza Skovsmose (2001).

A AP 18 (Figura 137) foi proposta com o intuito de trabalhar o TCT educação financeira em um ambiente de aprendizagem (tipos 3 e 4), pois trabalha uma situação de semirrealidade em que os estudantes tiveram que utilizar os RRS (língua natural, registro algébrico, numérico e gráfico), fazendo as conversões e os tratamentos necessários para a resolução e apresentação dos resultados. Ressalta-se que a atividade foi desenvolvida no ambiente GeoGebra Classroom.

Figura 137 – Atividade proposta sobre gráfico de função afim (AP 18)

Se João toma café da manhã na padaria, ele gasta R$ 5,50; se ele toma em casa, gasta R$ 1,75.

a) Para cada uma dessas situações determine uma lei de formação que relacione o custo *c* (em R$) do café da manhã de João com o tempo *t* (em dias).

b) Esboce o gráfico das duas funções no mesmo sistema cartesiano, utilizando o GeoGebra.

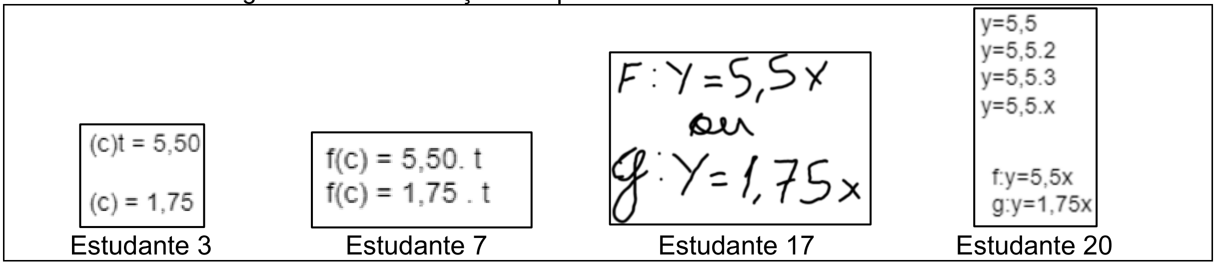
c) Calcule o gasto anual de cada uma das opções. Qual é a economia que João fará se tomar café da manhã somente em casa?

d) Com quantas pessoas ele pode compartilhar o café da manhã se estiver disposto a usar essa economia para uma causa social?

Fonte: adaptada de Cevada *et al.* (2020).

Para a resolução do item *a* da atividade em questão, foi necessária a conversão da língua natural para o registro algébrico. Destaca-se que 13 estudantes responderam esse item, e a resolução de quatro deles é apresentada na Figura 138.

Figura 138 – Resolução de quatro estudantes ao item *a* da AP 18

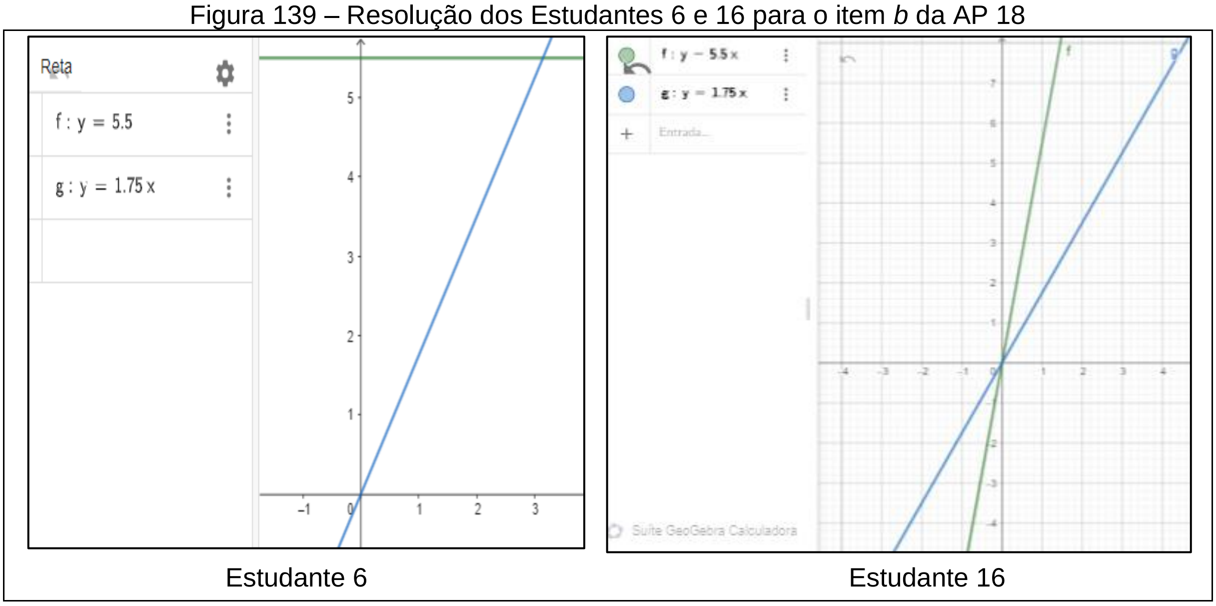


Fonte: produção dos participantes da pesquisa.

Observando-se as respostas apresentadas, nota-se que o Estudante 3 não conseguiu fazer a conversão corretamente, pois ele não identificou a variável tempo na lei da função. O Estudante 7 conseguiu fazer a conversão corretamente, faltando apenas nomear as funções de forma diferente e utilizar a mesma letra para representar a variável, destaca-se que mais dois estudantes responderam de forma análoga. O Estudante 17 expressou a lei da função de forma imediata, conseguindo fazer a conversão com facilidade, além dele mais um estudante respondeu da mesma forma. Já o Estudante 20 trabalhou inicialmente alguns valores da imagem para depois escrever a função *f* no registro algébrico, mas na função *g*, ele identificou de imediato a lei de formação; assim como esse estudante, outros seis apresentaram respostas semelhantes, mas dois deles só expressaram a lei da primeira função.

Em relação ao item *b,* a atividade (AP 18) solicitou a conversão do registro algébrico para o gráfico, pois os estudantes tiveram que construir a representação gráfica das duas funções utilizando o GeoGebra*.* A Figura 139 mostra a resolução de dois estudantes.

Figura 139 – Resolução dos Estudantes 6 e 16 para o item *b* da AP 18

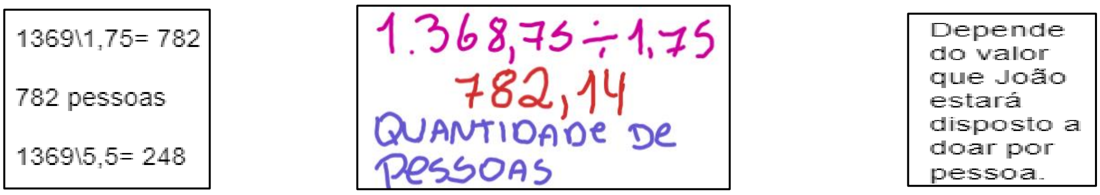


Fonte: produção dos participantes da pesquisa.

O Estudante 6 não utilizou corretamente a lei da primeira função, logo, a representação gráfica não está correta em relação ao exercício, além dele, outro estudante cometeu o mesmo erro. Já a construção do Estudante 16 representou as duas funções adequadamente, o que faltou foi a restrição do domínio que deveria abranger somente os números positivos, outros nove estudantes fizeram construções semelhantes. Destaca-se que o Estudante 3 que errou o item anterior não apresentou nenhuma resolução nesse item.

No item *c* da AP 18, foi solicitado que os estudantes calculassem o gasto anual com o café da manhã nas duas opções, tomando o café na padaria e tomando em casa, e também o cálculo da economia na opção mais barata. Para essa resolução, foi necessário o cálculo da imagem de cada uma das funções para o valor 365 dias e isso poderia ser feito utilizando o registro gráfico no GeoGebra, mas os estudantes optaram por fazer a conversão da lei da função para o registro numérico. Nesse item, somente nove estudantes apresentaram suas resoluções, sendo que todos acertaram a resposta, mas somente dois converteram a resposta para a língua natural. Já no item *d*, foi solicitado indicar com quantas pessoas seria possível dividir o café da manhã, considerando a economia na opção mais barata, a Figura 140 apresenta a resolução de três estudantes.

Figura 140 – Resposta de três estudantes ao item *d* da AP 18



Estudante 16 Estudante 18 Estudante 20

Fonte: produção dos participantes da pesquisa.

O item *d* (AP 18) não deixa claro como deve ser o compartilhamento do café da manhã, se em casa ou na padaria. Sendo assim, para tomar essa decisão, os estudantes tiveram que fazer uma reflexão *sobre* a Matemática (Skovsmose 2010), ou seja, por meio dos cálculos realizados no item anterior, escolheram um preço e o utilizaram. Dos oito estudantes que responderam a esse item, constatou-se que (Figura 140): o Estudante 16 não tomou essa decisão e apresentou os cálculos para as duas situações; seis estudantes utilizaram os dados do café da manhã mais barato, como o Estudante 18; e o Estudante 20 não apresentou cálculos e deu uma resposta um tanto aleatória, utilizando a língua natural, mas que não pode ser considerada errada já que a pergunta ficou meio aberta.

Essa atividade (AP 18) proporcionou a visualização de duas funções em vários registros (língua natural, registro numérico, algébrico e gráfico). Ressalta-se que dos 13 estudantes que começaram a atividade somente oito fizeram todos os itens, sendo que sete não apresentaram dificuldades em relação aos tratamentos e conversões que foram necessárias para a resolução. Observando-se o desenvolvimento dos estudantes, pode-se concluir que eles não possuem o hábito de apresentar a resposta solicitada na língua natural, o que é um indício da constância do trabalho com ambiente de aprendizagem do tipo 1, em que se utilizam apenas exercícios com a Matemática pura (*calcule*, *determine*, *resolva)* que não dão espaço para a reflexão, levando os estudantes a apenas dar respostas na linguagem Matemática (Skovsmose, 2010). Destaca-se também que o ambiente do tipo 4 despertou o interesse da maioria dos estudantes (13 participantes), mas à medida que os cálculos exigiram um pouco mais (ambiente do tipo 3), alguns foram desistindo do processo. Diante disso, é importante a utilização de vários ambientes para ir provocando a mudança de atitude dos estudantes frente aos problemas, sejam eles didáticos na escola, ou reais com os quais eles vão se deparar no meio social, no ambiente de trabalho e outros (Skovsmose, 2015).

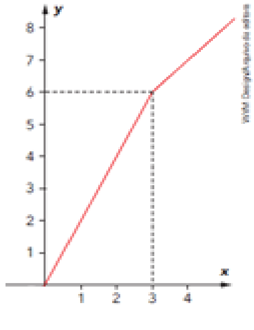
A Figura 141 apresenta a atividade AP 23 que teve por objetivo o trabalho com a conversão do registro gráfico e algébrico para o registro na língua natural. Esse sentido de conversão não é o mais trabalhado nas questões usuais propostas nos livros didáticos de Matemática e isso destaca a importância dessa atividade como sugere Duval (2011b) para auxiliar na compreensão do objeto em estudo.

Figura 141 – Atividade proposta sobre gráfico de função (AP 23)

Observe o gráfico ao lado. Ele é formado por dois segmentos, ou ainda, duas semirretas, logo ele não representa uma função afim.

Note que, nesse caso, cada um dos dois trechos da representação gráfica dessa função coincide com parte da representação gráfica de uma função afim, por isso essa função também é chamada função afim por partes.

A imagem da função será calculada de acordo com o intervalo ao qual o x pertence: para os valores de x menores que 3, utilizou-se f(x) = 2x; para os valores maiores de x ou iguais a 3, utilizou-se f(x) = x + 3. Nesse exemplo, a lei da função f é definida por: $f(x) = \begin{cases} 2x, se\ x < 3 \\ x + 3, se\ x \geq 3 \end{cases}$



Crie uma situação-problema que possa ser representada por esse gráfico. Essa situação deve envolver um dos TCT desenvolvidos: educação financeira, educação para o consumo ou ciência e tecnologia.

Fonte: adaptada de Dante e Viana (2020a).

A AP 23 foi resolvida por nove estudantes, sendo que sete optaram pelo TCT educação financeira e dois pelo TCT ciência e tecnologia para desenvolver a atividade. A Figura 142 mostra oito dessas respostas.

Figura 142 – Resposta dos estudantes para a AP 23.

Estudante 4: Joana atendeu em seu estabelecimento durante o dia, 6 clientes, sendo que sua meta de clientes por dia é 3, quantos clientes joana atendeu a mais durante o seu dia de mais atendimento?
Estudante 7: x = número de dispositivos eletrônicos encomendados. Um cliente deseja encomendar uma quantidade de dispositivos eletrônicos. Se a encomenda for menor que 3 unidades: o custo por unidade será (2x). No entanto, se a encomenda for de 3 unidades ou mais: o custo por unidade será (x + 3). O cliente precisa decidir a quantidade de dispositivos a encomendar de acordo com essas condições para otimizar o custo total da compra.
Estudante 11: A tecnologia vem crescendo a cada dia, porém tem pessoas que não tem acesso a essa evolução.
Estudante 12: f(x) = 2x, onde x é o número do mês. Isso significa que suas despesas mensais aumentam de forma linear, sendo o dobro do número do mês. No entanto, a partir do quarto mês, João prevê uma mudança em seu estilo de vida. Ele planeja investir mais em educação e tecnologia, o que resultará em uma alteração nas suas despesas. Para os meses a partir do quarto mês (x≥3), suas despesas mensais serão modeladas pela função f(x) = x + 3. A situação-problema consiste em João ajustando seu orçamento mensal de acordo com essa função afim por partes. Ele precisa tomar decisões financeiras baseadas na transição das despesas lineares iniciais para as despesas lineares com uma inclinação diferente.
Estudante 14: PH foi na praia vender sorvetes, nos primeiros 3 dias ele vendeu 6 sorvetes, já nos próximos 2 dias ele vendeu apenas 2 sorvetes.
Estudante 16: x representa a quantia de dinheiro disponível para o jovem. Se ele tiver menos de 3 unidades monetárias (por exemplo, em uma situação de aperto financeiro), ele gastará o dobro do valor disponível, f(x) =2x. No entanto, se ele tiver 3 unidades monetárias ou mais, ele seguirá uma função de gastos diferente, f(x)=x+3, indicando que, a partir desse ponto, ele tem mais flexibilidade em seus gastos. A situação-problema pode envolver o jovem tentando equilibrar suas despesas mensais, decidindo como distribuir seu dinheiro entre diferentes categorias, como lazer, alimentação e educação.
Estudante 17: A tecnologia vem crescendo a cada dia, porém tem pessoas que não tem acesso a essa evolução.
Estudante 19: Eduarda, foi vender brigadeiro em um restaurante, em 3 dias ela conseguiu vender 6 bombons.

Fonte: produção dos participantes da pesquisa.

Tanto o Estudante 11 como o 17 deram a mesma resposta com o TCT ciência e tecnologia, porém não utilizaram os dados representados pela atividade, ou seja, não fizeram a conversão entre os registros. Os demais estudantes utilizaram a educação financeira e conseguiram fazer a conversão, mas três deles (Estudante 4, 14 e 19) não utilizaram de forma correta todos os dados fornecidos pela função na representação gráfica ou na representação algébrica, o que mostra que não compreenderam que cada valor de *x* teria que corresponder a um dia. Já o Estudante 12 equivocou-se nos tratamentos dos dados, pois, a partir do terceiro mês o crescimento é mais lento. O Estudante 7 utilizou os dados da atividade para criar uma situação com correspondência exata ao registro gráfico e a resolução do Estudante 16 também necessitaria apenas de alguns ajustes para que a situação representasse fielmente o gráfico.

A resposta do Estudante 3 se diferenciou das demais, pois além de escrever a situação-problema, ele ainda a resolveu, como pode ser observado na Figura 143.

Figura 143 – Resolução do Estudante 3 na AP 23

Apresentação da situação:

Imagine que um jovem, chamado João, está planejando suas finanças ao longo do tempo. Ele decide criar uma função que descreve sua mesada mensal com base em seu comportamento de gastos. A função afim por partes representa essa situação:

Para os primeiros 3 meses, João decide seguir uma abordagem mais econômica, onde sua mesada é dada por f(x)=2x, onde x representa o número do mês. Ou seja, nos primeiros 3 meses, a mesada mensal de João é o dobro do número do mês.

Após os primeiros 3 meses, João percebe que precisa aumentar sua mesada para lidar com despesas crescentes. Então, a partir do quarto mês em diante, ele adota uma nova abordagem, onde sua mesada é dada por f(x)=x+3, representando a mesada como o número do mês acrescido de 3.

Apresentação da situação:

O problema é o seguinte: João, um estudante universitário, recebe uma mesada inicial de R$ 200,00. Ele decide seguir a função afim por partes descrita acima para calcular sua mesada nos próximos meses.

1) Como seria a mesada de João nos primeiros 6 meses? Represente isso no gráfico da função.

2) João está planejando fazer uma viagem no final do sexto mês. Ele quer saber quanto dinheiro terá acumulado até então. Calcule o total acumulado recebido por João nos primeiros 6 meses.

3) João percebe que seus gastos podem aumentar ainda mais nos próximos meses devido a novas responsabilidades. Ele gostaria de prever sua mesada para os próximos 12 meses. Como ele pode usar a função afim por partes para calcular sua mesada nos meses seguintes?

Apresentação da resposta:

Resposta:

1) Mesada nos primeiros 6 meses: Vamos calcular a mesada de João para os primeiros 6 meses usando as funções afim por partes fornecidas.

Para x de 1 a 3 (primeiros 3 meses): f(x) = 2x

f(1) = 2×1 = 2; f(2) = 2×2 = 4; f(3) = 2×3 = 6

Para x maior que 3 (a partir do 4º mês): f(x) = x+3

f(4) = 4+3 = 7; f(5) = 5+3 = 8; f(6) = 6+3 = 9

A mesada de João nos primeiros 6 meses seria: 2, 4, 6, 7, 8, 9.

2. Total acumulado nos primeiros 6 meses: A mesada inicial de João é R$ 200,00. Vamos calcular o total acumulado nos primeiros 6 meses.

200 + 2 + 4 + 6 + 7 + 8 + 9 = 236

João terá acumulado R$ 236,00 nos primeiros 6 meses.

3. Previsão para os próximos 12 meses:

Para prever a mesada nos próximos 12 meses, João pode usar a função afim por partes.

Para x de 7 a 12 (meses 7 a 12): f(x) = x+3

f(7) = 7+3 = 10; f(8) = 8+3 = 11; f(9) = 9+3 = 12; f(10) = 10+3 = 13; f(11) = 11+3 = 14; f(12) = 12+3 =15

A previsão para os próximos 12 meses seria: 10, 11, 12, 13, 14, 15, ...

Fonte: produção dos participantes da pesquisa.

Esse estudante também utilizou o TCT educação financeira e conseguiu fazer a conversão adequada do registro gráfico e algébrico para a língua natural. Ele apenas se equivocou no tratamento dos dados, pois afirmou que a mesada do João aumentaria mais rapidamente após o terceiro mês, mas é o inverso disso. Outro equívoco que ele cometeu foi o cálculo do acumulado da mesada, pois considerou os valores mensais como acréscimo, logo teria que ser acrescido mês a mês o valor da mesada inicial.

Essa atividade (AP 23) proporcionou o trabalho por meio da reflexão não somente do objeto matemático, mas os estudantes tiveram a possibilidade de explorar os temas trabalhados em situações baseadas em sua realidade, que fossem relevantes para o aprendizado deles, a partir das escolhas que fizeram. Isso vem ao encontro do que Skovsmose (2001) menciona ser importante para o desenvolvimento dos estudantes, trabalhar com questões que não estão totalmente prontas ou acabadas, oportunizando que eles possam explorar novas possibilidades, também dentro do universo educacional.

7.2.4 Algumas características de função

A seção, algumas características de função, foi organizada para o trabalho com: o crescimento e decrescimento de funções afim e quadrática; injetividade, sobrejetividade e bijetividade; função inversa; estudo do sinal de uma função; e inequação do primeiro e do segundo grau. Para essa análise foram escolhidas duas atividades: a SA 30, que envolve o estudo do sinal da função afim com o TCT educação financeira; e a AP 25 sobre crescimento ou decrescimento de função, envolvendo o TCT ciência e tecnologia. Assim, a Figura 144 apresenta a SA 30.

Figura 144 – Situação-problema no tópico características de função (SA 30)

Paula mora em Cuiabá e precisa ir até o centro da cidade. Ela vai estacionar seu carro e está analisando os preços de dois estacionamentos. • Estacionamento A: R$ 10,00 a primeira hora; R$ 4,00 cada hora adicional. • Estacionamento B: R$ 16,00 a primeira hora; R$ 2,00 cada hora adicional. a) Sabendo que a previsão é de que o carro fique estacionado durante 5 horas, qual é a opção mais vantajosa para Paula? b) Existe alguma quantidade de horas que torna a escolha indiferente? c) Faça a análise de para quais intervalos de valores há vantagem em cada um dos estacionamentos.

Fonte: adaptada de Bonjorno, Giovanni Junior e Souza (2020a).

Essa situação teve o objetivo de contextualizar o estudo do sinal de funções do primeiro grau, utilizando um ambiente de aprendizagem do tipo 4, simulando um evento que aconteceria na capital do estado onde os estudantes residem. Além disso, tem como objetivo trabalhar com os RRS (língua natural, registros: numérico, algébrico, gráfico e figural), fazendo a conversão entre todos os registros trabalhados. Para o desenvolvimento da atividade, a professora pesquisadora projetou os *slides* da aula e a página do *site* e orientou os estudantes a utilizarem os *Chromebooks* para acessar tanto o site como o GeoGebra Classic e ir resolvendo juntos.

Todos os 20 estudantes participantes da pesquisa estavam presentes nessa aula, observando e contribuindo para as respostas. Questionados sobre como a SA poderia ser resolvida, o Estudante 15 sugeriu fazer uma tabela com os valores que seriam pagos a cada hora até chegar a cinco horas para que os resultados fossem comparados. Dessa forma, utilizando os recursos do *PowerPoint*, a tabela foi construída juntamente com os estudantes (Figura 145).

Figura 145 – Resolução da SA 30 pelo registro figural

Hora	Estacionamento Alfa	Estacionamento Beta
1	10,00	16,00
2	14,00	18,00
3	18,00	20,00
4	22,00	22,00
5	26,00	24,00

Assim, a opção mais vantajosa financeiramente para a Paula é o Estacionamento Beta.

Fonte: a pesquisa.

Para a construção da tabela, foi realizada a conversão do registro na língua natural para o registro figural, obtendo assim a resposta ao item *a*. Entretanto, a professora pesquisadora indagou se seria possível escrever a função e buscar a solução por meio da análise do gráfico, convertendo assim para o registro algébrico e depois para o gráfico e, junto com os estudantes, foram escrevendo as leis das funções, após chegou-se à resolução do problema por meio dos tratamentos no registro numérico. A Figura 146 mostra a resolução utilizando os registros algébrico e numérico para dar as respostas dos itens *a* e *b*.

Figura 146 – Resolução da SA 30 utilizando o registro algébrico e numérico

Em cada caso, pode-se escrever a lei que representa o valor cobrado pelo estacionamento, em reais, em função do tempo, em hora, considerando as horas adicionais, pois a primeira hora é um valor fixo, assim para calcular o valor da função para 5 horas, tem-se que x = 4, logo pode-se escrever como (x-1). Assim:

- Estacionamento Alfa: $f(x) = 10 + 4(x - 1)$; por 5 horas: $f(5) = 10 + 4\cdot(5 - 1) = 26$
- Estacionamento Beta: $g(x) = 16 + 2(x - 1)$; por 5 horas: $g(5) = 16 + 2\cdot(5 - 1) = 24$

Nessas condições, a opção mais vantajosa para Paula é o estacionamento Beta.

Pode-se calcular também em qual situação seria indiferente a escolha, ou seja, quando $f(x) = g(x)$, segue-se que:

$10 + 4(x - 1) = 16 + 2(x - 1) \Rightarrow 2x = 8 \Rightarrow x = 4$.

Assim, quando Paula for ficar 4 horas, o preço será o mesmo nos dois estacionamentos.

Fonte: a pesquisa.

A utilização do registro algébrico, escrevendo a lei das funções permitiu a visualização das funções de uma maneira diferente, mostrando informações novas, como Damm (2010) diz ser possível, pois para a autora, os registros são complementares. Assim, a partir da lei da função, pode-se identificar os coeficientes (angular e linear), bem como definir o seu domínio que, pelas informações fornecidas, são os números reais não negativos. Do mesmo modo, a utilização do registro gráfico pode apresentar outros dados da função, como também possibilitar o estudo do sinal entre as funções a partir do ponto de intersecção entre elas. Para tanto, a professora pesquisadora orientou os estudantes na construção do gráfico no GeoGebra (Figura 147).

Figura 147 – Orientações para a construção do gráfico na SA 30

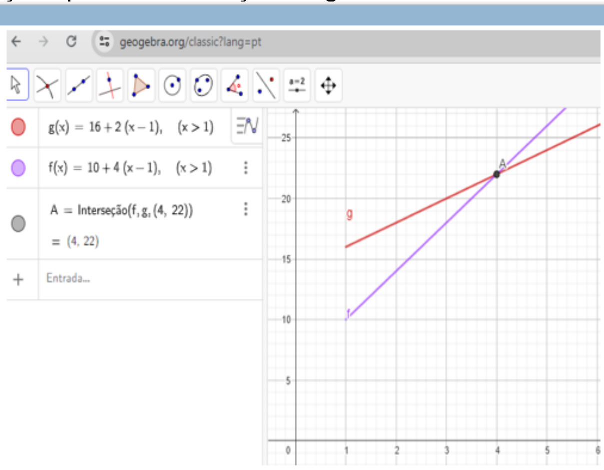
Passos para a construção do gráfico no *GeoGebra*:

1 – escrever a função f no campo de entrada: f(x) = 10 + 4x, (x>1) e dar “enter” (a expressão x>1 é para restringir o domínio da função).

2 – escrever a função g no campo de entrada: g(x) = 16 + 2x, (x>1) e dar “enter” (a expressão x>1 é para restringir o domínio da função).

3 – marcar o ponto de interseção das duas funções, utilizando a ferramenta “ponto – interseção de dois objetos”.

O resultado é o representação ao lado.



Observando o gráfico, pode-se ver que a imagem de x = 5 é maior na função f do que na função g, logo o Estacionamento Beta é a melhor opção.

Fonte: a pesquisa.

Dessa forma, por meio do registro gráfico, os estudantes responderam corretamente a todos os itens da SA 30, conseguindo identificar as respostas a partir dos questionamentos da professora pesquisadora (Figura 148).

Figura 148 – Respostas da SA 30 a partir do registro gráfico

Observando-se as representações das duas funções no sistema cartesiano, pode-se interpretá-las geometricamente, a partir do valor de x em que f(x) = g(x):

Assim:

Como A=(4,22) é o ponto de intersecção das duas retas, tem-se que:

- se o carro ficar estacionado durante 4 horas, ela paga o mesmo valor em qualquer dos estacionamentos;
- se x < 4, ou seja, o tempo de estacionamento for inferior a 4 horas, tem-se f(x) < g(x), portanto, o estacionamento Alfa é mais vantajoso;
- se x > 4, ou seja, se ficar mais que 4 horas no estacionamento, g(x) < f(x), portanto, o estacionamento Beta é mais vantajoso.

Fonte: a pesquisa.

Portanto, o desenvolvimento da SA 30 possibilitou a conversão entre os registros nos dois sentidos, como Duval (2016b, 2018) preconiza ser essencial para a compreensão do objeto matemático estudado. Além disso, o trabalho no ambiente de aprendizagem do tipo 4, envolvendo um cenário de investigação e não somente um exercício, possibilitou o envolvimento dos estudantes participantes, que Skovsmose (2015) considera como um dos pontos-chave da EMC.

A segunda atividade desse tópico, AP 25 (Figura 149), aborda o TCT ciência e tecnologia por envolver conceitos da física (velocidade, distância, tempo) e por apresentar uma situação sobre a utilização de um patinete elétrico, o qual pode ser considerado um recurso tecnológico para o deslocamento de pessoas. A situação apresentada na AP 25 é um ambiente de aprendizagem do tipo 3 por se tratar de um exercício explorado em uma semirrealidade (itens *a*, *b* e *c*), mas também é classificada como ambiente do tipo 5 quando a situação é transferida para a realidade da cidade em que os participantes residem (item *d*). Nessa atividade, foram trabalhados e explorados, tanto os tratamentos quanto a conversão, dos RRS: numérico, algébrico, figural e língua natural.

Figura 149 – Atividade proposta no tópico características da função

AP 25 – Marcelo mora em um município onde é possível alugar patinetes elétricos para se locomover. A velocidade máxima permitida desses aparelhos é de 20 km/h, mas é recomendado que pessoas sem experiência não ultrapassem 12 km/h. Fazendo alguns cálculos para estimar o tempo que levaria utilizando um patinete elétrico de uma estação de metrô até o local onde trabalha, Marcelo considerou que manteria uma velocidade constante de 3 metros por segundo e fez uma tabela para relacionar a distância percorrida, em metro, em função do tempo, em segundo.

Com base nessas informações, responda:

Distância *d* (em metro)	3	6	9	12	15	...
Tempo *t* (em segundo)	1	2	3	4	5	...

a) Qual é a lei da função que relaciona a distância *d*, em metro, a ser percorrida por Marcelo e o tempo *t*, em segundo?

b) Essa função é classificada como crescente ou decrescente? Justifique sua resposta.

c) Marcelo levou 10 minutos para realizar o deslocamento que pretendia nas condições que tinha planejado. Qual distância ele percorreu?

d) Considerando a situação do trânsito em Rondonópolis/MT, você considera que esse serviço de aluguel de patinete elétrico seria interessante para a população?

Fonte: adaptada de Bonjorno, Giovanni Junior e Souza (2020a).

A aula em que se desenvolveu essa atividade contou com 18 estudantes participantes da pesquisa, mas somente 14 deles apresentaram suas respostas. No primeiro item, a questão solicitou a lei da função que representa a situação, exigindo dessa forma, uma conversão do registro da língua natural e figural para o algébrico. Assim, no item *a,* oito estudantes responderam corretamente. No item *b*, que exigia responder e justificar se a função era crescente ou decrescente, dois estudantes não responderam, quatro erraram a resposta e oito responderam corretamente, apresentando justificativas diversas, como por exemplo: *crescente, porque os números estão sendo multiplicados por três em ordem crescente* – resposta do Estudante 2; *a função é crescente porque o x e o y estão crescendo ao mesmo tempo* – resposta do Estudante 10; *crescente porque conforme vai passando o tempo aumenta a distância* – Estudante 15.

Para a resolução do item *c* dessa atividade (AP 25), os estudantes tiveram que fazer os tratamentos no registro numérico, transformando a unidade de tempo fornecida (minuto) para a unidade de tempo do enunciado (segundo) e só então puderam encontrar a imagem solicitada da função. Sendo assim, os oito estudantes que acertaram o item *a* (lei da função) também acertaram este item, ou seja, conseguiram fazer os tratamentos necessários, bem como a conversão do registro algébrico para o numérico de forma correta. Os outros estudantes conseguiram fazer a transformação na unidade tempo, mas não apresentaram a imagem da função.

Em relação ao último item da AP 25, era necessária uma reflexão considerando a situação do trânsito na cidade, bem como as distâncias percorridas e a situação estrutural e de relevo das ruas. As respostas dos participantes foram variadas, sendo que quatro acharam que seria viável, seis que não seria viável a utilização dos patinetes elétricos e um estudante disse que sim e não. As respostas dos 11 estudantes que responderam a esse item estão apresentadas na Figura 150.

Figura 150 – Resolução dos estudantes que responderam o item *d* da AP 25

Estudante 2: Não, porque o trânsito é intenso e cheio de pessoas irresponsáveis.
Estudante 3: Sim, porque teria menos poluição.
Estudante 5: Acredito que sim e não, pois onde moro o lugar não é muito recomendado para andar de patinete elétrico, mas quem tem mais habilidade talvez consiga.
Estudante 8: Sim, pois haveria menos poluição e seria divertido para a maioria das pessoas.
Estudante 11: Sim, porque seria algo lucrativo.
Estudante 12: Não, pois não é algo que ia agradar muito.
Estudante 13: Não, pois tudo aqui é distante e o trânsito aqui é bem corrido.
Estudante 14: Na verdade não, as estradas e ruas não são adequadas para o uso de patinetes.
Estudante 15: Não no meu bairro por causa das ruas esburacadas, porém na cidade em outros locais, seria benéfico.
Estudante 17: Não, por haver muitos buracos e dependendo dos horários gastaria muito.
Estudante 18: Sim. Tem pessoas que não tem condições de ter algum automóvel, então creio que seria interessante ter um patinete elétrico para se locomover.

Fonte: produção dos participantes da pesquisa.

Ressalta-se que esse item da AP 25 oportunizou a reflexão para além do TCT ciência e tecnologia, pois as respostas consideraram questões também sobre os TCT educação financeira, educação para o consumo além de outros temas que não são objetos dessa pesquisa, mas que poderiam ser explorados também, como a educação para o trânsito. A utilização do ambiente de aprendizagem do tipo 5 proporcionou a reflexão necessária para que os estudantes compreendessem como a utilização do objeto função pode ser aplicada em situações reais, possibilitando assim o desenvolvimento da *matemacia* (Skovsmose, 2015).

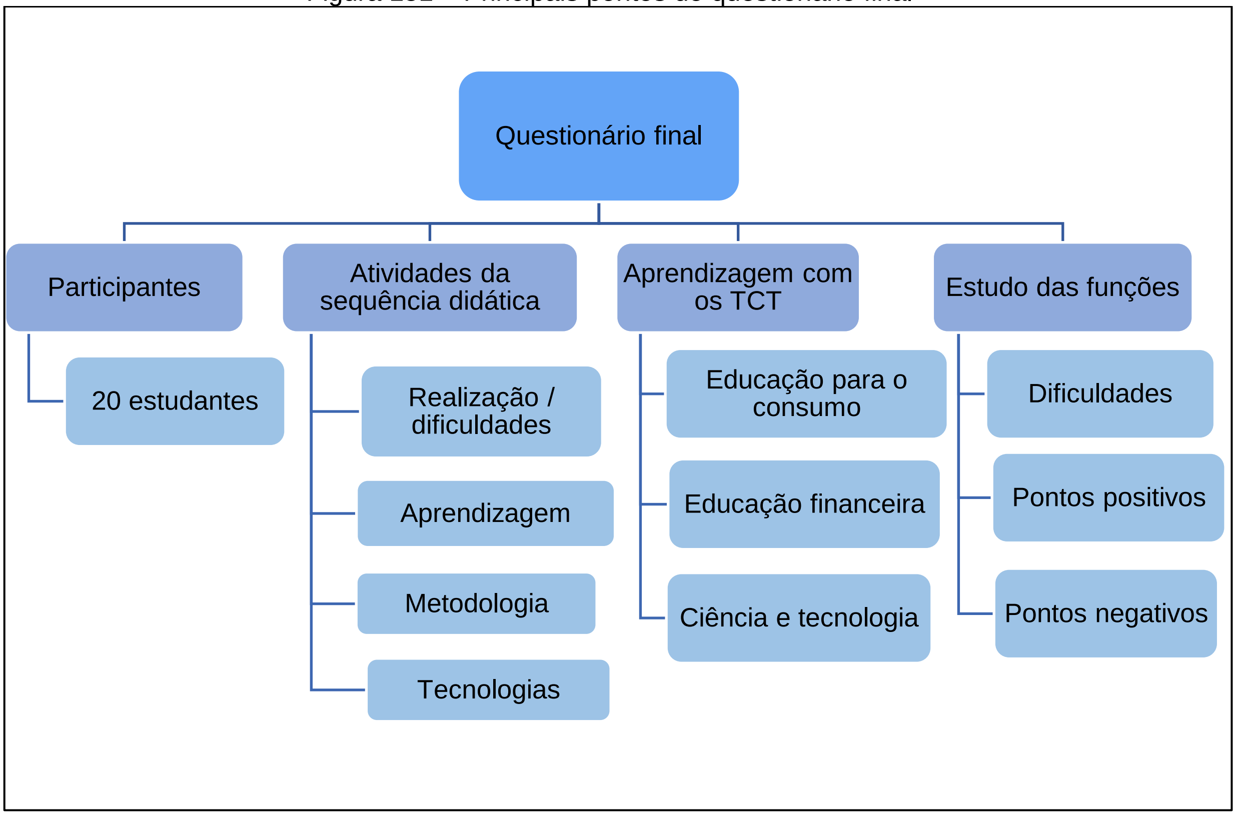
Observa-se que o desenvolvimento da AP 25, por meio do trabalho com os RRS, possibilitou a compreensão matemática do objeto de estudo (Duval, 2011b). Entretanto, cinco estudantes, dentre os que participaram dessa atividade, não conseguiram realizar todas as conversões necessárias. Sendo assim, esse aspecto ainda deve ser mais explorado, principalmente a conversão da língua natural para o registro algébrico, que foi a principal dificuldade percebida aqui.

O trabalho desenvolvido com os estudantes participantes, por meio da sequência didática, permitiu a exploração dos ambientes de aprendizagem e de outros aspectos da EMC (conhecimento reflexivo, conhecimento tecnológico, pontos-chave, considerações críticas, desenvolvimento da *matemacia*), conforme Skovsmose (2001, 2010 e 2015), bem como a utilização dos RRS (Duval 2009, 2011a, 2011b, 2012, 2016a, 2016b e 2018). A utilização dos TCT para contextualizar as atividades possibilitou o envolvimento dos estudantes (Brasil 2019b). O estudo de funções, nos tópicos abordados nas atividades, teve indícios de avanços significativos na compreensão dos estudantes. Isso pode ser observado nas respostas dos estudantes ao questionário final da pesquisa, apresentado na próxima seção.

7.3 ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO FINAL DA PESQUISA

O questionário final (Apêndice B), que contém 14 perguntas, foi aplicado no último encontro com os estudantes. A Figura 151 apresenta, de forma resumida, os principais pontos do questionário final.

Figura 151 – Principais pontos do questionário final



Fonte: a pesquisa.

Sobre a realização das atividades do projeto, somente dois (10%) estudantes responderam que resolveram *todas* as atividades, sete (35%) disseram que resolveram *quase todas* e 11 (55%) afirmaram que resolveram *algumas*, sendo que nenhum estudante deixou todas as atividades sem resolução (Tabela 22).

Tabela 22 – Respostas sobre a realização das atividades

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
Algumas	11	55
Quase todas	7	35
Todas	2	10
Nenhuma	0	0
TOTAL	20	100

Fonte: a pesquisa.

Quando perguntados sobre as dificuldades nas etapas, as respostas foram: quatro estudantes (20%) *não* tiveram dificuldades; três estudantes (15%) tiveram dificuldades em *quase todas*; oito (40%) disseram que em *algumas* – sem mencionar quais; dois citaram a dificuldade *nos cálculos*; dois apresentaram dificuldades *nas tabelas*; e somente um afirmou que a dificuldade foi *nos gráficos* (Tabela 23). Como as respostas eram abertas, foram agrupadas por similaridade.

Tabela 23 – Respostas sobre dificuldades nas atividades

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
Não	4	20
Sim, algumas	8	40
Sim, quase todas	3	15
Sim, nos cálculos	2	10
Sim, nas tabelas	2	10
Sim, nos gráficos	1	5
TOTAL	20	100

Fonte: a pesquisa.

Sobre a aprendizagem no conteúdo de funções (Tabela 24), todos os estudantes apresentaram alguma resposta positiva, sendo que oito deles foram bem vagos, dizendo apenas: *algumas coisas*, *várias* (ou *muitas*) *coisas* e os demais, 12 estudantes, deram uma justificativa mais pontual. Como as respostas eram abertas, foram agrupadas utilizando o critério de similaridade e o percentual apresentado é sobre o total de 21 respostas, porque alguns estudantes apresentaram mais que uma resposta.

Tabela 24 – O que aprenderam sobre funções durante as aulas da sequência didática

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
Algumas coisas	6	28,57
Como são definidas e resolvidas (aplicadas) em determinadas situações	6	28,57
Várias/muitas coisas	2	9,52
Que desenvolve o pensamento do estudante	2	9,52
Sobre sites, plataformas	2	9,52
Ajudou nas provas e no Enem	1	4,76
Sobre tabela e gráfico	1	4,76
Que é complicado, mas é legal	1	4,76
TOTAL	21	100

Fonte: a pesquisa.

A Tabela 25 apresenta as respostas dos estudantes sobre se a metodologia adotada facilitou o entendimento do conteúdo. Somente um estudante respondeu que *não facilitou porque tem dificuldades*, os demais (95%) disseram que *facilitou* ou *facilitou um pouco* o seu entendimento. Dos 16 estudantes que disseram que *sim, facilitou*, tem-se que: seis não justificaram suas respostas; três responderam que pelo *uso dos recursos digitais*; três disseram que é porque *a professora é boa* ou *ensinou de um jeito mais fácil*; dois falaram que *é uma forma mais simples e rápida com lógica*; um estudante disse que porque *já utiliza tecnologia no seu cotidiano;* e outro estudante que *a forma de aplicação foi diferente com a interação dos estudantes*. Dos três estudantes que afirmaram que *facilitou um pouco*, tem-se que: um disse que *tem muita dificuldade*; um falou que *o conteúdo é complicado;* e outro disse *não prestei atenção.* As respostas foram agrupadas por similaridade.

Tabela 25 – Respostas sobre a metodologia adotada no conteúdo funções

RESPOSTAS	JUSTIFICATIVA	QUANTIDADE	%
Não facilitou	Porque tenho muita dificuldade	1	5
Facilitou	Facilitou o entendimento	6	30
	Pelo uso da tecnologia/*site*/GeoGebra	3	15
	A professora é boa / ensinou de um jeito mais fácil	3	15
	É uma forma mais simples e rápida com lógica	2	10
	Porque a forma de aplicação foi diferente com a interação dos estudantes	1	5
	Porque já uso tecnologia no meu dia a dia	1	5
Facilitou um pouco	Facilitou um pouco, porque tenho muita dificuldade	1	5
	Facilitou um pouco, mas o conteúdo é complicado	1	5
	Facilitou um pouco, mas não prestei muita atenção	1	5
TOTAL		20	100

Fonte: a pesquisa.

Sobre a relevância do trabalho com o TCT educação para o consumo: *a* resposta de que *ajudou a fazer contas do dia a dia como, o consumo de gasolina, eletricidade, de água etc., calcular gastos, lidar melhor com a vida financeira* foi dita por seis estudantes; *o consumo consciente* foi a resposta de seis estudantes; três estudantes disseram que *tudo foi relevante*; dois não justificaram; *um disse que ajudou a compreender mais sobre as coisas que exigem consumo, como os gastos com veículos*; um falou que *trouxe conhecimentos e ajudou com o Enem*; um disse que não se lembra; e outro que foi um *pouco relevante* (Tabela 26). Observa-se que as respostas foram agrupadas por similaridade, e o percentual apresentado é sobre o total de 21 respostas, pois alguns estudantes apresentaram mais de uma resposta.

Tabela 26 – Respostas sobre o trabalho com o TCT educação para o consumo

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
Ajudou a fazer contas do dia a dia como o consumo de gasolina, eletricidade, de água etc./calcular gastos / lidar melhor com a vida financeira,	6	28,57
Consumir menos/ consumir com consciência / adaptar com o que já temos	6	28,57
Tudo foi relevante	3	14,29
Foi relevante	2	9,52
Ajudou a compreender mais sobre as coisas que exigem consumo, como os gastos dos veículos	1	4,76
Me trouxe conhecimento e me ajudou no Enem	1	4,76
Não lembro	1	4,76
Um pouco relevante	1	4,76
TOTAL	21	

Fonte: a pesquisa.

Sobre a relevância do trabalho com o TCT educação financeira (Tabela 27): oito estudantes deram respostas relacionadas ao *consumo consciente*; três disseram somente que *foi relevante*; dois responderam *controlar os gastos, controlar o meu dinheiro*; dois falaram que *tudo foi relevante*; um respondeu *não sei*; os outros quatro estudantes disseram cada um uma coisa diferente: *fazer contas das despesas semanais da casa*; *um grande aprendizado, aprendi muito sobre educação financeira*; *sim, ajudou a calcular o valor de qualquer coisa, para saber se compensa ou não*; e *que eu levo os cálculos para ajudar em alguns momentos da minha vida*. Nessa pergunta, as respostas também foram agrupadas por similaridade.

Tabela 27 – Respostas sobre o trabalho com o TCT educação financeira

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
Não gastar *à toa* / economizar / não consumir mais do que se ganha / consumir com consciência / planejar gastos	8	40
Foi relevante	3	15
Ter controle do meu dinheiro e noção dos meus gastos	2	10
Tudo foi relevante	2	10
Que eu levo os cálculos para ajudar em alguns momentos da minha vida	1	5
Fazer contas das despesas semanais da casa	1	5
Um grande aprendizado, aprendi muito sobre educação financeira	1	5
Sim, ajudou a calcular o valor de qualquer coisa, para saber se compensa ou não	1	5
Não sei	1	5
TOTAL	20	100

Fonte: a pesquisa.

Sobre a relevância do trabalho com o TCT ciência e tecnologia (Tabela 28): cinco estudantes disseram *não lembro* ou que *não sei dizer*; três responderam *aprendi a mexer com muitos aplicativos interessantes que me ajudou no dia a dia*/*novas tecnologias*; dois responderam que aprenderam *muitas coisas novas*; dois falaram que *tudo foi relevante*; um disse que *foi relevante*; um estudante disse que *foi relevante na educação financeira*; um estudante relatou que *foi o mais complicado, porém deu para dar uma análise*; e outro estudante respondeu que *os dois estão sempre juntos para ajudar*. Observa-se que as respostas foram agrupadas por similaridade.

Tabela 28 – Respostas sobre o trabalho com o TCT ciência e tecnologia

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
Não lembro / não sei dizer	5	25
Aprendi a mexer com muitos aplicativos interessantes que me ajudou no dia a dia / novas tecnologias	3	15
Muitas coisas / coisas novas	2	10
Aprendi a usar o GeoGebra	2	10
Tudo porque o conhecimento trazido veio de muito auxílio, e porque conhecimento nunca é demais. / Em uma era da tecnologia é importante entender sobre esse tema	2	10
Tudo foi relevante / Tudo de bom nos ensinamentos	2	10
Sim, foi relevante	1	5
Foi relevante na educação financeira	1	5
Foi o mais complicado, porém deu para dar uma análise	1	5
Que os 2 estão sempre juntos para ajudar	1	5
TOTAL	20	100

Fonte: a pesquisa.

Para a pergunta do questionário sobre as dificuldades com as tecnologias utilizadas, as respostas foram: 11 estudantes disseram que tiveram *um pouco* de dificuldade e três disseram que, *sim,* tiveram dificuldades, como apresentado na Tabela 29.

Tabela 29 – Respostas sobre as dificuldades no uso das tecnologias

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
Um pouco	11	55
Não	6	30
Sim	3	15
TOTAL	20	100

Fonte: a pesquisa.

As dificuldades apresentadas nas respostas dos estudantes foram: *a construção dos gráficos no* GeoGebra (cinco estudantes), a *construção das tabelas* (dois estudantes) e outras dificuldades (cinco estudantes). Importante destacar que somente seis estudantes disseram *não* ter tido nenhuma dificuldade (Tabela 29), mas, ao responderem quais eram as dificuldades, oito estudantes marcaram a opção *nenhuma* dificuldade. A Tabela 30 apresenta essas respostas agrupadas por similaridade.

Tabela 30 – Dificuldades no uso das tecnologias

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
Nenhuma	8	40
Fazer gráficos/ GeoGebra	5	25
Em algumas / tenho um pouco de dificuldade	2	10
Dificuldades na construção de tabelas	2	10
Em todas as atividades	1	5
Com os cálculos	1	5
Por ser algo novo que nunca tinha visto	1	5
TOTAL	20	100

Fonte: a pesquisa.

Quando perguntados sobre as contribuições do uso das tecnologias: 12 estudantes apresentaram respostas sobre *facilidade ou agilidade na construção dos gráficos, na resolução das atividades e utilização dos aplicativos*; quatro estudantes disseram que *o uso de plataformas melhora (ou facilita) a compreensão (o desenvolvimento ou aprendizado)*; três estudantes destacaram a e*conomia de papel ou caderno*; dois relataram que *aprenderam sobre as regras de função ou o uso das funções por meio de dispositivo eletrônico*; um estudante disse que foram *os sites envolvidos;* e outro respondeu *algumas*, mas não destacou nenhuma. A Tabela 31 mostra essas respostas, agrupadas por similaridade. O percentual apresentado é sobre o total de 23 respostas, pois os estudantes puderam anotar mais de um item.

Tabela 31 – Respostas sobre as contribuições do uso das tecnologias nas atividades

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
A facilidade para construir gráficos / agilidade para resolver as atividades / rapidez para resolver os cálculos / Facilidade na utilização dos aplicativos	12	52,17
O uso de plataformas melhora a compreensão / facilita o desenvolvimento / o aprendizado	4	17,39
Economizar papel / não escrever no caderno	3	13,04
Aprendi as regras de função / o uso das funções por meio de dispositivo eletrônico	2	8,70
Os sites envolvidos	1	4,35
Algumas	1	4,35
TOTAL	23	100

Fonte: a pesquisa.

Em relação ao estudo de funções, foi perguntado, aos estudantes, se tiveram dificuldades e em quais itens da lista apresentada. Assim, 13 disseram que tiveram *um pouco* de dificuldade, seis que *sim* e somente um disse que *não* teve dificuldades (Tabela 32).

Tabela 32 – Respostas sobre as dificuldades no estudo de funções

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
Um pouco	13	65
Não	6	30
Sim	1	5
TOTAL	20	100

Fonte: a pesquisa.

Os itens assinalados sobre as dificuldades no estudo de funções foram: *representação algébrica da função a partir da situação-problema*, sendo que 12 estudantes (60%) apresentaram alguma dificuldade nesse tópico; o item *representação gráfica da função a partir da situação-problema* foi escolhido por 10 estudantes (50%); oito estudantes (40%) marcaram a opção *representação da função em um diagrama de flechas*; sete estudantes (35%) disseram ter alguma dificuldade na r*epresentação da função em uma tabela*; o *conceito de função* foi selecionado por seis estudantes (30%); seis também foi o número de estudantes que selecionaram o item *escrever uma situação-problema a partir de um gráfico*; os itens *Ideia de função* e *outras dificuldades* foram selecionados por três estudantes (15%) cada um. A Tabela 33 apresenta essas respostas, agrupadas por similaridade, e optou-se por apresentar o percentual com base no total de estudantes participantes.

Tabela 33 – Dificuldades no estudo de funções

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
Representação algébrica da função a partir da situação-problema	12	60
Representação gráfica da função a partir da situação-problema	10	50
Representação da função em um diagrama de flechas	8	40
Representação da função em uma tabela	7	35
Conceito de função	6	30
Escrever uma situação-problema a partir de um gráfico.	6	30
Ideia de função	3	15
Outras dificuldades	3	15

Fonte: a pesquisa.

Ainda sobre o tópico de funções, foi solicitado um exemplo de situações do cotidiano em que se utilizam funções: sete estudantes deram respostas relacionadas a situações sobre o *consumo ou preço do combustível de veículos*; sete destacaram assuntos relacionados a *finanças, empresas, trabalho, educação financeira e cálculo de salários*; respostas envolvendo *consumo e gastos com eletricidade* foram escolhidas por três estudantes; dois disseram que *só na Matemática básica* e *cálculos no celular*; dois destacaram *situações com gasto de tempo e hora ou distância de um lugar para outro*; e somente um estudante disse *não lembro*. A Tabela 34 apresenta essas respostas agrupadas por similaridade e destaca-se que o percentual apresentado corresponde ao total de respostas, pois alguns estudantes apresentaram mais de uma resposta.

Tabela 34 – Exemplos apresentados com o uso do conteúdo de funções

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
O do combustível para saber se o carro está consumindo muito ou não / abastecimento no posto / consumo do veículo / preço do combustível	7	31,82
Trabalho com finanças / empresas / trabalho / educação financeira /cálculo de salários	7	31,82
Gasto com eletricidade / consumo em geral	3	13,64
Matemática básica / Cálculo no celular	2	9,09
Em gasto de tempo e hora / distância de um lugar para outro	2	9,09
Não lembro	1	4,55
TOTAL	22	100

Fonte: a pesquisa.

Sobre a avaliação do projeto, os estudantes responderam a duas questões, uma para destacar três pontos positivos do projeto e a outra, três pontos negativos. As respostas foram agrupadas por similaridade em 10 itens (Tabela 35), sendo que a maioria dos estudantes (90%) destacou a aprendizagem relacionado aos *conhecimentos adquiridos para serem utilizados em situações do cotidiano ou no Enem* – Exame nacional do Ensino Médio, (itens 1, 3 e 6); os pontos relacionados ao *desenvolvimento do raciocínio, lógica e cálculos em gerais* (item 4) foram citados por cinco estudantes; os conhecimentos relacionados *às tecnologias digitais* (item 2) foram citados por seis estudantes; cinco estudantes destacaram pontos relacionados *à didática ou metodologia aplicada pela professora pesquisadora*; quatro destacaram a *colaboração ou o trabalho em grupo* (item 7); três estudantes consideraram como pontos positivos as *atividades extracurriculares* (item 8); um estudante respondeu *não lembro,* e outro não respondeu (item 9); e um estudante destacou como ponto positivo *os temas estudados*. Optou-se por manter o percentual sobre o total de estudantes.

Tabela 35 – Pontos positivos sobre as aulas da sequência didática

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
1- Um aprendizado a mais / mais conhecimento / ajudou no Enem / novas habilidades	9	45
2- Facilita o aprendizado com aplicativos / desenvolvimento com tecnologias / uso de novos sites / utilização do GeoGebra	6	30
3 - Conhecimento amplos de coisas do dia a dia / Aprendizagem útil para o dia a dia / uso das funções	5	25
4 - Melhorou o raciocínio / treino do cérebro / uso da lógica / desenvolvimento matemático / aprender a economizar, calcular ganhos e perdas, e até investimentos.	5	25
5 - Modo de ensino da professora / compreensão de ajudar quando solicitado / repetia mais que tudo / novas didáticas / forma mais legal de aprender	5	25
6 - Conhecimento sobre função	4	20
7 - Colaboração / trabalho em grupo	4	20
8 - Atividades extracurriculares	3	15
9 - Não lembro / não quis responder	2	10
10 - Os temas estudados	1	5

Fonte: a pesquisa.

Já para a pergunta sobre os pontos negativos o resultado apresentado foi: 15 estudantes (75%) disseram não ter; três responderam que não lembrava ou não sabiam; somente dois estudantes disseram ter pontos negativos: um destacou que *foi um pouco difícil*, *muitas contas* e *gráficos meio complicados;* o outro destacou somente *as tabelas*. A Tabela 36 apresenta essas respostas agrupadas por similaridade.

Tabela 36 – Pontos negativos sobre as aulas da sequência didática

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
Nenhum / não teve / achei todos importantes / achei muito fácil	15	75
Não lembro / não sei	3	15
Foi um pouco difícil, muitas contas e gráficos meio complicados	1	5
As tabelas	1	5
TOTAL	20	100

Fonte: a pesquisa.

Para finalização do questionário, a pesquisadora além de agradecer a participação de todos os estudantes, perguntou sobre o interesse deles em assistir à defesa (via Google Meet) e 16 (80%) responderam que *sim* e os demais que *talvez* (Tabela 37).

Tabela 37 – Interesse dos estudantes para assistir a defesa da Tese

RESPOSTAS	QUANTIDADE	%
Sim	16	80
Talvez	4	20
Não	0	0
TOTAL	20	100

Fonte: a pesquisa.

Essa última pergunta foi relevante, pois considera-se importante que os estudantes participem do momento de apresentação dos resultados em sessão pública para que percebam o quanto a participação deles foi determinante para a conclusão da pesquisa.

Esse questionário final revelou resultados expressivos sobre a participação dos estudantes, o que viabilizou a complementação das análises dos outros instrumentos de coleta de dados. Considerando a metodologia utilizada no desenvolvimento da sequência didática para o ensino de funções, 19 estudantes (95%) afirmaram que facilitou a aprendizagem deles. Com destaque para o uso dos TCT que foi considerado pelos estudantes como muito relevante, como previsto por Brasil (2019a), o que facultou que todos eles desenvolvessem total ou parcialmente as atividades. Vale destacar que 15 estudantes (75%) disseram que o TCT ciência e tecnologia foi relevante; ainda 19 (95%) acharam relevantes os TCT educação para o consumo e educação financeira.

Considerando o trabalho com os RRS, percebe-se pelas respostas dos estudantes que a grande maioria destacou dificuldades na conversão entre os registros, o que dificulta a compreensão do objeto como um todo, como destaca Duval

(2009). Apesar disso, as respostas sobre o aprendizado do conteúdo e sobre os exemplos com situações do cotidiano que envolvem funções mostraram que houve progresso na compreensão deles.

Destaca-se que tanto as respostas sobre o trabalho com os TCT quanto o uso das tecnologias evidenciaram que houve o desenvolvimento do conhecimento reflexivo, possibilitando a *matemacia* (Skovsmose, 2001, 2010 e 2015).

Por conseguinte, de forma geral, as respostas dos estudantes a esse questionário mostraram a relevância do trabalho desenvolvido durante a aplicação da sequência didática. Foi possível perceber que os estudantes se envolveram na maior parte das atividades e tiveram avanços na aprendizagem do conteúdo de funções.

7.4 REFLETINDO SOBRE OS RESULTADOS

O desenvolvimento de cada uma das etapas dessa pesquisa trouxe resultados muito significativos para a construção dessa tese. Esse desenvolvimento começou com a construção do projeto a partir da escolha do tema, da questão de pesquisa, dos objetivos que se pretendeu alcançar. Para tanto, precisou-se conhecer, em detalhes, os Temas Contemporâneos Transversais e como eles devem ser trabalhados no Ensino Médio e, assim, iniciou-se também a construção do referencial teórico para a tese.

A revisão de literatura possibilitou o primeiro contato com pesquisas já realizadas envolvendo o tema e, nessa etapa, veio o conhecimento de alguns referenciais teóricos que poderiam nortear a pesquisa. Essa etapa possibilitou também a escrita de dois trabalhos que foram apresentados e publicados em dois grandes eventos nacionais, sendo o XIV Encontro Nacional de Educação Matemática (XIV ENEM) que ocorreu de forma *on-line* em 2022, e o 6º Simpósio Nacional da Formação de Professores de Matemática que aconteceu de forma presencial na cidade do Rio de Janeiro em 2023. Estar em contato com outros pesquisadores proporcionou experiências importantes sobre o universo da pesquisa e como elas impactam a educação.

Assim, para dar seguimento à construção do referencial teórico, dentre os aportes encontrados nos trabalhos da revisão de literatura, optou-se por conhecer a Educação Matemática Crítica (EMC). Nessa etapa de estudo por esse referencial, foi possível aprender como a EMC é importante para a consolidação de uma Educação Matemática, no sentido de promover aos estudantes um conhecimento matemático que oportunize seu crescimento pessoal e/ou profissional para atuar em sociedade, buscando melhores condições de vida social, econômica e política.

Outro referencial que despontou durante a revisão de literatura foi a Teoria dos Registros de Representação Semiótica. Por conseguinte, em um segundo momento, buscou-se estudar os RRS para compreender como eles poderiam favorecer o ensino de funções aos estudantes do Ensino Médio. Esse referencial foi de grande valia na seleção das atividades que foram desenvolvidas com os estudantes participantes. Para completar o referencial teórico, buscou-se escrever sobre o contexto histórico do Ensino Médio no Brasil, bem como o ensino de funções ao longo dos anos, procurou-se também relacionar esse estudo com os documentos orientadores anteriores e com a BNCC que está vigente desde 2018 no Ensino Médio.

De posse dos conhecimentos adquiridos dos referenciais, passou-se à etapa seguinte: a revisão bibliográfica nas coleções dos livros didáticos do PNLD na etapa do Ensino Médio. Para tanto, inicialmente buscou-se identificar quais coleções foram recebidas pelas escolas de Rondonópolis, chegando-se a três coleções com maior número de escolas participantes do PNLD. Examinou-se, nessas coleções, as atividades que utilizam os TCT, ou exploram os RRS, ou ainda utilizam ou visam algum dos pressupostos da EMC. Essa etapa foi muito produtiva, pois além de dar o suporte que foi necessário para a construção da sequência didática, possibilitou a escrita de dois artigos, sendo um apresentado e publicado nos anais da XVI Conferência Interamericana de Educação Matemática (CIAEM) – realizada em Lima no Peru em 2023 – e o outro foi publicado em uma revista internacional, Revista Paradigma, com *Qualis* A1 na área de Ensino.

Para dar início ao desenvolvimento do projeto, com a autorização da gestão da escola participante (Apêndice C) e a aprovação do projeto no Comitê de ética em pesquisa, iniciou-se a coleta dos dados a partir da aplicação do questionário inicial com os participantes da pesquisa. Essa etapa possibilitou a primeira aproximação da professora pesquisadora com os estudantes, quando foi possível fazer a divulgação do projeto, expondo os objetivos e fazendo o convite para que participassem. Os estudantes foram bem receptivos e se mostraram interessados na proposta.

Essas primeiras etapas proporcionaram os conhecimentos e as experiências necessárias para a construção da sequência didática que foi aplicada aos estudantes do Ensino Médio da escola participante da pesquisa. Essa construção demandou bastante tempo, envolvendo a busca por atividades que contemplassem o referencial com foco nos objetivos construídos para essa etapa e que fossem contextualizadas pelos TCT educação financeira, educação para o consumo e ciência e tecnologia, pois esses foram os temas apontados pelos estudantes no questionário inicial. Muitas atividades precisaram ser adaptadas e, algumas quase substituídas por completo, para atender à proposta. Em um primeiro momento, pensou-se em desenvolver todo o conteúdo de funções, abrangendo desde os conceitos iniciais de função até o estudo de todas as funções que são trabalhadas nessa etapa escolar (afim, quadrática, exponencial, logarítmica e trigonométricas). Mas, devido ao tempo de aplicação que foi concedido pela unidade escolar e pela professora de Matemática titular da turma, foi necessário restringir-se à parte inicial do conteúdo de funções, abordando alguns aspectos das funções afim e quadrática.

Para o desenvolvimento da sequência didática, além de um roteiro com a sequência – que consta na presente tese – foi preciso desenvolver um *site* para que todo o conteúdo ficasse mais acessível aos estudantes participantes. Assim, esse *site* foi elaborado, por meio do Google Sites, com acesso restrito aos estudantes que usaram o e-mail institucional, eles já usavam esse e-mail para acessar outras plataformas durante as aulas, de forma geral. Por conseguinte, durante as aulas, os estudantes podiam acessar o *site* para acompanhar, resolver as atividades, bem como acessar a parte teórica do conteúdo. O desenvolvimento das atividades foi realizado, em alguns momentos, em grupos de forma que os estudantes compartilhavam informações e auxiliavam uns aos outros. Entretanto, para as análises, as atividades foram consideradas individualmente.

Todo o processo da pesquisa com os estudantes, desde a aplicação do questionário inicial, culminando com a aplicação do questionário final, teve a duração de 23 aulas de 55 minutos cada e ocorreu durante o ano letivo de 2023. Essa etapa foi muito gratificante, pois o contato com os estudantes proporcionou reflexões sobre o Ensino de Matemática, levando à conclusão da importância do referencial teórico escolhido para obtenção dos resultados almejando os objetivos propostos para o projeto.

Durante a sequência didática, foram desenvolvidas um total de 60 atividades, entre situações de aprendizagem e atividades propostas, sendo selecionadas 10 atividades para compor a seção das análises. As atividades escolhidas têm elementos representativos de todos os tópicos dos conteúdos que foram trabalhados, bem como dos TCT, dos RRS e da EMC. Essa etapa possibilitou a compreensão do quanto foi desenvolvido em termos de conhecimento matemático e do quanto desse conhecimento foi relevante para os estudantes participantes, considerando principalmente que todas as atividades foram contextualizadas utilizando situações baseadas na realidade ou semirrealidade com o propósito de mostrar a aplicação dos conhecimentos adquiridos em situações do cotidiano deles.

Essa etapa das análises também possibilitou a escrita de quatro artigos, sendo dois já aprovados, um aceito para publicação e um ainda em submissão. O artigo, Os Temas Contemporâneos Transversais contextualizando o conceito e a representação de função, foi apresentado na modalidade resumo expandido no 6º Fórum Nacional sobre Currículos de Matemática realizado em outubro de 2024 em Montes Claros/MG, e foi aceito para publicação na revista Educação Matemática Debate (v.8, n.14 de 2024). O segundo artigo, A Educação Matemática Crítica e a ideia de função no Ensino Médio, foi apresentado e publicado nos anais do IX Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (IX SIPEM) que foi realizado em novembro de 2024 em Natal/RN. O terceiro artigo, O Tema Contemporâneo Transversal educação para o consumo no ensino de função no Ensino Médio, foi submetido para ser considerado para publicação na Revista Paranaense de Educação Matemática (RPEM).

Diante dos resultados apresentados pelos estudantes participantes, percebe-se que houve avanços na compreensão dos conceitos trabalhados: ideia de função; conceito e representação de função, gráfico de funções; e algumas características de funções (sobrejetividade, injetividade, bijetividade, crescimento e decrescimento, estudo do sinal e inequações). Entretanto, foi possível observar que os estudantes ainda apresentaram dificuldades na conversão entre os registros, principalmente do registro gráfico para os demais. Outra dificuldade apresentada foi a conversão para a língua natural, os estudantes, em sua maioria (18 estudantes) geralmente não apresentavam suas respostas na língua natural. O que indica ser um resquício do trabalho predominantemente utilizando somente o registro numérico e ou algébrico na resolução das atividades.

Sobre o trabalho com os TCT, foi possível observar que a contextualização das atividades despertou o interesse dos estudantes, pois os assuntos sempre estavam relacionados a algo que conheciam ou queriam conhecer. O TCT educação para o consumo despertou reflexões acerca de temas como sustentabilidade e a importância de se considerar uma menor utilização de recursos naturais em situações do cotidiano dos estudantes. O TCT educação financeira proporcionou a reflexão sobre como gerir recursos financeiros para obtenção de uma renda que seja suficiente para manutenção de despesas necessárias ao bem-estar. O TCT ciência e tecnologia permeou atividades relacionadas a grandezas da física, da química e questões relacionadas ao mundo tecnológico da era atual que são de grande interesse dos estudantes. No entanto, principalmente na etapa da escolha pelas atividades, percebeu-se que é possível estender o trabalho para outros TCT tanto pela importância deles, como também para atingir o conteúdo de funções em sua totalidade.

Em relação ao ensino de funções, os estudantes, que estavam no 3º ano do Ensino Médio, ainda não tinham consolidado todos os conceitos relacionados a esse objeto matemático, pois durante as atividades foi possível observar que 16 estudantes apresentaram maiores dificuldades durante as resoluções. Ao término da aplicação da sequência didática, observou-se um grande avanço por parte desses 16 estudantes, que apresentaram sinais de compreensão dos conceitos, principalmente em relação ao reconhecimento de uma função e as representações no registro algébrico. Isso leva a indícios de que, se houvesse um trabalho intensificado desde o primeiro ano do Ensino Médio, considerando o que foi proposto em termos de contextualização com os TCT e utilização dos RRS, os resultados no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de função poderiam ser ainda melhores.

8 CONCLUSÃO

O presente trabalho foi desenvolvido durante todo o período do curso de doutorado. Tudo o que foi estudado e desenvolvido desde o primeiro dia de aula foi relevante para a pesquisa, possibilitando caminhos para a construção dos dados e, posteriormente, para as análises e resultados encontrados na busca para atingir o objetivo de investigar a utilização de uma sequência didática sobre funções, elaborada a partir dos Temas Contemporâneos Transversais e das diferentes representações matemáticas para potencializar o ensino e a aprendizagem de Matemática no Ensino Médio, bem como favorecer a formação crítica dos estudantes.

O primeiro objetivo específico proposto para a tese foi realizar um estudo sobre o ensino de funções, os TCT, a EMC e os RRS para verificar as contribuições para o processo de ensino e aprendizagem durante o desenvolvimento de uma sequência didática. Esse objetivo propiciou a elaboração do referencial teórico que embasou toda a tese.

A construção do referencial teórico com o estudo de funções possibilitou a compreensão da importância desse conteúdo ao longo da história do Ensino Médio no Brasil, bem como o próprio Ensino de Matemática brasileiro. A partir disso, houve o entendimento de que o objeto matemático função deve ser ensinado de forma a contribuir para o alcance tanto das competências gerais quanto das competências específicas da área de Matemática na BNCC. Como o estudante do Ensino Médio tem muitas expectativas além do universo da escola, que envolve sua vida familiar, sua vida social, sua iniciação no mercado de trabalho e os fatores particulares à fase da adolescência, os TCT foram utilizados para se integrar o conteúdo matemático a esse universo.

Dessa forma, os TCT – educação para o consumo, educação financeira e ciência e tecnologia – se tornaram importantes aliados durante o processo de ensino e aprendizagem, despertando o interesse dos estudantes pelos temas abordados em cada atividade que foi trabalhada na sequência didática. Esses TCT promoveram uma aprendizagem contextualizada aos estudantes do Ensino Médio, pois possibilitaram a abordagem de assuntos que não constam do rol de conteúdos das áreas de conhecimento. Ainda, permitiram o trabalho com outras áreas como a de Ciências da Natureza e, na possibilidade de ampliar o trabalho para outros TCT, pode-se trabalhar com as demais áreas de conhecimento também.

Entende-se que a abordagem dos conteúdos de Matemática precisa ultrapassar o ensino pautado somente em fórmulas e expressões, devendo ir ao encontro da realidade do estudante de forma que ele possa utilizar seu conhecimento além da sala de aula. Para isso, foram escolhidos os pressupostos da Educação Matemática Crítica para serem utilizados como critérios nas análises, sendo eles: os ambientes de aprendizagem, o conhecimento reflexivo e o desenvolvimento da *matemacia* visando a formação da consciência crítica dos estudantes. O desenvolvimento da *matemacia* oportunizou o aprimoramento de habilidades que poderão auxiliar os estudantes a atuarem tanto na vida acadêmica quanto em outras situações da vida contemporânea. Entendendo que a utilização dos TCT proporcionou reflexões sobre a relevância do conteúdo matemático na vida dos estudantes, justificou-se a escolha pelo trabalho com o conhecimento reflexivo. E, para a exploração do conhecimento reflexivo, visando também o fortalecimento da *matemacia*, foi pertinente a escolha pelo trabalho com os ambientes de aprendizagem, onde foram utilizadas situações contextualizadas com referências tanto à semirrealidade como à realidade.

Considerando o conteúdo de funções como objeto matemático, buscou-se utilizar os Registros de Representação Semiótica como recurso para o seu ensino. Para tanto, as atividades foram desenvolvidas em mais de um dos RRS – língua natural, registros: algébrico, numérico, figural e gráfico – objetivando a compreensão dos estudantes na realização tanto dos tratamentos dentro de um mesmo registro como na conversão entre dois registros. Procurou-se trabalhar sempre com os dois sentidos de conversão, buscando sanar as dúvidas dos estudantes.

O segundo objetivo específico possibilitou analisar como os livros didáticos do Ensino Médio, PNLD de 2021, apresentam o conteúdo de funções, buscando por atividades que exploram as diferentes representações e como incorporam os TCT, a fim de identificar se contribuem para uma EMC. Esse objetivo possibilitou a seleção e a adaptação das atividades que compuseram a sequência didática.

O terceiro objetivo específico envolveu implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) um experimento com estudantes do Ensino Médio explorando o conteúdo de funções por meio dos RRS utilizando os TCT como contextualização, visando uma EMC. Esse objetivo norteou a elaboração de uma sequência didática com esse propósito. Para tanto, foram utilizadas situações contextualizadas com referências tanto à semirrealidade como à realidade para o desenvolvimento dos tópicos selecionados sobre funções: ideia de função; conceito e representação de funções; gráfico de funções; e algumas características de função – injetividade, sobrejetividade e bijetividade de uma função, função inversa, crescimento ou decrescimento de funções, estudo do sinal, inequação de 1º e 2º grau. Além disso, o conteúdo de funções foi relacionado aos temas de interesse dos estudantes, o que despertou a atenção deles para as atividades e os incentivou na busca das resoluções. Assim, a sequência didática foi aplicada e avaliada a partir dos instrumentos de coleta de dados.

O quarto e último objetivo específico buscou analisar e identificar, por meio dos instrumentos de coleta de dados, quais as facilidades e limitações de uma sequência didática envolvendo os TCT, as tecnologias e as diferentes representações no ensino de funções no Ensino Médio. Esse objetivo guiou todo o trabalho desenvolvido. Assim, por meio das análises realizadas, acredita-se que a sequência didática desenvolvida na pesquisa, explorando o conteúdo de função em mais de um ambiente de aprendizagem, juntamente com a utilização do conhecimento reflexivo, proporcionou o aprimoramento da *matemacia*. Aliado a isso, o trabalho com os TCT contextualizando todas as atividades que também se valeram da exploração dos RRS evidenciou um avanço no processo de ensino de função, pois a participação oral e as respostas registradas dos estudantes relatam que houve uma melhor compreensão dos conceitos estudados.

Todas as etapas do desenvolvimento dessa pesquisa proporcionaram conhecimentos também para a professora pesquisadora que, a partir desse trabalho, alcançou ganhos significativos em relação à sua prática docente. Percebeu-se que um trabalho, quando subsidiado por referenciais teóricos que visam a melhoria do Ensino de Matemática, viabiliza resultados importantes. A Implementação de uma sequência didática, com a utilização de recursos tão variados, possibilitou a diversificação das abordagens didáticas e a reflexão do quanto isso pode impactar também na compreensão dos estudantes.

As fragilidades verificadas no desenvolvimento do trabalho foram relacionadas ao tempo de execução das atividades, bem como ao fato de muitos estudantes deixarem de resolver as atividades por essas não estarem vinculadas ao processo de avaliação da disciplina de Matemática para a progressão deles no ano letivo. Acredita-se que os recursos metodológicos utilizados, bem como os referenciais que embasaram a proposta foram importantes e podem ser explorados em pesquisas futuras visando alcançar resultados (semelhantes ou melhores) em outros grupos de estudantes. Pensando ainda na possibilidade de ampliação, pode ser realizado um trabalho com outros TCT e/ou abranger mais tópicos do conteúdo de funções. Um trabalho interdisciplinar também pode vir a ser desenvolvido em pesquisas futuras, pois os TCT também podem ser explorados nesse sentido.

Ressalta-se que todo o trabalho desenvolvido será apresentado à comunidade escolar em momento propício a ser definido junto com a gestão da escola. Além disso, a sequência didática será aplicada em novas turmas a partir do retorno da professora pesquisadora para as suas atividades de docência.

Retomando o problema de investigação que deu início a essa pesquisa: quais são as contribuições para o ensino e aprendizagem de Matemática no Ensino Médio ao desenvolver sequências didáticas sobre funções, explorando diferentes representações e utilizando os Temas Contemporâneos Transversais propostos pela Base Nacional Comum Curricular? Conclui-se que a sequência didática desenvolvida apresentou resultados positivos em relação aos objetivos propostos, pois foi possível verificar que houve avanços significativos referentes aos tópicos trabalhados de função, principalmente a partir do uso dos RRS. Ademais, o trabalho com os TCT e com os pressupostos da EMC, indica que foi desenvolvida a competência democrática proporcionando conhecimentos e habilidades para que os estudantes participantes possam vir a agir como cidadãos críticos e responsáveis na atuação deles nos diversos setores da sociedade. Além disso, o estudo viabilizou a divulgação científica em diversos eventos da área e periódicos, permitindo o compartilhamento dos resultados e ampliando o alcance da pesquisa para além da universidade de origem, alcançando outras instituições de Ensino Superior e da Educação Básica.

REFERÊNCIAS

ANDRADE, T. M. [editora responsável]. **Matemática interligada**: funções afim, quadrática, exponencial e logarítmica. Manual do professor. [obra coletiva; editora responsável Thais Marcelle de Andrade]. 1a ed. São Paulo: Scipione, 2020.

ANTON, H.; BIVENS, I. C.; DAVIS, S. L. **Cálculo**. [recurso eletrônico]. v.1. 10. ed. Porto Alegre: Bookman, 2014. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788582602263/. Acesso em: 03 mai. 2023.

ANTUNES, P. C.; MORAES, M. S. F.; COSTA, D. E. Obstáculos Epistemológicos relativos ao conceito de função revelados por estudantes do Ensino Médio. **REAMEC - Rede Amazônica de Educação em Ciências e Matemática**, Cuiabá, Brasil, v. 11, n. 1, p. e23119, 2023. Disponível em: https://periodicoscientificos.ufmt.br/ojs/index.php/reamec/article/view/16906. Acesso em: 1 ago. 2024.

ARGUDÍN, Y. **Educación basada en competencias**. Nociones y antecedentes. Editorial Trillas: México, 2005.

AZCÁRATE, P. **¿Qué matemáticas necesitamos para comprender el mundo actual?** Investigación em l Escuela, 32, 77-85, 1997.

AZCÁRATE, C.; DEULOFEU, J. **Funciones y gráficas**. 1. ed. Madrid: Síntesis. 1989.

BASSANEZI, R. C. **Introdução ao cálculo e aplicações**. São Paulo: Contexto, 2015.

BONJORNO, J. R. GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática**: conjuntos e funções. Manual do professor. São Paulo: Editora FTD, 2020a.

BONJORNO, J. R. GIOVANNI JÚNIOR, J. R.; SOUSA, P. R. C. **Prisma matemática**: funções e progressões. Manual do professor. São Paulo: Editora FTD, 2020b.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: introdução aos parâmetros curriculares nacionais. Brasília: Ministério da Educação, 1997. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/livro01.pdf. Acesso em: 05 fev. 2024.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Parâmetros Curriculares Nacionais**: Ensino Médio – Parte III. Brasília: Ministério da Educação, 2000. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/ciencian.pdf. Acesso em: 05 fev. 2024.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+ Ensino Médio**: orientações educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias. Brasília: MEC, SEMTEC,

2002. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 05 fev. 2024.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **Ciências da natureza, matemática e suas tecnologias**. (Orientações curriculares para o Ensino Médio; volume 2). Brasília: MEC, SEMTEC, 2006. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/CienciasNatureza.pdf. Acesso em: 05 fev. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular:** educação é a base. Brasília: MEC, 2018a.

BRASIL. Ministério da Educação. **Resolução nº 3**, de 21 de novembro de 2018. Atualiza as Diretrizes Curriculares Nacionais para o Ensino Médio. Brasília: MEC, CNE, 2018b. Disponível em: https://normativasconselhos.mec.gov.br/normativa/view/CNE_RES_CNECEBN32018.pdf. Acesso em: 26 mar. 2024.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**: contexto histórico e pressupostos pedagógicos. Brasília: MEC, 2019a.

BRASIL. Ministério da Educação. **Temas Contemporâneos Transversais na BNCC**: propostas de práticas de implementação. Brasília: MEC, 2019b.

BRASIL. Ministério da Educação. **Caderno economia** [livro eletrônico]: educação financeira, educação fiscal, trabalho. Brasília: Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação. 2022a. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/cadernos_tematicos/caderno_economia_consolidado_v_final_09_03_2022.pdf. Acesso em 30 abr. 2023.

BRASIL. Ministério da Educação. **Caderno meio ambiente** [livro eletrônico]: Educação ambiental: educação para o consumo. Brasília: Secretaria de Educação Básica do Ministério da Educação. 2022b. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/images/implementacao/cadernos_tematicos/caderno_meio_ambiente_consolidado_v_final_27092022.pdf. Acesso em 26 abr. 2023.

BRASIL. I.B.G.E. **Brasil, Mato Grosso, Rondonópolis, 2023.** Disponível em: https://cidades.ibge.gov.br/brasil/mt/rondonopolis/panorama. Acesso em 09 de fev.de 2024.

CARDOSO, F. H.; CARBO, L. Utilização do *software FreeMat* para ensinar função no Ensino Médio através da programação computacional. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, Bento Gonçalves, v. 3, n. 1, p. 120-135, 2017. Disponível em: https://periodicos.ifrs.edu.br/index.php/REMAT/article/view/2130/1605. Acesso em: 23 ago. 2024. Verificar depois se o site da REMAT voltou a funcionar para trocar esse link.

CEVADA, J.; SILVA, D. R.; PRADO, G. G.; COLPANI, J. G. B. **Matemática nos dias de hoje**: algoritmos e álgebra. Manual do professor. São Paulo: Editora SEI, 2020a.

CEVADA, J.; SILVA, D. R.; PRADO, G. G.; COLPANI, J. G. B. **Matemática nos dias de hoje**: funções. Manual do professor. São Paulo: Editora SEI, 2020b.

CEVADA, J.; SILVA, D. R.; PRADO, G. G.; COLPANI, J. G. B. **Matemática nos dias de hoje**: matemática financeira e álgebra. Manual do professor. São Paulo: Editora SEI, 2020c.

CHAVANTE, E.; PRESTES, D. **Quadrante Matemática e suas tecnologias**: funções. Manual do professor. 1a ed. São Paulo: Edições SM, 2020.

COSTA, M. C.; CARVALHO, S. **Padrões numéricos e funções**. 1a ed. São Paulo: Moderna, 1998.

COSTA, C. S.; PIRES, R. F.; BOIAGO, C. E. P. Modelagem matemática para o estudo de função afim: uma possibilidade de aprendizagem a partir da conta de água. **Intermaths: Revista de Matemática Aplicada e Interdisciplinar** Vitória da Conquista, v. 1, n.1, p. 77-100, 2020. Disponível em: https://periodicos2.uesb.br/index.php/intermaths/article/view/7607. Acesso em: 15 jul. 2024.

CRESWELL, J. W. **Projeto de pesquisa**: métodos qualitativo, quantitativo e misto. Tradução de Luciana de Oliveira da Rocha. 3. ed. Porto Alegre: Artmed, 2010.

CURY, C. R. J. O Ensino Médio no Brasil: histórico e perspectivas. **Educação em Revista**, (n 27), p. 73-84, 1998. Disponível em: https://periodicos.ufmg.br/index.php/edrevista/article/view/42630/32476. Acesso em: 10 abr. 2024.

DAMM, R. F. Registros de representação. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). **Educação Matemática**: uma (nova) introdução. 3. ed. revisada, 1. reimpr. São Paulo: EDUC, 2010.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em contextos**: função afim e função quadrática. Manual do professor. São Paulo: Ática, 2020a.

DANTE, L. R.; VIANA, F. **Matemática em contextos**: função exponencial, função logarítmica e sequências. Manual do professor. São Paulo: Ática, 2020b.

DOMINGUES, R. F. ; OLGIN, C. A. A Educação Matemática Crítica e o ensino de funções nos livros didáticos brasileiros do Ensino Médio. In: SCOTT, P.; MORALES, Y.RUÍZ, A. [editores]. **Educación Matemática en las Américas 2023**. Estrategias para Mejorar la Enseñanza y el Aprendizaje. [Volumen 2, Memorias XVI CIAEM, Lima, Perú]. Comité Interamericano de Educación Matemática, 2023a. Disponível em: https://ciaem-iacme.org/wp-content/uploads/2023/10/2023-Volumen2-Tema-1-Provisional.pdf. Acesso em: 13 de ago. 2024.

DOMINGUES, R. F. ; OLGIN, C. A. Temas Transversales Contemporáneos y la enseñanza de funciones en los Libros de texto de Escuela Secundaria. **PARADIGMA**, v. 44, n. 5, p. 82–103, 2023b. Disponiível em: https://revistaparadigma.com.br/index.php/paradigma/article/view/1437. Acesso em 13 de ago. 2024.

DUVAL, R. **Semiósis e pensamento humano**: registro semiótico e aprendizagens intelectuais. Tradução de Lênio Fernandes Levy e Marisa Rosâni Abreu da Silveira. São Paulo: Livraria da Física, 2009.

DUVAL, R. Gráficos e equações: a articulação de dois registros. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**: Revista Eletrônica de Matemática, v. 6, n. 2, p. 96-112, 2011a. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2011v6n2p96 Acesso em 18 de abr. 2023.

DUVAL, R. **Ver e ensinar a Matemática de outra forma**: entrar no mundo matemático de pensar: os Registros de Representação Semiótica. Org. Tânia M.M. Campos. 1.ed. São Paulo: PROEM, 2011b

DUVAL, R. Registros de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo do pensamento. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**: Revista Eletrônica de Matemática, v. 7, n. 2, p. 266-297, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2012v7n2p266 Acesso em 09 de fev. 2023.

DUVAL, R. Questões epistemológicas e cognitivas para pensar antes de começar uma aula de Matemática. Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**: Revista Eletrônica de Matemática, v. 11, n. 2, p. 1-78, 2016a. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2016v11n2p1 Acesso em 10 de fev. 2023.

DUVAL, R. Registros de Representação Semiótica e funcionamento cognitivo da compreensão em Matemática. *In*: MACHADO, S. D. A. (org.). **Aprendizagem em Matemática**: Registros de Representação Semiótica. [livro eletrônico]. Campinas, SP: Papirus, 2016b.

DUVAL, R. Como analisar a questão crucial da compreensão em Matemática? Tradução de Méricles Thadeu Moretti. **REVEMAT**: Revista Eletrônica de Matemática, v. 13, n. 2, p. 1-27, 2018. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/article/view/1981-1322.2018v13n2p1 Acesso em 18 de abr. 2023.

ENCR. **Tarifa de Água** – Cuiabá/MT – 2022. Disponível em: https://encr.pw/tarifa-agua-cuiaba-mt-2022. Acesso em: 8 maio 2023.

FNDE, Fundo Nacional do Desenvolvimento da Educação. 2017. **Histórico**. Disponível em: Histórico - Portal do FNDE. Acesso em 08 de fev. 2023.

GAY, M. R. G.; SILVA, W. R. [editores responsáveis]. **Araribá mais Matemática**: manual do professor. [Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna]. 1a. ed. São Paulo: Moderna, 2018.

GIBBS, G. **Análise de dados qualitativos**. Porto Alegre: Artmed, 2009.

GIL, A. C. **Métodos e técnicas de pesquisa social**. 5a. ed. São Paulo: Atlas, 2007.

GOMES, M. L. M. **Álgebra e funções na Educação Básica**. Belo Horizonte : CAED-UFMG, 2013.

GOMES, R. Análise e interpretação de dados na pesquisa qualitativa. *In*: MINAYO, Maria Cecília de Souza. **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. 1. ed. Petrópolis: Vozes, 2016. E-book. Disponível em: https://plataforma.bvirtual.com.br. Acesso em: 19 abr. 2024.

GONÇALVES, F. B. **Uma sequência didática para o ensino de função quadrática**. 2019. 288 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade do Estado do Pará. Programa de Mestrado Profissional em Ensino de Matemática. Belém, 2019.

GOOGLE. **Google Maps**. Disponível em: https://www.google.com/maps/@-16.4560758,-54.6454857,13.5z/data=!5m1!1e1?entry=ttu. Acesso em: 8 maio 2023.

KLEINE, M. R. E. 75 Anos de história do Ensino Médio no Brasil. **Revista de História da Educação Matemática**, *[S. l.]*, v. 4, n. 3, 2018. Disponível em: https://histemat.com.br/index.php/HISTEMAT/article/view/243. Acesso em: 19 fev. 2024.

LESSA, V. E. **A programação de computadores e a função afim**: um estudo sobre a representação e a compreensão de invariantes operatórios. 2018. 184 f. Tese (Doutorado) – Universidade de Passo Fundo. Programa de Pós-Graduação em Educação. Passo Fundo, 2018.

LONGEN, A.; BLANCO, R. M. **Interação Matemática**: as unidades de medidas e a resolução de problemas por meio da função de 2º grau. Manual do professor. [Coordenação Luciana Maria Tenuta de Freitas]. 1a ed. São Paulo: Editora do Brasil, 2020.

LOPES, A. C.; MACEDO, E. **Teorias de currículo**. 1a. ed. São Paulo: Cortez, 2011.

MARTINS, R. M.; CAMPOS, V. C. **Guia prático para pesquisa científica**. 2 ed. Rondonópolis: Unir, 2004.

MARTINS, T. V.; DOERING, L. R.; BARTZ, M. D. B. Utilização do GeoGebra na resolução de problemas físicos: uma possibilidade para a Modelagem Matemática na Educação Básica. **Revista Thema**, Pelotas, v. 14, n. 2, p. 225–235, 2017. Disponível em: https://periodicos.ifsul.edu.br/index.php/thema/article/view/457. Acesso em: 28 jul. 2024.

MEDEIROS, V. Z. *et al*. **Pré-cálculo**. 3. ed. [revista e ampliada]. São Paulo: Cengage Learning, 2013. E-book. ISBN 9788522116515. Disponível em: https://integrada.minhabiblioteca.com.br/#/books/9788522116515/. Acesso em: 03 maio 2023.

MELO, T. C. V.; REIS, L. P. C. Mudanças sociais, família e escola: impactos no desempenho escolar de um adolescente. **Oikos**: família e sociedade em debate, v. 29, n. 1, p. 5-22, 2018. Disponível em: https://periodicos.ufv.br/oikos/article/view/3787. Acesso em: 25 jul. 2023.

MINAYO, Maria Cecília de Souza. O desafio da pesquisa social. In: MINAYO, Maria Cecília de Souza (org.); DESLANDES, Suely Ferreira; GOMES, Romeu. **Pesquisa social**: teoria, método e criatividade. Petrópolis, RJ: Vozes, 2016. (Série Manuais Acadêmicos).

MIORIM, M. A. **Introdução à história da Educação Matemática**. 1a ed. São Paulo: Atual, 1998.

MOL, R. S. **Introdução à história da matemática**. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2013.

NINOW, V. **O estudo de funções no Ensino Médio:** uma investigação sob a perspectiva do enfoque ontossemiótico do conhecimento e da instrução Matemática**.** 2019. 211 f. Tese (Doutorado) – Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Canoas, 2019.

OLGIN, C.A. **Critérios, possibilidades e desafios para o desenvolvimento de temáticas no currículo de Matemática do Ensino Médio**. 2015. 265 f. Tese (Doutorado) – Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Canoas, 2015.

OLIVEIRA, S. L.; ROMÃO, E. C. Sequência didática para o ensino de função afim utilizando Aprendizagem Baseada em Projetos. **ACTIO: Docência em Ciências**, Curitiba, v. 3, n. 3, p. 148-172, 2018. Disponível em: https://revistas.utfpr.edu.br/actio/article/view/7485. Acesso em: 25 jul. 2024.

PINTO, S. R. **Ações cooperativas e tecnologias móveis:** planejamento, prática e análise de uma sequência de atividades sobre funções reais na escola básica. 2020. 119 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática. Porto Alegre, 2020.

PONTE, J. P. O conceito de função no currículo de Matemática. **Educação e Matemática**, (n. 15), p. 3-9, 1990. Disponível em: https://em.apm.pt/index.php/em/article/view/222. Acesso em: 19 fev. 2024.

QEDU. **IDEB** – Município de Rondonópolis (MT). Disponível em: https://qedu.org.br/municipio/5107602-rondonopolis/ideb. Acesso em: 6 abr. 2024.

REAJUSTE de 11% na tarifa de água e esgoto em Cuiabá começa a ser cobrado nesta sexta-feira. G1 MT, 2022. Disponível em: https://g1.globo.com/mt/mato-grosso/noticia/2022/03/04/reajuste-de-11percent-na-tarifa-de-agua-e-esgoto-em-cuiaba-comeca-a-ser-cobrado-nesta-sexta-feira.ghtml. Acesso em: 24 fev. 2024.

RONDONÓPOLIS, Prefeitura Municipal. **Economia**. 2018. Disponível em: http://www.rondonopolis.mt.gov.br/cidade/economia/. Acesso em: 11 set. 2024.

SACRISTÁN, J. Gimeno; GÓMEZ, A. I. Pérez. **Compreender e transformar o ensino**. 4 ed. Porto Alegre: Artmed, 2007.

SANTANA, J. E. B. **Contrato Didático e Registros De Representação Semiótica**: inter-relações no ensino da função afim no 1º ano do Ensino Médio. 2022. 366f.

Tese (Doutorado) – Universidade Federal de Pernambuco, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Recife, 2022.

SILVA, D. S.; LAZZARIN, J. R. Funções: construindo conceitos a partir da análise gráfica. **RECEN: Revista de ciências Exatas e Naturais**, Guarapuava, v. 20, n. 1, p. 91-104, 2018. Disponível em: https://revistas.unicentro.br/index.php/RECEN/article/view/5088/pdf. Acesso em: 20 jul. 2024.

SILVA, P. M. S. **Modelagem Matemática de funções polinomiais do 1° grau a partir da resolução de problemas de razão e proporção no Ensino Médio**. 2023. 143f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Canoas, 2023.

SKOVSMOSE, O. **Educação Matemática Crítica:** a questão da democracia. Campinas: Papirus, 2001.

SKOVSMOSE, O. **Desafios da reflexão em Educação Matemática Crítica**. 2 ed. Campinas: Papirus, 2010.

SKOVSMOSE, O. **Um convite à Educação Matemática Crítica**. [livro eletrônico]. Campinas: Papirus, 2015.

SMOLE, K.S.; DINIZ, M. I. **Ser protagonista**: Matemática e suas tecnologias: números e álgebra: ensino médio. 1. ed. São Paulo: Edições SM, 2020.

SOUSA, I. B.; ALMEIDA, J. J. P. Atividades investigativas no ensino de função afim: desafios e possibilidades. **REMATEC**, Belém, v. 15, n. 35, p. 122–142, 2020. Disponível em: https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/98. Acesso em: 1 ago. 2024.

SOUZA, D. C. **Tecnologias digitais no ensino de função afim: estudo de caso a partir da Teoria Antropológica do Didático**. 2020. 152f. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual da Paraíba, Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática. Campina Grande, 2020.

SOUZA, J. R. **Multiversos Matemática**: conjuntos e função afim. Manual do professor. São Paulo: Editora FTD, 2020a.

SOUZA, J. R. **Multiversos Matemática**: funções e suas aplicações. Manual do professor. São Paulo: Editora FTD, 2020b.

SUBTIL, N. **Práticas pedagógicas matemáticas numa abordagem vygotskyana com estudantes do primeiro ano do Ensino Médio**: o ensino de funções lineares por meio do *software scilab*. 2022. 97f. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Caxias do Sul, Programa de Pós-graduação em Educação. Caxias do Sul, 2022.

TEIXEIRA, L. A. [editora responsável]. **Diálogo**: Matemática e suas tecnologias: funções e progressões. Manual do professor. [Obra coletiva concebida, desenvolvida e produzida pela Editora Moderna]. 1a. ed. São Paulo: Moderna, 2020.

TRANCOSO, F. F.; SILVA, F. F.; PEIXOTO, J. L. B. Pensamento computacional em movimento: narrativas digitais na construção das relações funcionais com *software Scratch*. **Revista Diálogo Educacional**, Curitiba, v. 23, n. 77, p. 746–759, 2023. Disponível em: https://periodicos.pucpr.br/dialogoeducacional/article/view/30002/26112. Acesso em 23 jul. 2024.

VEIGA, J. R**. Resolução de problemas matemáticos modelados com funções quadráticas utilizando os pilares do pensamento computacional no Ensino Médio**. 2023. 106 f. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Passo Fundo, Programa de Pós-graduação em Educação Matemática e Tecnológica. Recife, 2023.

WEIR, M. D.; HASS, J.; GIORDANO, F. R. **Cálculo (George B. Thomas Jr.)**. 11a ed. v. I. Tradução: Luciana do Amaral Teixeira, Leila Maria Vasconcelos Figueiredo; São Paulo: Addison Wesley, 2009.

WIKIPEDIA. **Coordenadas geográficas**. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Coordenadas_geogr%C3%A1ficas. Acesso em: 8 maio 2023.

ZABALA, A. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A – QUESTIONÁRIO INICIAL

Caro(a) estudante,

Convido você a responder o presente questionário. Para respondê-lo você levará poucos minutos. Este questionário é um instrumento que faz parte de minha pesquisa de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática e tem como objetivo colher sua importante opinião sobre o seu contexto de estudo e sua aprendizagem em Matemática. Suas respostas são confidenciais e sua identidade será mantida em sigilo.

Agradeço sua colaboração!

Profa. Rosângela Ferreira Domingues

Você concorda em responder as questões que seguem? ( ) Sim ( ) Não
Por favor, coloque um "X" em sua resposta.

1) Qual seu nome e quantos anos você tem?

____

2) Qual seu gênero?
( ) Feminino ( ) Masculino ( ) Prefiro não responder

3) Você exerce atividade profissional? Onde você trabalha? Quantas horas você trabalha por dia?

____

____

Use a escala de 1 a 5 para responder as próximas questões, sendo:
(1) Discordo fortemente (2) Discordo (3) Nem concordo nem discordo
(4) Concordo (5) Concordo fortemente

4) Você gosta de Matemática?
1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5 ( )

5) Você tem dificuldade na disciplina de Matemática?
1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5 ( )

6)Você já reprovou na disciplina de Matemática? Se sim, quantas vezes? Em qual ano?

____

7) Você utiliza a Matemática no seu dia a dia? De que forma você utiliza a Matemática?
1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5 ( )

____

____

8) Você considera importante estudar Matemática? Justifique
1 ( ) 2 ( ) 3 ( ) 4 ( ) 5 ( )

____

____

9) Como as aulas de Matemática costumam ser ministradas?
( ) Aula expositiva dialogada
( ) Utilização de recursos didáticos como jogos, aplicativos
( ) Trabalhos individuais ou em grupos
( ) Utilizando material impresso como listas de exercícios
( ) Outros ____

10) Nas aulas de Matemática são utilizados recursos tecnológicos? Com que regularidade são utilizados?
( ) Nunca são utilizados
( ) Semanalmente ( ) Mensalmente ( ) Bimestralmente ( ) Anualmente

11) Quais os recursos tecnológicos são utilizados nas aulas de Matemática?
( ) nenhum ( ) calculadoras ( ) *softwares* ou aplicativos

12) Descreva o que você se lembra sobre o conteúdo de Funções trabalhado nas aulas de Matemática do ensino médio?
____
____

13) Você se recorda de alguma situação-problema do seu dia a dia em que você possa ter usado o conteúdo de função? Qual?
____
____

14) Você conhece o software GeoGebra?
( ) nunca ouvi falar ( ) já ouvi falar, mas nunca utilizei ( ) já utilizei, mas não saberia utilizar novamente ( ) já utilizei e consigo utilizar novamente

15) Você conhece ou já utilizou algum outro aplicativo no desenvolvimento do conteúdo Funções? Se sim, qual?
____

16) Assinale um ou mais temas abaixo que você acha que seria interessante estudar durante as aulas de Matemática:
( ) Ciência e tecnologia ( ) Diversidade cultural
( ) Educação alimentar e nutricional ( ) Trabalho
( ) Educação ambiental ( ) Educação em direitos humanos
( ) Educação financeira ( ) Vida familiar e social
( ) Educação fiscal ( ) Educação para o consumo
( ) Educação para o trânsito ( ) Saúde
( ) Educação para valorização do multiculturalismo nas matrizes históricas e culturais brasileiras
( ) Direitos da criança e do adolescente
( ) Processo de envelhecimento, respeito e valorização do idoso

APÊNDICE B – QUESTIONÁRIO FINAL

Caro(a) estudante,

Agora que já concluímos as atividades do projeto, convido você a responder o presente questionário. Para respondê-lo você levará poucos minutos. Este questionário é um instrumento que faz parte de minha pesquisa de doutorado em Ensino de Ciências e Matemática e tem como objetivo colher sua importante opinião sobre o seu contexto de estudo e sua aprendizagem em Matemática. Suas respostas são confidenciais e sua identidade será mantida em sigilo.

Agradeço sua colaboração!

Profa. Rosângela Ferreira Domingues

Você concorda em responder as questões que seguem? (   ) Sim (   ) Não

1. Você realizou todas as atividades do projeto?
( ) sim ( ) quase todas ( ) poucas ( ) nenhuma

2. Teve dificuldades para resolver alguma etapa? Qual?

____

____

3. O que você aprendeu sobre funções durante o projeto?

____

____

4. Você achou que a metodologia adotada facilitou o seu entendimento sobre o conteúdo funções? Justifique.
( ) sim ( ) não ( ) um pouco

____

____

5. Sobre o tema "educação para o consumo", o que você achou que foi relevante para sua vida?

____

____

6. Sobre o tema "educação financeira", o que você achou que foi relevante para sua vida?

____

____

7. Sobre o tema "ciência e tecnologia", o que você achou que foi relevante para sua vida?

____

____

8. Sobre as tecnologias utilizadas, você teve dificuldades? Quais as dificuldades?
( ) sim ( ) não ( ) um pouco

____
____

9. Quais as contribuições do uso das tecnologias que você percebeu ao realizar as atividades propostas?

____
____

10. Sobre o conteúdo de funções, você teve dificuldades, quais?
( ) Ideia de função
( ) Conceito de função
( ) Representação algébrica da função a partir da situação-problema
( ) Representação gráfica da função a partir da situação-problema
( ) Representação da função em um diagrama de flechas
(   ) Representação da função em uma tabela
(   ) Escrever uma situação-problema a partir de um gráfico.
( ) outras dificuldades

____
____

11. Cite um exemplo do uso do conteúdo de funções em uma situação do cotidiano?

____
____

12. Destaque três pontos positivos do projeto desenvolvido (o que você achou mais importante).

____
____
____

13. Destaque três pontos negativos do projeto desenvolvido (o que você achou menos importante).

____
____
____

Agradeço imensamente por sua participação nesse projeto, pois foi de grande importância para o desenvolvimento da minha pesquisa e em muito contribuiu para a continuidade do meu doutorado. Divulgarei, por meio do e-mail institucional, a data da defesa da minha tese que está prevista para início do mês de maio de 2025. Caso tenha interesse em assistir, a defesa será transmitida via Google Meet.

APÊNDICE C – AUTORIZAÇÃO DA ESCOLA PARTICIPANTE DA PESQUISA

E.E. PROF. DOMINGOS APARECIDO DOS SANTOS

Governo do Estado de Mato Grosso
SEDUC – Secretaria de Estado de Educação

CARTA DE ANUÊNCIA

Ao Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da Universidade Luterana do Brasil/RS

Prezados Senhores,

Declaro que tenho conhecimento e autorizo a realização do projeto de pesquisa intitulado: "Temas Contemporâneos Transversais para o Ensino de Funções no Esino Médio", proposto pela pesquisadora: Rosângela Ferreira Domingues, sob orientação da Profª Drª Clarissa de Assis Olgin.

O referido projeto será realizado em E.E. Professor Domingos Aparecido dos Santos, e só poderá ocorrer a partir da apresentação do Parecer de Aprovação do Colegiado do Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da Universidade Luterana do Brasil/RS.

Rondonópolis/MT, 05/10/ 2021

Assinatura e carimbo do diretor da escola

Pedro Valuz Ribeiro
Diretor

Escola Estadual Professor Domingos Aparecido dos Santos
Rua Clementina Duarte Aquino S/N. Conjunto São José II
CEP: 78715-437. Rondonópolis. Mato Grosso
Telefone: (66) 3426-1899

APÊNDICE D – TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

ULBRA UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

Recredenciada pela Portaria Ministerial nº 906 de 17/08/2016 – D.O.U. de 18/08/2016

ASSOCIAÇÃO EDUCACIONAL LUTERANA DO BRASIL

PRÓ-REITORIA ACADÊMICA
DIRETORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA
COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA EM SERES HUMANOS

TERMO DE CONSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

<table>
<tr><td colspan="14">1. IDENTIFICAÇÃO DO PROJETO DE PESQUISA</td></tr>
<tr><td colspan="14">Título do Projeto: TEMAS CONTEMPORÂNEOS TRANSVERSAIS PARA O ENSINO DE FUNÇÕES NO ENSINO MÉDIO</td></tr>
<tr><td colspan="8">Área do Conhecimento: Ensino de Ciências e Matemática</td><td colspan="6">Número de participantes: 30</td></tr>
<tr><td colspan="8">Curso: Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática</td><td colspan="6">Unidade: ULBRA/Canoas/RS</td></tr>
<tr><td>Projeto Multicêntrico</td><td></td><td>Sim</td><td>x</td><td>Não</td><td>x</td><td>Nacional</td><td></td><td>Internacional</td><td>Cooperação Estrangeira</td><td></td><td>Sim</td><td>x</td><td>Não</td></tr>
<tr><td colspan="14">Patrocinador da pesquisa: Rosângela Ferreira Domingues</td></tr>
<tr><td colspan="14">Instituição onde será realizado: E.E. Prof. Domingos Aparecido dos Santos</td></tr>
<tr><td colspan="14">Nome dos pesquisadores e colaboradores: Rosângela Ferreira Domingues e Clarissa de Assis Olgin</td></tr>
</table>

Seu filho (e/ou menor sob sua guarda) está sendo está sendo convidado(a) para participar do projeto de pesquisa acima identificado. O documento abaixo contém todas as informações necessárias sobre a pesquisa que estamos fazendo. Sua autorização para que ele participe neste estudo será de muita importância para nós, mas, se retirar sua autorização, a qualquer momento, isso não lhes causará nenhum prejuízo.

<table>
<tr><td colspan="5">2. IDENTIFICAÇÃO DO PARTICIPANTE DA PESQUISA</td></tr>
<tr><td colspan="3">Nome:</td><td>Data de Nasc.:</td><td>Sexo:</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nacionalidade:</td><td>Estado Civil:</td><td colspan="2">Profissão:</td></tr>
<tr><td>RG:</td><td>CPF/MF:</td><td>Telefone:</td><td colspan="2">E-mail:</td></tr>
<tr><td colspan="5">Endereço:</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="3">3. IDENTIFICAÇÃO DO PESQUISADOR RESPONSÁVEL</td></tr>
<tr><td colspan="2">Nome: Rosângela Ferreira Domingues</td><td>Telefone: (66)996130218</td></tr>
<tr><td>Profissão: Professor de Matemática</td><td>Registro no Conselho Nº: não se aplica</td><td>E-mail:rosangeladom@hotmail.com</td></tr>
<tr><td colspan="3">Endereço: Rua Max Ferraz de Souza, 1140, Residencial Buriti, Rondonópolis/MT</td></tr>
</table>

Eu, responsável pelo menor acima identificado, após receber informações e esclarecimento sobre este projeto de pesquisa, autorizo, de livre e espontânea vontade, sua participação como voluntário(a) e estou ciente:

1. Da justificativa e dos objetivos para realização desta pesquisa.

Essa pesquisa se justifica pelo estudo das funções ser o principal conteúdo trabalhado no ensino médio, podendo sua aplicabilidade ser percebida em diferentes situações do cotidiano e o uso dos Temas Contemporâneos Transversais (TCT) trazido pela BNCC pode ser um diferencial de forma a possibilitar uma ligação desse conteúdo com outros temas que sejam de interesse dos estudantes, despertando-os para a necessidade de compreensão desse conteúdo. O objetivo geral é investigar a utilização de uma sequência didática sobre funções, elaborada a partir dos Temas Contemporâneos Transversais e das diferentes representações matemáticas, para potencializar o ensino e a aprendizagem de Matemática no Ensino Médio, bem como favorecer a formação crítica dos estudantes. Os objetivos específicos são: realizar um estudo sobre o ensino de funções, os TCT, a EMC e os RRS para verificar as contribuições para o processo de ensino e aprendizagem durante o desenvolvimento de uma sequência didática; implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) um experimento com estudantes do Ensino Médio explorando o conteúdo de funções por meio dos RRS utilizando os TCT como contextualização, visando uma EMC; e analisar e identificar, por meio dos instrumentos de coleta de dados, quais as facilidades e limitações de uma sequência didática envolvendo os TCT, as tecnologias e as diferentes representações no ensino de funções no Ensino Médio.

2. Do objetivo de minha participação.

O objetivo de sua participação é contribuir para o crescimento da área de Ensino de Ciências e Matemática voltado para estudantes do ensino médio visando a melhoria do ensino e aprendizagem de Matemática nessa etapa de ensino.

3. Do procedimento para coleta de dados.

Para a coleta de dados serão utilizados questionários de pesquisas, registros das atividades desenvolvidas pelos estudantes, além de observações e registros da pesquisadora. As atividades serão desenvolvidas durante as aulas de Matemática na turma do terceiro ano da E. E. Professor Domingos Aparecido dos Santos, com autorização da gestão da escola e do professor regente da turma.

4. Da utilização, armazenamento e descarte dos dados coletados.

O material coletado será armazenado nas pastas pessoais no computador pessoal e no OneDrive sob a responsabilidade da pesquisadora identificada acima, pelo período de no mínimo 5 anos, sendo utilizado para a escrita da tese de doutorado e atividades acadêmicas.

5. Dos desconfortos e dos riscos.

Os eventuais riscos que possam vir a surgir são: o constrangimento dos participantes ao saberem que estão fazendo parte de uma pesquisa, bem como a quebra de confidencialidade, no entanto, ressalta-se que a participação é de cunho voluntário e haverá o máximo cuidado para manter o sigilo das informações coletadas pelo pesquisador. Os resultados obtidos nessa pesquisa poderão ser publicados, mas a equipe de pesquisa garante o sigilo, as respostas não serão vinculadas a identidade do participante.

6. Dos benefícios.

Ao participar desta pesquisa, entendemos que os participantes terão a oportunidade de compartilhar novos saberes de forma didática e dinâmica para construção e reconstrução de aprendizagens de conceitos matemáticos sobre o conteúdo Funções, relacionando-os ao dia a dia. As atividades desenvolvidas terão o propósito de melhorar a aprendizagem em Matemática dos estudantes participantes, por meio de uma sequência didática inovadora que utilizará tecnologias digitais, relacionando o conteúdo estudado com os Temas propostos na BNCC, proporcionando uma Educação Matemática Crítica, visando preparar os estudantes para situações diversificadas na escola e na vida.

7. Da isenção e ressarcimento de despesas.

O participante ficará isento de qualquer despesa e não receberá pagamento pela atividade.

8. Da forma de acompanhamento e assistência.

O participante tem direito a desistir em qualquer momento da pesquisa. Tem a garantia do sigilo referente a seus dados pessoais. O desenvolvimento da pesquisa com os estudantes é de responsabilidade do pesquisador, ficando a disposição para possíveis esclarecimentos.

9. Da liberdade de recusar, desistir ou retirar meu consentimento.

Tenho a liberdade de recusar, desistir ou de interromper a colaboração nesta pesquisa quando desejar, sem necessidade de qualquer explicação. A minha desistência não causará nenhum prejuízo à minha saúde ou bem-estar físico ou financeiro.

10. Da garantia de sigilo e de privacidade.

Os resultados obtidos durante este estudo serão mantidos em sigilo, mas concordo que sejam divulgados em publicações científicas, desde que meus dados pessoais não sejam mencionados.

11. Da garantia de esclarecimento e informações a qualquer tempo.

Tenho a garantia de tomar conhecimento e obter informações, a qualquer tempo, dos procedimentos e métodos utilizados neste estudo, bem como dos resultados finais desta pesquisa. Para tanto, poderei consultar a pesquisadora responsável: Rosângela Ferreira Domingues. Em caso de dúvidas não esclarecidas de forma adequada pelo(s) pesquisador(es), de discordância com os procedimentos, ou de irregularidades de natureza ética, poderei ainda contatar o Comitê de Ética em Pesquisa em Seres Humanos da Ulbra Canoas (RS), com endereço na Rua Farroupilha, 8.001 – Prédio 14 – Sala 224, Bairro São José, CEP 92425-900 - telefone (51) 3477-9217, e-mail comitedeetica@ulbra.br.

Declaro que obtive todas as informações necessárias e esclarecimento quanto às dúvidas por mim apresentadas e, por estar de acordo, assino o presente documento em duas vias de igual conteúdo e forma, ficando uma em minha posse.

______________ (   ), ______ de _____________ de ______.

___________________________________ ___________________________________

Participante da Pesquisa | Responsável pelo Participante da Pesquisa

____

Pesquisador Responsável pelo Projeto

APÊNDICE E – TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO

ULBRA UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

Recredenciada pela Portaria Ministerial nº 906 de 17/08/2016 – D.O.U. de 18/08/2016

ASSOCIAÇÃO EDUCACIONAL LUTERANA DO BRASIL

PRÓ-REITORIA ACADÊMICA

DIRETORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA EM SERES HUMANOS

TERMO DE ASSENTIMENTO LIVRE E ESCLARECIDO
(PARA MENORES DE 12 a 18 ANOS - Resolução 466/12)

Convidamos você, após autorização dos seus pais [ou dos responsáveis legais], para participar como voluntário (a) da pesquisa: **Temas Contemporâneos Transversais para o Ensino de Funções no Ensino Médio**. Esta pesquisa é da responsabilidade do (a) pesquisador (a): **Rosângela Ferreira Domingues**, endereço: R. Max Ferraz de Souza, 1140, Residencial Buriti, cep: 78 716-025, Rondonópolis/MT, telefone/e-mail (inclusive para ligações a cobrar): (66) 99613 0218, e-mail: rosangeladom@hotmail.com que está sob a orientação de: **Clarissa de Assis Olgin** Telefone: (51) 9 8201 4959, e-mail clarissa_olgin@yahoo.com.br.

Este Termo de Consentimento pode conter informações que você não entenda. Caso haja alguma dúvida, pergunte à pessoa que está lhe entrevistando para que esteja bem esclarecido (a) sobre sua participação na pesquisa. Você não terá nenhum custo, nem receberá qualquer pagamento para participar. Você será esclarecido(a) sobre qualquer aspecto que desejar e estará livre para participar ou recusar-se. Após ler as informações a seguir, caso aceite participar do estudo, assine ao final deste documento, que está em duas vias. Uma delas é para ser entregue aos seus pais para guardar e a outra é do pesquisador responsável. Caso não aceite participar, não haverá nenhum problema se desistir, é um direito seu. Para participar deste estudo, o responsável por você deverá autorizar e assinar um Termo de Consentimento, podendo retirar esse consentimento ou interromper a sua participação a qualquer momento, sem nenhum prejuízo.

INFORMAÇÕES SOBRE A PESQUISA:

- **Descrição da pesquisa:**

Essa pesquisa faz parte do projeto de tese do Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática e tem como título Temas Contemporâneos Transversais para o Ensino de Funções no Ensino Médio. Essa pesquisa se justifica pelo estudo das funções ser o principal conteúdo trabalhado no ensino médio, podendo sua aplicabilidade ser percebida em diferentes situações do cotidiano e o uso dos Temas Contemporâneos Transversais (TCT) trazido pela BNCC pode ser um diferencial de forma a possibilitar uma ligação desse conteúdo com outros temas que sejam de interesse dos estudantes, despertando-os para a necessidade de compreensão desse conteúdo. O objetivo geral é investigar a utilização de uma sequência didática sobre funções, elaborada a partir dos Temas Contemporâneos Transversais e das diferentes representações matemáticas, para potencializar o ensino e a aprendizagem de Matemática no Ensino Médio, bem como favorecer a formação crítica dos estudantes. Os objetivos específicos são: realizar um estudo sobre o ensino de funções, os TCT, a EMC e os RRS para verificar as contribuições para o processo de ensino e aprendizagem durante o desenvolvimento de uma sequência didática; implementar (desenvolver, aplicar e avaliar) um experimento com estudantes do Ensino Médio explorando o conteúdo de funções por meio dos RRS utilizando os TCT como contextualização, visando uma EMC; e analisar e identificar, por meio dos instrumentos de coleta de dados, quais as facilidades e limitações de uma sequência didática envolvendo os TCT, as tecnologias e as diferentes representações no ensino de funções no Ensino Médio.

Para a coleta de dados serão utilizados questionários de pesquisas, registros das atividades desenvolvidas pelos estudantes, além de observações e registros da pesquisadora. As atividades serão desenvolvidas durante as aulas de Matemática na turma do 3º ano da E. E. Professor Domingos Aparecido dos Santos, na cidade de Rondonópolis/MT.

- **Esclarecimento do período de participação do voluntário na pesquisa:**

A pesquisadora se encontrará com os estudantes uma vez na semana durante os meses de maio a julho de 2023, totalizando dez encontros. Os dados serão coletados a partir de questionários, da observação direta e dos registros da pesquisadora e dos registros dos estudantes.

- **Dos RISCOS diretos**

Os eventuais riscos que possam vir a surgir são: o constrangimento dos participantes ao saberem que estão fazendo parte de uma pesquisa, bem como a quebra de confidencialidade, no entanto, ressalta-se que a participação é de cunho voluntário e haverá o máximo cuidado para manter o sigilo das informações coletadas pelo pesquisador. Os resultados obtidos nessa pesquisa poderão ser publicados, mas a equipe de pesquisa garante o sigilo e as respostas não serão vinculadas à identidade do participante.

- **BENEFÍCIOS diretos e indiretos** para os voluntários.

Ao participar desta pesquisa, entendemos que os participantes terão a oportunidade de compartilhar novos saberes de forma didática e dinâmica para construção e reconstrução de aprendizagens de conceitos matemáticos sobre o conteúdo Funções, relacionando-os ao dia a dia. As atividades desenvolvidas terão o propósito de melhorar a aprendizagem em Matemática dos estudantes participantes, por meio de uma sequência didática inovadora que utilizará tecnologias digitais, relacionando o conteúdo estudado com os Temas propostos na BNCC, proporcionando uma Educação Matemática Crítica, visando preparar os estudantes para situações diversificadas na escola e na vida.

As informações desta pesquisa serão confidenciais e serão divulgadas apenas em eventos ou publicações científicas, não havendo identificação dos voluntários, a não ser entre os responsáveis pelo estudo, sendo assegurado o sigilo sobre a sua participação. Os dados coletados nesta pesquisa: questionários, imagens, gravações ou fotos, ficarão armazenados nas pastas pessoais no computador pessoal e no OneDrive sob a responsabilidade da pesquisadora identificada acima, pelo período de no mínimo 5 anos. Nem você e nem seus pais [ou responsáveis legais] pagarão nada para você participar desta pesquisa. Fica também garantida indenização em casos de danos, comprovadamente decorrentes da sua participação na pesquisa, conforme decisão judicial ou extrajudicial.

Este documento passou pela aprovação do Comitê de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos que está no endereço: **Av. Farroupilha, nº 8.001 – prédio 14, sala 224 – Bairro: São José – Canoas/RS, CEP: 92425-900, Tel.: (51) 3477-9217 – e-mail: comitedeetica@ulbra.br.**

____

Assinatura do pesquisador (a)

ASSENTIMENTO DO MENOR DE IDADE EM PARTICIPAR COMO VOLUNTÁRIO

Eu, ____, portador (a) do documento de Identidade ______________________, abaixo assinado, concordo em participar como voluntário (a) do estudo cujo título é: Temas Contemporâneos Transversais para o Ensino de Funções no Ensino Médio. Fui informado (a) e esclarecido (a) pelo (a) pesquisador (a) sobre como a pesquisa vai ser feito, assim como os possíveis riscos e benefícios que podem acontecer com a minha participação. Foi-me garantido que posso desistir de participar a qualquer momento, sem que eu ou meus pais precisemos pagar nada.

Local e data ____________________ Assinatura do (da) menor: ______________________________

Presenciamos a solicitação de assentimento, esclarecimentos sobre a pesquisa e aceite do/a voluntário/a em participar.

2 testemunhas (não ligadas à equipe de pesquisadores):

Nome:	Nome:
Assinatura:	Assinatura:

APÊNDICE F – TERMO DE AUTORIZAÇÃO: USO DE IMAGEM, NOME E VOZ

ULBRA UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL

Recredenciada pela Portaria Ministerial nº 906 de 17/08/2016 – D.O.U. de 18/08/2016

ASSOCIAÇÃO EDUCACIONAL LUTERANA DO BRASIL

PRÓ-REITORIA ACADÊMICA

DIRETORIA DE PÓS-GRADUAÇÃO E PESQUISA

COMITÊ DE ÉTICA EM PESQUISA EM SERES HUMANOS

TERMO DE AUTORIZAÇÃO DE USO DE IMAGEM E VOZ

Pelo presente instrumento particular de licença de uso de imagem, nome e voz, ____ , portador(a) do CPF de nº _____________________, residente e domiciliado(a) na rua ____ , nº _________, na cidade de _____________________________________ / _, doravante denominado(a) Licenciante, autoriza a veiculação de sua imagem, nome e voz, gratuitamente por tempo indeterminado, por Rosângela Ferreira Domingues, portador(a) do CPF de nº 822.237.691-87, doravante denominada Licenciada.

Mediante assinatura deste termo, fica a Licenciada autorizada a utilizar a imagem, nome e voz do Licenciante no projeto intitulado Temas Contemporâneos Transversais para o Ensino de Funções no Ensino Médio, para fins exclusivos de divulgação da Instituição e suas atividades, podendo, para tanto, reproduzi-la ou divulgá-la junto à internet, ensino a distância, jornais e todos os demais meios de comunicação, público ou privado, sem qualquer contraprestação ou onerosidade, comprometendo-se a Licenciante a nada exigir da Licenciada em razão do ora autorizado.

Em nenhuma hipótese poderá a imagem, nome e voz do Licenciante ser utilizada de maneira contrária a moral, bons costumes e ordem pública.

E, por estarem de acordo, as partes assinam o presente instrumento em 02 (duas) vias, de igual teor e forma, para que produza entre si os efeitos legais.

__________, ___ de, ______________ de ______.

____

Licenciante

No caso de menores de 18 (dezoito) anos, o documento obrigatoriamente deverá ser assinado pelo Representante Legal.

____

Representante Legal

Nome: ____

RG: ____________________________ CPF: ____________________

APÊNDICE G – RESOLUÇÃO DAS ATIVIDADES PROPOSTAS NA SEQUÊNCIA DIDÁTICA

Nessa seção estão as atividades propostas com as respectivas resoluções, separadas por tópicos como na sequência didática.

ATIVIDADES SOBRE IDEIA DE FUNÇÃO

AP 1 (adaptada de Souza, 2020a). Existem aplicativos de smartphone que permitem ao usuário comprar produtos em lojas e recebê-los em casa, mediante o pagamento de uma taxa de entrega. Em certo aplicativo, o cálculo da taxa de entrega considera um valor inicial fixo de R$ 5,50 mais R$ 0,25 a cada quilômetro percorrido entre a loja e o local da entrega. Pode-se afirmar que nessa situação existe uma relação de dependência entre as grandezas taxa de entrega e distância percorrida? Se existe, essa relação é uma função? Existe uma lei que pode expressar essa situação?

Resolução:

Existe uma relação de dependência, pois a taxa de entrega vai depender da distância percorrida, essa relação é uma função em que a taxa de entrega t é a variável dependente e a distância percorrida d, a variável independente, logo pode ser expressa por: $t = 5{,}50 + 0{,}25d$.

AP 2 (Smole; Diniz, 2020, p. 57). Um motorista entrou em uma estrada às 10 horas e manteve uma velocidade constante de 90 km/h durante 20 minutos. A correspondência entre a velocidade e o tempo pode ser descrita por uma tabela como a que está ao lado. A relação entre a velocidade e o tempo mostrada nessa tabela é uma função ou não? Justifique.

Velocidade (em km/h)	Tempo
90	10 h
90	10 h 5 min
90	10 h 10 min
90	10 h 15 min
90	10 h 20 min

Resolução: Não é função, pois a uma mesma velocidade correspondem vários tempos.

AP 3 (adaptada de Souza, 2020a). Pode-se calcular o consumo de energia elétrica de um equipamento por meio de uma função. Observe o exemplo ao lado.

A potência do ferro em watt (W) foi dividida por 1 000 para obter a potência do ferro em quilowatts (kW) e, consequentemente, o consumo de energia elétrica em quilowatt-hora (kWh). Responda:

a) A expressão que representa o consumo de energia elétrica pode ser simplificada e expressa de outras maneiras? Registre algumas delas.

b) Determine o consumo de energia elétrica de um ferro de passar roupa desse modelo, considerando que tenha sido utilizado por 8 h em um mês.

c) Quantas horas um ferro de passar roupa desse modelo pode ser usado para que sejam consumidos, no máximo, 7,2 kWh?

d) Agora, indique quais aparelhos há na sua residência (dentre os aparelhos indicados no quadro ao lado) e escreva uma função que relacione o consumo c de energia elétrica (kWh) e o tempo t de uso de cada equipamento (h). Depois, estabeleça o tempo de uso mensal desse equipamento em sua residência e calcule o consumo de energia elétrica correspondente.

Equipamento	Potência (W)
Televisor	90
Computador	300
Aspirador de pó	600
Condicionador de ar	1 400
Micro-ondas	2 000

e) Apresente um plano de economia de energia (considere quais aparelhos podem ter uma redução de tempo de uso), calculando o total economizado de acordo com a redução do consumo.

Resolução:

a) Sim. Algumas respostas possíveis: c = $\frac{120t}{100}$; c = $\frac{12t}{10}$; c = $\frac{6t}{5}$; c = 1,2t

b) Tomando a expressão mais simplifica, tem-se que: c =1,2t = 1,2·8 = 9,6 kWh

c) Para c = 7,2, tem-se que 7,2 = 1,2t ⇒ t = 6 horas.

d) Para os aparelhos do quadro, tem-se que:

televisor: c = $\frac{90t}{1000}$; computador: c = $\frac{300t}{1000}$; aspirador de pó: c = $\frac{600t}{1000}$; condicionador de ar: c = $\frac{1400t}{1000}$; micro-ondas: c = $\frac{2000t}{1000}$.

e) Resposta pessoal. Espera-se que os estudantes utilizem os dados obtidos no item anterior para apresentar um plano com redução de consumo de energia elétrica.

AP 4 (Dante; Viana, 2020a, p. 27). O calor é a quantidade de energia trocada entre corpos, de acordo com a diferença de temperatura entre eles. Por exemplo, ao tirar um alimento da geladeira e colocá-lo sobre a pia, o calor passa do corpo de maior temperatura (a pia) para o corpo de menor temperatura (o alimento). Existe uma função que relaciona a quantidade de calor de um objeto com a variação da medida de temperatura dele quando o objeto não passa por mudança de fase. Essa função é dada pela lei $Q = mc\Delta t$, na qual:

• *m* é a medida de massa do objeto, em g;

• *c* é o calor específico da substância, em cal/g·°C;

• *Q* é a quantidade de calor sensível, em cal;

• Δt é a variação de temperatura, em °C.

Calcule a medida de temperatura final, em Kelvin, de 500 g de água após receber 10 000 cal, sabendo que o calor específico da água é 1 cal/g·°C e que a água estava inicialmente a 10 °C.

Alternativas:

a) 20 K b) 273 K c) 333 K d) 293 K e) 303 K

Resolução:

Sendo $Q = mc\Delta t \Rightarrow 10\,000 = 500 \cdot 1 \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{10\,000}{500} = 20$.

Assim a medida de temperatura final é igual a 30 ºC (10 + 20 = 30) e 30 ºC em kelvin é igual a 303k (30 + 273 = 303), a alternativa correta é a letra *e*.

AP 5 (adaptada de Teixeira, 2020). Joana trabalha em um centro comercial na cidade de Rondonópolis. Todos os meses, Joana deposita, em sua conta bancária, uma quantia D, em reais. A quantia D é calculada utilizando a fórmula D = 0,75x + 50, em que x representa a comissão de vendas mensal recebida por ela.

a) Quais são a variável dependente e a variável independente na fórmula descrita?

b) Identifique a quantia depositada por Joana em março, sabendo que nesse mês ela recebeu uma comissão de R$ 1 200,00.

c) Qual deve ser a comissão de Joana para ela depositar R$ 1 250,00?

Resolução:

a) A variável dependente é a quantia depositada (D) e a variável independente é a comissão de vendas mensal recebida por Joana (x).

b) Para x = 1200, obtém-se: D = 0,75·1200 + 50 = 950. Logo, Joana depositou R$ 950,00.

c) Para D = 1250 ⇒ 1250 = 0,75x + 50 ⇒ 0,75x = 1200 ⇒ x = 1600. Assim, a comissão deverá ser de R$ 1 600,00.

ATIVIDADES SOBRE CONCEITO DE FUNÇÃO (CONCEITO, REPRESENTAÇÃO, DEFINIÇÃO POR MAIS DE UMA SENTENÇA)

AP 6 (adaptada de Smole; Diniz, 2020). Sara e suas amigas gostam de jogar voleibol nos fins de semana. Elas resolveram comprar duas bolas que custam, juntas, R$

336,00 e dividir igualmente as despesas. Chamando de f a função que expressa a despesa y de cada um a partir do número x de meninas e sabendo que o grupo deve ter de 4 a 8 meninas, responda:

a) Qual é o domínio de f?

b) Qual é o conjunto imagem?

c) Qual é a lei que associa x e y?

d) Uma das meninas considerou a possibilidade de convidar mais colegas da escola para participarem dos jogos e ficar mais barato o custo individual da aquisição das bolas. Quantas meninas elas devem chamar (pelo menos) para que o custo fique menos que R$ 30,00 com todas colaborando na compra das bolas?

Resolução:

a) O domínio de f é composto dos valores que x pode assumir, ou seja: D(f) = {4, 5, 6, 7, 8}.

b) O conjunto imagem desta função é composta dos valores que y assume quando se atribui cada valor de x do domínio à função f, ou seja:

• para $x = 4 \Rightarrow y = \frac{336}{4} = 84$ • para $x = 5 \Rightarrow y = \frac{336}{5} = 67{,}2$

• para $x = 6 \Rightarrow y = \frac{336}{6} = 56$ • para $x = 7 \Rightarrow y = \frac{336}{7} = 48$

• para $x = 8 \Rightarrow y = \frac{336}{8} = 42$.

Portanto, Im(f) = {84; 67,2; 56; 48; 42}.

c) A lei é $y = \frac{336}{x}$, com x = 4, 5, 6, 7, 8.

d) Como $y = \frac{336}{x}$, para y = 30 segue: $30 = \frac{336}{x} \Rightarrow x = \frac{336}{30} \Rightarrow x = 11{,}2$. Mas, como x é o números de meninas, deve-se considerar o próximo número inteiro, x = 12. Dessa forma, para $x = 12 \Rightarrow y = \frac{336}{12} = 28$. Logo, teriam que convidar mais 4 meninas.

AP 7 (adaptada de Bonjorno, Giovanni Junior e Souza, 2020a). Marina é vendedora de uma loja de roupas no Rondon Shopping, seu salário mensal bruto é composto de uma parte fixa de R$ 1.500,00 mais uma comissão de 5% do valor total das vendas realizadas no mês.

a) Escreva a lei de formação que expressa o salário bruto de Marina.

b) Qual será o salário bruto de Marina se ela vender R$ 5.000,00 em mercadorias no mês?

c) Sabendo que no mês passado o salário bruto de Marina foi de R$ 2.750,00, qual foi o valor total das vendas por ela realizada?

d) Marina fez uma compra em seu cartão de crédito gerando uma parcela de R$ 800,00 durante cinco meses. Considerando que suas despesas mensais somam R$ 1300,00, quanto ela precisa vender para garantir uma comissão que seja suficiente para ela pagar seu cartão de crédito?

Resolução:

a) Considerando S o salário mensal bruto de Marina, x o valor total de vendas efetuadas no mês, e a parte fixa de R$ 1.500,00, tem-se que:

$s = 1500 + \frac{5}{100}x \Rightarrow s = 1500 + 0{,}05x$

b) Fazendo x = 5 000, segue que s = 1 500 + 0,05x ⟹ s = 1 500 + 0,05 · 5 000 = 1 750. Portanto, se Marina vender R$ 5.000,00, seu salário bruto no mês será R$ 1.750,00.

c) Sendo s = 2 750, então: 2 750 = 1 500 + 0,05x ⟹ 2 750 - 1 500 = 0,05x ⟹

x = 25 000. Portanto, se Marina obteve um salário bruto de R$ 2.750,00, ela vendeu R$ 25.000,00 em mercadorias nesse mês.

d) Sendo 1 300 as despesas mensais e 800 a parcela do cartão de crédito, ela tem que garantir um salário de pelo menos 2 100 reais. Assim, 2 100 = 1 500 + 0,05x ⟹ 2 100 - 1 500 = 0,05x ⟹ x = 12 000. x = 25 000.

AP 8 (adaptada de Bonjorno, Giovanni Junior e Souza, 2020a). Elisa trabalha com artigos para dispositivos eletrônicos e, fazendo uma pesquisa na internet de preço de capas para celular, obteve uma função quadrática que modela o lucro diário L, em reais, de uma loja em relação ao preço pelo qual cada capa é vendida, também em reais. Essa função é dada pela lei $L(x) = -x^2 + 55x - 250$. No site em que Elisa fez a pesquisa, havia a observação de que essa fórmula considerava certo preço de custo da capa e uma relação de dependência entre a quantidade de vendas e o preço de venda de cada capa. Elisa calculou o lucro diário dessa loja supondo que cada capa fosse vendida a R$ 20,00. Veja como ela calculou.

$L(20) = -(20)^2 + 55\cdot 20 - 250 \Rightarrow L(20) = -400 + 1\,100 - 250 \Rightarrow L(20) = 450$

Assim, Elisa verificou que vender cada capa a R$ 20,00 gera um lucro diário de R$ 450,00, considerando a função L. Qual será o lucro vendendo essa capa a R$ 25,00?

Resolução:

$L(25) = -(25)^2 + 55\cdot 25 - 250 \Rightarrow L(25) = -625 + 1\,375 - 250 \Rightarrow L(25) = 500.$

AP 9 (adaptada de Bonjorno, Giovanni Junior e Souza, 2020a). Em uma marcenaria, o número *N* de móveis fabricados no mês varia em função do número *x* de funcionários que trabalham na marcenaria, de acordo com uma função quadrática dada por:

$N(x) = x^2 + 2x.$

a) Quantos móveis podem ser produzidos em um mês quando estão trabalhando 12 funcionários na marcenaria?

b) Querendo aumentar a produção, o dono da mercearia contratou mais 2 funcionários. Em quanto ele conseguiu aumentar a produção?

Resolução

a) Para responder à questão, precisa-se calcular N(12).

Assim: N(12) = 122 + 2·12 = 144 + 24 = 168

Portanto, em um mês, podem ser produzidos 168 móveis quando há 12 funcionários trabalhando na marcenaria.

b) Para responder à questão, precisa-se calcular N(14).

Assim: N(14) = 14^2 + 2·14 = 196 + 28 = 224. Logo, 224 – 168 = 56.

Aumentando a produção em 56 unidades.

AP 10 (adaptada de Souza, J. R. (2020a). Numa loja de automóveis usados, a comissão paga a cada um dos vendedores consiste num percentual sobre o total de vendas do vendedor mais um bônus por meta atingida, conforme a tabela ao lado.

Total de vendas no mês	Percentual sobre o total de vendas	Bônus por meta atingida
Até R$ 80.000,00	0,8%	R$ 0,00
Entre R$ 80.000,00 e R$ 200.000,00	1,0%	R$ 600,00
Acima de R$ 200.000,00	1,2%	R$ 900,00

a) Qual é a comissão paga a um vendedor que consegue vender R$ 120.000,00 em um mês?

b) Quanto um vendedor precisará vender em um mês para receber uma comissão de R$ 3.900,00?

c) Um dos vendedores apresentou uma reclamação ao gerente da loja porque havia recebido R$ 1.000,00 de comissão. Explique por que esse valor está errado.

d) Escreva a lei de formação de uma função que expresse o valor da comissão y = c (v) de um vendedor, em reais, de acordo com o total v de vendas no mês, em reais.

Resolução:

a) Para a venda total de 120.000, tem-se y = 120.000 ·0,01 + 600 = 1.200 + 600 = 1.800,00.

b) Considerando que 3.900,00 é mais que o dobro da comissão do item anterior, pode-se calcular baseando-se na última faixa, assim: 3.900 = 0,012·v + 900 ⇒ 0,012v = 3.000 ⇒ v = 250.000. Assim, o vendedor terá que vender R$ 250.000,00 no mês.

c) Não é possível que a comissão de um vendedor seja R$ 1.000,00, pois a comissão máxima correspondente a uma venda de até R$ 80.000,00 é de R$ 640,00 e a comissão mínima correspondente a uma venda de R$ 80.000,00 e R$ 200.000,00 é R$ 1.400,00.

d) Para essa lei de formação, precisa-se reconhecer que essa é uma função definida por partes. Assim, a partir dos valores da tabela, tem-se:

$$c(v) = \begin{cases} 0{,}008v, se\ 0 < v \leq 80.000 \\ 0{,}01v + 600, se\ 80.000 < v \leq 200.000 \\ 0{,}012v + 900, se\ 200.000 < v \end{cases}$$

AP 11 (adaptada de Bonjorno, Giovanni Junior e Souza, 2020a). Alguns estudantes foram selecionados para fazer um intercâmbio em Londres no mês de dezembro. O professor de Ciências explicou que a medida da temperatura da

Inglaterra é dada em grau Fahrenheit (°F) e que a relação entre uma medida de temperatura expressa em grau Celsius (°C) e em grau Fahrenheit (°F) é dada pela fórmula $C = \frac{5}{9} \cdot (F - 32)$, em que *C* representa o valor em grau Celsius e *F*, o valor em grau Fahrenheit. Um dos estudantes disse que viu uma reportagem que dizia que em um período de 10 anos a média de temperatura no mês de dezembro, em Londres, variou de - 2 °C a 10 °C. e que a previsão dos termômetros nesse ano para o mesmo mês, seria a média de 56 °F no meio do dia. Essa previsão corresponde a um período mais quente, mais frio ou igual à média dos últimos dez anos?

Resolução:

Utilizando a fórmula apresentada, substituindo F= 56, obtém-se:

$C = \frac{5}{9} \cdot (F - 32) \Rightarrow C = \frac{5}{9} \cdot (56 - 32) \Rightarrow C = \frac{5}{9} \cdot 24 \Rightarrow C = \frac{40}{3} \cong 13{,}3$

Assim, o valor 56 ºF equivale a aproximadamente 13,3 ºC, não pertence ao intervalo de - 2 ºC a 10 ºC. Portanto a previsão é que esteja mais quente que a média registrada nos últimos dez anos, conforme a reportagem.

AP 12 (Dante; Viana, 2020a, p. 22). Para as atividades a seguir, considere que os valores cobrados nos aplicativos A e B dependem apenas do valor fixo inicial e do valor por quilômetro rodado. Faça as atividades com um colega.

1. Em um aplicativo A, uma viagem de 20 km custa R$ 52,00. Com essa informação, é possível calcular o valor fixo inicial? E o valor por quilômetro rodado cobrado por esse aplicativo? Justifique suas repostas.

2. Em um aplicativo B, uma viagem de 10 km custa R$ 23,00 e uma viagem de 12,5 km custa R$ 26,75. Com essas informações, é possível calcular o valor fixo inicial cobrado por esse aplicativo? E o valor por quilômetro rodado? Justifique suas respostas.

3. A partir da resposta da atividade anterior, escreva no caderno a lei da função que relaciona a medida de distância percorrida, em quilômetros, ao valor da viagem, em reais, no aplicativo B.

4. Escreva no caderno as leis de pelo menos duas funções que poderiam ser a função que relaciona a medida de distância percorrida, em quilômetros, ao valor da viagem, em reais, no aplicativo A (isto é, que satisfaçam a condição de que uma viagem de 20 km custe R$ 52,00).

5. Um aplicativo que pratique um valor inicial fixo menor do que outro é necessariamente mais vantajoso do ponto de vista financeiro? Justifique.

Resolução:

1. Não é possível calcular nenhum dos valores. Existem várias possibilidades de valor fixo inicial e de valor por quilômetro rodado que totalizariam os R$ 52,00. Por exemplo, o valor fixo inicial poderia ser R$ 2,00 e o valor por quilômetro rodado poderia ser R$ 2,50 (2 + 20 · 2,5 = 52), ou o valor fixo inicial poderia ser R$ 12,00 e o valor por quilômetro rodado poderia ser R$ 2,00 (12 + 1 20 · 2 = 52).

2. Como o valor fixo inicial é o mesmo para as duas corridas nesse aplicativo, a diferença entre o preço da corrida de 12,5 km e o da corrida de 10 km (R$ 3,75) corresponde ao valor variável pago por uma corrida de 12,5 km - 10 km = 2,5 km.

Assim $\frac{3,75}{2,5}$ = 1,5 será o valor pago por quilômetro rodado. Para calcular o valor fixo inicial, tem-se que a corrida de 10 km custou R$ 23,00, assim: 23 = 1,5·10 + b $\Longrightarrow$

b = 23 – 15 = 8.

3. Tomando *p* o valor da corrida e *d* a medida de distância percorrida, obtém-se: *p(d)* = 8 + 1,5*d*.

4. São várias possibilidades, duas deles poderiam ser, considerando a resposta dada à atividade 1: *p(d)* = 2 + 2,5*d* ; *p(d)* = 12 + 2d.

5. Não. Isso é bem relativo, porque vai depender também do valor cobrado por quilômetros percorridos e da distância total a ser percorrida. Por exemplo, um aplicativo que cobra o valor fixo de R$ 1,00 e o valor por quilômetro rodado de R$ 2,00 é menos vantajoso do que um aplicativo que cobra um valor fixo de R$ 5,00 mais o valor por quilômetro rodado de R$ 1,00 para medidas de distâncias maiores do que 4 km.

AP 13 (Bonjorno, Giovanni Junior e Souza, 2020a, p. 118). Um objeto é lançado para cima, a partir do solo, e a altura h, em metro, varia em função do tempo t, em segundo, decorrido após o lançamento. Supondo que a lei dessa função seja h(t) = 30t- 5t2, responda:

a) Qual é a altura do objeto 3 segundos após o lançamento?

b) Quanto tempo após o lançamento o objeto encontra-se a 40 metros de altura?

c) Como pode ser interpretado o resultado obtido no item b?

Resolução:

a) Como a lei da função dada é $h(t) = 30t - 5t^2$, tem-se que:

$h(3) = 30 \cdot 3 - 5 \cdot (3)^2 = 45$. Portanto: o objeto, depois de 3 segundos do lançamento, estará a 45 metros do solo.

b) A pergunta a ser feira é: qual o valor de t par que se tenha h(t) = 40? Assim:

$40 = 30t - 5t^2 \Longrightarrow -5t^2 + 30t - 40 = 0 \Longrightarrow 5t^2 - 30t + 40 = 0$. Para encontrar t, precisa-se resolver essa equação do segundo grau. Assim: $\Delta = (-30)^2 - 4 \cdot 5 \cdot 40 = 100$ e

$$x = \frac{-(-30) \pm \sqrt{100}}{2 \cdot (5)} = \frac{30 \pm 10}{10}$$

Logo, x' = 2 e x'' = 4. Portanto, O objeto estará a 40 metros após 2 segundos ou após 4 segundos do lançamento.

c) Foram obtidos dois valores de tempo decorrido porque um deles é verificado quando o objeto está subindo, e o outro, quando o objeto está descendo.

AP 14 (adaptada de Andrade, 2020). Carro “flexível”. A indústria automotiva tem buscado alternativas para substituir os combustíveis fósseis no segmento de mobilidade e transporte, visando, entre outras demandas, diminuir a emissão de gases poluentes. Veículos movidos a eletricidade já são uma realidade, assim como os veículos movidos a hidrogênio, porém os altos custos de aquisição ainda são um empecilho de popularidade para esses modelos. Sendo assim, o consumidor tem optado, muitas vezes, pelo carro bicombustível, conhecido como flex, que permite alternar o abastecimento entre etanol e gasolina (ou a mistura deles) conforme a economia de gasto ou a vantagem de autonomia.

A vantagem de abastecer com etanol ocorre, geralmente, quando o preço do litro é inferior a 70% do preço da gasolina.

O etanol proporciona uma autonomia de 25% a 30% inferior à da gasolina.

autonomia: capacidade de um veículo, uma aeronave ou um navio percorrer uma distância em determinado tempo sem que haja necessidade de reabastecimento

Atualmente, como o custo de aquisição de um carro elétrico é 4 vezes superior ao de um carro a gasolina, seria necessário rodar 570 mil quilômetros com um veículo desse tipo para a economia de combustível compensar financeiramente a aquisição.

A partir das informações fornecidas, responda às seguintes perguntas:

a) Em sua opinião, é mais vantajoso abastecer um veículo *flex* com etanol ou com gasolina? Por quê?

b) Expressa a lei da função afim que relaciona o preço dos dois combustível, o etanol e a gasolina, segundo a informação acima.

c) Considerando o preço do etanol R$ 3,80 e o da gasolina a R$ 5,20, é mais vantajoso financeiramente abastecer o tanque de um automóvel de 45 litros com qual combustível?

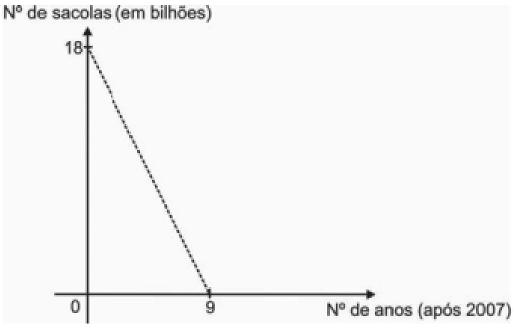
Resolução:

a) Espera-se que os estudantes respondam que depende do preço do etanol e do preço da gasolina, pois a vantagem de abastecer com etanol só ocorre quando o preço do litro for inferior a 70% do preço da gasolina.

b) Sendo x o preço da gasolina e y o preço do etanol, pode-se escrever $y = 0,7x$, sendo que a partir desse valor é mais viável financeiramente o abastecimento com a gasolina.

c) Utilizando a função $y = 0,7x$ (item b), com x igual ao preço da gasolina (R$ 5,20), tem-se $y = 0,7 \cdot 5,2 = 3,64$. Como o preço do etano (R$3,80) é superior a esse valor, nessa situação é mais vantajoso, financeiramente, abastecer com a gasolina.

AP 15 (adaptada de Cevada *et al.*, 2020b). As sacolas plásticas sujam florestas, rios e oceanos e quase sempre acabam matando por asfixia peixes, baleias e outros animais aquáticos. No Brasil, em 2007, foram consumidas 18 bilhões de sacolas plásticas. Os supermercados brasileiros se preparam para acabar com as sacolas plásticas até 2016. Observe o gráfico a seguir, em que se considera a origem como o ano 2007.



1 - De acordo com as informações, quantos bilhões de sacolas plásticas serão consumidos em 2011?

a) 4,0 b) 6,5 c)7,0 d) 8,0 e) 10,0

2 - Escreva uma expressão algébrica para representar a lei dessa função.

3 - Pesquise como está a questão legal da utilização das sacolas plásticas no Brasil.

Resolução:

1- Como há uma relação linear entre o nº de anos depois de 2007 (x) com o número de sacolas, em bilhões (y), trata-se de uma função afim dada por y = ax + b. Como 2007 é tomado como ano 0, tem-se os pontos: (0,18) e (9,0), pois em 2016, o nono ano, pretende-se que y seja 0. Substituindo na fórmula:

$a \cdot 0 + b = 18 \Rightarrow b = 18$ e $0 = 9a + 18 = 0 \Rightarrow 9a = -18 \Rightarrow a = -2$.

Assim a função é dada por $y = -2x + 18$. Para $x = 4$ (ano de 2011) segue:

$y = -2 \cdot 4 + 18 = -8 + 18 = 10$

Assim, para o ano de 2011 a estimativa era do consumo de 10 bilhões de sacolas plásticas.

2- A partir dos dois pontos representados no gráfico (0,18) e (9,0) e considerando a lei geral da função afim y = ax + b. Pode-se substituir as coordenadas x e y na função para cada um dos pontos:

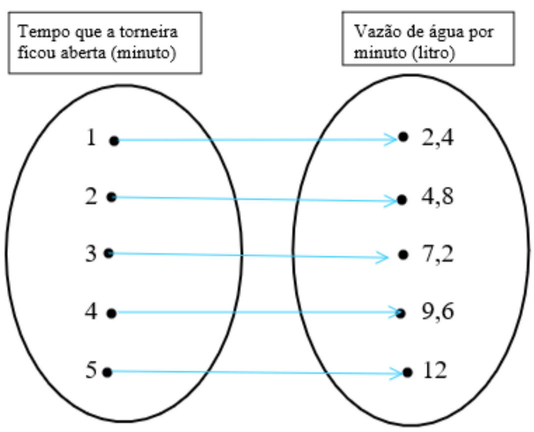
$y = ax + b \Rightarrow 18 = a \cdot 0 + b \Rightarrow b = 18$ e

$0 = a.9 + b \Rightarrow 0 = 9a + 18 \Rightarrow 9a = -18 \Rightarrow a = -2$

Dessa forma, a lei da função é $y = -2x + 18$.

3 - Para essa pergunta, espera-se que os estudantes pesquisem sobre a legislação e dialoguem sobre as alternativas para a substituição das sacolas plásticas, bem como para a utilização de plásticos biodegradáveis.

AP 16 (adaptada de Cevada *et al*., 2020b, p. 51). O diretor da Escola Domingos emitiu uma notificação solicitando a todos os membros da comunidade escolar que buscassem meios para diminuir o consumo de água na escola, pois o bairro estava passando por um problema de reabastecimento desse recurso tão essencial. Pensando em uma maneira de conscientizar os estudantes sobre esse assunto, o professor de Matemática da turma do terceiro ano propôs a um grupo de estudantes que anotassem a quantidade de água que sai de uma torneira no pátio da escola que, com frequência, era esquecida aberta pelos estudantes. Os estudantes anotaram alguns dos valores no diagrama de flechas ao lado.



Em seguida o professor solicitou ao grupo de estudantes que:

a) Registre esses dados em uma tabela.

b) Analise se essa relação é uma função, justifique.

c) Em caso afirmativo, determine o domínio e a imagem.

d) Construa um gráfico que represente os valores dessa tabela no plano cartesiano, utilizando o aplicativo GeoGebra.

e) Observe os pontos no plano cartesiano. Como esses pontos estão dispostos? É possível descrevê-los por meio de uma lei de formação? Em caso afirmativo, qual é essa lei?

f) Obtenha os valores de *f* (10) e *f* (15). O que esses resultados significam?

g) É possível determinar um valor de x para $f(x) = 43{,}2$. Qual seria esse valor?

h) É possível determinar *x* pertencente ao domínio tal que $f(x) = -4{,}8$?

i) Considerando a função encontrada, se a torneira for esquecida aberta durante 1 hora todos os dias durante uma semana, qual será a quantidade de litros de água que será desperdiçada nesse período?

Resolução:

a)

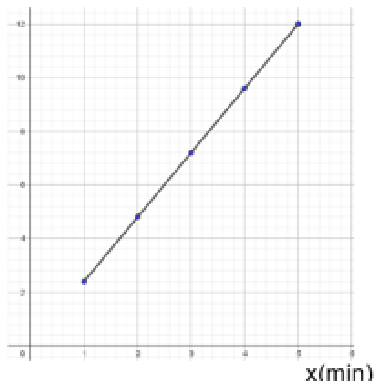
Tempo que a torneira ficou aberta (minuto)	Vazão de água por minuto (litro)
1	2,4
2	4,8
3	7,2
4	9,6
5	12

b) É uma função porque a cada elemento do conjunto formado pelo minutos decorridos no tempo corresponde a um único valor do conjunto formado pelos valores dos litros de água (vazão de água em função do tempo).

c) Domínio = $\mathbb{R}^+$ Imagem = $\mathbb{R}^+$.

d)

y (l) tempo x vazão



e) Os pontos estão dispostos no gráfico formando uma reta, o que mostra que eles são regidos por uma lei de formação específica. Sendo x o tempo em minutos e f(x) a vazão em litros, segue que: $f(x) = 2{,}4x$

f) A partir da lei de formação do item anterior, tem-se que: f(10) = 2,4 · 10 = 24 litros e f(15) = 2,4 · 15 = 36 litros. Esses valores correspondem à quantidade de água, em litros, respectivamente para os tempos 10 e 15 minutos.

g) Se f(x) = 43,2, segue-se: f(x) = 2,4x = 43,2 $\Rightarrow$ x = $\frac{43,2}{2,4}$ = 18 minutos.

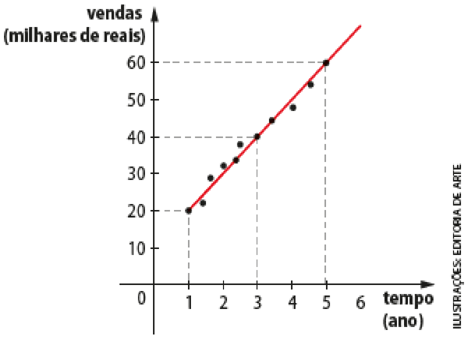
h) É impossível determinar valores de x de modo que f(x) = –4,8, isso corresponderia a uma quantidade negativa de litros.

i) Dada a função y = 2,4x, para x = 60, tem-se: y = 2,4 ·60 = 144 litros de água por dia. Durante uma semana serão 7·144 = 1008 litros de água desperdiçada.

ATIVIDADES – GRÁFICO DE FUNÇÕES

AP 17 (Bonjorno, Giovanni Junior e Souza, 2020a, p. 97). O gerente da loja de artigos para *pets* fez um levantamento das vendas da loja ao longo dos últimos cinco anos e observou que os valores poderiam ser aproximados por uma reta. Com base nos dados obtidos, construiu o gráfico que representa as vendas (em milhares de reais) em função do tempo (em ano).

Observe o gráfico e faça o que se pede em cada caso.



a) Determine a lei de formação da função representada pelo gráfico.

b) Se as vendas da loja mantiverem a evolução apresentada nos últimos cinco anos, qual será a projeção de vendas para o sétimo ano de observação?

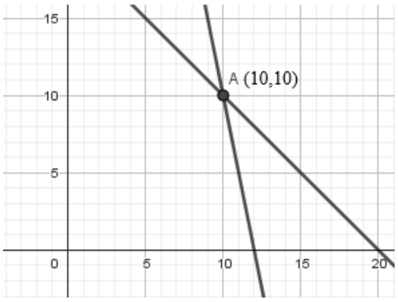
c) Reúna-se a um colega, e respondam: as informações disponíveis são suficientes para responder aos itens anteriores? Há algum dado que não foi utilizado? Justifiquem suas respostas.

Resolução:

a) Observando o gráfico, pode-se considerar que os pontos (1, 20) e (5, 60) pertencem à função, pois são pontos que estão sobre a reta da função. Como a reta representa uma função do primeiro f(x)= ax + b, substitui-se esses dois pontos nessa lei geral, obtendo-se assim o sistema de equações:

$\begin{cases} 20 = 1a + b \\ 60 = 5a + b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + b = 20 \\ 5a + b = 60 \end{cases}$ Para encontrar a solução desse sistema, pode-se utilizar o método desejado, ou ainda, utilizar o *software* GeoGebra.

Usando o GeoGebra, constrói-se a reta de cada uma das equações do sistema e obtém-se o ponto de encontro que será a solução do sistema. Sendo a = 10 e b = 10



Pelo método da adição, subtrai-se a primeira equação da segunda, obtém-se a = 10. Substituindo esse resultado na primeira equação, obtém-se b = 10.

Portanto, a lei de formação da função definida pelo gráfico é y = 10x + 10.

b) Para o sétimo ano, tem-se, x = 7, substituindo na função y = 10x + 10, obtém-se: $y = 10 \cdot (7) + 10 \Longrightarrow y = 80$ Portanto, a projeção de vendas do sétimo ano será de R$ 80 000,00.

c) Sim. Espera-se que os estudantes indiquem que são necessários apenas dois pontos sobre a reta para determinar a lei de formação da função representada pelo gráfico.

AP 18 (adaptada de Cevada *et al.*, 2020b). Se João toma café da manhã na padaria, ele gasta R$ 5,50; se ele toma em casa, gasta R$ 1,75.

a) Para cada uma dessas situações determine uma lei de formação que relacione o custo *c* (em R$) do café da manhã de João com o tempo *t* (em dias).

b) Esboce o gráfico das duas funções no mesmo sistema cartesiano, utilizando o GeoGebra.

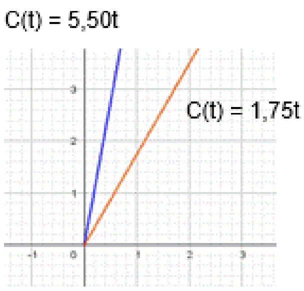
c) Calcule o gasto anual de cada uma das opções. Qual é a economia que João fará se tomar café da manhã somente em casa?

d) Com quantas pessoas ele pode compartilhar o café da manhã se estiver disposto a usar essa economia para uma causa social?

Resolução:

a) C(t) = 5,50t e C(t) = 1,75t

b)



c) Para encontrar o gasto anual, deve-se substituir t pela quantidade de dias em um ano, ou seja, t = 365. Assim, tem-se:

C(365) = 5,50 · 365 = 2007,50

C(365) = 1,75 · 365 = 638,75

Assim a economia será: 2007,50 – 638,75 = 1368,75

d) Dividindo o valor economizado pelo valor gasto por ele, tem-se: $\frac{1368,75}{638,75} = 2,14$

Sendo assim, João poderia compartilhar o café com mais 2 pessoas.

AP 19 (adaptada de Longen; Blanco, 2020). O estudante Carlos relatou ao seu professor de Matemática que trabalha em um lava a jato chamado “Brilho e Cera” e seu patrão pediu que ele auxiliasse na situação de maximização da arrecadação semanal. Sabe-se que: o lava a jato tem 50 clientes fixos por semana; cada lavagem custa R$ 20,00; e a cada um real que o dono desse lava a jato aumento no preço da lavagem, ele perde 2 clientes. O professor sugeriu ao Carlos para escrever a função quadrática que descreve a situação e utilizar o GeoGebra para construir o gráfico dessa função, para então determinar qual é o valor do aumento que maximiza a arrecadação semanal do lava-jato e qual será essa arrecadação máxima. Siga os passos sugeridos pelo professor. O que essa maximização significa?

a) R$ 25,00 b) R$ 20,00 c) R$ 2,5 d) R$ 10,00 e) R$ 2,00

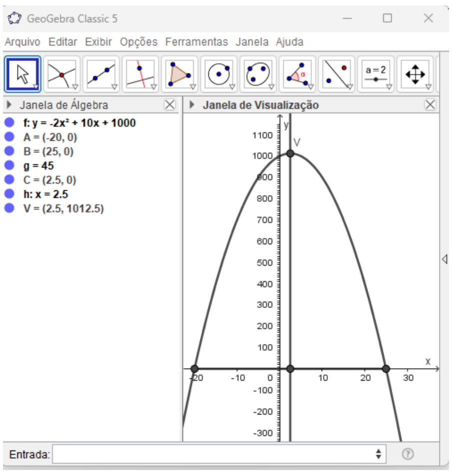
Resolução:

Pelo enunciado, tem-se que a arrecadação semanal original (A) do dono do lava a jato é: A = 20·50. Se ele aumenta o preço em 1 real, ele perde 2 clientes, logo, após x aumentos de 1 real no preço, sua receita será de:

A = (20 + x)·(50 - 2x) = - 2x^2 + 10x + 1 000.

Sem utilizar o GeoGebra, basta determinar o valor máximo do aumento que está na coordenada x do vértice dessa parábola, dada por: xv = $\frac{-10}{2\cdot(-2)}$ = 2,5. Logo, para maximizar o lucro, o dono deve aumentar o preço em R$ 2,50. Para descobrir a arrecadação máxima semanal é suficiente determinar o y_v por meio da fórmula ou calculando a imagem do y_v, sendo y_v = -2·(2,5)·2 + 10·(2,5) + 1 000 = 1 012,50.

Utilizando o GeoGebra, o resultado é a figura abaixo:



Espera-se que o estudante responda que o lava-jato terá um lucro maior, além de que atenderá um menor número de clientes, diminuindo os custos e economizando inclusive a água. Caso seja oportuno, pode-se explorar o problema ambiental causado, na lavagem dos carros, pela utilização e mal descarte dos produtos químicos.

AP 20 (adaptada de Souza, 2020b). Os fabricantes de ar-condicionado geralmente disponibilizam informações que auxiliam na escolha da melhor opção para a compra do equipamento, de acordo com alguns aspectos. Um dos aspectos que deve ser considerado, por exemplo, é a relação entre a quantidade de *BTUs* do ar-condicionado e a área da região que se pretende resfriar de forma que o uso seja mais eficiente e mais sustentável no gasto de energia elétrica.

Observe, na tabela ao lado, as recomendações de certo fabricante no que se refere à relação entre a medida do lado de uma região quadrada e a quantidade mínima de *BTUs* de um ar-condicionado. Nesse caso, está sendo desconsiderada a existência de aparelhos elétricos e de pessoas na região.

Medida do lado (m)	1	2	3	4	5
Quantidade de BTUs	600	2 400	5 400	9 600	15 000

a) Utilize o GeoGebra para representar, no plano cartesiano, a relação indicada acima.

b) Agora, com base no item *a*, escreva a lei de formação de uma função que relaciona a quantidade q de *BTUs* do ar-condicionado à medida do lado l de uma região quadrada, em metro, com $l > 0$

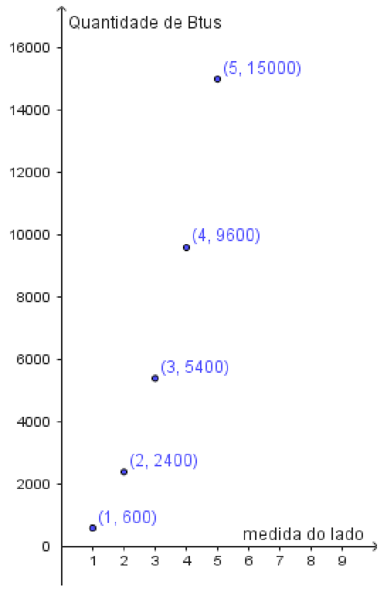
c) Calcule quantos *BTUs*, no mínimo, esse fabricante recomendaria para uma região quadrada cuja medida do lado é igual a:

■ 2,5 m; ■ 6 m; ■ 10 m.

d) Para utilizar um ar-condicionado de 48 600 *BTUs*, é necessário que a região quadrada tenha quantos metros de lado, no máximo?

Resolução:

a) Pode-se construir um gráfico manualmente, mas preferencialmente usar o GeoGebra.



b) A função q é definida por *q(l)* = al^2 + bl + c. Como os pontos (1, 600), (2, 2 400) e (3, 5 400) pertencem ao gráfico da função, substituindo esses pontos, obtém-se o sistema de equação:

$$\begin{cases} a + b + c = 600 \\ 4a + 2b + c = 2\,400 \\ 9a + 3b + c = 5\,400 \end{cases}$$

Há várias maneiras para se resolver esse sistema, inclusive usando o GeoGebra. Aqui, optou-se por utilizar o método algébrico.

Subtraindo as duas primeiras equações (encontra-se uma nova equação), e subtraindo as duas últimas equações (encontra-se outra nova equação), obtém-se o sistema 2x2 (duas equações e duas variáveis). $\begin{cases} 3a + b = 1\,800 \\ 5a + b = 3\,000 \end{cases}$

Para resolver esse segundo sistema, pode-se subtrair as duas equações, encontrando assim o valor de a = 600; substituindo, primeiro em uma das equações desse segundo sistema, encontra-se b = 0; substituindo os valores de a e b em uma das equações do segundo sistema, encontra-se o valor de c = 0.

Assim, a função é dada por: q(l) = 600 l^2.

c) Para l = 2,5m, o recomendado é *q(l)* = 600·$(2,5)^2$ ⟹ 3 750 ⟹ 3 750 *BTUs.*

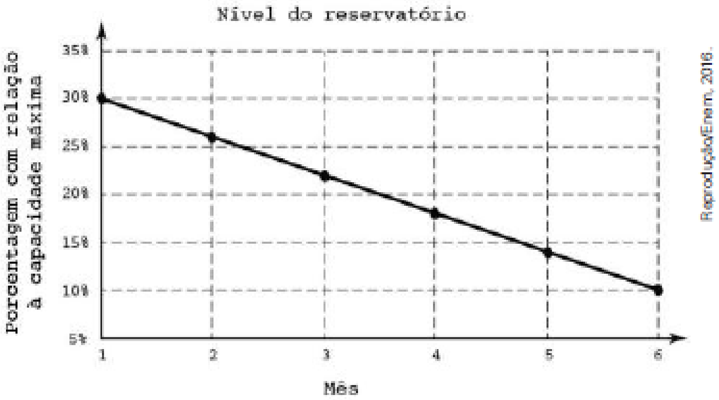
Para l = 6m, o recomendado é *q(l)* = 600·6^2 ⟹ 21 600 ⟹ 21 600 *BTUs.*

Para l = 10m, o recomendado é *q(l)* = 600·$(10)^2$ ⟹ 60 000 ⟹ 60 000 *BTUs.*

d) Para um ar de 48 600 BTUs, tem-se que q(l) = 600 l^2 = 48 600 ⟹ l = 9 m^2

e) Espera-se que nesse item os estudantes reflitam sobre a economia de energia e o que isso traz de benefício tanto financeiro como para o meio ambiente.

AP 21 (adaptada de Dante; Viana, 2020a). Um dos grandes desafios do Brasil é o gerenciamento dos seus recursos naturais, sobretudo os recursos hídricos. Existe uma demanda crescente por água e o risco de racionamento não pode ser descartado. O nível de água de um reservatório foi monitorado por um período, sendo o resultado mostrado no gráfico. Suponha que essa tendência linear observada no monitoramento se prolongue pelos próximos meses.



1-Nas condições dadas, qual o tempo mínimo, após o sexto mês, para que o reservatório atinja o nível zero de sua capacidade?

a) 2 meses e meio. b) 3 meses e meio. c) 1 mês e meio. d) 4 meses. e) 1 mês.

2 -Para reflexão: quais ações poderiam ser eficazes na redução do consumo de água nas residências abastecidas por esse reservatório?

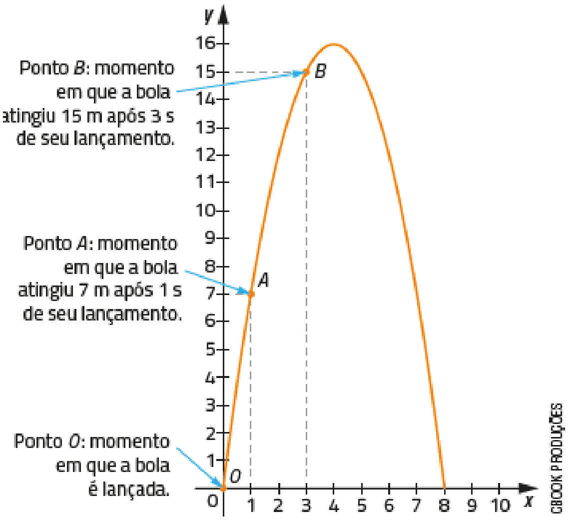
Resolução:

A lei da função pode ser escrita como y = ax + b. Para calcular o valor de a, toma-se dois pontos do gráfico, por exemplo (1,30) e (6,10). Substituindo-se na lei de formação, tem-se que:

a + b = 30 e 6a + b = 10, subtraindo-se as duas equações, segue que -5a = 20, logo a = -4. Substituindo em a + b = 30, obtém-se b = 34. Logo a função é y = -4x + 34 e para y = 0, segue que -4x + 34 = 0, portanto x = 8,5. Depois do sexto mês, precisa passar 2 meses e meio para que o reservatório atinja o nível zero. Alternativa a.

Espera-se que as discussões seja em torno não só de economia de água, mas que possa também abranger questões como campanhas por parte do poder público, por exemplo.

AP 22 (Souza, 2020b, p. 30). Atualmente, existem diferentes robôs que podem ser utilizados em treinamentos de diversas modalidades esportivas. Por exemplo, robôs lançadores de bolas de tênis, que possibilitam ao atleta treinar sozinho. Em um experimento ao ar livre, utilizando um robô instalado em um piso plano, uma bola de tênis foi lançada do chão de maneira que sua trajetória pode ser descrita pela função $f\colon [0, 8] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por $f(x) = -x^2 + 8x$, em que $y = f(x)$ corresponde à altura dessa bola, em metros, após x segundos do momento em que ela foi lançada.



Para analisar quanto variou em média a altura da bola durante parte dessa trajetória, pode-se calcular a taxa de variação média de *f*, para *x* variando de x_1 até x_2, com $x_1 \neq x_2$, dada por: $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

Por exemplo, a taxa de variação média de f no intervalo de tempo de 1s até 3s é dada por:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{15-7}{2} = 4$$

Portanto, pode-se dizer que, no intervalo de tempo de 1s até 3s após o momento em que a bola foi lançada, sua altura variou, em média, 4 m a cada segundo.

Agora, calcule a taxa de variação média dessa função para *x* variando de $x_1 = 0$ até $x_2 = 3$. Depois, interprete esse resultado de acordo com o contexto apresentado.

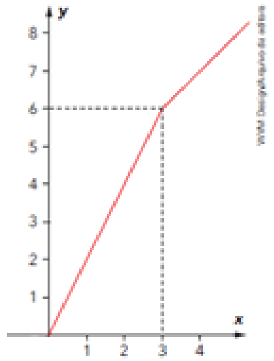
Resolução:

Utilizando a fórmula da taxa de variação média da função $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2 - x_1}$, substitui-se os valores de x_1 e x_2, obtém-se: $\frac{f(3)-f(0)}{3-0} = \frac{15-0}{3} = 5$

Esse resultado indica que, no intervalo de tempo de 0s até 3s após o momento em que a bola foi lançada, sua altura variou, em média, 5 m a cada segundo.

ATIVIDADES DE CARACTERÍSTICAS DE FUNÇÃO (CRESCIMENTO OU DECRESCIMENTO, ESTUDO DO SINAL E INEQUAÇÃO)

AP 23 (adaptada de Dante; Viana, 2020a, p. 58). Observe o gráfico ao lado.



Ele é formado por dois segmentos, ou ainda, duas semirretas, logo ele não representa uma função afim.

Note que, nesse caso, cada um dos dois trechos da representação gráfica dessa função coincide com parte da representação gráfica de uma função afim, por isso essa função também é chamada função afim por partes.

A imagem da função será calculada de acordo com o intervalo ao qual o x pertence: para os valores de x menores que 3, utilizou-se f(x) = 2x; para os valores maiores de x ou iguais a 3, utilizou-se f(x) = x + 3.

Nesse exemplo, a lei da função f é definida por: $f(x) = \begin{cases} 2x, se\ x < 3 \\ x + 3, se\ x \geq 3 \end{cases}$

Crie uma situação-problema que possa ser representada por esse gráfico. Essa situação deve envolver um dos TCT desenvolvidos: educação financeira, educação para o consumo ou ciência e tecnologia.

Resolução:

Espera-se que os estudantes utilizem os dados do gráfico, fazendo a conversão do registro gráfico para a língua natural, para elaborar uma situação, como por exemplo, uma situação envolvendo o valor da conta de água, ou ainda, uma situação de venda de algum produto por alguma empresa.

AP 24 (Souza, 2020a, p. 127). Em um experimento realizado em laboratório, certo líquido foi submetido a um resfriamento por 10 min e sua temperatura foi registrada em um termômetro em dois momentos. Observe as informações ao lado:

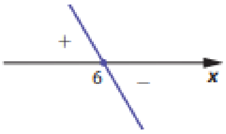
Considerando que a variação da temperatura durante o período de realização do experimento pode ser modelada por uma função afim, descreva em quais momentos essa temperatura, em graus Celsius, foi negativa, positiva e igual a zero.

Resolução:

a) Seja f: [0, 10] → ℝ, dada por f(t) = at + b, a função afim que representa a temperatura em função do tempo t de resfriamento. Observando a figura, tem-se que: f(2) = 8 e f(8) = -4, substituindo na lei da função, obtém-se um sistema de duas equações: $\begin{cases} 2a + b = 8 \\ 8a + b = -4 \end{cases}$.

Subtraindo as duas equações: -6a = 12 ⇒ a = -2, substituindo na primeira equação: 2(-2) + b = 8 ⇒ b = 12. Dessa forma, a lei da função fica f(t) = -2t + 12.

Para analisar o que foi solicitado, deve-se fazer o estudo do sinal, começando pelo cálculo da raiz da função: $-2t + 12 = 0 \Rightarrow t = 6$. Fazendo o esboço:



A temperatura ficou: positiva para $0 \leq t < 6$; igual a zero para $t = 6$; e negativa para $6 < t \leq 10$.

AP 25 (adaptada de Bonjorno, Giovanni Junior e Souza, 2020a). Marcelo mora em um município onde é possível alugar patinetes elétricos para se locomover. A velocidade máxima permitida desses aparelhos é de 20 km/h, mas é recomendado que pessoas sem experiência não ultrapassem 12 km/h. Fazendo alguns cálculos para estimar o tempo que levaria utilizando um patinete elétrico de uma estação de metrô até o local onde trabalha, Marcelo considerou que manteria uma velocidade constante de 3 metros por segundo e fez uma tabela para relacionar a distância percorrida, em metro, em função do tempo, em segundo.

Distância *d* (em metro)	3	6	9	12	15	...
Tempo *t* (em segundo)	1	2	3	4	5	...

Com base nessas informações, responda:

a) Qual é a lei da função que relaciona a distância *d*, em metro, a ser percorrida por Marcelo e o tempo *t*, em segundo?

b) Essa função é classificada como crescente ou decrescente? Justifique sua resposta.

c) Marcelo levou 10 minutos para realizar o deslocamento que pretendia nas condições que tinha planejado. Qual distância ele percorreu?

d) Considerando a situação do trânsito em Rondonópolis/MT, você considera que esse serviço de aluguel de patinete elétrico seria interessante para a população?

Resolução:

a) $d(t) = 3t$.

b) Sim. Essa função é linear e o coeficiente *a* da função é igual a 3. Como $3 \neq 0$ e $3 > 0$, as grandezas representadas por *d* e *t* são grandezas diretamente proporcionais, logo a função é crescente.

c) Como Marcelo levou 10 minutos para realizar o percurso, isso equivale a 600 segundos ($10 \cdot 60 = 600$). Substituindo $t = 600$ na lei da função, tem-se:

$d(600) = 3 \cdot 600 = 1\,800$. Portanto, Marcelo percorreu 1 800 metros.

d) Resposta em aberto, mas espera-se que os estudantes façam a relação com a violência do trânsito na cidade, mas que como a cidade é bem plana, os patinetes seriam sim uma alternativa.

AP 26 (adaptada de Andrade, 2020). Uma microempresa fabrica embalagens plásticas de mesmo valor. Seu lucro pode ser determinado pela função L: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{N}$, dada por L(x) = 3x – 1125, em que L representa o lucro, em reais, e x a quantidade de embalagens vendidas. De acordo com a função L, qual a quantidade de embalagens a ser vendida para que haja lucro?

Resolução:

Para L(x) = 0 não haverá lucro ou prejuízo, ou seja, quando o lucro é nulo quando se segue que L(x) = 0 . Calcula-se, então, o valor de x quando isso acontece: L(x) = 3x - 1 125 = 0 ⇒ 3x =1 125 ⇒ x = 375. Portanto, se vendermos 375 embalagens, não haverá lucro nem prejuízo. Para qualquer quantidade de venda acima de 375 embalagens haverá lucro e qualquer quantidade abaixo, haverá prejuízo.

AP 27 (adaptada de Teixeira, 2020). Por muitos anos, o Brasil tem figurado no cenário mundial entre os maiores produtores e exportadores de soja. Entre os anos de 2010 e 2014, houve uma forte tendência de aumento da produtividade, porém, um aspecto dificultou esse avanço: o alto custo do imposto ao produtor associado ao baixo preço de venda do produto. Em média, um produtor gastava R$ 1 200,00 por hectare plantado, e vendia por R$ 50,00 cada saca de 60 kg. Ciente desses valores, um produtor pode, em certo ano, determinar uma relação do lucro L que obteve em função das sacas de 60 kg vendidas.

Suponha que ele plantou 10 hectares de soja em sua propriedade, na qual colheu x sacas de 60 kg e todas as sacas foram vendidas.

a) Qual é a expressão que determinou o lucro L em função de x obtido por esse produtor nesse ano?

b) Qual a função inversa dessa função? O que essa inversa significa?

c) Faça uma pesquisa para verificar qual a média de sacas produzidas por hectare e calcule o lucro obtido por esse produtor para essa quantidade.

d) Para obter um lucro de R$ 263 000, qual teria que ser a quantidade de sacas de soja produzida?

Resolução:

a) Como o produtor plantou 10 hectares, considera-se que seus gastos foram, em média, de R$ 12 000,00. Os ganhos podem ser obtidos pela multiplicação entre a quantidade x de sacas e o valor unitário delas, que é R$ 50,00. Logo, conforme os dados do problema, a expressão que determinou o lucro L do produtor naquele ano é:

L(x) = 50x - 12 000.

b) Cálculo da inversa, trocando x e y de posição e isolando o y novamente:

y = 50x - 12 000 → x = 50y - 12 000 → 50y = x + 12 000 → y = $\frac{x+12\ 000}{50}$

Com a função inversa pode-se calcular a quantidade de sacas a serem vendidas (y) para um valor do lucro estipulado (x);

c) No site do canal rural foi divulgada a previsão de uma média de 3 820 kg por hectare, computando 63,6 sacas/ha.

(https://www.canalrural.com.br/agricultura/soja/qual-regiao-produtora-de-soja-tera-mais-produtividade-em-22-23/#:~:text=Estimativa%20para%20soja%202022%2F23&text=Isso%20porque%20%C3%A9%20prevista%20m%C3%A9dia,63%2C6%20sacas%2Fha.)

Considerando esse valor, pode-se calcular o lucro que será obtido por esse produtor nessa situação:

$10 \cdot 63{,}6 = 636$ sacas produzidas, assim:

$L(x) = 50 \cdot 6360 – 12\ 000 = 19\ 800$

d) Para determinar a quantidade de sacas para obter o lucro de 263 000, pode-se utilizar a função inversa:

$y = \frac{x+12\ 000}{50} \rightarrow y = \frac{263\ 000+12\ 000}{50} \rightarrow y = \frac{275\ 000}{50} \rightarrow y = 5\ 500$

Assim, devem ser produzidas 5 500 sacas.

AP 28 (Bonjorno, Giovanni Junior e Souza, 2020a). Para se produzir um artigo, verificou que o custo da produção é dado pela fórmula: $C = 50 + 2x + 0{,}1x^2$, onde x é a quantidade diária produzida. Cada unidade do produto é vendida por R$ 6,50.

a) Entre que valores deve variar x para não haver prejuízo?

b) Com uma produção de 30 unidades do produto, haverá lucro ou prejuízo, nessa situação?

Resolução:

a) Considerando que a quantidade diária produzida x é vendida, a receita arrecadada R(x) com a venda diária deve ser maior do que ou igual ao custo diário para que não haja prejuízo. A receita pode ser expressa por $R(x) = 6{,}5x$.

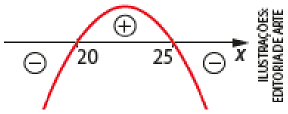
Nesse caso, tem-se: $R(x) > C(x) \Longrightarrow R(x) - C(x) \geq 0$

Logo: $6{,}5x - (50 + 2x + 0{,}1x^2) \geq 0 \Longrightarrow 6{,}5x – 50 - 2x - 0{,}1x^2 \geq 0 \Longrightarrow - 0{,}1x^2 + 4{,}5x - 50 \geq 0$

Essa é a inequação que deve ser resolvida. Sendo assim, obtém-se as raízes da função dada por $y = - 0{,}1x^2 + 4{,}5x - 50$ e por meio do esboço do gráfico, faz-se o estudo do sinal.

$- 0{,}1x^2 + 4{,}5x - 50 = 0 \Longrightarrow \Delta = (4{,}5)^2 - 4 \cdot (- 0{,}1) \cdot (- 50) = 0{,}25$, logo há duas raízes reais distintas, pois $\Delta > 0$. Assim: $x = \frac{-4{,}5 \pm 0{,}5}{-0{,}2}$, logo x’ = 20 e x’’ = 25.

Como a > 0, a concavidade da parábola é voltada para baixo.



Portanto, não haverá prejuízo quando $20 \leq x \leq 25$.

b) Como $x = 30$ não pertence a esse intervalo, para essa quantidade haverá prejuízo. O que também pode ser confirmado calculando $f(30) = -5$.

AP 29 (Smole; Diniz, 2020, p. 131). Uma empresa freta aviões com 100 lugares para grupos de turistas. Cada passageiro paga R$ 400,00 pela passagem e mais R$ 10,00 para cada lugar que ficar vazio. Qual é a quantidade de pessoas que devem compor um grupo para que, ao fretar o avião, a empresa receba no mínimo R$ 33 000,00 a fim de não ter prejuízo?

Resolução:

Tomando como dados:

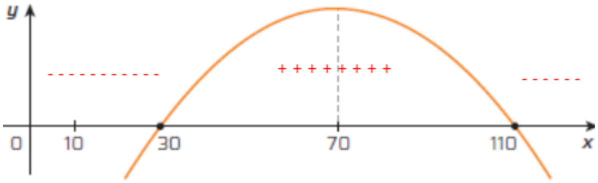
número de passageiros para os quais foi fretado o avião: x

quantidade de lugares vagos: $100 - x$

preço pago individualmente: $400 + 10 \cdot (100 - x) = 400 + 1000 - 10x = 1400 - 10x$

total T a ser pago pelo grupo em função de x: $T(x) = x \cdot (1400 - 10x) = 1400x - 10x^2$.

Para a empresa não ter prejuízo, é preciso ter $T(x) \geq 33\,000$. Logo, o número x de passageiros deve satisfazer a inequação do segundo grau: $1400x - 10x^2 \geq 33\,000$, que equivale a: $-10x^2 + 1400x - 33\,000 \geq 0$. Efetuando-os cálculos necessários, obtém-se: $\Delta = 640\,000$, $x' = 30$ e $x'' = 110$. Como $a < 0$, o esboço da parábola fica voltado para baixo como na figura abaixo



Então $T(x) \geq 0$ se $30 \leq x \leq 110$.

Como a capacidade do avião é de 100 passageiros, para não ter prejuízo, a empresa deve fretá-lo para grupos de 30 a 100 turistas.