UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA ACADÊMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ANDRIELLY VIANA LEMOS

ESTUDOS DE RECUPERAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA INVESTIGAÇÃO NO ÂMBITO DA GEOMETRIA SOB A PERSPECTIVA DO ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E DA INSTRUÇÃO MATEMÁTICA

Canoas, 2017

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA ACADÊMICA
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ANDRIELLY VIANA LEMOS

ESTUDOS DE RECUPERAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA INVESTIGAÇÃO NO ÂMBITO DA GEOMETRIA SOB A PERSPECTIVA DO ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E DA INSTRUÇÃO MATEMÁTICA

Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Doutora em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Carmen Teresa Kaiber

Canoas, 2017

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação – CIP

L557e Lemos, Andrielly Viana.

Estudos de recuperação no Ensino Fundamental : uma investigação no âmbito da geometria sob a perspectiva do enfoque ontossemiótico do conhecimento e da instrução matemática / Andrielly Viana Lemos. – 2017.

354 f. : il.

Tese (doutorado) – Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-Graduação

em Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, 2017.

Bibliotecária responsável – Heloisa Helena Nagel – 10/981

ANDRIELLY VIANA LEMOS

ESTUDOS DE RECUPERAÇÃO NO ENSINO FUNDAMENTAL: UMA INVESTIGAÇÃO NO ÂMBITO DA GEOMETRIA SOB A PERSPECTIVA DO ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E DA INSTRUÇÃO MATEMÁTICA

Orientadora: Profª. Dr.ª Carmen Teresa Kaiber

Tese apresentada ao Programa de Pós - Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Ensino de Ciências e Matemática

Área de Concentração: Ensino e Aprendizagem em Ensino de Ciências e Matemática

BANCA EXAMINADORA

Prof.ª Dr.ª Claudia Lisete Oliveira Groenwald - Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)

Prof.ª Dr.ª Jutta Cornelia Reuwsaat Justo - Universidade Luterana do Brasil (ULBRA)

Prof. Dr.ª Eleni Bisognin (UNIFRA)

Prof. Dr. Juan Díaz Godino - Universidade de Granada (UGR)

Aprovada em 05 de junho de 2017.

AGRADECIMENTOS

À minha família, pelo apoio nesta etapa tão importante e desafiadora da minha vida e pela compreensão que tiveram nos muitos momentos em que não pude estar presente. Agradeço, em especial, ao meu marido e aos meus pais, pela paciência e por estarem sempre ao meu lado me apoiando e me incentivando.

À minha orientadora, professora Carmen Kaiber, pela amizade, carinho, dedicação e paciência que sempre teve comigo. Agradeço suas contribuições e orientações pois sem elas este trabalho não teria sido realizado, ele é nosso.

Aos colegas do PPGECIM, pelos conhecimentos compartilhados, pelos trabalhos e estudos realizados e, especialmente, pelas amizades construídas. Agradeço, em especial, aos meus amigos que me acompanham desde a graduação, Lucas, Tiago, Ilisandro e Neide pelo companheirismo e amizade de sempre. E é claro ao meu grande amigo e irmão acadêmico, que virou irmão de coração Alexandre, não tenho palavras para dizer o quanto você foi importante nesta caminhada longa de quase onze anos de ULBRA, obrigada por tudo. Valeu por você existir amigo!

Aos professores do PPGECIM, pelos conhecimentos compartilhados e as discussões proporcionadas. Em especial, a professora Tania Seibert e a professora Claudia Lisete Oliveira Groenwald pela amizade e confiança que sempre tiveram comigo.

Aos intergrantes do Programa MatematicAção pelo apoio e os conhecimentos compartilhados, em especial à professora Jutta pela oportunidade de realizar a investigação no âmbito deste programa.

Aos alunos e professores participantes da pesquisa, pelo apoio e comprometimento na realização das atividades as quais envolviam a investigação.

À banca examinadora, formada pelas professores Doutores, Juan Diaz Godino, Eleni Bisognin, Claudia Lisete Oliveira Groenwald e Jutta Cornélia Reuwsaat Justo pelas considerações realizadas para o aprimoramento do trabalho.

Agradeço, também, a Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pela oportunidade de desenvolver meus estudos no âmbito da Pós-Graduação, desde o Mestrado, como bolsista do Observatório da Educação - OBEDUC, e no Doutorado, como bolsista do Programa de Suporte à Pós-Graduação de Instituições de Ensino Particulares (PROSUP). Sem estas bolsas com certeza não teria sido possivel este sonho ser realizado.

Ninguém é tão grande que não possa aprender,

nem tão pequeno que não possa ensinar

(Esopo).

RESUMO

Apresentam-se, aqui, resultados e reflexões em torno de uma investigação que teve como foco o desenvolvimento e implementação de uma proposta de estudos de recuperação para a Geometria dos anos finais do Ensino Fundamental, sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS). A investigação foi estruturada em seis etapas, sendo as iniciais dedicadas ao estudo e aprofundamento teórico das temáticas a serem discutidas, como também a concepção, planejamento e construção da proposta de estudos de recuperação e, as etapas finais, referentes à implementação e análise desta proposta. A proposta de estudo desenvolvida buscou retomar conceitos, definições, propriedades e procedimentos pertinentes a Geometria trabalhada ao longo dos anos finais do Ensino Fundamental, contemplando os seguintes tópicos de estudo: Figuras Geométricas, Ponto, Reta e Plano, Polígonos, Ângulos, Simetria, Área e Perímetro, Volume de Sólidos, Congruência e Semelhança, Teorema de Tales e Pitágoras, Relações Métricas no Triângulo Retângulo, Círculo e Circunferência. O trabalho em torno destes tópicos foi planejado levando em consideração as indicações oficiais para o ensino da Geometria, pesquisas na área e os aportes teóricos do EOS. No que se refere a estrutura dos materiais de estudos, os mesmos foram construídos no Power Point, visando integrar tanto o uso das Tecnologias Digitais, por meio de atividades, jogos *online*, objetos de aprendizagem, vídeos, animações e uso de *softwares*, como também, atividades de construção, manipulação e a resolução de problemas. A proposta de estudo foi implementada junto a grupo de 15 estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma Escola Municipal do Município de São Leopoldo/RS, em encontros realizados no laboratório de informática da escola, quando então os estudantes trabalharam nos materiais de estudos. A fim de captar e registrar os dados produzidos ao longo da investigação, a pesquisa contou com a observação participante da pesquisadora, registros em áudio e vídeo, produção dos estudantes, entrevista com a professora titular e questionário aos estudantes, articulados no contexto de uma pesquisa de base qualitativa. A análise dos resultados alcançados com o desenvolvimento e implementação da proposta de estudo foi realizada tomando como referência os pressupostos do EOS, principalmente, na Idoneidade Didática e suas dimensões. Assim, produziu-se uma análise com um olhar tanto para a idoneidade do material disponibilizado, no que se refere a sua potencialidade frente a produção de conhecimentos no âmbito dos tópicos desenvolvidos, dos recursos utilizados e da sua consonância ao que está estabelecido nos documentos oficiais (parâmetros e diretrizes curriculares), como também, para os significados pessoais alcançados pelos estudantes frente ao material e as interações produzidas durante o estudo. As análises produzidas apontam que, em geral, a proposta atende aos pressupostos estabelecidos pelo EOS, no que se refere as dimensões epistêmica e cognitiva. As maiores fragilidades encontram-se nos argumentos e síntese, tanto no que se refere ao material produzido como também nos significados estabelecidos pelos estudantes. Já as dimensões interacional, emocional, ecológica e mediacional atingiram altas idoneidades em grande parte dos seus componentes e indicadores, ressaltando-se as interações entre os estudantes, com o material e a pesquisadora, como também, o interesse no estudo e a diversidade de recursos utilizados nos materiais de estudos. Apontam-se como considerações que a proposta de estudos de recuperação desenvolvida foi implementada satisfatoriamente, contemplando aspectos do EOS, como também, possibilitando aos estudantes uma forma de estudo diferenciada, onde cada um tem a possibilidade de seguir o seu ritmo de aprendizagem, retomando conceitos, procedimentos e definições, visando a superação de dificuldades e de conflitos semióticos.

Palavras-chave: Enfoque Ontossemiótico. Estudos de recuperação. Geometria. Ensino Fundamental.

ABSTRACT

This study presents the results and conclusions of an investigation about the development and implementation of a proposal of recovery studies in Geometry in junior high school in Brazil from the perspective of the Onto-Semiotic Approach to Knowledge and Mathematics Education (EOS). The investigation was structured in seven steps, the first of which included the study and theoretical review of the themes to be addressed and the conception, planning, and development of a proposal of recovery studies. The final steps included the implementation and evaluation of the proposal. The study proposal developed aimed to address concepts, definitions, properties used in Geometry in junior high school and the following study topics: Geometric Figures, Point, Line, Plane, Polygons, Angles, Symmetry, Area, Perimeter, Volume of Solids, Congruence and Similarity, Thales' and Pythagoras Theorems, Metric Relationships in the Right Rectangle, Circle, and Circumference. The work about these topics was planned considering the official guidelines for teaching Geometry, related research, and theoretical framework of the EOS. Concerning the structure of the teaching materials, these were developed using PowerPoint aiming to integrate the use of Digital Technologies based on activities, online games, teaching objects, videos, animations, and softwares, as well as construction, use, and problem solving activities. The proposal was implemented in a group of 15 9th grade junior high school students in a municipal school in São Leopoldo, state of Rio Grande do Sul, Brazil during meetings conducted in the informatics laboratory of the school, when the students used the material described. In order to record the data produced during the investigation, the approach included the active participation of the researcher, video and audio recordings, students' output, interview with the main teacher, and a questionnaire answered by students in the context of a qualitative research. The analysis of the results obtained was carried out based on the EOS principles, mainly Didactic Suitability and its dimensions. Therefore, the analysis included an evaluation of the suitability of the material used concerning the potential in the production of knowledge about the topics addressed, resources used, and consonance with what is covered in official guidelines (curriculum guidelines and standards), as well as the meanings reached by students about the material and the interactions produced during the research. The analysis indicate that, in general, the proposal meets the standards established by EOS concerning the epistemic and cognitive dimensions. The greatest difficulties observed concerned the argumentation and synthesis about the materials produced and the meanings established by students. The interactional, emotional, ecological, and mediation dimensions reached high levels of suitability in most of its components and indicators, especially in the interactions between students, with the material and the researcher, as well as the interest in the study and the diversity of resources used in the study materials as a means to contemplate the guidelines established for the topics. It was concluded that the proposal of recovery studies developed was implemented satisfactorily, contemplating aspects of EOS and affording students a differentiated way to study, where each has the possibility to follow their own learning pace, recovering concepts, procedures, and definitions, aiming to overcome difficulties and semiotic conflicts.

Keywords: Onto-semiotic approach. Recovery studies. Geometry. Junior High.

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

A educação escolar se concretiza a partir da convergência de múltiplos fatores que são postos em jogo nesse processo que é contínuo e de constantes transformações. Aspectos epistemológicos, pedagógicos, cognitivos, emocionais e sociais se entrelaçam na busca por uma educação de qualidade que possibilite o desenvolvimento das potencialidades dos estudantes, contribuindo para a formação de cidadãos capazes de enfrentarem as demandas e exigências de seu tempo.

Na Educação Básica, os processos de ensino e aprendizagem desenvolvidos buscam se utilizar de estratégias de ensino as quais possibilitem aos estudantes a construção de conhecimentos para sua formação como um todo, contemplando os objetivos estabelecidos pelas áreas do conhecimento, Ciências Humanas e Naturais, Linguagens e a Matemática. Especificamente, no que se refere à Matemática, quando se toma como referência o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), estabelecido por avaliações realizadas pelo Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), Provinha e Prova Brasil[1], pode-se considerar que os resultados alcançados em termos de aprendizagens não têm sido satisfatórios.

Considera-se que os desempenhos negativos dos estudantes apontados pelas avaliações não se referem somente a questões de capacidade cognitiva, mas também passam pela estrutura e qualidade da Educação no país. No ambiente escolar, que é múltiplo e heterogêneo, tem-se estudantes com competências, habilidades, interesses, motivações e tempos de aprendizagem distintos. Assim, pode ocorrer que nem todos, nos mesmos espaços e tempos, conseguirem se apropriar e desenvolver os conhecimentos necessários para uma aprendizagem satisfatória, o que remete à necessidade de se promover espaços, condições e meios para que a aprendizagem possa se desenvolver satisfatoriamente, incluindo-se aí a possibilidade de estudos de recuperação.

Neste contexto, concorda-se com Coll (1997) quando destaca que o processo educativo se desenvolve, as necessidades dos alunos variam e, consequentemente, o tipo de ajuda pedagógica deve ir sendo ajustado paralelamente. Assim, a medida que os processos avaliativos são postos em prática e apontam dificuldades, entraves e defasagens ao longo dos processos de ensino e aprendizagem, as ações e práticas devem ser ajustadas de acordo com as necessidades dos alunos, se aproximando do que estabelece a Lei de Diretrizes e Bases da Educação

[1] Prova e Provinha Brasil são avaliações em larga escala, desenvolvidas pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (Inep/MEC). Têm o objetivo de avaliar a qualidade do ensino oferecido pelo sistema educacional brasileiro a partir de testes padronizados e questionários socioeconômicos.

Nacional, LDB nº 9394/96, no inciso V do art. 24, quando aponta para a "[...] obrigatoriedade de estudos de recuperação, de preferência paralelos ao período letivo, para os casos de baixo rendimento escolar, a serem disciplinados pelas instituições de ensino em seus regimentos” (BRASIL, 2014, p.19).

Considerando a necessidade e pertinência de se promover estudos de recuperação, Lemos (2013) desenvolveu uma investigação em torno de uma Sequência Didática Eletrônica sobre o conteúdo Equações de 1º grau, visando estudos de recuperação, onde foi possível perceber que tais estudos se constituem em um caminho possível para a superação das dificuldades dos estudantes. Porém, pondera-se que, para atingir esse objetivo, estes estudos devem ser organizados levando em consideração não só as dificuldades comuns ao grupo, mas também, as apresentadas individualmente pelos estudantes, ou seja, deve-se buscar uma recuperação individualizada e estruturada a partir de estratégias diferenciadas das já utilizadas em sala de aula.

Assim, entende-se que as discussões em torno do desenvolvimento de propostas de estudos de recuperação retomam a posição da mesma como um elemento necessário e importante dentro do processo de ensino e aprendizagem. Particularmente, no que diz respeito à aprendizagem em Matemática, objeto de estudo desta investigação, a frequência com que os estudantes apresentam baixo desempenho e rendimento remete a necessidade de se organizar propostas que permitam uma retomada de conceitos, definições, propriedades e procedimentos que, em um primeiro momento, não foram aprendidos como o esperado.

Neste sentido, e a partir dos resultados alcançados em Lemos (2013), vislumbrou-se a realização de uma investigação em torno do desenvolvimento de uma proposta de estudos de recuperação para os anos finais do Ensino Fundamental. Particularmente, a Geometria se apresentou como um campo fértil para o desenvolvimento de tal proposta.

A escolha da Geometria como temática da proposta de estudos, se relacionou, em um primeiro momento, ao fato de que a mesma tem sido foco de investigações e discussões, não só no que se refere a pesquisas em torno do seu processo de ensino e aprendizagem, mas também, sobre a possível ausência da Geometria na sala de aula da Educação Básica (PAVANELLO,1989, 1993; LORENZATO,1995, 2006; PEREIRA, 2001; ANDRADE, 2004), se tornando uma área da Matemática fragilizada na escola, de acordo com os autores apontados. Posteriormente, o avanço nos estudos e as discussões com um grupo de professoras do Programa MatematicAção, onde parte da investigação foi desenvolvida, apontaram elementos que vieram a corroborar essa ideia inicial, o que levou ao entendimento de que o desenvolvimento de estudos de recuperação se tornam ainda mais pertinentes.

As reflexões possibilitadas pela pesquisa realizada e apresentada em Lemos (2013) permitiram perceber que estudos de recuperação, os quais considerem as dificuldades e entraves dos estudantes sobre um determinado tema, envolvem distintos elementos, desde a identificação dos objetos matemáticos a serem considerados no estudo, o planejamento de atividades e dos materiais até o seu processo de implementação e avaliação. Assim, encontrou-se no Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) desenvolvido pelo Grupo de Pesquisa Teoría y Metodología de Investigación en Educación Matemática liderado por Juan D. Godino[2], um aporte para a investigação desenvolvida, tendo em vista que este enfoque contempla discussões tanto no que se refere ao conhecimento matemático, como também, a aspectos cognitivos, mediacionais, interacionais e emocionais envolvidos no ensino e aprendizagem da Matemática. O EOS foi tomado, na investigação, como um aporte tanto teórico como metodológico, uma vez que seus construtos embasaram o desenvolvimento da proposta de estudos e também as análises produzidas.

Neste contexto, a investigação aqui apresentada foi desenvolvida em uma perspectiva qualitativa e teve como objetivo **investigar o desenvolvimento e implementação de uma proposta de estudos de recuperação em torno da Geometria para os anos finais do Ensino Fundamental, sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática,** sendo estruturada em seis etapas. As etapas iniciais contemplaram o estudo e aprofundamento teórico das temáticas a serem discutidas, como também a concepção, planejamento e construção da proposta de estudos de recuperação. Já as etapas finais, tiveram como foco a implementação e análise da proposta desenvolvida.

Este trabalho, que apresenta a organização, desenvolvimento e análise da investigação proposta está estruturado em oito capítulos. O primeiro, refere-se a contextualização da investigação, onde são destacados as motivações e os percursos que levaram a pesquisadora a desenvolvê-la, assim como a questão norteadora e os objetivos. Os capítulos dois, três e quatro se referem aos aspectos teóricos que embasam a investigação, sendo eles: a Recuperação, o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática e a Geometria no Ensino Fundamental. Já o quinto capítulo apresenta os aspectos metodológicos nos quais a investigação está apoiada, assim como os instrumentos de coleta de dados, o lócus e sujeitos de pesquisa. O sexto capítulo discute os primeiros passos realizados para a constituição da proposta, apresentando o Programa MatematicAção e as ações realizadas junto ao grupo de professores, as análises produzidas referentes aos estudantes participantes da investigação, traçando seus

[2] O conjunto de trabalhos que foram desenvolvidos em torno do EOS estão disponíveis em http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/.

perfis, suas motivações em participar dos estudos, bem como, seus conhecimentos geométricos prévios evidenciados na resolução de uma atividade inicial. O sétimo capítulo apresenta a proposta de estudos de recuperação para a Geometria do Anos Finais do Ensino Fundamental, discutindo sua estrutura, os recursos utilizados e os tópicos desenvolvidos. Já o oitavo capítulo aborda as análises produzidas sob a perspectiva do EOS, tanto da proposta, no que se refere a sua constituição, como também da sua implementação junto a um grupo de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental.

As Considerações Finais encerram esta tese, discutindo os aspectos relevantes alcançados, buscando realizar uma reflexão sobre todo o trabalho desenvolvido e as futuras possibilidades de invetigações. Em seguida, apresenta-se as Referências, Apêndices e Anexos.

1 CONTEXTUALIZANDO A PESQUISA

O número de alunos que apresentam dificuldades na apropriação de conceitos matemáticos, na visão dos professores, é elevado e uma constante nas escolas. À medida que novos conceitos são apresentados, ao invés da superação dessas dificuldades, os estudantes vão acumulando outras. Como consequência, passam a ser estigmatizados como incapazes para a Matemática, elevando as estatísticas da reprovação e exclusão escolar (ARAÚJO; CARDOSO, 2006).

Fiorentini e Miorim (1990) ponderam que as dificuldades encontradas por alunos e professores no processo de ensino e aprendizagem da Matemática indicam que o aluno não consegue entender a Matemática que a escola lhe ensina, sendo muitas vezes reprovado na disciplina. Ainda, mesmo quando aprovado, esse aluno apresenta dificuldades em utilizar o conhecimento "adquirido", não conseguindo, efetivamente, ter acesso a esse saber. Assim, o professor, consciente de que não consegue alcançar resultados satisfatórios com os estudantes e tendo dificuldades de, por si só, repensar satisfatoriamente seu fazer pedagógico, procura novos elementos para melhorar esse processo de ensino e aprendizagem.

Neste sentido, Machado (2010) considera a necessidade de uma recuperação que ocorra ao longo do processo de ensino e aprendizagem, a qual possibilite aos estudantes retomar ideias e conceitos não assimilados ou compreendidos, evitando, dessa forma, acúmulos de dúvidas e incertezas e uma carga excessiva de questões a serem retomadas no final do processo. O autor vê essa perspectiva como a mais adequada e considera que os professores devem buscar novas alternativas para a retomada dos conteúdos a serem recuperados, apontando que “ [...] uma forma alternativa de trabalho que poderia ser aplicada não apenas na recuperação seria a utilização de jogos, projetos interativos [...]” (MACHADO, 2010, p.1).

O autor destaca, ainda, que é importante que a recuperação seja repensada como um dos grandes desafios da educação, sendo essencial que os professores assumam esse compromisso, tornando-a uma ferramenta eficaz no combate às dificuldades e problemas verificados na aprendizagem dos conteúdos previstos para cada ano escolar.

Assim, as dificuldades apresentadas pelos estudantes em Matemática e as ações e estratégias que os professores poderiam realizar visando à superação de tais dificuldades pelos alunos, sempre foram temas que instigaram esta pesquisadora. Desde a iniciação científica, na graduação, tive[3] a oportunidade de desenvolver pesquisas nesses contextos. O primeiro contato com propostas de recuperação voltadas a alunos que apresentassem dificuldades de

---

[3] A parte do texto que apresenta as experiências e ações pessoais da autora serão redigidas em 1ª pessoa.

aprendizagem em Matemática ocorreu no Grupo de Estudos Curriculares em Educação Matemática (GECEM), vinculado ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática (PPGECIM) da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), em que participei da implementação de uma sequência didática eletrônica sobre Multiplicação com Números Naturais no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizado – SIENA. Com essa experiência, foi possível perceber as potencialidades de pesquisas com essa temática, o que resultou na realização de minha Dissertação de Mestrado (LEMOS, 2013), que teve como foco investigar em que medida uma sequência didática eletrônica sobre equações de 1º grau favorece a recuperação de conteúdos e a superação de dificuldades no tema.

Os resultados alcançados em Lemos (2013) apontaram para a importância de se organizar propostas diferenciadas, que buscassem viabilizar estudos de recuperação que não estivessem focados apenas na melhoria de notas, diferentemente do que via de regra ocorre no meio educativo, defendendo-se, assim, a ideia de que,

> [...] a recuperação de conteúdos possa ser repensada, que esta possa de fato ocorrer, que deixe de acontecer somente uma recuperação de notas, através de provas, ou uma recuperação realizada para todos os alunos, não considerando as dificuldades individualizadas (LEMOS, 2013, p. 178).

Já neste momento compartilhava-se com autores (BACHA; MALUF, 1974; GROENWALD; MORENO, 2007; MACHADO, 2010) a visão que,

> [...] a recuperação de conteúdos deve ocorrer paralelamente ao desenvolvimento dos conteúdos, sendo progressivamente superadas as lacunas e dificuldades apresentadas, devendo-se buscar estratégias que permitam aos alunos superar suas dificuldades e não rever todo o conteúdo novamente da mesma forma que foi visto anteriormente e da mesma forma e nível de complexidade para todos os estudantes (LEMOS, 2013, p. 178).

Nesse contexto, e a partir das reflexões e resultados alcançados, vislumbrou-se a continuidade de investigações em torno da temática recuperação, levando-se em consideração a necessidade de que tais propostas estejam embasadas em construtos teóricos que deem conta da complexidade das relações que se estabelecem entre os atores do processo de ensino e aprendizagem: professor, estudantes, conteúdo e meio educativo. Assim, surgiu a investigação que será aqui apresentada, e que toma o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) como aporte teórico e metodológico.

O EOS trata e aproxima questões referentes ao próprio conhecimento matemático e, também, a instrução matemática, ou seja, o processo de ensino e aprendizado envolvido. Amplia a visão e o conceito do objeto matemático, atribuindo a este significados institucionais e pessoais, aponta a pertinência e relevância das ações realizadas, dos conhecimentos apresentados e dos recursos utilizados em um processo de ensino e aprendizagem de matemática.

Outro aspecto que decorreu dos resultados de Lemos (2013) foi a necessidade de envolver professores de Matemática, que atuem em sala de aula, na constituição de tais propostas, as quais, entende-se, não devem ser elaboradas isoladamente por um professor ou, no caso desta investigação, pela pesquisadora. Considera-se que estudos de recuperação fazem parte do processo de ensino e aprendizagem e devem ser pensados e estruturados a partir de discussões, reflexões e planejamentos em torno das necessidades e especificidades do grupo de estudantes ao qual o estudo está destinado, possibilitando, assim, a constituição de uma proposta de estudo diferenciada e, ao mesmo tempo, integrada ao contexto apresentado pelos estudantes em sala de aula. Neste contexto, buscou-se a parceria com o Programa MatematicAção, já estabelecido como um programa de formação continuada, desenvolvido em parceria pelo Programa de Pós-Graduação e Ensino de Ciências e Matemática - PPGECIM da ULBRA e a Secretaria Municipal de Educação da cidade de São Leopoldo/RS, para a constituição de um grupo colaborativo de professores com o objetivo de aprofundar conhecimentos teóricos, analisar possibilidades, discutir e refletir sobre a questão.

Assim, a partir de estudos realizados, da análise da proposta curricular do Município e de planos de estudos, bem como das discussões e reflexões ocorridas durante os encontros com o grupo de professores, considerou-se o bloco de conteúdos Espaço e Forma como um campo fértil para o desenvolvimento de uma proposta de conteúdos para os anos finais do Ensino Fundamental, tendo em vista que o trabalho com as noções geométricas possibilita que o estudante desenvolva competências e habilidades de observar, comparar, analisar, quantificar, estabelecer relações, identificar regularidades e perceber semelhanças e diferenças, o que contribui, também, para a aprendizagem das demais áreas da Matemática. Como já apontado, outro aspecto considerado como relevante para a escolha deste bloco foi o fato de que o ensino da Geometria, na Educação Básica, está muito fragilizado e muitas vezes ausente das salas de aula, conforme resultados de pesquisas da área (PAVANELLO,1989,1993; LORENZATO,1995, 2006; PEREIRA, 2001; ANDRADE, 2004). Esse entendimento foi confirmado pelo relato das professoras participantes do grupo, o que atribuiu importância para a retomada da Geometria a ser desenvolvida nos anos finais do Ensino Fundamental.

As reflexões, visões e entendimentos apontados deram forma à questão de investigação: **Como desenvolver uma proposta de estudos de recuperação referente à Geometria a ser ensinada e aprendida nos anos finais do Ensino Fundamental, sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática?**

A questão norteadora encaminhou o objetivo geral da pesquisa: I**nvestigar o desenvolvimento e implementação de uma proposta de estudos de recuperação em torno da Geometria para os anos finais do Ensino Fundamental, sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática.**

Para alcançar o objetivo proposto foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- analisar e selecionar metodologias e recursos adequados ao desenvolvimento de uma proposta de estudos de recuperação;
- estruturar uma proposta de estudos de recuperação;
- investigar a implementação da proposta de estudos a um grupo de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental;
- analisar a proposta de estudos de recuperação desenvolvida frente aos pressupostos do EOS.
- investigar se as estratégias utilizadas na proposta de estudos implementada favorecem estudos de recuperação.

Visando a alcançar os objetivos estabelecidos e responder à questão norteadora, estruturou-se uma proposta de estudos de recuperação, desenvolvida por meio de materiais de estudos, os quais aliam a utilização de recursos advindos das tecnologias digitais ao desenvolvimento de atividades e a resolução de situações problemas, com materiais concretos e o uso de régua e compasso, em torno da retomada de conceitos, procedimentos e definições contemplados em quinze tópicos referente à Geometria dos anos finais do Ensino Fundamental, sendo eles: **Figuras Geométricas; Ponto, Reta e Plano; Polígonos; Simetria; Ângulos; Triângulos; Quadriláteros; Área e Perímetro; Volume; Congruência; Semelhança, Teorema de Tales; Teorema de Pitágoras; Relações Métricas; Círculo e Circunferência.**

No que segue, apresentam-se os aspectos teóricos que embasaram a constituição desta proposta e o desenvolvimento da investigação referente à Recuperação, ao Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e à Instrução Matemática (EOS) e a Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental.

2 RECUPERAÇÃO DE CONTEÚDOS, ESTUDOS OU NOTAS?

Neste capítulo, apresentam-se discussões e reflexões em torno da temática Recuperação, presentes em pesquisas da área de Educação e Educação Matemática, em documentos oficiais, como leis e pareceres em níveis nacional e estadual, assim como as concepções defendidas e adotadas no desenvolvimento da investigação.

Entende-se que estudos de recuperação é um tema relevante e necessário de ser discutido, uma vez que se considera que o mesmo está diretamente relacionado ao processo de ensino e aprendizagem e às dificuldades apresentadas durante seu desenvolvimento, que podem levar a um fracasso escolar. Araújo (2008) destaca que o fracasso escolar é um dos problemas mais antigos e sérios da educação brasileira, que está sempre presente nas discussões tanto de governantes como da sociedade em geral e, principalmente, de agentes da educação que visam a buscar uma solução para esse problema agudo, quase estrutural, da educação de nosso país.

Recuperação, segundo o dicionário Michaelis (2015), é o ato ou efeito de recuperar (-se); recobramento; recobro. No que se refere à Educação, aponta como período de aulas e de estudo destinado a alunos que não foram aprovados e devem ter mais uma oportunidade para não perder o semestre ou o ano acadêmico.

Na investigação desenvolvida, a recuperação é entendida como ato ou efeito de recuperar, retomar o que não foi plenamente consolidado no que se refere à apropriação de conceitos ou procedimentos. A recuperação é assumida, aqui, como parte do processo de ensino e aprendizagem, não se constituindo em momento isolado, que ocorre por meio da aplicação de uma avaliação que objetiva somente recuperar uma nota, por exemplo. A recuperação aqui proposta é constituída de estudos específicos, os quais consideram as necessidades, dificuldades e entraves manifestados pelos estudantes, ocorrendo de forma paralela às aulas e tão logo que as dificuldades se apresentem.

Nesse sentido, Groenwald e Moreno (2007) destacam que a recuperação se constitui em elemento importante no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, na qual se busca a superação das dificuldades e a compreensão dos conteúdos desenvolvidos. Coll (1997, p.148) pondera, também, que “[...] à medida que o processo educativo se desenvolve, o aluno evolui, suas necessidades variam e, consequentemente, o tipo de ajuda pedagógica deve ir sendo ajustado paralelamente”. Para o autor essas necessidades devem ser observadas pelos professores ao longo das aulas, constituindo-se em elemento norteador do processo de ensino, fazendo parte de um processo de avaliação formativa.

Nesse contexto, considera-se que os estudos de recuperação são um caminho possível para a superação de dificuldades. Concorda-se com Dutra (2008) quando aponta a recuperação como um instrumento capaz de recuperar, também, a autoestima, possibilitando ao aluno outra oportunidade para que alcance os objetivos de aprendizagem previstos. A visão do autor alia-se ao entendimento de que estudos de recuperação devem ocorrer, tão logo as dificuldades sejam manifestadas, a partir de estratégias diferenciadas que possibilitem situações de aprendizagens distintas das já apresentadas, as quais considerem necessidades e dificuldades individuais.

Nesse sentido, concorda-se com Paro (2001, p.42) quando afirma que:

> A recuperação deveria ser pensada como princípio derivado da própria avaliação. Esta, num processo contínuo e permanente, embutido no próprio exercício de ensinar e aprender diagnosticaria os problemas e dificuldades que a recuperação também num processo contínuo e permanente, de solucionar (ou intentar soluções) pelo oferecimento de novos recursos e alternativas de ação.

Concorda-se, também, com Sallum, Allevato e Schimiguel (2012) quando apontam a recuperação como parte do processo de ensino e aprendizagem e tomam como princípio básico que as escolas deveriam promover uma educação de qualidade que proporcionasse aos alunos aprendizagem por meio de currículo apropriado e promovesse modificações organizacionais, estratégias de ensino e uso de recursos adequados, de modo a procurar respeitar, por um lado, a equidade de acesso aos recursos tecno-didático-pedagógicos disponíveis e, por outro lado, as diferenças individuais, minimizando ou mesmo sanando as dificuldades e defasagens diagnosticadas na atividade de aprendizagem. Os autores ponderam, ainda, que, apesar da importância da recuperação e do suporte jurídico dado a mesma, observa-se que, de modo geral, sabe-se muito pouco a respeito de todo o processo que envolve a recuperação de estudos dentro de uma escola.

Dutra (2008) e Caldas (2010) consideram que o número de trabalhos publicados a respeito de todo o processo que envolve a recuperação de estudos dentro de uma escola é pequeno, principalmente no que se refere aos resultados alcançados. Quando se trata especificamente de recuperação de estudos em torno da Matemática, esse número diminui ainda mais, sendo esse um dos fatores que inspiraram o desenvolvimento desta investigação[4].

Diante dessa problemática, de se conhecer pouco o que ocorre de fato nas recuperações nas escolas, surgem questionamentos sobre os aspectos positivos e negativos no desenvolvimento destas nas escolas, conforme destaca Vasconcellos (2000, p. 78).

---

[4] Destaca-se que os trabalhos de investigação revelados pela revisão de literatura são apresentados ao longo de todo o texto da tese, quando pertinentes.

> [...] os estudos de recuperação padecem de uma ambiguidade: são apontados como a grande saída para ajudar os alunos com dificuldades, mas frequentemente não passam de uma proposta que não sai do papel, em função das condições objetivas de trabalho dos professores. A partir daí alguns problemas se apresentam: a recuperação da nota, mas não da aprendizagem; a recuperação da aprendizagem, mas não da nota; nem uma nem outra. Cabe, a pergunta: a recuperação recupera? O quê?

Nesse sentido, Sallum, Allevato e Schimiguel (2012) ponderam que:

> [...] o insucesso ou sucesso desse processo pode ter suas origens em vários fatores, tais como: a disponibilidade de tempo por parte dos docentes; a disponibilidade de recursos/infraestrutura necessária para que o processo de recuperação possa acontecer paralelamente durante o período letivo e; questões de ordem pessoal relacionadas aos próprios alunos. Além desses fatores, há aqueles que, sistematicamente, atingem diretamente todos os elementos envolvidos no processo ensino-aprendizagem (alunos, docentes e instituição): as metodologias aplicadas (SALLUM; ALLEVATO; SCHIMIGUEL, 2012, p.2).

Caldas (2010) chama a atenção para o fato de que desde a LDB de 1971 há muitas incompreensões em torno da recuperação. Os critérios e as escolhas das estratégias mostram-se bastante subjetivos à medida que dependeriam da sensibilidade pedagógica da equipe escolar, de modo que as atividades de recuperação não se tornassem meras repetições do que já foi realizado pelos alunos e que não obtiveram êxito, espremidas em poucos dias no final do ano letivo. Assim, a ênfase dada para que as atividades de recuperação fossem "de preferência paralelas ao período letivo", segundo a autora, foi uma tentativa de minimizar esse problema.

Já Dutra e Martins (2012), destacam que o tema recuperação sempre gerou debates entre professores e coordenações pedagógicas, com discussões em torno de sua validade e reais benefícios. De acordo com os autores, chega-se muitas vezes a impressão de que a recuperação é utilizada apenas para reduzir o número de reprovações, amenizando a tensão entre escola, alunos e pais.

A recuperação até aqui destacada está presente não somente em pesquisas e discussões acadêmicas, mas é apontada há muito na legislação educacional brasileira. Assim, no que segue, discute-se a respeito da recuperação, como esta é entendida e estabelecida nos documentos oficiais, tanto em nível nacional quanto estadual.

2.1 RECUPERAÇÃO: O DISCURSO NOS DOCUMENTOS OFICIAIS

Visando a um respaldo legal e à compreensão do que foi e está sendo estabelecido e entendido sobre a recuperação no contexto da Educação Básica no país, buscou-se encontrar a presença de normatizações, indicações ou citações na legislação brasileira.

Segundo Caldas (2010), o primeiro registro encontrado referindo-se à temática foi na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) nº 4024 de 20 de dezembro de 1961. No documento, de acordo com o autor, não é apresentada explicitamente a obrigatoriedade da escola promover espaços de recuperação para alunos que apresentem baixo rendimento, porém, no artigo que se refere aos recursos para a Educação, é mencionada a importância de se assegurar "o acesso à escola pelo maior número possível de educandos" e "a melhoria progressiva do ensino e o aperfeiçoamento dos serviços de educação" (art. 93 do Título XII), o que o autor entende como um modo indireto de indicar e respaldar a necessidade de classes de recuperação.

Já na LDB nº 5692 de 11 de agosto de 1971, a recuperação é apresentada explicitamente, por meio dos artigos e parágrafos destacados a seguir, como sendo obrigatória:

> Art. 11, 1º parágrafo:
> Os estabelecimentos de ensino de 1º e 2º graus funcionarão entre os períodos letivos regulares, para, além de outras atividades, proporcionar estudos de recuperação aos alunos de aproveitamento insuficiente e ministrar, em caráter intensivo, disciplinas, áreas de estudo e atividades planejadas com duração semestral, bem como desenvolver programas de aperfeiçoamento de professores e realizar cursos especiais de natureza supletiva.
> Art. 14, 2º parágrafo:
> O aluno de aproveitamento insuficiente poderá obter aprovação mediante estudos de recuperação, proporcionados obrigatoriamente pelo estabelecimento.
> Art. 14, 3º parágrafo:
> Ter-se-á como aprovado quanto à assiduidade: a) o aluno de frequência igual ou superior a 75% na respectiva disciplina, área de estudo ou atividade; b) o aluno de frequência inferior a 75% que tenha obtido aproveitamento superior a 80% da escala de notas ou menções adotadas pelo estabelecimento; c) o aluno que não se encontre na hipótese da alínea anterior, mas com frequência igual ou superior ao mínimo estabelecido em cada sistema de ensino pelo respectivo Conselho de Educação, e que demonstre melhoria de aproveitamento após estudos a título de recuperação (BRASIL, 1971).

Considera-se que apesar das indicações na lei 5692/71 sobre a obrigatoriedade da recuperação, esta parece estar mais focada na melhoria das notas obtidas pelos estudantes nas avaliações para uma aprovação do que, propriamente, na qualidade da aprendizagem apresentada. Nesse sentido, o Conselho Estadual de Educação de São Paulo (CEE/SP), em seu Parecer 05/98, manifesta que "[...] percebe-se, nitidamente, que o conceito de recuperação estava mais associado ao de "aprovação" do que ao de aprendizagem, no seu sentido amplo: o de o aluno apropriar-se do conhecimento" (SÃO PAULO, 1998, p.966).

Também sobre os estudos de recuperação estabelecidos pela lei 5692/71, Caldas (2010) ressalta que:

> A preocupação com o aproveitamento máximo das potencialidades institucionais e individuais apontava, como uma estratégia de fundamental importância, os cuidados com a verificação do rendimento dos alunos, buscando disseminar "a vergonha

> nacional", expressão com a qual o então presidente da república havia denominado a elevada taxa de analfabetismo no Brasil. A avaliação do rendimento escolar tinha na lei uma grande amplitude, porque pretendia, para além de considerar os conteúdos assimilados, levar em conta os fatores qualitativos. Propunha, assim, que a reprovação fosse parcialmente substituída pelos estudos de recuperação a serem proporcionados, obrigatoriamente, pelos estabelecimentos de ensino no país (CALDAS, 2010, p. 44).

Visando a subsidiar e orientar os professores em relação ao que a lei 5692/71 preconizava sobre recuperação, o Ministério da Educação e Cultura (MEC), em 1974, publicou o documento intitulado **Promoção e Recuperação** de autoria de Magdala Lisboa Bacha e Maria Carolina do Couto Maluf.

Nesse documento, Bacha e Maluf (1974) já indicavam que a recuperação deveria ser específica para as dificuldades individuais, sendo dever da escola oportunizar aos alunos essa recuperação. Ressaltavam, ainda, que a recuperação deveria ser realizada buscando-se novas estratégias de ensino, isto é, que o conteúdo fosse retomado de forma diferente da inicialmente realizada em sala de aula. De acordo com as autoras, seria interessante que os professores tivessem uma formação para trabalhar com a recuperação, prestando um atendimento diferenciado com materiais variados e incentivadores destacando que os trabalhos de recuperação "[...] devem visar à melhoria da aprendizagem e não à melhoria da nota, embora esta venha a ser uma consequência da primeira" (BACHA; MALUF, 1974, p.40).

Já a partir da Lei de Diretrizes e Bases (LDB), de nº 9394 sancionada em 20 de dezembro de 1996 (BRASIL, 2014), e vigente até a presente data, o conceito de recuperação é ampliado, sendo discutido nos seguintes artigos:

> Art. 12. Os estabelecimentos de ensino, respeitadas as normas comuns e as do seu sistema de ensino, terão a incumbência de:
> V – prover meios para a recuperação dos alunos de menor rendimento;
> VI – articular-se com as famílias e a comunidade, criando processos de integração da sociedade com a escola;
> Art. 13. Os docentes incumbir-se-ão de:
> IV – estabelecer estratégias de recuperação para os alunos de menor rendimento;
> Art. 24. A educação básica, nos níveis fundamental e médio, será organizada de acordo com as seguintes regras comuns:
> V – a verificação do rendimento escolar observará os seguintes critérios:
> a) avaliação contínua e cumulativa do desempenho do aluno, com prevalência dos aspectos qualitativos sobre os quantitativos e dos resultados ao longo do período sobre os de eventuais provas finais;
> b) possibilidade de aceleração de estudos para alunos com atraso escolar;
> c) possibilidade de avanço nos cursos e nas séries mediante verificação do aprendizado;
> d) aproveitamento de estudos concluídos com êxito;
> e) obrigatoriedade de estudos de recuperação, de preferência paralelos ao período letivo, para os casos de baixo rendimento escolar, a serem disciplinados pelas instituições de ensino em seus regimentos; (BRASIL, 2014, p.19).

É possível perceber que na LDB nº 9394/96 o foco da recuperação está voltado ao desempenho e ao rendimento do aluno, porém as formas de realizá-la ainda ficam em aberto. De acordo com o Parecer 05/98 (SÃO PAULO, 1998), o Conselho Nacional de Educação e os Conselhos Estaduais de Educação, à época, vinham regulamentando e interpretando a LDB sobre diferentes questões, inclusive o tema da recuperação.

Mais especificamente, o Conselho Estadual de Educação de São Paulo (CEE/SP) e a Secretaria de Educação deste Estado empregam distintos termos para se referir à temática recuperação: recuperação contínua, recuperação paralela, recuperação final, recuperação intensiva de férias, além da palavra "reforço", usada com sentido semelhante. À qual dessas formas de recuperação a escola está subordinada? Todas elas podem ser utilizadas? A existência de uma forma de recuperação desobriga a escola de utilizar as outras? Essas questões foram postas e analisadas pelos Conselhos Estaduais de Educação visando a uma regulamentação.

O Parecer do CEE/SP 05/98 ressalta que é importante que o conceito de recuperação seja bem analisado e compreendido, mas antes é preciso repensar o conceito de educação escolar. Este consiste na formação integral e funcional dos educandos, ou seja, na aquisição de capacidades de todo tipo: cognitivas, motoras, afetivas, de autonomia, de equilíbrio pessoal, de inter-relação pessoal e de inserção social. Assim, os conteúdos escolares não podem se limitar somente aos conceitos, e devem incluir procedimentos, habilidades, estratégias, valores, normas e atitudes que, articulados, possam ser utilizados para resolver problemas em distintos contextos.

Ainda, segundo o parecer CEE/SP nº 05/98, recuperar significa voltar, tentar de novo, adquirir o que perdeu, não podendo ser entendido como um processo unilateral, pois se o aluno não aprendeu, o ensino não produziu seus efeitos. Para recobrar algo perdido, é preciso sair a sua procura e iniciar o quanto antes, inventar estratégias de busca, refletir sobre as causas, sobre o momento ou circunstâncias em que se deu a perda e pedir ajuda. Diante disso, a recuperação de aprendizagem deve ocorrer tão logo seja constatada a perda, e ser contínua e dirigida às dificuldades específicas do aluno, buscando abranger não somente os conceitos, mas também as habilidades, procedimentos e atitudes.

Já o Conselho Estadual de Educação do Rio Grande do Sul (CEED/RS), por meio do Parecer nº 740/99, aponta que os estudos de recuperação têm como objetivo auxiliar o aluno na diminuição das dúvidas e na superação das dificuldades surgidas no decorrer do processo de ensino e aprendizagem. Esses estudos de recuperação devem ser organizados pela escola, de forma individual ou coletiva (RIO GRANDE DO SUL, 1999).

O CEE/SP nº 05/98 destaca, ainda, que os alunos não aprendem da mesma maneira nem no mesmo ritmo. O que podem aprender em uma determinada fase dependerá de seu nível de amadurecimento, de seus conhecimentos anteriores, de seu tipo de inteligência (mais verbal, mais lógica ou mais espacial), por exemplo.

Nessa mesma linha de pensamento, o Parecer nº 740/99 do CEED/RS ressalta, também, que o fundamental é a superação das lacunas na aprendizagem, sendo que a escola deverá considerar as diferenças individuais dos alunos e a diversidade das causas determinantes de situações de recuperação. É de se esperar que o tempo de duração desses estudos varie de acordo com a construção do conhecimento de cada aluno. Aponta, ainda, que a recuperação não necessariamente precisa ser realizada em sala de aula, podendo se desenvolver em qualquer outro ambiente dentro ou fora da escola, dependendo do espaço disponível.

É possível perceber que tanto nas versões da Lei de Diretrizes e Bases como nos pareceres estaduais que as complementam, a recuperação é tratada como uma parte importante do processo de ensino e aprendizagem, principalmente no que se refere à superação das dificuldades de forma contínua e paralela ao desenvolvimento do mesmo, sendo atribuído a escola e professores a efetivação da recuperação.

Diante dos aspectos discutidos sobre a recuperação, tanto no que se refere a sua legitimidade, enquanto lei obrigatória, como na sua real função e efetivação no ambiente escolar e parte do processo de ensino e aprendizagem, passa-se a discutir, no que segue, as relações existentes entre a recuperação e a avaliação.

2.2 AVALIAÇÃO *VERSUS* RECUPERAÇÃO

Senn e Bastos (2008) destacam que avaliação e recuperação fazem parte do processo de ensino e aprendizagem, devendo ter como princípio básico o respeito à diversidade e o ritmo de aprendizagem de cada estudante. Nesse sentido, a avaliação é destacada na LDB como contínua e cumulativa “[...] com prevalência dos aspectos qualitativos sobre os quantitativos e dos resultados ao longo do período sobre os de eventuais provas finais” (BRASIL, 2014, p. 18).

O Parecer nº 740/99 do CEED/RS também aponta a avaliação como parte integrante do processo de ensino e aprendizagem, que deve estar alinhada com a concepção pedagógica da escola e de seus professores. No documento é ressaltada a importância da continuidade na avaliação e também destacada a sua função diagnóstica, a qual

> [...] oferece os elementos necessários para que o professor possa planejar a continuidade de seu trabalho: retomando os aspectos que não foram assimilados ou ampliando a abrangência do conhecimento do aluno com a introdução de novos temas,

> de maior complexidade ou de mais abrangente aplicabilidade prática. Ao mesmo tempo, serve de diagnóstico também para o aluno, na medida em que a avaliação deve ser capaz de lhe fornecer informações a respeito de seu adiantamento, em relação àquilo que se espera que ele saiba, entenda, compreenda e faça, no nível escolar em que se encontra (RIO GRANDE DO SUL, 1999, p.16).

A continuidade referida no parecer permite ao professor identificar os avanços ou as dificuldades apresentadas pelos estudantes e, somente assim, ter elementos para encaminhar os alunos a estudos de recuperação, a fim de cumprir seu papel "[...] de corrigir a tempo as falhas na aprendizagem, de modo a evitar o fracasso escolar" (p.16). Já no que se refere a seu caráter cumulativo, é ressaltado que "[...] a avaliação não deve levar em conta, apenas, determinados recortes temporais ou temáticos, mas deve acompanhar a construção do conhecimento do aluno como um todo coerente e significativo" (RIO GRANDE DO SUL, 1999, p.16).

Nesse sentido, as Diretrizes Curriculares Nacionais da Educação Básica (DCN) estabelecem que a avaliação da aprendizagem é baseada na concepção de educação que norteia a relação professor-estudante-conhecimento-vida em movimento, devendo ser um ato reflexo de reconstrução da prática pedagógica avaliativa (BRASIL, 2013). O documento destaca ainda:

> § 1º A validade da avaliação, na sua função diagnóstica, liga-se à aprendizagem, possibilitando o aprendiz a recriar, refazer o que aprendeu, criar, propor e, nesse contexto, aponta para uma avaliação global, que vai além do aspecto quantitativo, porque identifica o desenvolvimento da autonomia do estudante, que é indissociavelmente ético, social, intelectual. § 2º Em nível operacional, a avaliação da aprendizagem tem, como referência, o conjunto de conhecimentos, habilidades, atitudes, valores e emoções que os sujeitos do processo educativo projetam para si de modo integrado e articulado com aqueles princípios definidos para a Educação Básica, redimensionados para cada uma de suas etapas, bem assim no projeto político-pedagógico da escola. [...] § 4º A avaliação da aprendizagem no Ensino Fundamental e no Ensino Médio, de caráter formativo predominando sobre o quantitativo e classificatório, adota uma estratégia de progresso individual e contínuo que favorece o crescimento do educando, preservando a qualidade necessária para a sua formação escolar, sendo organizada de acordo com regras comuns a essas duas etapas (BRASIL, 2013, p. 76).

Baseada na concepção estabelecida na LDB, as DCN apontam que a avaliação do aluno deve assumir um caráter processual, formativo e participativo, ser contínua, cumulativa e diagnóstica.

> A avaliação formativa, que ocorre durante todo o processo educacional, busca diagnosticar as potencialidades do aluno e detectar problemas de aprendizagem e de ensino. A intervenção imediata no sentido de sanar dificuldades que alguns estudantes evidenciem é uma garantia para o seu progresso nos estudos. Quanto mais se atrasa essa intervenção, mais complexo se torna o problema de aprendizagem e, consequentemente, mais difícil se torna saná-lo. A avaliação contínua pode assumir várias formas, tais como a observação e o registro das atividades dos alunos, sobretudo nos anos iniciais do Ensino Fundamental, trabalhos individuais, organizados ou não em portfólios, trabalhos coletivos, exercícios em classe e provas, dentre outros. Essa avaliação constitui um instrumento indispensável do professor na busca do sucesso escolar de seus alunos e pode indicar, ainda, a necessidade de atendimento complementar para enfrentar dificuldades específicas, a ser oferecido no mesmo

> período de aula ou no contraturno, o que requer flexibilidade dos tempos e espaços para aprender na escola e também flexibilidade na atribuição de funções entre o corpo docente (BRASIL, 2013).

É possível perceber, nas indicações das DCN, a importância da recuperação e a necessidade de ação logo que as dificuldades são identificadas, assim como promover espaços e estratégias para a efetivação de estudos de recuperação. O Parecer nº 740/99 do CEED/RS destaca a importância de os professores refletirem sobre as avaliações realizadas pelos estudantes, quando declara que,

> [...] somente haverá uma mudança substantiva se os estudos de recuperação forem sendo proporcionados à medida mesma que as dificuldades forem sendo evidenciadas durante os bimestres, de modo que os resultados alcançados pelos alunos, ao final do bimestre, já revelem que tais dificuldades estão superadas (RIO GRANDE DO SUL, 1999, p.23).

A partir das discussões apresentadas neste capítulo, sobre o que está estabelecido na legislação brasileira e nas reflexões e resultados de pesquisas em torno da recuperação, aponta-se, a seguir, o que é defendido nesta investigação com relação à temática recuperação.

2.3 QUAL RECUPERAÇÃO É DEFENDIDA?

Buscou-se discutir até aqui os conceitos, concepções, a obrigatoriedade nos documentos oficiais, os questionamentos em torno da execução e a eficácia da recuperação. Contudo, é de fundamental importância destacar e refletir sobre os tipos de recuperação e as condições necessárias e defendidas para que o processo recuperativo alcance seus objetivos que, de maneira geral, diz respeito a possibilitar aos estudantes superar as dificuldades, entraves e lacunas de aprendizagem adquiridas ao longo da vida estudantil.

Nesse contexto, entende-se que as dificuldades de aprendizagem, no que se refere à Matemática, não se constitui em tema novo, porém a forma como essas dificuldades devem ser analisadas e conduzidas no âmbito escolar têm gerado discussões e reflexões. Como já mencionado, a partir dos resultados alcançados em Lemos (2013), considera-se que um caminho possível para a superação de dificuldades é o desenvolvimento de propostas de estudos de recuperação. No entanto, pondera-se que essas propostas devem ser pensadas e organizadas visando a uma retomada de conceitos e procedimentos, cujo foco deve estar no conhecimento a ser desenvolvido e aprofundado e não na "nota a ser recuperada". Assim, entende-se a recuperação como o tempo e o espaço nos quais será oportunizado ao estudante revisitar um conteúdo, partes específicas dele, ou um conjunto de noções, conceitos e procedimentos considerados pertinentes. Isto é, não se trata de uma prova ou atividade isolada, mas de um conjunto de estratégias, que visam à superação de dificuldades e lacunas de aprendizagens, além de propiciar e possibilitar a ampliação dos conhecimentos do estudante em um tema.

Contudo, entende-se que uma recuperação, nesse sentido, é um desafio a ser enfrentado pelos agentes envolvidos no processo educativo, uma vez que deve ser constituída a partir de estratégias diferenciadas das já utilizadas em sala de aula, visando não somente à “superação” das dificuldades comuns ao grupo, mas, também, das apresentadas individualmente pelos estudantes, respeitando, sempre, suas especificidades.

Entende-se como estratégias diferenciadas a busca por metodologias que possibilitem um estudo dinâmico e individualizado, em que os estudantes terão materiais e situações previamente organizados, que lhes possibilitem seguir seu próprio ritmo de aprendizagem. Assim, na proposta de recuperação apresentada nesta investigação foi desenvolvido um conjunto de Materiais de Estudos, construídos em *Power Point*, articulando o desenvolvimento de conceitos, procedimentos e definições com situações problemas, atividades e jogos online, objetos de aprendizagem, uso de softwares, bem como atividades de construção e manipulação. Considera-se que essa diversidade de recursos possibilita uma maior interação entre o estudante e o conteúdo, uma vez que são disponibilizadas diferentes mídias e ações, buscando proporcionar interações que levem à compreensão dos temas em estudo.

Defende-se, também, que esses períodos de estudos de recuperação devam ocorrer paralelamente ao desenvolvimento do conteúdo, como atividade extraclasse, que possam ser desenvolvidas na escola ou em outros espaços, tão logo sejam identificadas as dificuldades. Considera-se que não se deve aguardar o fracasso em uma prova ou em um teste para possibilitar aos estudantes uma nova oportunidade de aprendizagem, devendo a avaliação ocorrer de forma contínua e formativa, tão logo se perceba a necessidade.

Considera-se que a proposta de recuperação aqui defendida atende ao que estabelece a legislação e é possível de ser implementada se houver comprometimento dos envolvidos no contexto escolar, desde os sistemas educativos (federal, estadual e municipal), da direção em oportunizar espaços e horários para o desenvolvimento e planejamento das atividades, até os professores em elaborar o material e os estudantes em participarem e aproveitarem a oportunidade de estudo. É importante e necessário, também, o apoio e valorização da família frente aos esforços produzidos pela escola.

Entende-se que a escola em tempo integral – realidade em alguns estados do Brasil – constitui um diferencial no desenvolvimento de uma proposta com tais características, não fazendo o Rio Grande do Sul, atualmente, parte dessa realidade. Nas Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) é destacada a importância de os estudantes terem uma educação integral.

> Há alguns anos, se tem constatado a necessidade de a criança, o adolescente e o jovem, particularmente aqueles das classes sociais trabalhadoras, permanecerem mais tempo na escola. Tem-se defendido que o estudante poderia beneficiar-se da ampliação da jornada escolar, no espaço único da escola ou diferentes espaços educativos, nos quais a permanência do estudante se liga tanto à quantidade e qualidade do tempo diário de escolarização, quanto à diversidade de atividades de aprendizagens. Assim, a qualidade da permanência em tempo integral do estudante nesses espaços implica a necessidade da incorporação efetiva e orgânica no currículo de atividades e estudos pedagogicamente planejados e acompanhados ao longo de toda a jornada. No projeto nacional de educação, tanto a escola de tempo integral quanto a de tempo parcial, diante da sua responsabilidade educativa, social e legal, assumem a aprendizagem compreendendo-a como ação coletiva conectada com a vida, com as necessidades, possibilidades e interesses das crianças, dos jovens e dos adultos (BRASIL, 2013, p. 26).

Nesse sentido, para que, de fato, ocorra uma mudança na recuperação realizada na escola atual, deixando de ser somente uma preocupação com a nota ou com índices de reprovação, as formas de recuperação devem ser repensadas e realizadas de modo que priorize o estudante, sua aprendizagem e desenvolvimento. Porém, percebe-se que tal mudança de concepção não se restringe somente ao ambiente escolar, com a participação de gestores, professores e os estudantes e suas famílias, devendo partir de políticas públicas que incentivem e promovam o desenvolvimento de propostas diferenciadas que atendam ao que está disposto na Lei de Diretrizes e Bases Nacional (LDB). Nesse processo, as ações realizadas não seriam mais tomadas como uma "recuperação", mas como uma continuidade do processo de ensino e aprendizagem em seu sentido mais amplo.

Colocou-se em evidência, neste capítulo, como a recuperação é interpretada e tratada pela legislação vigente, em recentes pesquisas e o que se entende como uma proposta de estudos de recuperação, e que possa ser adaptada a qualquer nível de ensino ou disciplina. No entanto, como o foco principal é o processo de ensino e aprendizagem em torno da Matemática, buscou-se, no âmbito da Educação Matemática, um aporte teórico para o desenvolvimento da proposta de estudos de recuperação, encontrando-se no Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) referencial tanto em questões teóricas como metodológicos, já que esse enfoque tem um olhar voltado para o conhecimento e o objeto matemático em estudo como também para o processo de ensino e aprendizagem desenvolvido em torno do mesmo. No capítulo que segue, apresentam-se os construtos teóricos que compõem o EOS e discute-se a importância e pertinência do mesmo na investigação desenvolvida.

3 ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO DO CONHECIMENTO E DA INSTRUÇÃO MATEMÁTICA (EOS)

Neste capítulo, apresentam-se as principais concepções teóricas que sustentam e compõem o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS), e que levaram a considerar esse enfoque como uma possibilidade de referencial tanto teórico como metodológico para o desenvolvimento da proposta de estudos de recuperação.

O Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) tem sua origem nos trabalhos de investigação do Grupo de Pesquisa Teoría y Metodología de Investigación en Educación Matemática liderado por Juan D. Godino[5]. Visa desenvolver um enfoque unificado que contemple a cognição e da instrução matemática, comparando e articulando pressupostos teóricos já existentes na Educação Matemática, como Teoria das Situações Didáticas (TSD) (BROUSSEAU, 1986, 1978), Teoria Antropológica do Didático (TAD) (CHEVALLARD, 1985), Teoria dos Campos Conceituais (VERGNAUD, 1990), Teoria dos Registros de Representações Semióticas (DUVAL, 1995, 1996), entre outras. Objetiva, desse modo, superar os dilemas existentes entre os diversos paradigmas que competem entre si: realismo-pragmatismo, cognição individual-institucional, construtivismo-condutismo, entre outros, (GODINO, 2012).

3.1 ORIGEM E MOTIVAÇÕES DO EOS

A pesquisa em torno do Enfoque Ontossemiótico (EOS), de acordo com Godino (2012), tem seu início nos anos noventa na Universidade de Granada, a partir da interação dos pesquisadores da Universidade com os estudos teóricos sobre o ensino de Matemática iniciados na França. A variedade de teorias utilizadas como aportes teóricos para estudar o ensino e aprendizagem da Matemática levou o grupo a conjecturar sobre a necessidade de esclarecer, comparar e articular essas teorias. Segundo o autor:

> [...] a estratégia de articulação destas teorias em conjunto com o desenvolvimento da abordagem ontosemiótica é o resultado de uma análise racional dos fundamentos, questões e métodos de várias estruturas existentes e aplicação das ferramentas e teorias que ocorriam no trabalho experimental (GODINO, 2012, p.49).

A partir de reflexões epistemológicas sobre a Matemática com base na Teoria das Situações Didáticas (TSD) (BROUSSEAU, 1986; 1978), Teoria Antropológica do Didático

[5] O conjunto de trabalhos que foram desenvolvidos em torno do EOS estão disponíveis em http://enfoqueontosemiotico.ugr.es.

(TAD) (CHEVALLARD, 1985), Dialética Ferramenta – Objeto (DIO) (DOUADY, 1986), Teoria dos Campos Conceituais (TCC) (VERGNAUD, 1990) surgem as questões iniciais do EOS: **O que é um objeto matemático? Qual o significado de um objeto matemático (número, derivado, média, ...) em um determinado contexto ou quadro institucional?** (GODINO, 2012, grifo nosso).

É possível perceber que os problemas iniciais abordados pela EOS são questões epistemológicas básicas, que buscam especificar e explicar a natureza do objeto matemático e sua emergência a partir de práticas matemáticas. Um problema cognitivo busca caracterizar o conhecimento a partir do ponto de vista subjetivo, simultâneo e em uma relação dialética. Mais tarde, com a continuidade dos estudos, os autores apontam para o desenvolvimento de uma ontologia matemática explícita (tipos de objetos e processos matemáticos) a ser descrita em termos operacionais, bem como o significado do objeto matemático, tanto do ponto de vista institucional e como pessoal (GODINO, 2012).

De acordo com o autor, a partir destes problemas iniciais, a temática acerca da construção de um enfoque que viesse a articular o conhecimento matemático e da instrução matemática, com pressupostos antropológicos e socioculturais, um modelo cognitivo, embasado na semiótica e um modelo instrucional, com bases sócio-construtivistas, passou a ser desenvolvida e apresentada nos trabalhos de Godino e Batanero (1994), Godino, Contreras e Font (2006) D'amore, Font e Godino(2007); Godino e Font, (2007); Godino, Font e Wilhelmi, (2007); Godino, Batanero e Font, (2008), entre outros. Ainda, de acordo com o autor, esse processo de construção do EOS se estabeleceu considerando três etapas.

A primeira etapa dos estudos foi desenvolvida no período de 1993 a 1998, a partir dos trabalhos de Godino e Batanero (1994); Godino, (1996); Godino e Batanero (1998). Nessa etapa os estudos estiveram centrados em torno da noção epistêmica e cognitiva (dimensões institucionais e pessoais de conhecimento matemático). Segundo Godino, Batanero e Font (2008, p.9) nesses primeiro trabalhos,

> [...] desenvolvemos e refinamos progressivamente as noções de "significado institucional e pessoal de um objeto matemático" (entendidos ambos em termos de sistemas de práticas, nos quais o objeto é determinante para sua realização) e sua relação com a noção de compreensão. Desde supostos pragmáticos, estas ideias tratam de centrar o interesse da investigação nos conhecimentos matemáticos institucionalizados, porém sem perder de vista o sujeito individual a quem está dirigido o esforço educativo.

A partir de 1998, ocorreu a segunda etapa dos estudos (GODINO, 2002; CONTRERAS; FONT; LUQUE; ORDONEZ, 2005), mais focada nos aspectos ontológicos e semióticos, devido à necessidade apresentada na etapa anterior, que o problema epistêmico-cognitivo não deve ser separado do ontológico. Por esta razão, os autores buscaram continuar o desenvolvimento de uma ontologia e semiótica consistente o suficiente para descrever a atividade matemática e os processos de comunicação de suas “produções” (GODINO, 2012). Concluíram, ainda, que é necessário,

> [...] estudar globalmente e com mais profundidade as relações dialéticas entre o pensamento (as ideias matemáticas), a linguagem matemática (sistemas de signos) e as situações-problemas, para as quais se inventam tais recursos. Em consequência, neste período tratamos de progredir no desenvolvimento de uma ontologia e uma semiótica específica que estudem os processos de interpretação dos sistemas de signos matemáticos postos em jogo na interação didática (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 10).

Já na terceira etapa dos estudos (GODINO; CONTRERAS; FONT, 2006), o foco foi direcionado aos modelos teóricos propostos no âmbito da Educação Matemática referentes à instrução matemática. De acordo com os autores, era necessário desenvolver novas ferramentas e incorporar outras noções de marcos teóricos relacionados, que permitissem descrever de forma detalhada as interações em sala de aula de matemática.

Nessa etapa também foi proposto distinguir um processo de instrução matemática em seis dimensões, cada uma modelável, com seus respectivos espaços de estados e trajetórias, sendo elas: epistêmica (relativa ao conhecimento institucional), docente (funções do professor), discente (funções do estudante), mediadora (relativa ao uso de recursos instrucionais), cognitiva (gênese de significados pessoais) e emocional (que contempla as atitudes, emoções, etc., dos estudantes, relativas ao estudo da Matemática) (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 10).

Assim, a partir dos estudos realizados ao longo dessas três etapas, os autores consideram que

> O modelo ontológico e semiótico da cognição proporciona critérios para identificar os estados possíveis das trajetórias epistêmica e cognitiva e o emprego da “negociação de significados” como noção chave para a gestão das trajetórias didáticas. A aprendizagem matemática é concebida como o resultado dos padrões de interação entre os distintos componentes de tais trajetórias (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 11).

Sendo assim, este modelo busca construir ferramentas teóricas para analisar conjuntamente o pensamento matemático, os objetos matemáticos que o acompanham, as situações e os fatores que condicionam seu desenvolvimento. Além disso, considera as facetas do conhecimento matemático que podem ajudar a confrontar e articular distintos enfoques de investigação sobre o ensino e a aprendizagem e avançar na direção de um modelo unificado da cognição e instrução matemática (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

A partir dessa visão geral apresentada sobre a origem e as principais ideias do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS), serão discutidos, no que segue, seus construtos e ferramentas teóricas pertinentes.

3.2 O ENFOQUE ONTOSSEMIÓTICO: NOÇÕES TEÓRICAS

O Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) tem como foco principal a formulação de uma ontologia de objetos matemáticos que contemple o triplo aspecto da Matemática, considerada como atividade socialmente compartilhada de resolução de problemas, como linguagem simbólica e sistema conceitual logicamente organizado. A partir da noção primitiva de situação-problemática, são definidos os conceitos teóricos de prática, objeto (pessoal e institucional) e significado, com a finalidade de tornar evidente e operativo, por um lado, o triplo caráter da Matemática mencionado, e, por outro, a gênese pessoal e institucional do conhecimento matemático, assim como sua interdependência (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

Assim, segundo Godino (2012), o conjunto de noções teóricas que compõem atualmente o EOS estão articulados em cinco grupos, sendo eles: **Sistemas de Práticas, Configurações de Objetos e Processos Matemáticos, Configurações e Trajetórias Didáticas, Dimensão Normativa e Idoneidade Didática**[6]. O autor destaca que cada um desses grupos, permite um nível de análise do processo de ensino e aprendizagem de tópicos específicos de Matemática. Nesse sentido, os cinco grupos são considerados por D'Amore, Font e Godino (2007) níveis de análise que objetivam descrever, explicar e avaliar as interações e práticas educativas presentes nas salas de aula de Matemática.

No que segue, apresentam-se os elementos que compõem os cinco níveis de análise didática propostos pelo EOS, os quais, segundo Andrade (2014, p.29), constituem "[...] uma ampliação progressiva da capacidade de análise dos processos de ensino e aprendizagem da Matemática, e podem auxiliar os professores a refletirem sobre sua prática docente".

3.2.1 Sistema de Práticas

Na perspectiva do EOS, prática matemática é toda ação ou expressão (verbal, gráfica, etc.) realizada por alguém para resolver problemas matemáticos, comunicar a outros a solução

[6] O termo"idoneidad", utilizado no âmbito da EOS é aqui traduzido como idoneidade, embora no texto em português de Godino, Batanero e Font (2008) tenha sido traduzido como adequação. Optou-se assim, por seguir Andrade (2014) que utilizou na tradução idoneidade, por considerar que adequação, embora correto, não traduz todo o significado da noção que abarca. Assim, define-se idoneidade como um conjunto ou um sistema de condições pertinentes a uma determinada situação, conhecimento ou objeto.

obtida, validá-la ou generalizá-la a outros contextos e problemas (GODINO; BATANERO, 1994). Nesse sentido, Font, Planas e Godino (2010) destacam que a aprendizagem em Matemática consiste em aprender a realizar uma prática operativa (leitura e interpretação) e uma prática discursiva, sendo esta uma reflexão sobre a prática operativa. Assim, os autores apontam “ [...] o discurso do professor como um componente de sua prática profissional. Esta prática tem como objetivo gerar no estudante um tipo de prática operativa e uma reflexão discursiva sobre ela[7] [...] (p.6) ”.

Essas práticas podem ser de uma pessoa ou compartilhadas no âmbito de uma instituição. Segundo Godino, Batanero e Font (2008), o sistema de práticas que realiza uma pessoa (significado pessoal) ou que é compartilhado no âmbito de uma instituição (significado institucional) para resolver um tipo de situação-problema. Os autores ressaltam que a relatividade socioepistêmica e cognitiva dos significados, entendidos como sistemas de práticas, e sua utilização na análise didática, os levaram a introduzir uma tipologia básica para os significados. Para os significados institucionais os autores consideram quatro tipos:

- **implementado**: é o sistema de práticas efetivamente implementadas pelo docente em um processo de estudo específico;
- **avaliado**: sistema de práticas que utiliza o docente para avaliar a aprendizagem;
- **pretendido**: sistema de práticas incluídas no planejamento do processo de estudo;
- **referencial**: sistema de práticas utilizado como referência para elaborar o significado pretendido. Numa instituição de ensino concreta, esse significado de referência será uma parte do significado holístico do objeto matemático.

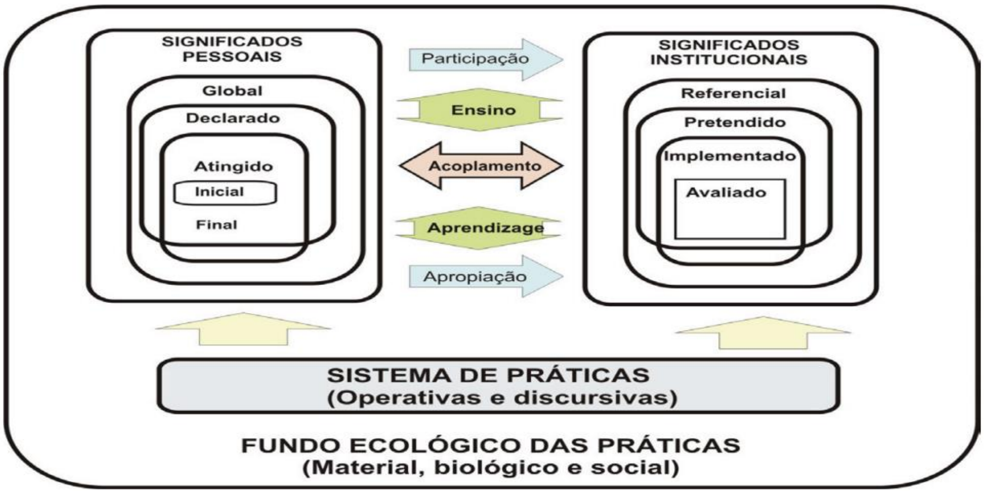
Já no que se refere ao significado pessoal, os autores destacam três tipos:

- **global**: corresponde à totalidade do sistema de práticas pessoais que é capaz de manifestar potencialmente o sujeito em relação a um objeto matemático;
- **declarado**: refere-se às práticas efetivamente expressadas através das avaliações propostas, incluindo-se tanto as corretas quanto as incorretas desde o ponto de vista institucional;
- **atingido**: corresponde às práticas manifestadas que são coerentes com a pauta institucional estabelecida. Na análise da variação dos significados pessoais que têm lugar num processo de estudo, interessa considerar tanto os significados iniciais ou prévios dos estudantes quanto aqueles que venham ser alcançados no final do processo.

[7] El discurso del profesor como un componente de su práctica profesional. Dicha práctica tiene como objetivo generar, en el estudiante, un tipo de práctica operativa y una reflexión discursiva sobre ella (práctica discursiva).

A partir da tipologia dos significados é possível perceber que a conotação de um significado necessita um estudo sobre a origem e a evolução do objeto em questão, bem como considerar a variedade de contextos de uso desse mesmo objeto. Por meio do esquema apresentado na figura 1, os autores buscam destacar as relações existentes entre o ensino e a aprendizagem, considerando os significados pessoais e institucionais que ficam estabelecidos no contexto de um sistema de práticas. Todos estes elementos, por sua vez, se colocam em um contexto mais amplo, a partir do qual as práticas emergem.

Figura 1– Tipos de significados pessoais e institucionais



Fonte: Godino, Batanero e Font (2008, p. 13).

As relações estabelecidas pelos autores no esquema da figura 1 estão orientadas pela visão de que “o ensino implica na participação do estudante na comunidade de práticas que suporta os significados institucionais; a aprendizagem, em última instância supõe a apropriação pelo estudante dos referidos significados” (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p. 13).

É possível destacar, ainda, que as práticas matemáticas envolvem os objetos matemáticos, que segundo Godino, Batanero e Font (2008, p.19) “[...] não equivalem apenas a conceitos, mas a qualquer entidade ou coisa à qual nos referimos, ou da qual falamos, seja real, imaginária ou de qualquer outro tipo, que intervém de alguma maneira na atividade matemática”. No que segue, são discutidos os aspectos teóricos propostos pelo EOS no que se refere aos objetos e processos matemáticos.

3.2.2 Configuração de objetos e processos matemáticos

Concorda-se com Andrade (2014) quando destaca que uma importante contribuição do EOS é a ampliação da visão sobre o objeto matemático. A autora ressalta que “[...]a noção de objeto matemático é ampliada no EOS, a fim de descrever a atividade matemática, seus produtos resultantes e os processos de comunicação matemática" (p.31). Assim, conforme já apresentado, na perspectiva EOS os objetos matemáticos não são considerados somente conceitos, mas também propriedades, procedimentos e representações, ou seja, qualquer entidade envolvida na atividade matemática.

Esses objetos matemáticos podem ser *ostensivos* (que são públicos, podem ser mostrados a outros) como, por exemplo, símbolos, notações e gráficos, e *não ostensivos* (não perceptíveis por si mesmo, mas utilizados na atividade matemática) os quais são representados pela forma textual, oral e, inclusive, por meio de gestos (conceitos, proposições, etc). Nos sistemas de práticas surgem novos objetos que dão conta de sua organização e estrutura (tipos de problemas, linguagens, procedimentos, definições, proposições e argumentação) (GODINO; CONTRERAS; FONT, 2006). Nesse contexto Andrade (2014) destaca que:

> os objetos passam a ser percebidos como unidades culturais que surgem de um sistema de significados de uso que definem as práticas pragmáticas humanas e que se modificam de acordo com a necessidade. Dessa forma, na teoria pragmática, os objetos matemáticos e seus significados dependem dos problemas que são enfrentados em Matemática e do processo de resolução que está sendo utilizado (ANDRADE, 2014, p. 32).

Godino, Batanero e Font (2008, p.13) destacam, ainda, que "[...] quando os sistemas de práticas são compartilhados no âmbito de uma instituição, os objetos emergentes são considerados 'objetos institucionais'[8] e se os referidos sistemas de práticas correspondem a uma pessoa, consideramos que emergem 'objetos pessoais'[9]". Assim, os autores propõem uma tipologia para os objetos matemáticos, a saber:

- **linguagem:** são considerados os termos, expressões, notações, gráficos, entre outros, em seus diversos registros **(**escrito, oral, gestual);
- **situações-problemas:** são as aplicações extra-matemáticas, exercícios...;
- **conceitos-definições:** são introduzidos mediante definições ou descrições (por exemplo: reta, ponto, número, média, função...);
- **proposições :** são enunciados sobre conceitos;
- **procedimentos:** são os algoritmos, operações, técnicas de cálculo;
- **argumentos:** são enunciados usados para validar ou explicar as proposições e procedimentos, dedutivos ou de outro tipo (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

---

[8] Esta formulação dos objetos institucionais é coerente com o modo de conceber os "objetos conceituais culturais" na semiótica cultural (RADFORD, 2006, p.57): "Os objetos matemáticos são formas conceituais de atividade reflexiva mediada histórica, social e culturalmente encarnada".

[9] Os "objetos pessoais" incluem os construtos cognitivos, tais como concepções, esquemas, representações internas, etc.

Para os autores, esses seis tipos de entidades primárias ampliam a tradicional distinção entre entidades conceituais e procedimentais, ao considerá-las insuficientes para descrever os objetos que intervêm e emergem da atividade matemática. Nesse contexto, as situações-problemas são a origem ou razão de ser da atividade, já a linguagem representa as demais entidades, servindo de instrumento para a ação. Os argumentos justificam os procedimentos e proposições que relacionam os conceitos entre si.

Os autores ainda ressaltam que para a realização de uma análise mais detalhada da atividade matemática esta tipologia é muito útil já que,

> [...] em cada caso estes objetos estarão relacionados entre si formando configurações, definidas como as redes de objetos que intervêm e emergem dos sistemas de práticas e suas relações. Estas configurações podem ser epistêmicas (redes de objetos institucionais) ou cognitivas (redes de objetos pessoais). Os sistemas de práticas e as configurações são propostas como ferramentas teóricas para descrever a constituição destes objetos e relações (configurações) em sua dupla versão: pessoal e institucional (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p.15)

Segundo Godino (2002), no modelo ontológico proposto no EOS são considerados para os objetos matemáticos cinco facetas ou dimensões duais que, juntamente com a noção de função semiótica como entidade relacional entre diferentes tipos de entidades, podem descrever e relacionar uma variedade de noções cognitivas propostas em diversas teorias. Diante das circunstâncias contextuais e do jogo de linguagem em que participam, essas entidades matemáticas podem ser consideradas a partir das seguintes facetas ou dimensões duais: *pessoal e institucional*, *ostensivo e não ostensivo, expressão e conteúdo, extensivo e intensivo, unitário e sistêmico*. Na sequência são detalhadas as referidas dualidades, de acordo Godino, Batanero e Font (2008).

- **Pessoal-institucional**: a cognição matemática deve contemplar as facetas pessoal e institucional, entre as quais se estabelecem relações dialéticas complexas e cujo estudo é essencial para a Educação Matemática. A "cognição pessoal" é o resultado do pensamento e a ação do sujeito individual diante de uma certa classe de problemas, enquanto a "cognição institucional" é o resultado do diálogo, o convênio e a regulação no âmbito de um grupo de indivíduos que formam uma comunidade de prática.
- **Ostensivo – não ostensivo**: o autor entende como ostensivo qualquer objeto que é público e que, portanto, pode ser mostrado a outro. Os objetos institucionais e pessoais têm uma natureza não ostensiva (não perceptíveis por si mesmos).
- **Expressão-Conteúdo**: antecedente e consequente de qualquer função semiótica. A atividade matemática e os processos de construção e uso dos objetos matemáticos se caracterizam por serem essencialmente relacionais. Os distintos objetos não devem ser concebidos como

entidades isoladas, senão colocadas em relação uns com os outros. A relação se estabelece por meio de funções semióticas, entendidas como uma relação entre um antecedente (expressão, significante) e um consequente (conteúdo, significado) estabelecida por um sujeito (pessoa ou instituição) de acordo com um certo critério ou código de correspondência;

• **Extensivo-Intensivo**: é utilizada para explicar uma das características básicas da atividade matemática: o uso de elementos genéricos. Esta dualidade permite centrar a atenção na dialética entre o particular e o geral, que sem dúvida é uma questão-chave na construção e aplicação do conhecimento matemático.

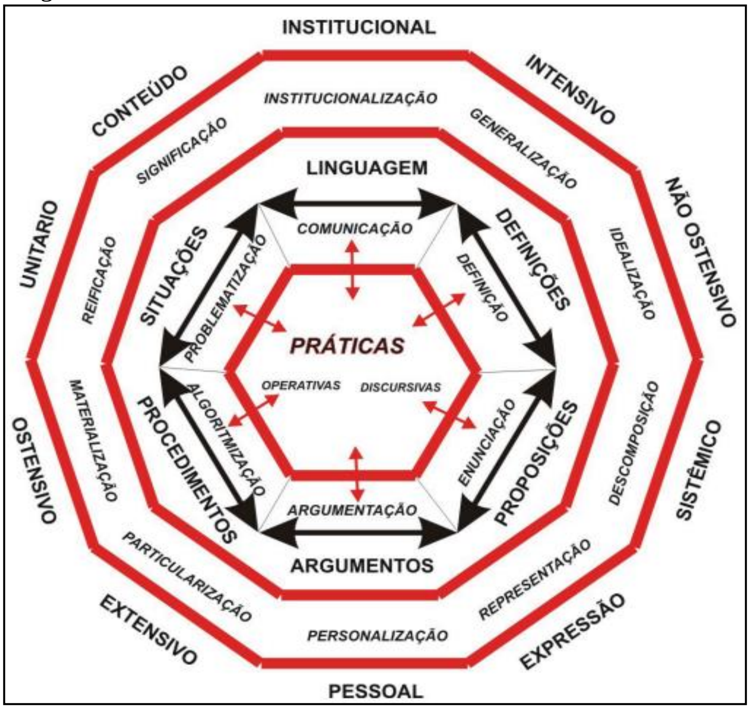
• **Unitário-Sistêmico**: em alguns momentos os objetos matemáticos participam como entidades unitárias (que supostamente são conhecidas previamente), já em outras intervêm como sistemas que devem ser decompostos para seu estudo. O estudo da adição e subtração, nos anos finais do ensino fundamental, por exemplo, é considerado como algo conhecido e, em consequência, como entidades unitárias (elementares). Esses mesmos objetos, no primeiro ano da educação primária, têm que ser considerados de maneira sistêmica para sua aprendizagem.

Godino, Batanero e Font (2008) ponderam que estas facetas podem ser agrupadas em duplas que se complementam dialeticamente. Assim,

> [...] são consideradas como atributos aplicáveis aos distintos objetos primários e secundários, dando lugar a distintas 'versões' dos referidos objetos através dos seguintes processos cognitivos/epistêmicos: **institucionalização-personalização; generalização-particularização; análise/decomposição-síntese/reificação;materialização/concreção-idealização/abstração;expressão/representação-significação**(GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p.17 grifo nosso).

Buscando representar as diferentes noções teóricas apresentadas sobre os objetos matemáticos e os sistemas de práticas, de modo a possibilitar uma visão geral e relacional dos mesmos, Godino, Batanero e Font (2008, p. 18) construíram o esquema apresentado na figura 2.

Figura 2- Modelo ontossemiótico dos conhecimentos matemáticos.



Fonte: Godino, Batanero e Font (2008, p. 18).

Sintetizando os elementos teóricos apresentados, os autores, no modelo da figura 2, apontam que no EOS a atividade matemática ocupa o lugar central e sua modelização ocorre em termos de sistema de práticas operativas e discursivas. Dessas práticas emergem os distintos tipos de objetos matemáticos, que estão relacionados entre si formando configurações. Finalmente, os objetos que intervêm nas práticas matemáticas e os emergentes das mesmas, segundo o jogo de linguagem em que participam, podem ser considerados desde as cinco facetas ou dimensões duais. Essas noções teóricas constituem uma resposta operativa ao problema ontológico da representação e significação do conhecimento matemático (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

Discutiu-se até aqui os construtos teóricos que embasam o EOS no que se refere ao conhecimento matemático. Conforme já destacado, esse enfoque tem um olhar voltado tanto para o conhecimento como para a instrução matemática, isto é, o processo de ensino e aprendizagem posto em jogo no desenvolvimento da atividade matemática. Assim, a seguir serão apresentados e discutidos os aspectos teóricos propostos pelo EOS, no que diz respeito às Configurações e Trajetórias Didáticas que se estabelecem em um processo de ensino e aprendizagem.

3.2.3 Configurações e Trajetórias Didáticas

O modelo teórico que Godino e demais pesquisadores do Grupo de Pesquisa Teoría y Metodología de Investigación en Educación Matemática vêm desenvolvendo pode ser aplicado em outros campos do saber, particularmente aos saberes didáticos, conforme destacado em Godino, Batanero e Font (2008). No caso dos saberes didáticos os autores ressaltam que os problemas terão naturezas distintas e fazem os seguintes questionamentos:

> • Que conteúdo devemos ensinar em cada contexto e circunstância?
> • Como adequar o tempo para distribuir os distintos componentes e facetas do conteúdo a ser ensinado?
> • Que modelo de processo de estudo devemos implementar em cada circunstância?
> • Como planejar, controlar e avaliar o processo de estudo e aprendizagem?
> • Que fatores condicionam o estudo e a aprendizagem? ... (GODINO; BATANERO; FONT, 2008, p.20).

A partir desses questionamentos os autores ressaltam que as ações (práticas didáticas) colocadas em jogo, sua sequenciação (processos didáticos) e os objetos emergentes de tais sistemas de práticas (objetos didáticos) serão distintos com relação à solução dos problemas matemáticos.

Nesse sentido, no trabalho desenvolvido por Godino, Contreras e Font (2006) os autores propõem um modelo teórico para analisar o processo de instrução matemática baseado no Enfoque Ontológico e Semiótico da Cognição Matemática[10]. Os autores consideram o ensino e a aprendizagem de um conteúdo matemático como um processo estocástico multidimensional composto de seis subprocessos*: epistêmico*, *docente*, *discente, mediacional*, *cognitivo e emocional*, com suas respectivas trajetórias e estados potenciais.

Segundo Godino, Contreras e Font (2006), na realização do processo de instrução (ensino de um conteúdo matemático) se produz uma série de estados possíveis, traçando-se uma trajetória do processo de ensino e aprendizagem de um conteúdo, que descreve uma sequência particular de funções ou componentes, os quais são considerados a partir de seis processos, a saber.

- **Epistêmico**: representa a distribuição dos significados institucionais implementados ao longo do processo (problemas, ação, linguagem, definições, propriedades, argumentos) que vão acontecendo em uma determinada ordem no processo de ensino.
- **Docente**: é responsável pela distribuição das tarefas, ou seja, é toda a ação do professor no processo de instrução.
- **Discente**: ações realizadas por estudantes.

---

[10] Destaca-se que o Enfoque Ontológico e Semiótico da Cognição Matemática era como os autores denominavam o EOS no período de publicação do referido artigo de autoria de Godino, Contreras e Font no ano de 2006.

• **Mediacional**: é a distribuição dos recursos tecnológicos utilizados (livros, notas, manipuláveis, software, etc.

• **Cognitivas**: consiste nos significados pessoais dos estudantes.

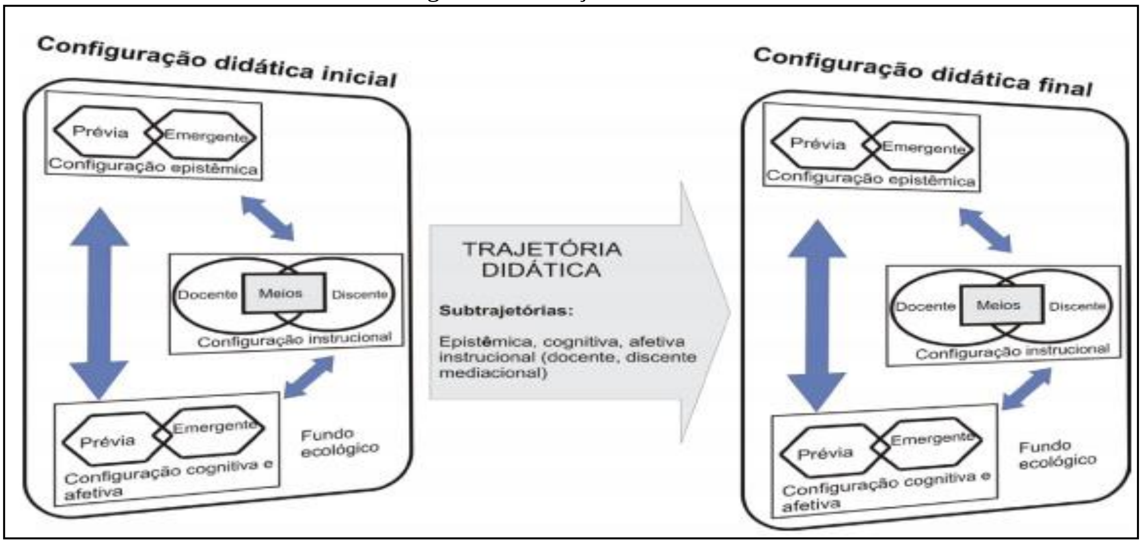
• **Emocionais**: refere-se aos estados emocionais (atitudes, valores, emoções e sentimentos) de cada aluno sobre os objetos matemáticos e o seu processo de estudo.

Godino, Batanero e Font (2008, p.20) propõem como unidade primária de análise didática a **Configuração Didática**, considerando que esta é,

> [...] constituída pelas interações professor-aluno a respeito de um objeto ou conteúdo matemático e usando recursos materiais específicos. É concebida como uma realidade organizacional, como um sistema aberto à interação com outras configurações das trajetórias didáticas das quais fazem parte. O processo de instrução sobre um conteúdo ou tema matemático se desenvolve num determinado tempo mediante uma sequência de configurações didáticas.

A figura 3 apresenta um esquema que ilustra a articulação dos elementos de uma Configuração Didática Inicial e Final.

Figura 3– Interações Didáticas.



Fonte: Godino, Batanero e Font (2008, p.21).

A partir do esquema apresentado na figura 3, Godino, Batanero e Font (2008) destacam que uma configuração didática está associada a uma configuração epistêmica, isto é, a uma tarefa, sendo que os procedimentos necessários para sua solução (linguagens, conceitos, proposições e argumentações) podem estar sob a responsabilidade do professor, dos estudantes ou distribuídas entre eles. A uma configuração epistêmica estará associada uma configuração instrucional, que consiste na rede de objetos docentes, discentes e mediacionais, colocados em jogo a propósito de um problema ou uma tarefa matemática. As aprendizagens vão sendo construídas ao longo do processo e se realizam mediante as configurações cognitivas, que são entendidas como rede de objetos que interagem e emergem dos sistemas de práticas pessoais que se acionam na implementação de uma configuração epistêmica.

Godino, Contreras e Font (2006) ressaltam que uma configuração didática é um sistema aberto que interage com outras configurações da trajetória didática. Uma sequência de configurações didáticas orientada para a aprendizagem de um tipo de situação problema (ou de um conteúdo específico) se constitui uma trajetória didática.

Andrade (2014) destaca que em uma mesma configuração didática, durante a realização de uma tarefa, se pode implementar diferentes padrões de interação (trabalho autônomo dos alunos, explicações, diálogo e cooperação entre alunos e professor, etc.).

Godino, Contreras e Font (2006) ainda destacam quatro tipos de configurações didáticas teóricas de referência no que se refere às interações, sendo elas: magistral, adidática, pessoal e dialógica. A magistral diz respeito ao modelo tradicional de ensinar Matemática, ocorre por meio da apresentação do conteúdo pelo professor, considerando conceitos, definições e proposições, seguido de exercícios e aplicações. O modelo a-didático ocorre quando o aluno ou um grupo de alunos, assumem a responsabilidade de um trabalho matemático autônomo, explorando, formulando e comunicando a solução de problemas. A interação dialógica se estabelece pela conversa entre o docente e os discentes ao propor uma determinada tarefa, e a pessoal ocorre no momento em que o estudo é realizado de maneira individual pelo aluno fora do ambiente sala de aula.

Nesse contexto, Andrade (2014) destaca que as configurações didáticas contemplam diferentes interações que se estabelecem na tentativa de estabelecer condições ao processo de ensino e aprendizagem dos objetos matemáticos, diante de uma determinada atividade.

Dentro dessa perspectiva de estabelecer aspectos teóricos e de análise tanto para o Conhecimento como para a Instrução Matemática, o EOS também lança um olhar para um conjunto de normas e regras que regulam um processo de estudo matemático, mediante o denominam dimensão normativa.

3.2.4 Dimensão Normativa

Godino et al (2009) ressaltam que a Educação, como qualquer atividade social, é uma atividade regulamentada, desde a forma mais geral, por meio das diretrizes curriculares, decretos e leis, como, também, em questões mais voltadas ao dia a dia da escola e da sala de aula, como as relações entre professor e aluno e o desenvolvimento dos processos de ensino e aprendizagem, todos regulamentados por normas, hábitos, costumes e convenções. Esses elementos reguladores fazem parte das noções teóricas que compõem a Dimensão Normativa.

A Dimensão Normativa considera as normas, hábitos e convenções que regulam o funcionamento das aulas de Matemática, como “microssociedade”, que condiciona em maior ou menor medida os conhecimentos construídos pelos estudantes. O foco do EOS, nessas regras e normas, está principalmente relacionado às interações entre professor e estudantes quando envolvidos no estudo de temas matemáticos específicos (GODINO; CONTRERAS; FONT, 2008). Assis, Godino e Frade (2012) destacam, ainda, que a Dimensão Normativa visa a integrar e ampliar as noções de contrato didático e normas sociais e sociomatemáticas propostas por Brousseau (1988) e Voigt (1995).

Nesse sentido, Godino et al (2009) consideram a Dimensão Normativa a partir de duas direções complementares. Uma se refere às normas estabelecidas na concepção, planificação, implementação e avaliação curricular e, segundo os autores, essas regras e normas não se manifestam somente em momentos ou fases que ocorrem interações entre professor e alunos, mas, também, nos momentos de planejamento, na fase de avaliação, em que os significados de referência orientam e condicionam os significados pretendidos, implementados e avaliados. A outra se refere às facetas ou dimensões (*epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, afetiva e ecológica*) do processo de estudo que as normas regulam:

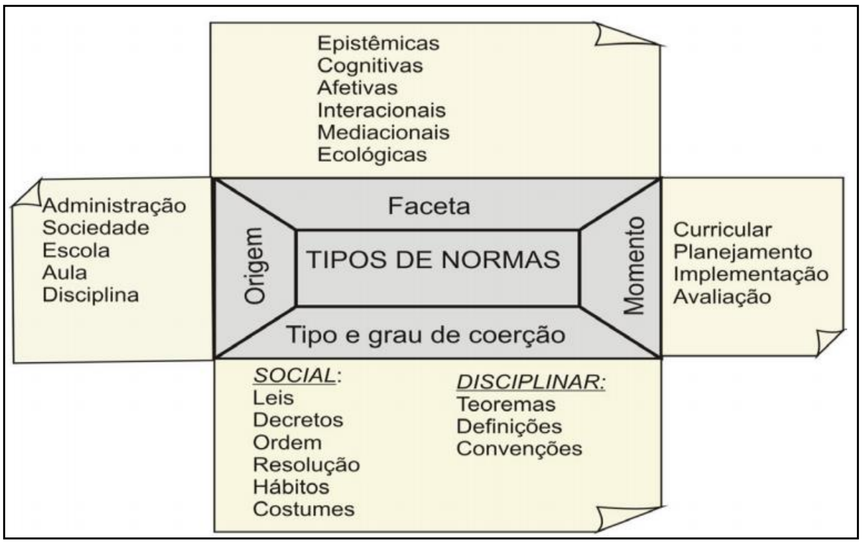
> • O trabalho do professor em relação ao saber matemático (entendido como um sistema de práticas institucionais);
> • O trabalho dos estudantes em relação ao saber matemático (entendido como um sistema de práticas pessoais);
> • O uso dos recursos tecnológicos e do tempo (faceta mediacional) ;
> • As interações docente-discente e discente-discente;
> • A afetividade das pessoas envolvidas no processo de estudo;
> • A relação das pessoas com o entorno (sociocultural, político, laboral...) em que se desenvolve o processo de instrução (faceta ecológica). (D’AMORE; FONT; GODINO, 2007, p.10).

Nesse contexto, Assis, Godino e Frade (2012, p.9) destacam que

> [...] as normas são negociadas dentro da sala de aula, e, portanto, são objetos de interpretação, valoração e reflexão pelos agentes envolvidos, devemos considerar que professor e alunos mobilizam conhecimentos que dizem respeito a conteúdos *de* Matemática, mas também conhecimentos *sobre* Matemática, *sobre* sua utilização, sobre ensino e aprendizagem (particularmente Matemática) e, dentre outros, sobre a consciência que tem o sujeito do próprio conhecimento.

A figura 4 ilustra a Dimensão Normativa, por meio dos tipos de normas, origem, momentos e facetas, estabelecidas nos estudos de Godino *et al.* (2009).

Figura 4– Dimensão Normativa.



Fonte: Godino, Batanero e Font (2008, p.22).

Os autores consideram que a Dimensão Normativa, por meio de seus aspectos já discutidos e ilustrados na figura 4, permite:

- avaliar a pertinência das intervenções dos professores e alunos considerando o conjunto de normas, e sua tipologia, que condicionam o ensino e a aprendizagem;
- sugerir trocas nos tipos de normas que ajudam a melhorar o funcionamento e controle dos sistemas didáticos, com vistas a uma evolução dos significados pessoais frente aos significados institucionais pretendidos (GODINO; BATANERO; FONT, 2008).

Apresentou-se e discutiu-se, até o momento, os construtos teóricos que compõem os quatro primeiros níveis de análise proposto pelo Enfoque Ontossemiótico. Esses níveis estão mais centrados em uma análise descritiva e explicativa, visando a compreender "o que e o como" ocorrem os processos de ensino e aprendizagem de matemática. Porém, dentro das concepções do EOS não basta identificar e descrever o que ocorre nesses processos, mas sim avaliar e buscar possíveis melhorias. Nesse sentido, Godino, Batanero e Font, (2008, p.26) ponderam que

> [...] são necessários critérios de "idoneidade" ou adequação que permitam avaliar os processos de ensino efetivamente realizados e "guiar" sua melhora. Trata-se de realizar uma ação ou meta-ação para ser mais preciso (a avaliação) que recai sobre outras ações (as ações realizadas nos processos de instrução). Em consequência, tem que se considerar a incorporação de uma racionalidade axiológica na educação matemática que permita a análise, a crítica, a justificação da eleição dos meios e dos fins, a justificação da troca, etc.

A partir desse entendimento, é proposto pelo EOS o quinto nível de análise, denominado Idoneidade Didática, que se utiliza dos quatro níveis anteriores e constitui-se em uma síntese final, a qual visa a identificar potenciais melhoras e novas implementações no processo de ensino e aprendizagem. No que segue, serão discutidas e apresentadas as concepções que compõem este último nível proposto no âmbito do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática.

3.2.5 Idoneidade Didática

Godino, Rivas e Arteaga (2012) destacam que a noção de Idoneidade Didática desenvolvida nos estudos de Godino, Contreras e Font (2006); Godino, Batanero ,Font (2008); Godino, Font e Wilhelmi (2008); Godino (2011) dentro da perspectiva do EOS, pode ser útil na concepção, implementação e avaliação do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, como também no desenvolvimento e avaliação de programas e atividades de formação de professores. Para tal, é

> [...] necessário investigar os critérios que ajudem a determinar em que medida um processo de estudo e instrução matemática atende certas características que o permitam ser classificado como "idôneo" para os fins pretendidos e adaptado às circunstâncias e instrumentos disponíveis[11] (GODINO et al, 2006, p.222, tradução nossa)

Nesse contexto, a Idoneidade Didática pode ser utilizada como um critério geral de pertinência e relevância das ações dos educadores, do conhecimento posto em jogo, dos recursos utilizados em um processo de estudo matemático, servindo como uma ferramenta para a análise e reflexão sistemática que fornece critérios para a melhoria progressiva do ensino e aprendizagem (GODINO, 2012).

Destaca-se, ainda, que Idoneidade Didática, suas dimensões e critérios constituem um instrumento de passagem de uma didática descritiva e explicativa a uma didática normativa, ou seja, uma didática que possibilita orientar o trabalho docente e apontar melhorias que sirvam para qualificar os processos de ensino da Matemática (GODINO; FONT; WILHELMI, 2008).

Assim, a Idoneidade Didática de um processo de instrução é definida como a articulação coerente e sistêmica de seis dimensões: idoneidade epistêmica; idoneidade cognitiva; idoneidade interacional; idoneidade mediacional; idoneidade emocional e idoneidade ecológica (GODINO, 2011), as quais passam a ser descritas. Estas dimensões podem, ainda, ser percebidas a partir de diferentes graus de adequação (alta, média e baixa).

- **idoneidade epistêmica**: refere-se ao grau de representatividade dos significados institucionais implementados ou pretendidos, com relação a um significado de referência. Por exemplo, o ensino da adição nos anos iniciais pode ser limitado à aprendizagem de rotinas e

---

[11] [...] necesario indagar sobre los criterios que ayuden a determinar en qué medida un proceso de estudio o instrucción matemática reúne ciertas características que permitan calificarlo como "idóneo" para los fines pretendidos y adaptado a las circunstancias e instrumentos disponibles.

exercícios de aplicação de algoritmos (baixa adequação), ou considerar os diferentes tipos de situações aditivas e incluir a justificação dos algoritmos (alta adequação) (GODINO; BATANERO; FONT, 2008). Godino (2011, p.8) ressalta ainda que "[...] em um programa de formação, ou em um processo de estudo matemático, tem-se um grau maior da idoneidade epistêmica à medida que os conteúdos implementados (ou pretendidos) representam bem os conteúdos de referência[12]".

- **idoneidade cognitiva**: diz respeito ao grau em que os significados pretendidos/implementados estão na área de desenvolvimento potencial dos alunos, assim como o grau de proximidade entre os significados pessoais atingidos e os significados pretendidos/implementados. Godino, Bataneiro e Font (2008) apontam que um processo de ensino e aprendizagem com um alto grau de idoneidade cognitiva seria alcançado, por exemplo, no estudo das operações aritméticas com números de três ou mais algarismos, se o professor realizar uma avaliação inicial para saber se a maioria dos alunos dominam as operações com números de um e dois algarismos e, caso contrário, iniciasse o processo de instrução trabalhando com esses números.
- **idoneidade interacional**: um processo de ensino e aprendizagem terá maior idoneidade do ponto de vista interacional, quando as configurações e trajetórias didáticas implementadas permitirem por um lado, identificar conflitos semióticos[13] potenciais e, por outro, resolverem os conflitos que são produzidos durante o processo de ensino. Andrade (2014, p.42) ressalta que "a idoneidade interacional busca a interação de estudantes com outros estudantes, com o professor e com o material didático, possibilitando resolver conflitos semióticos produzidos antes e durante o processo de instrução".
- **idoneidade mediacional**: refere-se ao grau de disponibilidade e adequação dos recursos materiais e temporais necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem. Godino, Font e Batanero (2008) exemplificam uma situação de alta idoneidade mediacional, quando da utilização do *software* Cabri em uma aula de Geometria Plana:

> Se o professor e os alunos tivessem à sua disposição meios informáticos pertinentes ao estudo do tema em questão, o processo de estudo com a utilização destes recursos

[12] "un programa formativo, o un proceso de estúdio matemático, tiene mayor idoneidad epistémica en la medida en que los contenidos implementados (o pretendidos) representan bien a los contenidos de referencia"

[13] Um *conflito semiótico* é qualquer disparidade ou discordância entre os significados atribuídos a uma expressão por dois sujeitos (pessoas ou instituições). Se a disparidade se produz entre significados institucionais, falamos de conflitos semióticos do tipo epistêmico, enquanto se a disparidade se produz entre práticas que formam o significado pessoal de um mesmo sujeito, nós os designamos como conflitos semióticos do tipo cognitivo. Quando a disparidade se produz entre as práticas (discursivas e operativas) de dois sujeitos diferentes em interação comunicativa (por exemplo, aluno-aluno ou aluno-professor) falaremos de conflitos (semióticos) interacionais Godino, Bataneiro e Font (2008).

> teria potencialmente maior adequação do que outro tradicional, baseado exclusivamente na utilização do quadro, lápis e papel (p.23).

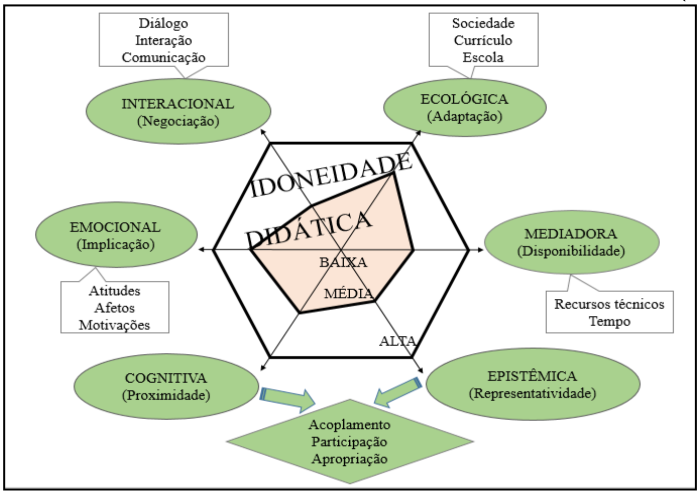
- **idoneidade emocional**: refere-se ao grau de envolvimento dos alunos no processo de ensino. Esta dimensão está relacionada com fatores que dependem tanto da instituição como do aluno e da sua história escolar prévia. Godino, Font e Batanero (2008) destacam que uma idoneidade emocional alta ocorre, por exemplo, em processos baseados no uso de situações problemas que sejam do interesse dos estudantes. Andrade (2014, p.41) ressalta ainda, que a "idoneidade emocional aborda o envolvimento dos alunos no processo de ensino, sendo que as configurações didáticas devem motivar a ação e a participação dos estudantes, levando em consideração seus interesses".
- **idoneidade ecológica**: diz respeito ao grau em que o processo de estudo se ajusta ao projeto educacional, à escola, à sociedade e ao ambiente em que se desenvolve. Godino (2011) ressalta que essa idoneidade busca realizar conexões com outros conteúdos e adaptações às diretrizes curriculares.

Como já mencionado as distintas dimensões podem ser percebidas a partir de diferentes graus de adequação ou de idoneidade (alta, média e baixa) dentro de um processo de instrução matemática, porém, os autores ressaltam que a idoneidade de uma dimensão não garante a idoneidade global do processo de ensino e aprendizagem. As dimensões devem ser integradas considerando as interações entre elas, o que requer abordar a Idoneidade Didática como critério sistêmico de apropriação e pertinência com relação ao projeto educativo global (GODINO et al., 2006). Assim, a idoneidade deve ser interpretada como relativa às circunstâncias temporais e contextuais instáveis, o que requer uma atitude de reflexão e investigação por parte do professor e demais agentes que compartilham a responsabilidade do projeto educativo. Godino, Batanero e Font (2008, p.24) consideram úteis, ainda,

> [...] todas estas noções para a análise de projetos e experiências de ensino. Os distintos elementos podem interagir entre si, o que sugere a extraordinária complexidade dos processos de ensino e aprendizagem. Atingir uma alta adequação em uma das dimensões, por exemplo, a epistêmica, pode requerer uma das capacidades cognitivas que não possuem os estudantes para os quais está direcionado o ensino. Uma vez obtido um certo equilíbrio entre as dimensões epistêmica e cognitiva é necessário que a trajetória didática otimize a identificação e solução de conflitos semióticos. Os recursos técnicos e o tempo disponível também interatuam com as situações-problemas, a linguagem, etc.

Na figura 5, está ilustrada uma representação da Idoneidade Didática e suas dimensões. Godino (2011) destaca que foi representado mediante a um hexágono regular a Idoneidade Didática correspondente a um processo de estudo pretendido ou programado, no qual se supõe um grau máximo das idoneidades parciais (dimensões). O hexágono irregular inscrito corresponderia ao grau das idoneidades (dimensões) efetivamente atingido na realização de um processo de estudo implementado.

Figura 5–Idoneidade Didática e suas Dimensões. Godino, Batanero e Font (2008, p. 24).



Fonte: Adaptado de Godino, Batanero e Font (2008, p. 24).

Segundo Godino (2011), essas noções teóricas podem ser aplicadas à análise de um processo de estudo implementado numa aula, ao planejamento ou ao desenvolvimento de uma unidade didática ou a um nível global, como podem ser úteis para o desenvolvimento de um curso ou de uma proposta curricular. Dessa maneira, esse conjunto de noções teóricas, permite realizar diferentes tipos e níveis de análises dos processos de estudo matemático, contribuindo cada um deles com informações úteis para o planejamento, implementação e avaliação de tais processos.

Apresentou-se até aqui os cinco níveis de análise que compõem o EOS atualmente, *Sistema de Práticas, Configurações de Objetos e Processos Matemáticos, Configurações e Trajetórias Didáticas, Dimensão Normativa e Idoneidade Diática*, destacando as especificidades de cada um deles. Ressalta-se novamente que a Idoneidade Didática, se baseia nos quatro níveis iniciais e constitui-se em uma síntese final orientada à identificação de potenciais melhorias do processo de estudo em novas implementações. Andrade (2014, p.45) destaca que:

> [...] embora seja um nível de análise do EOS, a idoneidade didática é essencial para o planejamento e desenvolvimento dos conhecimentos matemáticos, uma vez que conduz a uma análise conjunta de dados em função de suas dimensões e da influência dos mesmos sobre o ensino e a aprendizagem da Matemática.

Neste sentindo, Andrade (2014) desenvolveu seus estudos analisando o currículo de Matemática do Ensino Médio em um grupo de escolas da Região Metropolitana de Porto Alegre/RS, considerando parâmetros curriculares, planos de estudo e manifestações de professores em atuação e para tal se utililizou dos constructos da Idoneidade Didática. Tomando como referência, principalmente, Godino (2011), Godino, Rivas e Arteaga, 2012, a autora retomou e, em alguns aspectos, buscou ampliar os critérios de análise propostos pelos autores organizando o que passou a chamar de *Ferramentas de Análise*, referentes a cada uma das dimensões da Idoneidade Didática.

3.2.5.1 Ferramentas de Análise

Para a constituição das Ferramentas de Análise, Andrade (2014) levou em consideração as características, componentes e indicadores de cada uma das dimensões da Idoneidade Didática (epistêmica, cognitiva, ecológica, emocional, interacional, mediacional), a fim de captar aspectos, sob diferentes perspectivas, do processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Os componentes e indicadores que constituem a denominada Ferramenta de Análise Epistêmica (FAE) foram propostos por Godino (2011), conforme apresentado no quadro da figura 6.

Figura 6– Ferramenta de Análise Epistêmica (FAE).

Componentes	Indicadores
Situações-problema	a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações; b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização)[14].
Linguagem	a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas; b) nível de linguagem adequado aos estudantes; c) propor situações de expressão matemática e interpretação[15].
Regras (definições, proposições, procedimentos)	a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado; c) propõem-se situações onde os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos[16].
Argumentos	a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem; b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que argumentar[17].

[14]Situaciones-problemas: a) se presenta una muestra representativa y articulada de situaciones de contextualización, ejercitación y aplicación; b) se proponen situaciones de generación de problemas (problematización).
[15] Lenguajes: a) uso de diferentes modos de expresión matemática (verbal, gráfica, simbólica...), traducciones y conversiones entre los mismas; b) nivel del lenguaje adecuado a los niños a que se dirige; c) se proponen situaciones de expresión matemática e interpretación.
[16] Reglas (Definiciones, proposiciones, procedimientos): a) las definiciones y procedimientos son claros y correctos, y están adaptados al nivel educativo al que se dirigen; b) se presentan los enunciados y procedimientos fundamentales del tema para el nivel educativo dado; c) se proponen situaciones donde los alumnos tengan que generar o negociar definiciones proposiciones o procedimientos.
[17] Argumentos: a) las explicaciones, comprobaciones y demostraciones son adecuadas al nivel educativo a que se dirigen; b) se promueven situaciones donde el alumno tenga que argumentar.

Relações	a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si[18].

Fonte: Godino (2011); Andrade (2014, p. 104).

Andrade (2014) destaca que para a FAE são propostos:

> [...] cinco elementos advindos das entidades primárias que caracterizam o modelo epistêmico-cognitivo no EOS: situações-problema, linguagem (elementos linguísticos e representacionais), regras (conceitos, definições, procedimentos), argumentos e relações entre os elementos e a atividade matemática (ANDRADE, 2014, p.104).

Esses elementos destacados por Andrade (2014) são propostos por Godino (2011) que considera como ponto central para se conseguir uma alta idoneidade epistêmica a seleção e adaptação de situações-problema. No entanto apesar de considerar as situações-problema como elemento chave para uma alta idoneidade epistêmica, destaca, também, a importância das diversas representações, meios de expressão, definições, proposições, procedimentos, assim como suas justificações. O autor ressalta que,

> [...] as atividades devem proporcionar aos estudantes diversas maneiras de abordar, envolver diversas representações e exigir que os estudantes conjecturem, interpretem e justifiquem as soluções. Também deve prestar atenção para as conexões entre as distintas partes do conteúdo matemático. A matemática é um campo de estudos integrado[19] (GODINO, 2011, p.10, tradução nossa).

Godino et al (2006) destacam que para se atingir uma alta idoneidade epistêmica deve-se propor situações-problema que contemplem os significados de referência, e também trabalhar com situações que permitam explorar os conhecimentos pretendidos, por meio da problematização e contextualização, em que os estudantes tenham que formular e reformular questões, assim como aplicá-las em outros contextos. Quanto à linguagem, apontam para um trabalho focado nas diversas representações, traduções e conversões, como também atividades que oportunizem os alunos a expressar e comunicar suas conjecturas, procedimentos e argumentos. Sem deixar de colocar em evidência as demais dimensões, definições, proposições e procedimentos apontam que estes devem ser tomados dos significados de referência e adaptados ao nível dos estudantes, sendo devidamente explicados e justificados. Os autores destacam ainda que,

---

[18] Relaciones: a) los objetos matemáticos (problemas, definiciones, proposiciones, etc.) se relacionan y conectan entre sí.

[19] tareas deben proporcionar a los estudiantes diversas maneras de abordarlas, implicar diversas representaciones, y requerir que los estudiantes conjeturen, interpreten y justifiquen las soluciones. También se debe prestar atención a las conexiones entre las distintas partes del contenido matemático. Las matemáticas son un campo de estudio integrado.

> O juízo positivo sobre a idoneidade epistêmica de um processo de estudo deve levar em conta as conexões e interações entre os elementos mencionados. Os elementos conceituais, proposições e procedimentos devem ter sido contextualizados mediante a situações, explicados e justificados com argumentos pertinentes e todos os estes elementos apoiados por recursos expressivos e eficazes[20] (GODINO et al, 2006, p. 233, tradução nossa).

A Ferramenta de Análise Cognitiva (FAC), tem como objetivo identificar se os significados pretendidos estão na zona de desenvolvimento potencial dos estudantes, cabendo este organizar atividades que permitam tal aproximação (GODINO, 2011; ANDRADE, 2014).

Godino (2011) propõe como componentes, para a idoneidade cognitiva, conhecimentos prévios, adaptações curriculares e aprendizagem. Para essa dimensão são retomados nos componentes as entidades primárias (situações-problema, linguagem, regras, argumentos e relações) do modelo epistêmico-cognitivo, considerando as diferenças individuais (adaptações curriculares) e a apropriação e compreensão das entidades primarias, bem como se as competências pretendidas são atingidas pelos estudantes (aprendizagem).

Baseada nesses critérios apresentados por Godino (2011), Andrade (2014) propõe a Ferramenta de Análise Cognitiva (FAC), considerando os componentes e indicadores apresentados no quadro da figura 7.

Figura 7- Ferramenta de Análise Cognitiva (FAC).

Componentes	Indicadores
Raciocínio Lógico	a) propõem-se situações que possibilitam observar, analisar, raciocinar, justificar ou provar ideias; b) promovem-se situações onde os alunos tenham que coordenar as relações previamente criadas entre os objetos (problema, definições, informações).
Leitura/Interpretação	a) apresentam-se situações de expressão matemática e interpretação onde os estudantes possam pensar, analisar e refletir sobre as informações; b) propõem-se situações de leitura e interpretação adequadas ao nível dos estudante; c) apresentam-se situações que possibilitem analisar ou referir-se a um mesmo objeto matemático, considerando diferentes representações.
Análise/Síntese	a) propõem-se situações de particularização e de generalização de problemas; b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que relacionar objetos matemáticos (problema, definições, informações) de forma específica ou ampla.

Fonte: Godino (2011); Andrade (2014, p. 106).

Andrade (2014) ressalta que buscou incorporar à FAC componentes que entrassem em consonância com as entidades primárias e que auxiliassem no processo de instrução de um

[20] El juicio positivo sobre la idoneidad epistémica del proceso de estudio debe tener en cuenta las conexiones e interacciones entre los elementos mencionados. Los elementos conceptuales, proposicionales y procedimentales deben haber sido contextualizados mediante las situaciones, explicados y justificados con argumentos pertinentes y todos estos elementos soportados mediante recursos expresivos eficaces.

determinado conhecimento matemático. Assim, baseada em Godino (2011) estruturou os componentes raciocínio lógico, leitura/interpretação e análise/síntese, buscando estabelecer indicadores de um trabalho que encaminhe o desenvolvimento cognitivo dos estudantes e a aprendizagem.

Para se alcançar uma alta idoneidade cognitiva Godino et al (2006, p. 236) destacam que:

> O juízo positivo sobre a idoneidade cognitiva de um processo de estudo será baseado: a) na existência de uma avaliação inicial dos significados pessoais dos alunos, a fim de verificar que os significados pretendidos representam um desafio administrável; b) ajustes curriculares levam em conta as diferenças individuais; e, finalmente, c) a aprendizagem alcançada está o mais próximo possível dos significados institucionais pretendidos/ implementados[21] (Tradução nossa).

Nesse sentido, entende-se que a utilização da FAC contribui para a realização de uma análise específica de uma situação de ensino, com foco na estruturação dessa situação, analisando se o que é proposto está na zona de desenvolvimento potencial dos estudantes. Considera-se pertinente, também, incorporar à análise os componentes propostos por Godino (2011), que são os conhecimentos prévios, as adaptações curriculares necessárias e as avaliações realizadas para se obter uma visão mais ampla das situações de ensino propostas.

A Ferramenta de Análise Ecológica (FAECO) tem como objetivo analisar se o processo de estudo matemático se ajusta ao projeto educativo, considerando o entorno no qual o mesmo é desenvolvido. No que se refere a essa dimensão Godino (2011) entende que tudo que está fora da sala de aula condiciona a atividade que está sendo desenvolvida, referindo-se à sociedade, à escola, à pedagogia e à didática da matemática. O autor ressalta, ainda, que o processo de estudo ocorre em um contexto educacional definido por metas e que valores para formação de cidadãos e profissionais devem ser respeitados. Essas metas e valores são interpretados e especificados nos planos e projetos da escola ou ainda em departamentos que coordenam a ação dos professores. Assim, o professor é parte de uma comunidade de estudo e investigação que fornece conhecimentos úteis sobre práticas matemáticas e didáticas voltadas ao ensino e que se deve conhecer e aplicar.

Nesse contexto, Andrade (2014, p.107) considerou como componentes da FAECO "[...] a escola, o currículo e a sociedade buscando atender as expectativas dessa dimensão e

[21] El juicio positivo sobre la idoneidad cognitiva de un proceso de estudio se basará en: a) la existencia de una evaluación inicial de los significados personales de los estudiantes, a fin de comprobar que los significados pretendidos suponen un reto manejable; b) la existencia de adaptaciones curriculares que tengan en cuenta las diferencias individuales; y, finalmente, c) que los aprendizajes logrados estén lo más próximos posible a los significados institucionales pretendidos/ implementados.

contemplar um plano de ação formativo para aprender Matemática considerando o entorno no qual a mesma é desenvolvida", conforme apresentado no quadro da figura 8.

Figura 8- Ferramenta de Análise Ecológica (FAECO).

Componentes	Indicadores
Escola	a) espaço de desenvolvimento e aprendizagem envolvendo experiências contempladas nesse processo (aspectos culturais, cognitivos, afetivos, sociais e históricos); b) constitui-se em espaço que possibilita o uso de metodologias, recursos diversificados e tecnologia; c) ambiente que incentiva a formação de valores e pensamento crítico.
Currículo	a) o ensino está adaptado as orientações da escola, aos documentos oficiais; b) apresentam-se situações de problematização e contextualização, realizando conexões com outros conteúdos; c) valoriza-se a pluralidade cultural dos alunos; d) os conteúdos e a avaliação atendem as diretrizes curriculares; e) o ensino é coerente ao nível educativo a que se dirige;
Sociedade	a) percebe-se a valorização de aspectos da vida dos estudantes no ambiente escolar; b) percebe-se a presença da comunidade no processo de escolarização promovida pela escola.

Fonte: Godino (2011); Andrade (2014, p. 107).

Sobre os aspectos discutidos nessa dimensão, Godino (2013, p.126) destaca ainda que " [...] a Matemática deve ser ensinada de maneira útil para os cidadãos e profissionais, não como um sistema fechado para as aplicações que constituem suas origens e razão de ser". Breda, Font e Lima (2015, p.11) ressaltam, também, que a idoneidade

> [...] ecológica pode ser aumentada revisando, por exemplo, que os conteúdos que estão sendo ensinados apresentam correspondência com as diretrizes curriculares; assegurando que tais conteúdos contribuem para a formação social e profissional dos estudantes; buscando relacionar os conteúdos ensinados com outros conteúdos matemáticos e de outras disciplinas; tendo em conta as fontes de diversidades dos alunos; etc.

Dessa maneira, considera-se que a utilização da FAECO possibilita uma análise a partir de seus componentes e indicadores sobre as possíveis conexões e limitações entre o processo educativo e o entorno no qual ele se desenvolve.

Visando à realização de uma análise do processo de instrução como um todo, a Ferramenta de Análise Emocional (FAEMO) procura estabelecer indicadores que enfatizem o envolvimento dos discentes no processo de ensino, mediante configurações didáticas. Assim, foram considerados como componentes de análise a motivação/interesse, o envolvimento e as crenças/atitudes (ANDRADE, 2014), conforme apresentado no quadro da figura 9.

Figura 9 – Ferramenta de Análise Emocional (FAEMO).

Componentes	Indicadores
	a) incentiva-se o trabalho cooperativo;

Motivação/Interesse	b) propõem-se situações adaptadas ao nível educativo dos alunos, levando em consideração seus interesses.
Envolvimento	a) apresentam-se configurações didáticas que proporcionam o envolvimento dos estudantes; b) estimulam-se as relações entre professor-aluno, aluno-aluno, professor-professor para qualificar o processo de ensino e aprendizagem.
Crenças/Atitudes	a) promove-se um trabalho que supere a visão da Matemática como algo difícil e acessível a poucos.

Fonte: Godino (2011); Andrade (2014, p. 107).

Godino (2011) salienta que a resolução de qualquer problema matemático está associada a um envolvimento afetivo do sujeito, em que se colocam em jogo não somente práticas operativas e discursivas para dar uma resposta ao problema, mas também se mobilizam crenças, atitudes, emoções e valores que condicionam a resposta cognitiva exigida.Nesse contexto, Andrade (2014, p.108) ressalta que,

> [...] os aspectos afetivos devem ser considerados no processo de ensino e aprendizagem por instituições de ensino e, em particular, pelo professor. O domínio afetivo envolve, portanto, aspectos institucionais e se concretiza por meio de normas de caráter afetivo que condicionam o trabalho docente.

Godino et al (2006) destacam que para se alcançar uma alta idoneidade emocional as situações propostas no processo de ensino e aprendizagem devem criar um ambiente de trabalho que leve em conta os interesses dos estudantes, sua participação e um trabalho cooperativo e de respeito mútuo.

Sobre esta questão, Breda, Font e Lima (2015, p.11) também ressaltam que

> [...] a idoneidade emocional pode ser ampliada selecionando tarefas de interesse para os alunos; promovendo a avaliação da utilidade da Matemática na vida cotidiana e profissional; promovendo a implicação nas atividades, a perseverança, responsabilidade, etc.; favorecendo a argumentação, de modo que se avalie o argumento, evitando o desgosto ou o medo de Matemática; etc.

Assim, considerou-se pertinente a utilização da FAEMO no âmbito desta investigação para uma análise das situações propostas no processo de ensino e aprendizagem, e se estas possibilitam o envolvimento dos estudantes, assim como se foram planejadas e desenvolvidas considerando o interesse dos mesmos.

Já a Ferramenta de Análise Interacional (FAI) busca analisar as relações estabelecidas entre professor-aluno, aluno-aluno e aluno-conhecimento, para que os conflitos semióticos sejam percebidos e resolvidos (GODINO, 2012; ANDRADE, 2014).

Andrade (2014) destaca, ainda, que para a elaboração desses componentes, apresentados na figura 10, foram levados em consideração

> [...] os princípios de aprendizagem sócio-construtivista assumidos pelo EOS, os quais valorizam a presença de momentos em que os estudantes assumem a responsabilidade da aprendizagem. A aceitação desse princípio de autonomia da aprendizagem, segundo Godino (2011), é uma característica da TSD, em que 'as situações de ação, comunicação e validação são vistas como momentos adidácticos dos processos de estudo, ou seja, situações em que os alunos são protagonistas na construção dos conhecimentos pretendidos' (ANDRADE, 2014, p. 108).

Figura 10- Ferramenta de Análise Interacional (FAI).

Componentes	Indicadores
Diálogo/Comunicação	a) propõem-se momentos de discussão coletiva; b) há espaço para intervenção docente e discente; c) promove-se oportunidades de discussão/superação dos conflitos semióticos através da argumentação.
Interação	a) propõem-se situações que ampliam as relações de comunicação com outros alunos, com o professor, com o material de ensino; b) organizam-se situações para identificação e resolução de conflitos semióticos mediante interpretação de significados.
Autonomia	a) propõem-se momentos em que os discentes assumam a responsabilidade do estudo; b) apresentam-se situações que possibilitem o estudante raciocinar, fazer conexões, resolver problemas e comunicá-los.

Fonte: Godino (2011); Andrade (2014, p. 109).

Godino et al (2006) consideram que para uma alta idoneidade interacional é necessário que as configurações didáticas propostas possibilitem ao professor e aos alunos "[...] identificar potenciais conflitos semióticos (a priori), efetivos (durante o processo de instrução) e residual (a posteriori) e resolver esses conflitos por negociação de significados" (p. 17). Destacam, ainda, que as interações por meio de diálogo e trabalho cooperativo favorecem o aumento do grau de idoneidade, tendo em vista que os estudantes demostram suas relações com o objeto matemático em estudo, o que possibilita intervenções adequadas do professor.

Ainda, sobre os aspectos a serem buscados para uma alta idoneidade interacional, Breda, Font e Lima (2015, p.10) ressaltam que:

> A interacional pode ser aumentada se o professor realiza uma apresentação adequada do tema, com ênfase nos conceitos-chave; procurando reconhecer e resolver os conflitos de significado dos alunos (interpretando corretamente seus silêncios, expressões faciais, perguntas, etc.); utilizando recursos argumentativos para melhorar a implicação; procurando facilitar sua inclusão na dinâmica da aula; favorecendo a comunicação entre os estudantes; contemplando momentos nos quais os estudantes se responsabilizam pelo estudo (exploração, formulação, validação).

Nesse sentido, considera-se pertinente a utilização da FAI, uma vez que possibilita uma análise sobre as interações existentes em um processo de ensino e aprendizagem. Para Godino (2011) os alunos necessitam de espaço e ferramentas para a construção do conhecimento matemático para si próprios. Segundo o autor, os professores precisam proporcionar aos alunos um ambiente de aprendizagem no qual o processo de construção possa surgir. E uma das exigências aos professores é que sejam capazes de prever onde e como antecipar os entendimentos e habilidades dos estudantes que estão surgindo.

A última Ferramenta de Análise proposta por Andrade (2014), a Ferramenta de Análise Mediacional (FAM), visa a analisar a disponibilidade e a adequação dos recursos necessários para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática por meio de materiais concretos, recursos didáticos e tempo.

Para essa dimensão Godino (2011) propõe como componentes e indicadores os recursos tecnológicos, salientando que se deve considerar, também, as condições ambientais da sala de aula, a relação aluno e professor e o tempo destinado ao ensino e à aprendizagem.

Levando em consideração o que Godino (2011) estabelece para essa dimensão, Andrade (2014) propõe então dois componentes para a FAM: recursos didáticos e tempo didático, conforme apresentado no o quadro da figura 11.

Figura 11- Ferramenta de Análise Mediacional (FAM).

Componentes	Indicadores
Recursos Didáticos	a) evidencia-se a presença de materiais adequados ao desenvolvimento do processo de ensino e adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) há uma diversificação de recursos para auxiliar no processo de ensino, tais como: audiovisuais, material concreto, livros, entre outros; c) propõe-se a organização e experimentação de situações práticas.
Tempo didático	a) apresentam-se situações de ensino que contemplam diversas modalidades (estudo pessoal, cooperativo, tutorial, presencial); b) evidencia-se organização do tempo para intervenção docente, trabalho autônomo dos estudantes e momentos de discussão; c) dedica-se um tempo maior para o desenvolvimento dos conhecimentos, caso os estudantes apresentem dificuldade de compreensão.

Fonte: Godino (2011); Andrade (2014, p. 109).

Godino et al (2006) destacam que os recursos utilizados podem ser materiais manipulativos, com uso das tecnologias ou livros, e o que afetará o grau de idoneidade mediacional é a adaptação destes aos significados pretendidos, de acordo com as configurações epistêmicas e cognitivas estabelecidas.

Assim, considerou-se que a utilização da FAM nesta investigação possibilita uma análise sobre a necessidade e pertinência dos recursos que estão sendo utilizados no processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, Godino (2011) ressalta que a tecnologia, principalmente as digitais, é uma ferramenta essencial para a aprendizagem de matemática no século 21, devendo as escolas assegurar que todos os alunos tenham acesso a mesma. Os professores devem maximizar o potencial da tecnologia para desenvolver a compreensão dos estudantes sobre os objetos matemáticos trabalhados, estimular o seu interesse e aumentar a sua proficiência em matemática. Considera, também, que as calculadoras e outras ferramentas tecnológicas, tais como sistemas algébricos, geometria dinâmica, applets, planilhas e dispositivos de apresentações interativas são componentes vitais para uma alta qualidade da educação matemática.

Como já destacado, esse conjunto de Ferramentas de Análise foi constituído no âmbito do trabalho apresentado por Andrade (2014) baseado nas indicações de Godino (2011), e utilizado pela autora para evidenciar aspectos presentes nos currículos de Matemática do Ensino Médio, visando a traçar um panorama amplo de como o conhecimento matemático é planejado, tratado e, em certos aspectos, desenvolvido nas instituições por professores e supervisores. No entanto, Andrade (2014, p.110) saliente que,

> [...] outra expectativa é de que essas ferramentas de análise, as quais se encontram em processo de constituição, possam não somente servir como um instrumento de análise/avaliação de processos já estabelecidos mas, fundamentalmente, venham a se converter em elementos norteadores da constituição de trajetórias didáticas, planos de estudo, projetos pedagógicos e currículos de Matemática.

Nesse contexto, Godino (2011) destaca também que a Idoneidade Didática busca inter-relacionar as distintas facetas envolvidas na concepção, implementação e avaliação de processos de ensino e aprendizagem de Matemática. As noções, indicadores e componentes de cada uma das facetas tornam-se “sementes” para a constituição de teorias específicas, no caso, da idoneidade epistêmica e ecológica voltada aos elementos curriculares, as idoneidades cognitiva e afetiva, para a aprendizagem, e as idoneidades interacional e mediacional, para os processos de ensino.

Assim, na presente investigação, as noções teóricas apresentadas pelo Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS), assim como as Ferramentas de Análise, foram utilizadas para embasar e estabelecer critérios norteadores para o desenvolvimento da proposta de recuperação em torno da Geometria, constituindo-se tanto em referencial teórico como metodológico no âmbito da investigação desenvolvida. Destaca-se, por fim, que os aspectos do EOS, os quais relacionam-se com sua utilização enquanto referencial metodológico serão discutidos na apresentação da metodologia que norteou e embasou a investigação.

4 A GEOMETRIA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

A Matemática no Ensino Fundamental tem por objetivo que os estudantes sejam capazes de relacionar observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas), que associem essas representações a uma atividade matemática, conceitos e propriedades, fazendo induções e conjecturas. É esperado, ainda, que os estudantes desenvolvam a capacidade de utilizar a matemática para resolver problemas, mobilizando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las em diversos contextos, como também consigam realizar deduções de propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras (BRASIL, 1998; 2017).

Buscando atingir estes objetivos, os currículos de Matemática para este nível de ensino devem contemplar o estudo dos números e das operações, no âmbito da Aritmética e da Álgebra, o estudo do espaço e das formas, no que se refere ao campo da Geometria e o estudo das grandezas e das medidas, o qual permite interligações entre os demais campos do conhecimento (BRASIL, 1998, 2017).

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL,1998) destacam, ainda, que há a necessidade de acrescentar a esses conteúdos aqueles que permitam ao cidadão tratar as informações que recebe cotidianamente, aprendendo a lidar com dados estatísticos, tabelas e gráficos, a raciocinar utilizando ideias relativas à probabilidade e à combinatória, denominando este campo como Tratamento da Informação. Na Base Comum Curricular Nacional (BNCC), a qual será apresentada ao longo desse capítulo, este bloco é denominado Estatística e Probabilidade (BRASIL, 2017).

No que se refere ao bloco Espaço e Forma, os PCN o destacam como parte importante do currículo de Matemática, indicando que o trabalho com as noções geométricas contribui para a aprendizagem das demais áreas da Matemática, pois estimula o aluno a observar, comparar, analisar, quantificar, estabelecer relações, identificar regularidades e perceber semelhanças e diferenças (BRASIL, 1998).

Neste sentido, Lorenzato (1995) destaca que a Geometria tem função essencial na formação dos indivíduos, pois possibilita uma interpretação mais completa do mundo, na passagem de dados concretos e experimentais, para processos de abstração e generalização. Esta visão ampliada da Geometria também é ressaltada por Crescenti (2005) que entende que a mesma contempla a investigação das formas e dimensões presentes nos entes matemáticos. Para o autor, a Geometria desencadeia no homem o pensamento voltado à realidade concreta (observar, descrever, comparar, tocar, construir) e trabalhar com ela é estabelecer relações, é interagir com o mundo que nos cerca.

Apesar deste destaque e sendo a Geometria considerada como parte importante e necessária de ser desenvolvida junto aos estudantes, pesquisas apontam que o ensino da mesma não tem se efetivado na Educação Básica de modo satisfatório (PAVANELLO,1989, 1993; LORENZATO,1995, 2006; PEREIRA, 2001; ANDRADE, 2004).

Petry (2013) ressalta que a Geometria, nas últimas décadas, tem sido tema presente em pesquisas na área de Educação Matemática, contemplando diferentes focos: sua presença nos currículos de Matemática e nas salas de aula, seu papel na formação do estudante em todos os níveis, seu ensino e aprendizagem, na formação de professores, entre outros. Porém, o autor destaca que os resultados destas pesquisas, via de regra, apontam que “ [...] a Geometria é praticamente excluída do currículo escolar ou está bastante restrita ou, ainda, desenvolvida, nas salas de aula, de uma forma muito superficial” (p.40).

Lorenzato (1995) considera que uma das causas do abandono da Geometria pode ser encontrada na atuação dos professores os quais, muitas vezes, não tem domínio dos conhecimentos geométricos necessários para seu ensino. O autor argumenta que “[...] se não conhece Geometria também não conhece o poder, a beleza e a importância que ela possui para a formação do futuro cidadão, então, tudo indica que, para esses professores, o dilema é tentar ensinar Geometria sem conhecê-la ou então não ensiná-la” (p.4).

Outro aspecto considerado como chave para a diminuição da presença da Geometria na Educação Básica para Grando, Nacarato e Gonçalves (2008) é que, ao longo do denominado Movimento da Matemática Moderna, nas décadas de 1960 e 1970, o formalismo da Matemática acentuou-se e a Geometria ficou em um segundo plano nos currículos e livros didáticos brasileiros. As autoras argumentam que estes aspectos contribuíram para o seu abandono pela escola básica, como evidenciado em pesquisas na área de Educação Matemática, principalmente na década de 1980. As autoras relatam que,

> Essas denúncias de abandono acabaram por mobilizar a comunidade de educadores matemáticos a buscar, inicialmente, alternativas para o ensino de geometria com exemplos de atividades e uso de materiais manipuláveis, numa visão bastante empirista, tal como identificada na pesquisa de Andrade (2004). (GRANDO; NACARATO; GONÇALVES, 2008, p.42).

Assim, independente da discussão acerca do chamado “abandono” da Geometria, as autoras destacam que os estudos realizados pelo referido autor revelam que na década de 1990 houve uma mudança significativa nas tendências didático-pedagógicas relativas ao trabalho com a Geometria,

> [...] as pesquisas e produções brasileiras revelam que a geometria vem assumindo um caráter mais exploratório e investigativo, buscando subsídios teóricos em outras áreas do conhecimento, como a epistemologia, a história, a psicologia sociocultural e a linguagem. Emergem, assim, novas formas de conceber e produzir conhecimentos geométricos em sala de aula, principalmente com dinâmicas de maior dialogicidade entre professor e aluno, numa perspectiva de negociação e produção de significados (GRANDO; NACARATO; GONÇALVES, 2008, p.43).

Neste contexto, onde, por um lado se discute a quase ausência da Geometria na Educação Básica e, por outro, buscam-se formas e caminhos para melhorar seu processo de ensino e aprendizagem, entendeu-se pertinente desenvolver uma proposta de estudos de recuperação em torno da Geometria. Busca-se, com esta proposta, um caminho possível para resgatar e superar supostas lacunas que foram se materializando ao longo da vida estudantil, possibilitando uma retomada dos conteúdos, conceitos e procedimentos que, em um primeiro momento, não foram aprendidos ou ensinados como o esperado. Assim, a proposta de estudos de recuperação com foco na Geometria, que será apresentada e discutida neste trabalho, toma como base as indicações e objetivos estabelecidos em documentos oficiais Municipais, Nacionais e Internacionais, pesquisas da área e livros didáticos. Igualmente importante é apresentar e discutir aspectos do ensino e aprendizagem da Geometria, o que também terá espaço neste capítulo.

4.1 A GEOMETRIA NOS DOCUMENTOS OFICIAIS E UM OLHAR PARA UMA POSSIBILIDADE DE CURRÍCULO

O documento Princípios e Normas para a Matemática Escolar desenvolvido pelo National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) destaca que o estudo da Geometria possibilita aos estudantes aprender sobre as formas, estruturas geométricas, bem como analisar suas características e relações. É um campo para o desenvolvimento de habilidades de justificação, argumentação e demonstração, assim como a interpretação e descrição do seu entorno, os quais se constituem em um conjunto de competências e habilidades importantes para a resolução de problemas dentro da Matemática, como em outras áreas do conhecimento (NTCM, 2000).

Já os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) situam o estudo da Geometria no bloco Espaço e Forma e o destacam como um campo fértil para o trabalho com situações problemas, se constituindo em parte importante do currículo de Matemática no Ensino Fundamental. Como já apontado, no documento é ressaltado que o desenvolvimento das noções e conceitos geométricos permitem compreender, descrever e representar, de forma organizada, o mundo em que se vive, assim como contribui para a aprendizagem de outras áreas da Matemática, uma vez que estimula o estudante a observar, perceber semelhanças e diferenças e identificar regularidades (BRASIL,1998).

Os PCN ressaltam, ainda, que este bloco não se refere apenas ao estudo das formas, mas também as noções relativas a posição, localização de figuras e deslocamentos no plano e sistemas de coordenadas, sendo que

> [...] deve destacar-se também nesse trabalho a importância das transformações geométricas (isometrias, homotetias), de modo que permita o desenvolvimento de habilidades de percepção espacial e como recurso para induzir de forma experimental a descoberta, por exemplo, das condições para que duas figuras sejam congruentes ou semelhantes. Além disso, é fundamental que os estudos do espaço e forma sejam explorados a partir de objetos do mundo físico, de obras de arte, pinturas, desenhos, esculturas e artesanato, de modo que permita ao aluno estabelecer conexões entre a Matemática e outras áreas do conhecimento. (BRASIL, 1998, p.51).

Ainda sobre o estudo da Geometria na Educação Básica, o documento Referencial Curricular Lições do Rio Grande também destaca o pensamento geométrico vinculado ao "[...] desenvolvimento de abstrações e representações do espaço, como uma poderosa via de generalização da própria álgebra" (RIO GRANDE DO SUL, 2009, p.38).

Concorda-se com o que os PCN preconizam quando ressaltam sobre a importância de desenvolver o pensamento geométrico por meio de um trabalho que privilegie a observação e a compreensão das formas, das relações entre elas, das possibilidades de ocupação de espaços, da localização e deslocamento de objetos no espaço vistos sob diferentes ângulos, de situações cotidianas e aplicadas ao exercício de diversas profissões, como a engenharia, a bioquímica, a coreografia, a arquitetura, a mecânica, entre outros. Nas situações e aspectos apontados há a necessidade de que o indivíduo tenha a capacidade de pensar geometricamente para resolver determinadas situações, em detrimento a simples memorização de fatos e de um vocabulário específico, o que não significa que não se deva ter preocupação em levar os alunos a utilizarem um vocabulário mais preciso. Ainda, é cada vez mais indispensável que se desenvolva a capacidade de observar o espaço tridimensional e de elaborar formas de comunicar-se sobre ele, pois a imagem é um instrumento de informação essencial no mundo moderno (BRASIL, 1998).

Em outra perspectiva, no documento Lições do Rio Grande (RIO GRANDE DO SUL, 2009), é destacado que as vivências, o reconhecimento dos procedimentos e métodos da Geometria possibilitam o desenvolvimento de habilidades de síntese e de análise. Ainda, o domínio do vocabulário geométrico proporciona a ampliação da comunicação e da compreensão das situações relacionadas ao espaço. Assim, importante é o desenvolvimento de situações que possibilitem a observação, construção, conjecturas, identificação de propriedades e argumentação, encaminhando para um raciocínio dedutivo. Porém, nos PCN é ressaltado que

> [...] isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da Geometria. Embora os conteúdos geométricos propiciem um campo fértil para a exploração dos raciocínios dedutivos, o desenvolvimento dessa capacidade não deve restringir-se apenas a esses conteúdos. A busca da construção de argumentos plausíveis pelos alunos vem sendo desenvolvida desde os ciclos anteriores em todos os blocos de conteúdos. Assim, esse trabalho terá continuidade no quarto ciclo, uma vez que a prática da argumentação é fundamental para a compreensão das demonstrações (BRASIL, 1998, p.86).

Além deste olhar mais formal, o ensino da Geometria possibilita, ainda, um trabalho que explore e relacione aspectos históricos, considerando que a Geometria é um dos ramos mais antigos da Matemática, que se desenvolveu a partir das necessidades humanas. Sobre esta questão os PCN destacam que

> As civilizações da época pré-histórica utilizavam regras para medir comprimentos, superfícies e volumes. Seus desenhos continham figuras geométricas em que a simetria era uma das características predominantes. A origem essencialmente prática da geometria egípcia mostra-se nitidamente pela maneira com que os escribas, do médio império, propunham e resolviam os problemas. É interessante discutir com os alunos que essa forma, apesar de engenhosa e criativa, não facilitava em nada a transferência dos conhecimentos obtidos para novas situações. O estudo de alguns dos problemas resolvidos pelos egípcios poderá mostrar a importância da generalização das relações espaciais e suas representações para resolver situações mais diversificadas e complexas (BRASIL,1998, p. 127).

A possibilidade de articulação entre aspectos teóricos, históricos, práticos e aplicados em torno dos conhecimentos geométricos estão presentes de modo geral nas orientações curriculares e são defendido também por Crescenti (2005). O autor destaca que,

> [...] a aplicação da Geometria nos diferentes campos da vida humana, pode ser possível ensinar os conteúdos dessa área do conhecimento de forma mais significativa para o aluno e não apenas apresentar-lhes um corpo teórico de axiomas, propriedades e teoremas distantes da realidade, embora aprender os aspectos teóricos e axiomáticos também seja importante. Além disso, conhecer seu desenvolvimento histórico, os avanços e recuos ocorridos, é possível dar uma perspectiva mais crítica aos conteúdos ensinados, considerando-os uma escolha intencional de um grupo de pessoas que estudam a área e que, portanto, têm posicionamentos políticos e sociais nem sempre claramente explicitados (CRESCENTI, 2005, p. 37).

Em consonância com o que está sendo apresentado e discutido, em relação aos documentos oficiais e o ensino da Geometria, em nível internacional, nacional e estadual, que nortearam a Educação Básica até o momento, discute-se a seguir os pressupostos estabelecidos na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

4.1.1 Base Nacional Comum Curricular (BNCC)

A Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2017) é um documento de caráter normativo do Ministério da Educação (MEC) que estabelece as aprendizagens essenciais que todos os estudantes devem desenvolver ao longo das etapas e modalidades da Educação Básica.

A versão final da BNCC foi disponibilizada em abril de 2017, porém sua construção, de acordo com o documento que a apresenta (BRASIL, 2017), ocorreu por meio de um processo de debate e negociação considerando agentes do campo educacional e da sociedade brasileira. A primeira versão do documento foi disponibilizada para consulta pública entre outubro de 2015 e março de 2016, recebendo mais de 12 milhões de contribuições, individuais, de organizações e de redes de educação de todo o País, além de pareceres analíticos de especialistas, associações científicas e membros da comunidade acadêmica. As contribuições foram sistematizadas por pesquisadores e subsidiaram a elaboração de uma segunda versão, que foi discutida em seminários realizados pelas Secretarias Estaduais de Educação, no período de junho a agosto de 2016, contando com a participação de mais de 9 mil professores, gestores, especialistas e entidades de educação. A partir destas contribuições, a segunda versão foi revisada e sistematizada afim de elaborar a terceira e última versão (BRASIL, 2017).

A BNCC foi estruturada para todas as áreas do conhecimento, levando em consideração os componentes curriculares, os princípios éticos, políticos e estéticos das Diretrizes e Bases da Educação Nacional (DCN e LDB). A partir deles estabelece dez competências gerais que "inter-relacionam e perpassam todos os componentes curriculares ao longo da Educação Básica, sobrepondo-se e interligando-se na construção de conhecimentos e habilidades e na formação de atitudes e valores" (BRASIL, 2017, p. 18). Esse conjunto de competências pressupõem que os alunos devem aprender a resolver problemas, a trabalhar em equipe com base em propósitos que direcionam ao "[...] compromisso da educação brasileira com a formação humana integral e com a construção de uma sociedade justa, democrática e inclusiva" (p.19).

Especificamente no que se refere a Matemática na Educação Básica é destacado no documento que "[...] o conhecimento matemático é necessário para todos os alunos da Educação Básica, seja por sua grande aplicação na sociedade contemporânea, seja pelas suas potencialidades na formação de cidadãos críticos, cientes de suas responsabilidades sociais" (BRASIL, 2017, p.221).

Neste sentido, a BNCC estabelece que no Ensino Fundamental, a articulação entre os diversos campos da Matemática, Aritmética, Álgebra, Geometria, Estatística e Probabilidade

> [...] precisa garantir que os alunos relacionem observações empíricas do mundo real a representações (tabelas, figuras e esquemas) e associem essas representações a uma atividade matemática, conceitos e propriedades, fazendo induções e conjecturas. Assim, espera-se que eles desenvolvam a capacidade de identificar oportunidades de utilização da matemática para resolver problemas, aplicando conceitos, procedimentos e resultados para obter soluções e interpretá-las segundo os contextos das situações. A dedução de algumas propriedades e a verificação de conjecturas, a partir de outras, podem ser estimuladas, sobretudo ao final do Ensino Fundamental (BRASIL, 2017, p. 221).

Já Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental, foco desta investigação, é destacada na BNCC como

> [...] o estudo de um amplo conjunto de conceitos e procedimentos necessários para resolver problemas do mundo físico e de diferentes áreas do conhecimento. Assim, nessa unidade temática, o estudo da posição e deslocamentos no espaço e o das formas e relações entre elementos de figuras planas e espaciais pode desenvolver o pensamento geométrico dos alunos. Esse pensamento é necessário para investigar propriedades, fazer conjecturas e produzir argumentos geométricos convincentes. É importante, também, considerar o aspecto funcional que deve estar presente no estudo da Geometria: as transformações geométricas, sobretudo as simetrias. As ideias matemáticas fundamentais associadas a essa temática são, principalmente, construção, representação e interdependência (BRASIL, 2017, p. 227).

É ressaltado, também, no documento, que o ensino de Geometria nos anos finais deve ser encaminhado como uma consolidação e ampliação das aprendizagens já realizadas, enfatizando as tarefas que analisam e produzem transformações e ampliações/ reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, de modo a desenvolver os conceitos de congruência e semelhança. O desenvolvimento de tal trabalho tem a intenção de que os estudantes sejam capazes de aplicar esses conhecimentos para realizar demonstrações simples, contribuindo para a formação do raciocínio hipotético dedutivo, não ficando reduzida apenas a uma aplicação de fórmulas para cálculos de áreas e volumes, por exemplo (BRASIL, 2017).

A partir desta visão para o ensino da Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental são apresentados, na BNCC, os Objetos do Conhecimento a serem trabalhados em cada ano, como também as habilidades a serem desenvolvidas relacionadas a cada um destes objetos, os quais são destacados no quadro da Figura 12. No quadro são apresentados, também, os aspectos relacionados às noções de ângulos, área, perímetro e volume, que estão apresentados, no documento, na Unidade Temática Grandezas e Medidas, mas que foram trabalhadas na proposta desenvolvida nesta investigação.

Figura 12 - Objetos do Conhecimento e Habilidades da Unidade Temática Geometria

Ano	Objetos de Conhecimento	Habilidades
6º	-Plano cartesiano: associação dos vértices de um polígono a pares ordenados.	-Associar pares ordenados de números a pontos do plano cartesiano do 1º quadrante, em situações como a localização dos vértices de um polígono.

	-Prismas e pirâmides: planificações e relações entre seus elementos (vértices, faces e arestas). -Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados. -Construção de figuras semelhantes: ampliação e redução de figuras planas em malhas quadriculadas. -Construção de retas paralelas e perpendiculares, fazendo uso de réguas, esquadros e softwares. **Unidade Temática Grandezas e Medidas** -Ângulos: noção, usos e medida. -Perímetro de um quadrado como grandeza proporcional à medida do lado.	-Quantificar e estabelecer relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e pirâmides, em função do seu polígono da base, para resolver problemas e desenvolver a percepção espacial. -Polígonos: classificações quanto ao número de vértices, às medidas de lados e ângulos e ao paralelismo e perpendicularismo dos lados. -Reconhecer, nomear e comparar polígonos, considerando lados, vértices e ângulos, e classificá-los em regulares e não regulares, tanto em suas representações no plano como em faces de poliedros. -Identificar características dos triângulos e classificá-los em relação às medidas dos lados e dos ângulos. -Identificar características dos quadriláteros, classificá-los em relação a lados e a ângulos e reconhecer a inclusão e a intersecção de classes entre eles. - Construir figuras planas semelhantes em situações de ampliação e de redução, com o uso de malhas quadriculadas, plano cartesiano ou tecnologias digitais. -Utilizar instrumentos, como réguas e esquadros, ou softwares para representações de retas paralelas e perpendiculares e construção de quadriláteros, entre outros. -Reconhecer a abertura do ângulo como grandeza associada às figuras geométricas. -Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais, como ângulo de visão. **Unidade Temática Grandezas e Medidas** -Determinar medidas da abertura de ângulos, por meio de transferidor e/ou tecnologias digitais. -Analisar e descrever mudanças que ocorrem no perímetro e na área de um quadrado ao se ampliarem ou reduzirem, igualmente, as medidas de seus lados, para compreender que o perímetro é proporcional à medida do lado, o que não ocorre com a área.
7º	-Transformações geométricas de polígonos. -Simetrias de translação, rotação e reflexão. -A circunferência como lugar geométrico. -Relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal. -Triângulos: construção, condição de existência e soma das medidas dos ângulos internos. -Ângulos internos e externos de polígonos regulares. **Unidade Temática Grandezas e Medidas** -Cálculo de volume de blocos retangulares, utilizando unidades de medida convencionais mais usuais;	-Reconhecer e construir figuras obtidas por simetrias de translação, rotação e reflexão, usando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica e vincular esse estudo a representações planas de obras de arte, elementos arquitetônicos, entre outros. -Construir circunferências, utilizando compasso, reconhecê-las como lugar geométrico e utilizá-las para fazer composições artísticas e resolver problemas que envolvam objetos equidistantes. -Verificar relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal, com e sem uso de softwares de geometria dinâmica. -Construir triângulos, usando régua e compasso, reconhecer a condição de existência do triângulo quanto à medida dos lados e verificar que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°. -Reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações, como na construção de estruturas arquitetônicas (telhados, estruturas metálicas e outras) ou nas artes plásticas.

	-Equivalência de área de figuras planas: cálculo de áreas de figuras que podem ser decompostas por outras, cujas áreas podem ser facilmente determinadas como triângulos e quadriláteros;	-Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos, à confecção de ferramentas e peças mecânicas, entre outras. **Unidade Temática Grandezas e Medidas** -Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida do volume de blocos retangulares, envolvendo as unidades usuais (metro cúbico, decímetro cúbico e centímetro cúbico). -Estabelecer expressões de cálculo de área de triângulos e de quadriláteros. -Resolver e elaborar problemas de cálculo de medida de área de figuras planas que podem ser decompostas por quadrados, retângulos e/ou triângulos, utilizando *a* equivalência entre áreas.
8º	-Congruência de triângulos e demonstrações de propriedades de quadriláteros; -Construções geométricas: ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares; -Mediatriz e bissetriz como lugares geométricos: construção e problemas; -Transformações geométricas: simetrias de translação, reflexão e rotação; **Unidade Temática Grandezas e Medidas** -Área de figuras planas Área do círculo e comprimento de sua circunferência; -Volume de cilindro reto; -Volume de prismas e cilindros*;*	-Demonstrar propriedades de quadriláteros por meio da identificação da congruência de triângulos. -Construir, utilizando instrumentos de desenho ou softwares de geometria dinâmica, mediatriz, bissetriz, ângulos de 90°, 60°, 45° e 30° e polígonos regulares. -Aplicar os conceitos de mediatriz e bissetriz como lugares geométricos na resolução de problemas. -Reconhecer e construir figuras obtidas por composições de transformações geométricas (translação, reflexão e rotação), com o uso de instrumentos de desenho ou de softwares de geometria dinâmica. **Unidade Temática Grandezas e Medidas** -Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de área de figuras geométricas, utilizando expressões de cálculo de área (quadriláteros, triângulos e círculos), em situações como determinar medida de terrenos. -Resolver e elaborar problemas que envolvam o cálculo do volume de um cilindro reto ou a capacidade de um recipiente cujo formato é o de um cilindro reto. -Resolver e elaborar problemas que envolvam medidas de volumes de prismas e de cilindros retos, inclusive com uso de expressões de cálculo, em situações cotidianas.
9º	-Demonstrações de relações entre os ângulos formados por retas paralelas intersectadas por uma transversal; -Relações entre arcos e ângulos na circunferência de um círculo; -Semelhança de triângulos; -Relações métricas no triângulo retângulo Teorema de Pitágoras: verificações experimentais e demonstração Retas paralelas cortadas por transversais: teoremas de proporcionalidade e verificações experimentais; -Distância entre pontos no plano cartesiano;	-Demonstrar relações simples entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal. -Resolver problemas por meio do estabelecimento de relações entre arcos, ângulos centrais e ângulos inscritos na circunferência, fazendo uso, inclusive, de softwares de geometria dinâmica. -Reconhecer as condições necessárias e suficientes para que dois triângulos sejam semelhantes. -Demonstrar relações métricas do triângulo retângulo, entre elas o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos. -Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de

	-Vistas ortogonais de figuras espaciais;	proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes.

Fonte: BNCC (BRASIL, 2017).

Cabe destacar que quando foi planejada e constituída a proposta de estudos de recuperação para a Geometria, apresentada nesta investigação, a BNCC estava em processo de formulação (1ª e 2ª versão), porém o que se tinha disponível da mesma, assim como o que está posto nos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), foram considerados em sua constituição. Em linhas gerais, a BNCC não apresentou uma significativa mudança, no que se refere às competências e habilidades a serem desenvolvidas no estudo de Geometria nos anos finais, quando comparados aos objetivos propostos para o bloco Espaço e Formas nos PCN. Porém, é possivel perceber no documento da BNCC um maior detalhamento na apresentação dos mesmos, sendo que a essência permanece, o que leva a constatar que os pressupostos estabelecidos pelo documento apresentado em 2017 estão, em grande parte, sendo atendidos na proposta desenvolvida.

Ressalta-se que, apesar das orientações contidas nos documentos oficiais atribuírem ao desenvolvimento do pensamento geométrico igual relevância, se comparado aos de outras áreas da Matemática (aritmético, algébrico, combinatório), destacando todos como necessários e importantes dentro do currículo da Educação Básica, a Geometria, como já apontado, tem tido pouco espaço nas aulas de Matemática. A natureza dos objetos geométricos, suas características, propriedades e relações são, muitas vezes, pouco exploradas, sendo priorizadas questões algébricas e relacionadas à métrica. Ainda, por vezes, o ensino da Geometria confunde-se com o de medidas.

No que segue discute-se o que as pesquisas desenvolvidas em torno do possivel abandono da Geometria na Educação Básica estão destacando para esta temática.

4.2 O ENSINO DE GEOMETRIA FOI ESQUECIDO NA EDUCAÇÃO BÁSICA?

Crescenti (2005) destaca que, apesar de a Aritmética, a Álgebra e a Geometria estarem presentes nos currículos da Educação Básica, como áreas da Matemática, o que pode ser percebido é uma maior ênfase ao ensino da Aritmética e Álgebra. Embora a Geometria esteja contemplada de forma evidente nas propostas curriculares e, por isso, provavelmente, nos planos de ensino dos professores, essa orientação não garante que esteja sendo ensinada e de maneira satisfatória. A autora entende, ainda, que a Geometria se interliga com a Aritmética e com a Álgebra, tendo em vista que há uma correspondência entre os objetos e as relações entre as mesmas, o que se encontra é um ensino de Geometria, quando contemplado, isolado das demais áreas, deixado, na maioria das vezes, como último a ser desenvolvido pelos professores.

Pavanello (1993) já apontava que a partir da Lei de Diretrizes e Bases para o Ensino de 1º e 2º Graus, Lei nº 5692/71 (BRASIL, 1971), a qual possibilitou que cada professor organizasse seu programa de acordo com as necessidades dos alunos, na maioria dos casos, os professores passaram a focar o ensino da Matemática em torno da Aritmética e da Álgebra. Neste contexto, segundo a autora, os conteúdos de Geometria passaram a ser os últimos abordados, o que ocasionou que a mesma fosse trabalhada superficialmente ou nem fosse trabalhada, com a justificativa de "falta de tempo".

Outro aspecto que tem gerado investigações e discussões diz respeito à influência do chamado Movimento da Matemática Moderna (MMM) na ausência do ensino da Geometria na Educação Básica. Autores como Pavanello (1989, 1993), Lorenzato (1995, 2006), Pereira (2001), Andrade (2004), Crescenti (2005) entre outros se dedicaram a discutir a questão. Crescenti (2005, p. 37) ressalta que:

> [...] com a "reforma" ocorrida no período de 1960 a 1970, conhecida como "Movimento da Matemática Moderna", pensou-se ter encontrado outra alternativa para o ensino da Geometria: a unificação da linguagem nas diferentes áreas da Matemática. Assim, o rigor das demonstrações geométricas praticamente foi abolido, mas a preocupação excessiva com a linguagem da teoria dos conjuntos acabou por comprometer ainda mais o ensino dessa área, acarretando sua supressão ou o empobrecimento do conteúdo. O que atualmente ocorre nas salas de aula pode ser ainda consequência dessa época.

Nesta mesma linha de pensamento, Andrade e Nacarato (2004) destacam que durante séculos o ensino de Geometria teve uma abordagem estática, por influência da obra de Euclides, e que, por volta dos anos 60, começou a sofrer mudanças a partir do MMM. Os autores apontam que este movimento

> [...] impôs à Matemática um caráter puramente estruturalista não condizente com a realidade do saber escolar. Nesse contexto, houve um abandono do ensino de Geometria ou uma tendência de retorno às suas bases tradicionais. Quando ocorreram os movimentos de questionamento da Matemática Moderna e com as tentativas de retorno do ensino da Geometria, a ênfase recaiu nos aspectos empíricos da Geometria. Nesse movimento, marcado muito mais pela tentativa de buscar motivações para esse ensino, pode-se propor uma possível explicação para o total abandono do raciocínio dedutivo (ANDRADE; NACARATO, 2004, p. 8).

Ainda sobre as possíveis causas da não presença da Geometria nas salas de aula, Pereira (2001), a partir de sua investigação em torno dos estudos que pautaram esta discussão, estabeleceu três categorias emergentes da análise de investigações realizadas entre os anos de 1988 e 2000: problemas com a formação do professor, omissão da Geometria nos livros didáticos e lacunas deixadas pelo MMM. Essas categorias e a descrição dos trabalhos que levaram as conclusões da autora são apresentadas no quadro da figura 13.

Figura 13– Possíveis motivos para o abandono do ensino da Geometria

Pesquisadores	Metodologia do pesquisador	Fundamentação teórica do pesquisador	Problemas com a formação do professor	Omissão da Geometria nos livros didáticos	Lacunas deixadas pelo MMM
Vianna, 1988	Estudo Histórico	Semelhança de triângulos e Lógica	X	X	X
Bertonha, 1989	Método descritivo	Klaus Meyer, Van Hiele, Piaget e outros	X	X	X
Pavanello, 1989	Estudo Histórico	Investigação na legislação			X
Perez, 1991	Quantitativa	Educação Popular	X	X	
Sangiacomo,1996	Engenharia Didática	Colete Laborde, Brousseau, Balacheff, Chevallard e Duval		X	
Gouvêa, 1998	Sequência Didática	Brousseau, Chevallard, Arsac, Douady, Balacheff, Duval e Piaget	X	X	X
Mello, 1999	Sequência Didática	Balacheff e Duval		X	
Passos, 2000	Estudo de Caso	Gutiérrez, Bishop e outros	X		X

Fonte: Pereira, 2001, p. 56.

No que se refere a categoria problemas com a formação do professor, Pereira (2001, p.57) destaca que a mesma “inclui investigações sobre alguns aspectos que envolvem professores que não possuem, em sua formação acadêmica, os conhecimentos necessários em Geometria para aplicá-la em suas atividades pedagógicas”. Já para a omissão da Geometria em livros didáticos a autora ressalta que “as lacunas que envolvem os conteúdos e conceitos geométricos nos livros didáticos influem na prática pedagógica dos professores (p.59) ”. A respeito das lacunas deixadas pelo MMM, Pereira (2001) destaca o mesmo como

> [...] um principal marco de mudança curricular do ensino brasileiro de matemática nos últimos 50 anos. Em meio à necessidade de renovação, o abalo do MMM decorre, basicamente, da tentativa de mais uma vez unificar os três ramos fundamentais da Matemática. A exemplo do que historicamente foi tentado na chamada “Reforma Francisco Campos” com o Decreto 19.890 – 18 de abril de 1931. A tentativa de unificação, agora, se dá por elementos essenciais como os conjuntos, as relações e as estruturas. O MMM, ao que parece, demonstrou-se insuficiente para substituir a Geometria Euclidiana por uma nova axiomatização. Assim, o MMM não conseguiu

> superar a crise em que se encontrava o ensino da Geometria, mas contribuiu para o seu abandono (PEREIRA, 2001, p. 64).

Por outro lado, no que se refere ao MMM ter desencadeado o abandono do ensino da Geometria, Oliveira, Silva e Valente (2011, p.163) tem uma opinião que em muito se afasta das visões até aqui apresentadas, ressaltando que, no âmbito do Movimento Matemática Moderna

> [...] longe de ser abandonado pelos autores, o ensino da geometria é apresentado como uma nova proposta, na qual se identificam as duas tendências marcantes. Uma que incorpora as transformações geométricas, na abordagem defendida por Félix Klein; a segunda, hegemônica, que reforça a geometria euclidiana como uma abordagem diferenciada, seja na incorporação de novos axiomas, assim como na inclusão da geometria experimental.

Neste contexto, Sbitneva, Moreno e Valdez (2014) destacam que atualmente a Geometria recupera sua posição de liderança devido as geometrias hiperbólicas e projetivas úteis em aplicações em física moderna e ciências da computação. Esta nova visão da Geometria, segundo os autores, foi formulada por Félix Klein no Programa Erlangen: a geometria é o estudo dos espaços com suas transformações, sendo descritas três geometrias fundamentais: euclidiana e não-euclidiana, hiperbólica e elíptica.

Assim, de acordo com Oliveira, Silva e Valente (2011) as representações do fracasso e do abandono da Geometria possibilitam discussões sobre o como conduzir a Educação Matemática em dias atuais, contemplando as complexidades e dinâmicas de uma reforma educacional, bem como

> [...] evidencia a existência da criatividade do meio escolar face àquilo que chega às instituições de ensino vindo de fora delas. Revela o caráter de produção do saber escolar matemático como síntese de discussões de uma época aliada às heranças de práticas pedagógicas de outros tempos. E, nesse sentido, uma revolução escolar ocorre quando essa síntese ampara novas práticas a terem lugar no cotidiano das escolas (OLIVEIRA; SILVA; VALENTE, 2011, p. 163).

Ainda, considerando a pertinência e relevância do ensino de Geometria, Pereira (2001) destaca que, considerando o diagnóstico realizado no desenvolvimento da pesquisa/inventário por ele conduzida,

> [...] fica evidente e necessária a discussão sobre novas abordagens, redimensionadas em conceitos e atividades que significativamente impulsionem o processo de aquisição – ensino e aprendizagem da Geometria, com novas leituras para novas propostas de ensino (PEREIRA, 2001, p. 66).

Concordando com a visão do autor sobre a necessidade de se discutir abordagens que venham impulsionar o ensino e aprendizagem da Geometria apresenta-se, no que segue, um panorama das pesquisas desenvolvidas no Brasil com o foco na Geometria.

4.3 A GEOMETRIA NO BRASIL: UM PANORAMA DAS PESQUISAS APRESENTADAS NO ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM)

Visando aprofundar os estudos em torno das discussões e investigações desenvolvidadas focadas na Geometria a ser ensinada e aprendida na Educação Básica, voltou-se um olhar para os trabalhos apresentados nos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM), considerando que este evento é o mais importante no âmbito nacional, promovido pela Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), pois contempla os vários segmentos envolvidos com a Educação Matemática: professores da Educação Básica, professores e estudantes das Licenciaturas em Matemática e em Pedagogia, estudantes da Pós-graduação e pesquisadores.

A partir deste olhar para os anais do ENEM, encontram-se as pesquisas de Andrade (2004) e Petry (2013) que produziram uma análise dos artigos apresentados no evento, no que se refere a Geometria. Em Andrade (2004) foi apresentado um panorama dos trabalhos desenvolvidos em torno da Geometria desde o I ENEM (1987) até VII ENEM (2001). Embora com procedimentos e critérios metodológicos distintos, de certo modo, Petry (2013) deu continuidade ao estado da arte desenvolvido por Andrade (2004), sintetizando os trabalhos apresentados no VIII, IX e X ENEM, respectivamente ocorridos em 2004, 2007 e 2010. No que segue apresenta-se as considerações e categorizações dos autores sobre os trabalhos apresentados nos referidos encontros e, em seguida, buscando atualizar as investigações realizadas no período de 2011 à 2016, discute-se os artigos publicados no XI e XII ENEM.

4.3.1 A Geometria nos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM): um panorama do I ao VII ENEM.

Andrade (2004) desenvolveu sua investigação em torno da identificação e análise das tendências para o Ensino de Geometria no Brasil, a partir das publicações nos ENEM, no período de 1987 até 2001, onde ocorreram sete eventos. A metodologia utilizada pelo autor consiste em uma análise descritiva dos anais dos encontros, considerando as modalidades mesas redondas, conferências, relatos de experiências, comunicações científicas, minicursos, dentre outros, extraindo aspectos gerais e particularidades dos artigos.

A investigação contou com a análise de 363 trabalhos que culminou para uma organização dos mesmos em sete categorias, as quais passam a ser discutidas tomando como referência o que está posto em Andrade (2014).

- **Geometria pelas Transformações (GT):** trabalhos que apresentavam uma proposta de ensino por meio de transformações geométricas ou discussões sobre a estrutura dessa geometria.
- **Geometria Experimental (GE):** contempla as propostas de ensino de Geometria nas quais eram utilizadas ou realizadas atividades com materiais manipulativos, jogos, representações, construções, resolução de problemas, provas, argumentações, como também trabalhos que discutem o pensamento geométrico a partir de um enfoque teórico e/ou epistemológico.
- **Relação Álgebra e Geometria (RAG):** investigações que associam o ensino da Álgebra e da Geometria.
- **Geometria na Perspectiva Curricular e/ou Formação de Professores (GPCFP):** pesquisas que abordam a Geometria e o Currículo de Matemática e/ou o Ensino de Geometria na perspectiva da Formação de Professores.
- **Geometria em Ambientes Computacionais (GC):** considera os trabalhos que envolvem o ensino e aprendizagem da Geometria utilizando um ambiente computacional.
- **Geometria numa Perspectiva Teórica (GPT):** se refere aos trabalhos de cunho mais teórico, em torno de discussões de conteúdos e conceitos internos à Geometria.
- **Geometria numa Perspectiva Histórica (GPH):** os trabalhos que abordavam a Geometria tomando como referância a História, por exemplo, a Geometria não-euclidiana por meio do V postulado.

Considerando as categorias apresentadas, Andrade (2004) organizou seus dados, e destacou as categorias Geometria das Transformações, Relação Álgebra e Geometria, Geometria Experimental e Geometria em Ambientes Computacionais, como tendências para o ensino da Geometria nos sete primeiros ENEM, sendo que as duas últimas o autor considerou como emergentes. O quadro da figura 14, tomado de Petry (2013), destaca as categorias apontadas por Andrade (2014) como categorias emergentes para o ensino da Geometria.

Figura 14 - Tendências emergentes para o Ensino da Geometria nos sete primeiros ENEM

AGRUPAMENTO DOS TRABALHOS		
CATEGORIA	**SUBCATEGORIAS / EIXOS TEMÁTICOS**	
GEOMETRIA EXPERIMENTAL (174 trabalhos – 48%)	**1. Perspectiva Empírico Ativista (63 trabalhos – 17%)**	1. Realização/divulgação de atividades
		2. Utilização/construção de materiais concretos
		3. Geoplano, tangram, poliminós e quebra-cabeças
		4. Dobraduras
		5. Uso de jogos
		6. Caleidoscópios e caleidociclos
		7. Relação da Geometria com outras áreas
	2. Perspectiva sociocultural (produção/negociação de significados) **(21 trabalhos – 6%)**	1. Modelação e Modelagem Matemática
		2. Relações da Geometria com outros objetos e acontecimentos
		3. Trabalhos com uma abordagem interdisciplinar
		4. Perspectiva da resolução de problemas
	3. Provas e argumentações (19 trabalhos – 5%)	
	4. Perspectiva teórica/epistemológica (71 trabalhos – 19%)	1. Aportes da Psicologia
		2. Modelo van Hiele
		3. Didática da Matemática Francesa
		4. Outros aportes epistemológicos
GEOMETRIA EM AMBIENTES COMPUTACIONAIS (83 trabalhos – 23%)	**1. Ambiente LOGO (15 trabalhos – 4%)**	
	2. Ambiente de Geometria Dinâmica (51 trabalhos – 14%)	1. Cabri-géomètre
		2. Geometricks
		3. Geometer's Sketchpad
		4. Tabulae e Mangaba
		5. Cabri-géomètre, Sketchpad e Cabri-java
	3. Outros Ambientes Computacionais (17 trabalhos – 5%)	

Fonte: Petry (2013, p.26).

Conforme pode ser observado na figura 14, as duas categorias emergentes representam 71% dos trabalhos apresentados nos setes primeiros ENEM, sendo o restante (29%) dividido entre as demais categorias.

No que se refere a categoria de Geometria Experimental, Andrade (2004) destaca que, os trabalhos rompem com um modelo euclidiano de ensino. Em um primeiro momento, a ênfase recai em uma abordagem mais lúdica da Geometria, com a utilização de materiais didáticos. Segundo o autor, a partir de uma consolidação da comunidade de educadores matemáticos, nos ENEM seguintes, os trabalhos apresentados passam a ter um caráter mais científico, fundamentados teoricamente e epistemologicamente. Neste contexto, a Didática da Matemática Francesa ganha destaque como referencial das pesquisas, proporcionando reflexões e propondo ações que podem ser desencadeadas em sala de aula, para contribuir para a inclusão da Geometria no currículo escolar. Outro aporte teórico bastante utilizado é o referente aos níveis de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele.

Já no que se refere a categoria Geometria em Ambientes Computacionais, sua presença foi possível de ser identificada a partir do II ENEM, tendo grande predomínio da linguagem LOGO, porém sua trajetória é similar a de uma assíntota, pois o percentual de trabalhos relacionados a essa linguagem vai diminuindo até que nos três últimos encontros, com a entrada em cena dos Ambientes de Geometria Dinâmica, chega próximo de zero (ANDRADE, 2004).

Andrade (2004) também destaca, em sua pesquisa, um aumento significativo dos trabalhos publicados nos ENEM, especificamente sobre Geometria, destacando uma produção mais intensa em uma perspectiva mais exploratória, com a utilização de recursos didáticos, materiais manipulativos e recursos computacionais, justificando as categorias destacadas e consideradas como emergentes. Pondera que a partir da análise dos anais dos referidos ENEM, foi possível perceber que, ao menos nas publicações, houve um resgate das discussões em torno do ensino de Geometria, entretando as pesquisas apontam, ainda, para uma escassez da mesma nas salas de aula.

Buscando evidenciar se as categorias destacadas por Andrade (2004) se consolidaram nos seguintes ENEM, Petry (2013) deu continuidade a análise para os encontros de 2004, 2007 e 2010, os quais passam a ser discutidos.

4.3.2 A Geometria nos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM): um panorama do VIII ao X ENEM

A pesquisa realizada por Petry (2013) considerou os anais do VIII (2004), IX (2007) e X ENEM (2010), contemplando os trabalhos referentes somente aos anos finais ao Ensino Fundamental, foco da sua e desta investigação, nas modalidades de comunicações científicas e relatos de experiências. Percebe-se, aí, uma diferença na metodologia de coleta de dados entre Andrade (2004) e Petry (2013). Enquanto o primeiro autor buscou trabalhos sobre Geometria em todas as modalidades passíveis de serem apresentados trabalhos (mesas redondas, conferências, relatos de experiências, comunicações científicas, minicursos, dentre outros), o segundo focou em comunicações científicas e relatos de experiência, e somente os relacionados ao Ensino Fundamental, como já apontado. Entende-se que essa diferença de procedimento influenciou diretamente o número de trabalhos apresentados, porém, não interefere em relação ao percentual de trabalhos nas categorias elencadas.

Petry (2013) identificou 67 artigos, os quais foram agrupados considerando as categorias, Geometria Experimental e Geometria em Ambientes Computacionais, propostas por Andrade (2004), conforme destacado no quadro da figura 15.

Figura 15 - Tendências emergentes para o Ensino da Geometria nos artigos do VII, IX e X ENEM.

AGRUPAMENTOS DOS TRABALHOS		
CATEGORIA	**SUBCATEGORIA / EIXOS TEMÁTICOS**	
GEOMETRIA EXPERIMENTAL (56 trabalhos - 84%)	**1. Perspectiva Empírico Ativista (19 trabalhos - 29%)**	1. Realização/divulgação de atividades
		2. Utilização/construção/confecção de materiais concretos
		3. Geoplano
		4. Dobraduras (Origami)
		5. Uso de jogos
	2. Perspectiva sociocultural (produção/negociação de significados) **(18 trabalhos - 27%)**	1. Modelação e Modelagem Matemática
		2. Relações da Geometria com outros objetos e acontecimentos
		3. Trabalhos com uma abordagem interdisciplinar
		4. Perspectiva da resolução de problemas
	3. Provas e argumentações (2 trabalhos - 3%)	
	4. Perspectiva teórica/epistemológica (17 trabalhos - 25%)	1. Aportes da Psicologia
		2. Modelo van Hiele
		3. Didática da Matemática Francesa
		4. Outros aportes epistemológicos
GEOMETRIA EM AMBIENTES COMPUTACIONAIS (11 trabalhos - 16%)	**1. Ambiente LOGO (0 trabalho - 0%)**	
	2. Ambiente de Geometria Dinâmica (9 trabalhos - 13%)	1. Cabri-géomètre
		2. Cabri-géomètre e Régua e Compasso
		3. Geogebra
		4. Winplot
	3. Outros Ambientes Computacionais (2 trabalhos - 3%)	

Fonte: Petry (2013, p.31)

No que se refere a categoria Geometria Experimental, Petry (2013) destaca que os trabalhos, de modo geral, visavam privilegiar um ambiente de ensino e de aprendizagem estimulante para o estudantes, sendo propostas atividades práticas, manipulação de materiais, experimentação e jogos, tendo o aluno como centro da aprendizagem.

No que se refere aos aportes teóricos e epistemológicos, o autor destaca que se mantiveram os mesmos aspectos apontados na análise das edições anteriores, porém

> [...] o Modelo de van Hiele aqui aparece com pouca força, o que pode ter ocorrido em função da análise ter abrangido somente o Ensino Fundamental. Percebeu-se que os trabalhos desenvolvidos na perspectiva da Didática da Matemática Francesa apresentavam uma estreita relação com conceitos que visavam ao favorecimento de uma compreensão das conexões entre a teoria e a prática, sendo observada, e que se traz em destaque, a compreensão das condições de produção, de registro e de comunicação de conteúdos (PETRY, 2013, p. 37).

Já, no que se refere a segunda categoria, o ambiente Logo não foi abordado em nenhum trabalho. Sobre Ambientes Computacionais de Geometria Dinâmica, o autor identificou a utilização dos softwares Cabri-géomètre, Régua e Compasso, Geogebra e Winplot, com destaque para a forte influência do Cabri-géomètre, tanto tomado como referência e sendo utilizado, como comparando-o a outros. Na subcategoria outros ambientes, foram considerados os trabalhos que utilizaram programas que não tinham o enfoque específico para a Geometria, sendo que o primeiro desenvolveu estudos baseados na ferramenta para a produção de cenas em ambientes de realidade virtual VRML e o segundo desenvolveu atividades da Geometria Plana por meio do programa Tangran em formato eletrônico (PETRY, 2013).

Sobre a análise produzida o autor ressalta que,

> [...] permitiu retratar o atual estado da arte dos trabalhos apresentados nos ENEMs de 2004, 2007 e 2010. Os resultados apontam que os trabalhos, apresentados nesses ENEM, têm convergido para atividades cujo enfoque estava no desenvolvimento do conhecimento geométrico com destaque para o trabalho em grupo, cuja prioridade era a troca de ideias entre os alunos. Assim, as atividades buscavam o desenvolvimento de conceitos conhecidos, porém de pouco domínio dos alunos, ou a exploração de novos conceitos, os quais exigiam que os alunos fizessem uso do raciocínio dedutivo, bem como da análise dos aspectos particulares da atividade (PETRY, 2013, p.39).

Observando a importância das análises produzidas por Andrade (2004) e Petry (2013), as quais possibilitam apresentar o estado da arte no que se refere as pesquisas desenvolvidas no Brasil em torno da Geometria, julgou-se pertinente estender essa análise para as edições posteriores do ENEM (XI e XII), o que passa a ser apresentado no que segue.

4.3.3 A Geometria nos Encontros Nacionais de Educação Matemática (ENEM): um panorama do XI e XII ENEM

A partir das considerações e evidências percebidas nos trabalhos desenvolvido por Andrade (2004) e Petry (2013), lançou-se um olhar para os anais dos dois últimos ENEM, o XI ocorrido em 2013 em Curitiba/PR e o XII realizado em 2016 em São Paulo/SP. Visando identificar os trabalhos e as concepções em torno da Geometria a ser ensinada e aprendida, selecionou-se os mesmos a partir das Comunicações Científicas, Relatos de Experiências e Minicursos, retomando as categorias apresentadas em Andrade (2004), sendo elas: Geometria pelas Transformações, Geometria Experimental, Relação Álgebra e Geometria, Geometria na Perspectiva Curricular e/ou Formação de Professores, Geometria em Ambientes Computacionais, Geometria numa Perspectiva Teórica e Geometria numa Perspectiva Histórica

No XI ENEM (2013), segundo a organização do evento, em torno de 1700 trabalhos compõem os anais do encontro. Destes, foram identificados 153 artigos relacionados com a temática Geometria. No XII ENEM (2016) manteve-se a média de trabalhos, tanto no que se refere ao total, em torno de 1700, como nos referente a Geometria, 147. Os dados referentes a esses dois encontros estão detalhados na Tabela 1.

Tabela 1 - Tendências emergentes para o da Geometria nos artigos do XI e XII ENEM.

Categoria	Trabalhos no XI ENEM (2013)	Trabalhos no XII ENEM (2016)
Geometria pelas Transformações	1 (0,6 %)	3 (2%)

Geometria Experimental	89 (58 %)	63 (43%)
Relação Álgebra e Geometria	5 (3%)	1 (0,7%)
Geometria na Perspectiva Curricular e/ou Formação de Professores	18 (12%)	26 (18%)
Geometria em Ambientes Computacionais (Geometria e Tecnologias Digitais)	33 (22%)	39 (26,3%)
Geometria numa Perspectiva Teórica	1 (0,6%)	12 (8%)
Geometria numa Perspectiva Histórica	6 (4,4%)	3 (2%)
Total de trabalhos:	**153**	**147**

Fonte: a pesquisa.

De maneira geral, é possível perceber (tabela 1) que os quantitativos não se modificaram significativamente, tanto no que se refere as duas edições do evento, como nos percentuais das categorias. Mantendo-se, assim como nas análise das edições anteriores, o predominío das categoriais referente a Geometria Experimental e em Ambientes Computacional.

Sobre a categoria de Geometria Experimental, destaca-se que os artigos se caracterizam por compartilhar resultados de pesquisas ou propostas de ensino em torna da Geometria, principalmente utilizando como recursos e estratégias, sequências didáticas, atividades de manipulação, construções com instrumentos de desenho adequados, como régua e compasso, utilização do tangran, origami, dobraduras entre outros. Como aportes teóricos foram utilizados, principalmente, a Didática da Matemática Francesa e, em especial, os Registros de Representações Semióticas e a Teoria de Van Hiele.

No que se refere à Geometria em Ambientes Computacionais, entende-se que esta categoria poderia ser renomeada como Geometria e Tecnologias Digitais, considerando que, atualmente, o uso da tecnologia no ensino, não é restrito ao computador, tendo outras mídias, como tablets, smartphones, lousas digitais, entre outros recursos, possíveis de serem explorados, os quais estão evidenciados nos trabalhos. Nesta categoria surgiu um resultado diferente das edições anteriores, pois há um destaque muito grande a um *software* específico, o Geogebra, o qual foi utilizado em mais de 70% dos trabalhos que utilizaram *software.* Outro aspecto a ser destacado é novamente a presença de trabalhos com a linguagem Logo (8 artigos) o que não tinha sido mais identificado na análise de Petry (2013).

Outra categoria que pode ser destacada e está relacionada com as duas indicadas como emergentes nas pesquisas anteriores (Geometria Experimental e Geometria em Ambientes Computacionais), é a Geometria na Perspectiva Curricular e/ou Formação de Professores. Nesta categoria foi possível identificar uma preocupação dos pesquisadores em promover formações tanto inicial como continuada para discutir possibilidades metodológicas, como também, os conteúdos geométricos, aspectos estes atrelados aos trabalhos relacionados ao currículo. Entende-se assim, que esta categoria pode ser considerada como emergente nos XI e XII ENEM.

Por fim, considera-se que todo esse movimento de pesquisa e reflexão em torno da Geometria, seu ensino e aprendizagem, e que se mantém vivo e constante nos ENEM, está convergindo para um resgate do ensino da Geometria na Educação Básica, sendo este nível de ensino o de maior foco nas investigações desenvolvidas.

Esta seção buscou apresentar uma síntese do estado da arte das pesquisas desenvolvidas no Brasil e apresentadas no Encontro Nacional de Educação Matemática no que se refere à Geometria, destacando aspectos teóricos e metodológicos emergentes destas investigações. A partir deste estudo e dos demais elementos teóricos apresentados discute-se, a seguir, o processo de ensino e aprendizagem da Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental.

4.4 O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DA GEOMETRIA NOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

Godino e Ruiz (2004) ressaltam que o significado etimológico da palavra Geometria se refere a "medida da terra" e, por muito tempo, os egípcios se ocuparam com esta noção devido as inundações do rio Nilo. Já os gregos se interessaram por uma Geometria das formas, identificando seus elementos, componentes e relações entre eles. Para os autores,

> A geometria se ocupa de uma classe especial de objetos que designamos por palavras como ponto, reta, plano, triângulo, polígono, poliedros, etc. Tais termos e expressões designam "figuras geométricas", as quais são consideradas como abstrações, conceitos, entidades ou representações gerais de uma classe de objetos. Por tanto, deve-se levar em conta que a natureza das entidades geométricas é essencialmente diferente de objetos perceptíveis, como este computador, uma mesa ou uma árvore. Um ponto, uma linha, um plano, um círculo, etc., não têm consistência material, nenhum peso, cor, densidade,etc[22]. (GODINO; RUIZ, 2004, p. 192, tradução nossa).

Em contrapartida, os autores, ressaltam, também, que a Geometria estuda as formas de figuras e corpos geométricos, e que na vida cotidiana encontram-se diversas representações

---

[22] La geometría se ocupa de una clase especial de objetos que designamos con palavras como, *punto, recta, plano, triángulo, polígono, poliedro*, etc. Tales términos y expresiones designan "figuras geométricas", las cuales son consideradas como abstracciones, conceptos, entidades ideales o representaciones generales de una categoría de objetos. Por tanto, hay que tener en cuenta que la naturaleza de los entes geométricos es esencialmente distinta de los objetos perceptibles, como este ordenador, una mesa o un árbol. Un punto, una línea, um plano, un círculo, etc., no tienen ninguna consistencia material, ningún peso, color, densidad,etc.

destes objetos, o que pode demonstrar as variadas aplicações desta parte da Matemática. Uma das principais fontes que representam estes objetos é a natureza por meio da

> Infinidade de elementos naturais de espécies diferentes compartilham da mesma forma que com as formas espirais (conchas do mar, caracóis, galáxias, folhas de fetos, arranjo de sementes de girassol, etc.). Também encontramos semelhanças entre galhos de árvores, o sistema arterial e bifurcações dos rios, ou entre os cristais, bolhas de sabão e placas de cascos de tartaruga[23] (GODINO; RUIZ, 2004, p.193, tradução nossa).

Sobre as relações entre a Geometria e elementos e ações do cotidiano, Bento (2010, p.33) destaca que o ensino de Geometria deve ressaltar o fato de estarmos cercados por ela. Segundo o autor

> [...] lidamos constantemente com ideias de paralelismo, congruência, semelhança, simetria, além de fatores de medição como área, volume. Isso ocorre sem que as pessoas percebam, pois faz parte do cotidiano de suas vidas; quanto "cabe" de água neste pote? (volume), quantos metros de piso eu compro? (metros quadrados – área).

No que se refere aos objetivos estabelecidos para o ensino e aprendizagem da Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL,1998) estabelecem que os estudantes ao final desta etapa sejam capazes de:

- resolver situações-problema de localização e deslocamento de pontos no espaço, reconhecendo nas noções de direção e sentido, de ângulo, de paralelismo e de perpendicularismo elementos fundamentais para a constituição de sistemas de coordenadas cartesianas;
- estabelecer relações entre figuras espaciais e suas representações planas, envolvendo a observação das figuras sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações;
- resolver situações-problema que envolvam figuras geométricas planas, utilizando procedimentos de decomposição e composição, transformação, ampliação e redução.
- interpretar e representar a localização e o deslocamento de uma figura no plano cartesiano;
- produzir e analisar transformações e ampliações/reduções de figuras geométricas planas, identificando seus elementos variantes e invariantes, desenvolvendo o conceito de congruência e semelhança;

---

[23] Multitud de elementos naturales de distinta espécie comparten la misma forma, como ocurre con las formas en espiral (conchas marina, caracoles, galaxias, hojas de los helechos, disposición de las semillas del girasol, etc.). Igualmente encontramos semejanzas entre las ramificaciones de los árboles, el sistema arterial y las bifurcaciones de los ríos, o entre los cristales, las pompas de jabón y las placas de los caparazones de las tortugas.

- ampliar e aprofundar noções geométricas como incidência, paralelismo, perpendicularismo e ângulo para estabelecer relações, inclusive as métricas, em figuras bidimensionais e tridimensionais (BRASIL, 1998).

Considerando os objetivos estabelecidos, os PCN ressaltam que

> As questões relacionadas com as formas e relações entre elas, com as possibilidades de ocupação do espaço, com a localização e o deslocamento de objetos no espaço, vistos sob diferentes ângulos são tão necessárias hoje quanto o foram no passado. Situações quotidianas e o exercício de diversas profissões, como a engenharia, a bioquímica, a coreografia, a arquitetura, a mecânica etc., demandam do indivíduo a capacidade de pensar geometricamente. Também é cada vez mais indispensável que as pessoas desenvolvam a capacidade de observar o espaço tridimensional e de elaborar modos de comunicar-se a respeito dele, pois a imagem é um instrumento de informação essencial no mundo moderno (BRASIL, 1998, p. 122).

Já o documento Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM) destaca que o ensino de Geometria deve possibilitar aos estudantes serem capazes de:

- analisar características e propriedades de objetos bidimensionais e tridimensionais e argumentar sobre as relações geométricas;
- especificar as posições dos objetos no espaço e descrever as relações espaciais utilizando a geometria de coordenadas e outros sistemas de representação;
- aplicar transformações geométricas e usar simetria para analisar situações matemáticas;
- usar a visualização, o raciocínio espacial e a modelagem geométrica paea resolver problemas. (NCTM, 2000, p. 41).

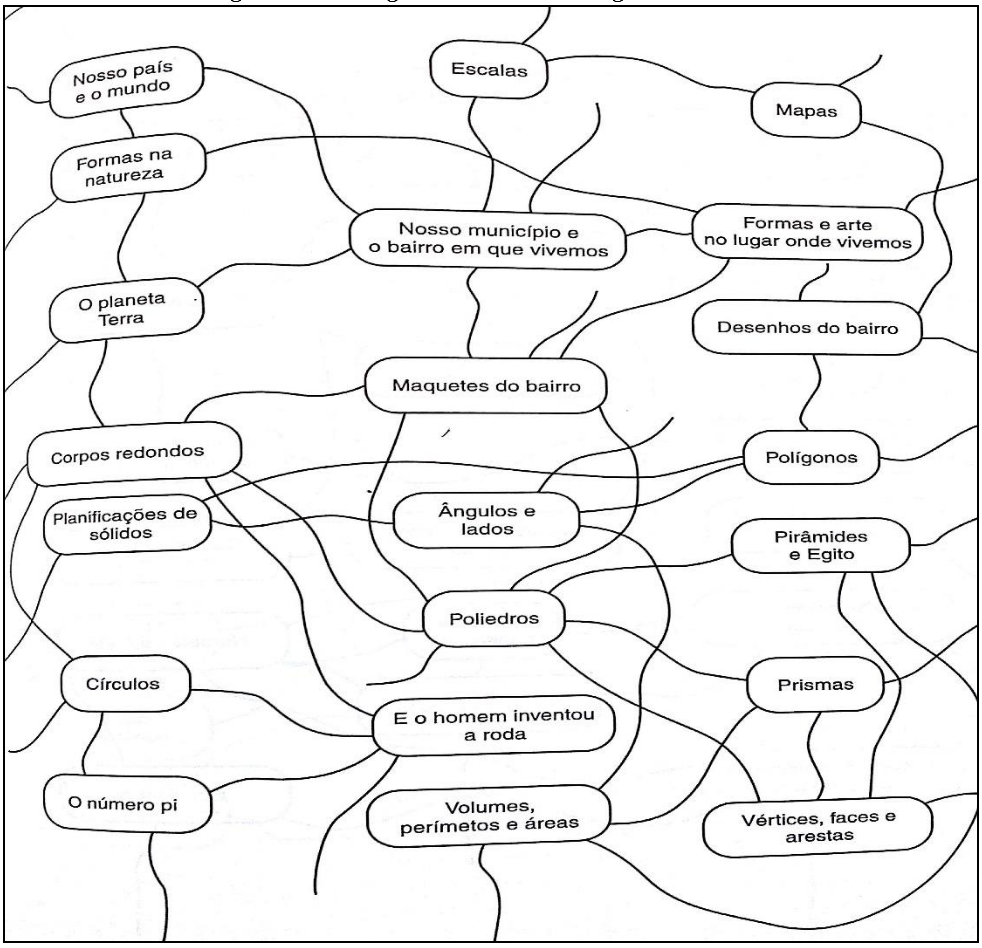
Para que os estudantes sejam capazes de desenvolver tanto os objetivos propostos nos PCN como as competências e habilidades destacadas no NTCM, o processo de ensino e aprendizagem em torno da Geometria deve ser pensado e planejado visando explorar diferentes metodologias de ensino, uma vez que a Geometria envolve mais que definições, é descrever, justificar e estabelecer relações, ou seja, a construção do conhecimento geométrico, desde um pensamento mais informal até a formalização. Neste contexto, a BNCC (BRASIL, 2017) destaca que o conhecimento geométrico nos anos finais do Ensino Fundamental necessita ser visto como continuação e consolidação das aprendizagens anteriores, vivenciadas nos anos iniciais.

Considerando os objetivos, competências e habilidades destacados pelos documentos (NTCM, 2000; BRASIL, 1998; 2017) e que encaminham o que é pertinente no que se refere ao desenvolvimento da Geometria a ser ensina e aprendida no Ensino Fundamental, entende-se pertinente, também, discutir e refletir sobre conteúdos e tópicos a serem trabalhados neste nível de ensino, visando alcançar ao que é proposto pelos documentos.

Nesse contexto, Pires (2000) propõem um olhar para o currículo de Matemática, não como uma listagem de conteúdos a serem trabalhados, mas como um conjunto de estratégias integradas a um projeto educacional, organizado por eixos temáticos, em substituição a uma abordagem de conteúdos isolados. A autora apresenta-se um conjunto de eixos temáticos, cada um relativo a um ano do Ensino Fundamental, os quais passam a ser destacados.

Para o 6º ano do Ensino Fundamental é proposto o eixo temático, O Lugar onde Vivemos: Figuras e Formas, abordando as temáticas ilustradas na figura 16.

Figura 16 - O lugar onde vivemos: Figuras e Formas

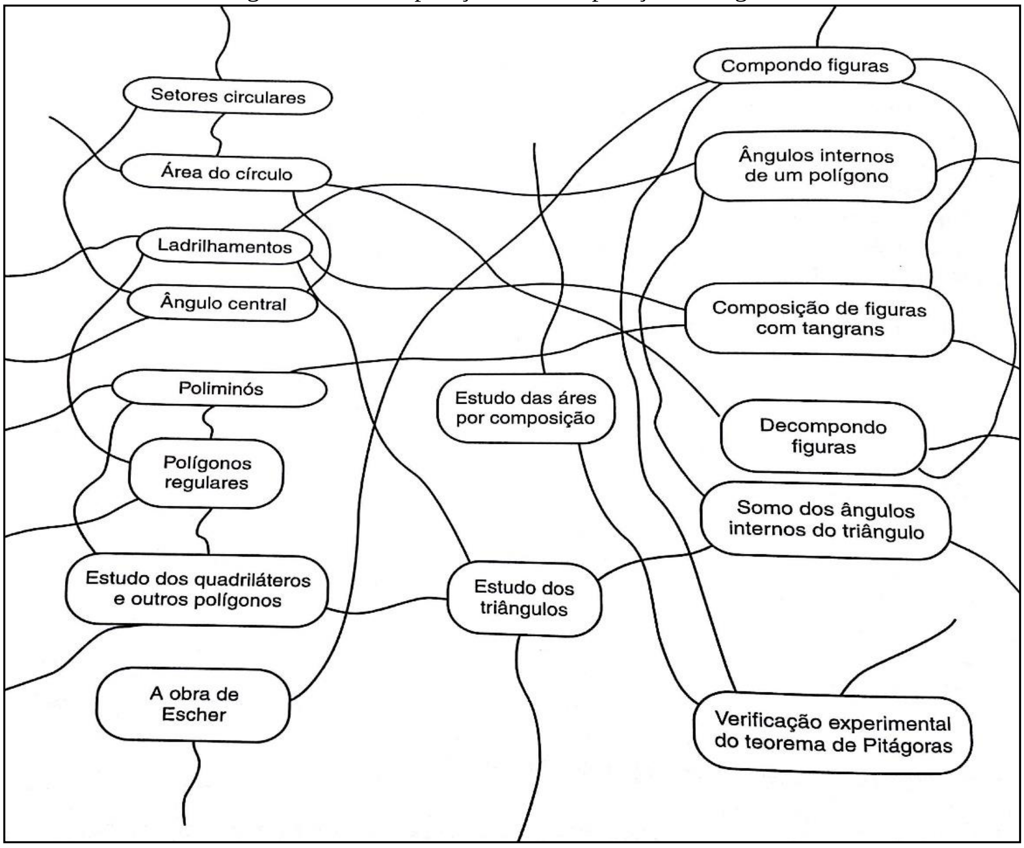


Fonte: Pires (2000, p. 171).

No eixo apresentado na Figura 16, a autora destaca que o trabalho com os temas apontados pode ser encaminhado pela exploração, utilização de mapas, decomposição das figuras, possibilitando explorar as múltiplas linguagens, ressaltando a importância do trabalho com a Geometria “explorando o desenvolvimento de um tipo especial de pensamento que permite compreender, descrever e representar o mundo que vivemos de forma organizada” (PIRES, 2000, p.175).

Para o 7º ano do Ensino Fundamental a autora estabelece o eixo temático, Composição e Decomposição de Figuras, abordando as temáticas ilustradas na figura 17.

Figura 17 - Comoposição e decomposição de Figuras.

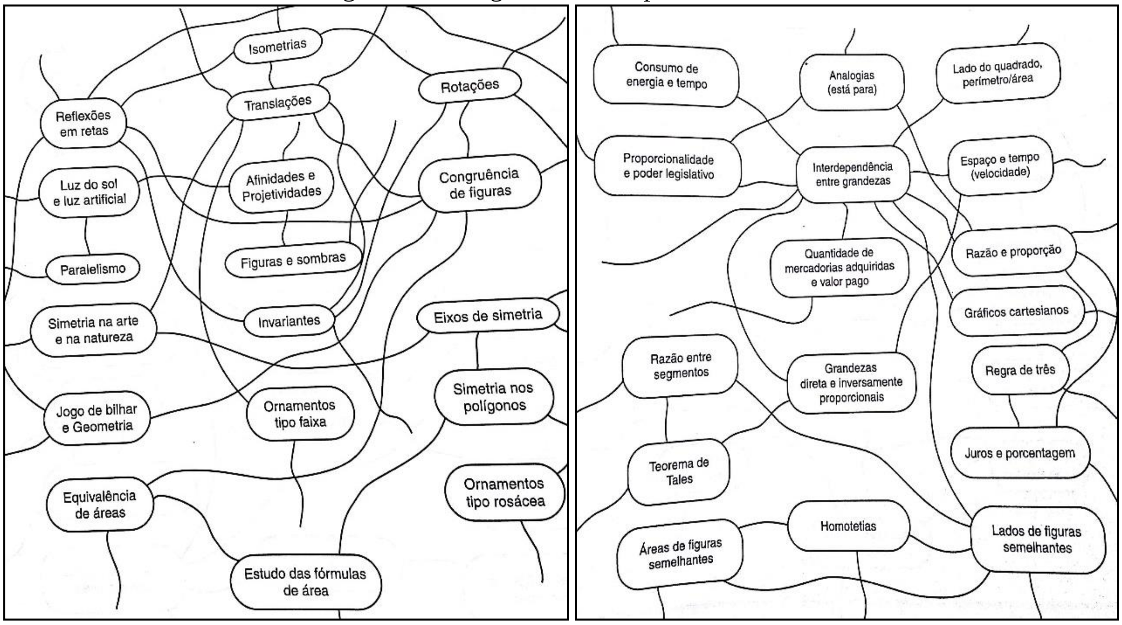


Fonte: Pires (2000, p. 180)

Sobre este eixo (figura 17) a autora destaca que aprender Geometria supõem possibilitar aos estudantes atividades de investigação, exploração de objetos do mundo físico, de obras artísticas como pinturas, desenho, artesanato e construções, apontando, também, que “a geometria é um campo fértil para se trabalhar com situações-problema e para o desenvolvimento de ideias matemáticas fundamentais como composição e decomposição de figuras” (PIRES, 2000, p. 184).

Para o 8º ano, identificou-se dois eixos temáticos relacionados ao ensino da geometria, destacados na figura 18.

Figura 18 - Congruência e Proporcionalidade

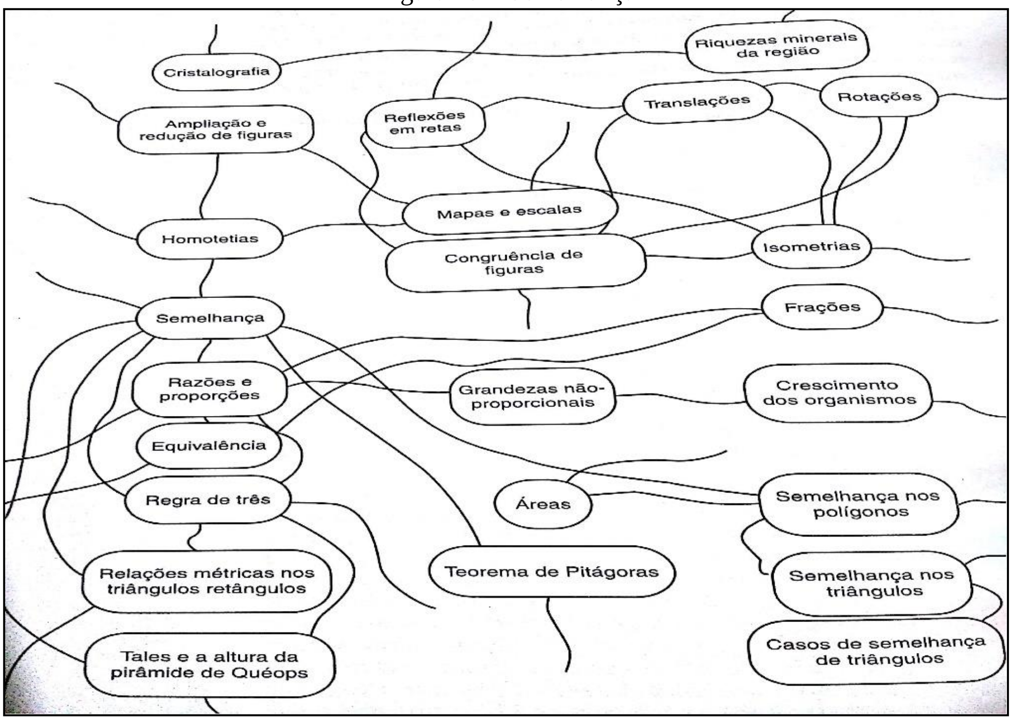


Fonte: Pires (2000, p. 189 e 190)

A respeito dos eixo temáticos destacado na figura 18, Pires (2000) ressalta que o estudo das simetrias pode ser encaminhado por atividades que envolvam obras artísticas e elementos da natureza e a partir deles explorar as isometrias (reflexões, translações e rotações) as noções de congruências e proporcionalidade, na ampliação e redução de figuras.

Já para o 9º ano do Ensino Fundamental, é proposto um eixo temático sobre Semelhança, dando continuidade ao trabalho iniciado no oitavo ano, conforme ilustrado na figura 19.

Figura 19 – Semelhança



Fonte: Pires (2000, p. 196).

Encerrando o estudo de Geometria no ensino fundamental, a autora propõe que as temáticas (figura 19) relacionem-se com tópicos já estudados, retomando propriedades e trabalhando situações-problema.

Pires (2000) ressalta que a organização de um currículo ou projeto por meio de eixos temáticos, colabora para o necessário rompimento com a linearidade, uma vez que possibilita estabelecer conexões entre os temas matemáticos, como também, favorece um trabalho interdisciplinar.

Ressalta-se que a discussão sobre um trabalho organizado por eixos, conforme apresentados aqui, a partir de Pires (2000), inspiraram que a proposta de estudos de recuperação para a Geometria do Ensino Fundamental, desenvolvida nesta investigação, fosse organizada por tópicos, contemplando assim, quinze temáticas sendo elas: Figuras Geométricas; Ponto, Reta e Plano; Polígonos; Simetria; Ângulos; Triângulos; Quadriláteros; Área e Perímetro; Volume; Congruência; Semelhança, Teorema de Tales; Teorema de Pitágoras; Relações Métricas; Círculo e Circunferência. No que se refere ao desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem organizado em torno destas temáticas, tomou-se como referência os pressupostos oficiais já destacados, visando possibilitar situações para que os objetivos, competências e habilidades fossem alcançados.

Assim, para o trabalho com as figuras geométricas, buscou-se privilegiar tanto a observação como a construção de figuras geométricas com uso de materiais de desenho e/ou de *softwares* de geometria dinâmica, tendo em vista que os alunos poderão, a partir da observação e da identificação das figuras, estudá-las mais profundamente, compreendendo suas propriedades e suas relações, como também seus usos outras áreas do conhecimento (BRASIL, 2017).

Neste contexto, é destacado no NTCM (2000) que a tecnologia desempenha um papel importante no ensino e aprendizagem de Geometria, tendo em vista que os *softwares* de geometria dinâmica, possibilitam modelar uma grande variedade de figuras e promovem uma experiência interativa com elas. Assim, "usando a tecnologia, os alunos podem gerar muitos exemplos como um meio de estabelecer e explorar conjecturas [...]. A visualização e o raciocínio espacial se enriquecem mediante a interação com animações de computador e em outros contextos tecnológicos[24]" (NTCM, 2000, p.43).

[24] "El uso de la tecnología, los estudiantes pueden generar muchos ejemplos como un medio para establecer y explorar conjeturas [...]. La visualización y el razonamiento espacial enriquecen a través de la interacción con animaciones por ordenador y otros contextos tecnológicos.

Sobre esta questão, foi possivel perceber na análise realizada nos artigos do ENEM, já discutidos na seção anterior, a forte presença das tecnologias no ensino da Geometria, especialmente de *software* de geometria dinâmica. Bento (2010, p.30) destaca que o uso de *software* “promove uma aprendizagem dinâmica da Geometria e possibilita de uma forma eficaz a interação com os usuários. Também se pode dizer que este Ambiente de Geometria Dinâmica é particularmente apropriado para apoiar um ensino renovado da Geometria”.

Concordando com os aspectos apontados nas investigações e nos documentos, sobre a importância da utilização dos recursos tecnológicos para o desenvolvimento do pensamento geométrico, a proposta de estudos de recuperação desenvolvida buscou integrar diferentes metodologias, apoiando-se em atividades tanto de construção com régua e compasso, como também no uso de *softwares* de geometria dinâmica. Particularmente, nos materiais de estudo produzidos nesta investigação, utilizou-se o *software Geogebra*[25], por este ser gratuito, estar disponível em outras mídias, como tablets e smartphone, ser passível de ser instalado no sistema operacional linux (sistema dos laboratórios das escolas públicas estaduais no Estado do Rio Grande do Sul), por suas funcionalidades e potencialidades para a aprendizagem, como também, seu destaque como recurso nas produções apresentadas no XI e XII ENEM.

O *Geogebra* é um *software* desenvolvido para o ensino e aprendizagem de Matemática, contemplando os vários níveis de ensino, da Educação Básica a Superior. Apesar da sua estreita relação com a Geometria, o mesmo contempla em suas funcionalidades recursos de Álgebra, Tabelas, Gráficos, Probabilidade, Estatística e Cálculo, “assim, o GeoGebra tem a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si” (BORTOLOSSI; REZENDE; PESCO, S/D).

Considera-se que o uso do Geogebra no ensino da Geometria favorece a aprendizagem tendo em vista que o mesmo possibilita construir objetos utilizando as definições e propriedades estudadas, como também, disponibiliza ferramentas especificas de construção imediata. Por exemplo, é possível construir um triângulo equilátero considerando segmentos de reta congruentes, ou ainda utilizar a ferramentas de construção de polígonos regulares, o que permite utilizá-lo de acordo com os objetivos estabelecidos para a atividade. Outro aspecto importante refere-se à possibilidade de movimento e de animações, o que permite o desenvolvimento de tarefas envolvendo visualização, movimentação, observação, a busca pelo estabelecimento de relações e conjecturas.

Sobre o *software* e sua utilização Albuquerque (2008, p.15) destaca

[25] Disponível em https://www.geogebra.org/

> O Geogebra é um instrumento de fácil acesso, tecnologia que possibilita explorar e visualizar a dinamicidade existente na geometria. Sendo assim, reforça conceitos e propriedades em que o aluno tem mais dificuldades de visualizar alterações de posições e movimentos imaginários, como as limitações da reta, da semi-reta e segmentos de reta, propriedades de polígonos, teorema de Tales, condição de existência de triângulos, entre outros.

Assim, considerando as potencialidades destacadas do *Geogebra* utilizou-se o mesmo nos materiais para a construção de figuras, verificação de proposições e definições, validação de propriedades, demonstração de proposições, assim como animações e modelos já construídos previamente e utilizados com o objetivo de favorecer a observação e a construção de argumentação.

Além do recurso à tecnologia, considera-se importante, no estudo da Geometria, o desenvolvimento de atividades de construção com régua e compasso utilizando lápis e papel, o que é destacado também pelos PCN. O documento aponta a pertinência de se explorar situações em que sejam necessárias construções com régua, compasso e o uso de outros instrumentos, como esquadro e transferidor, possibilitando a construção, visualização e aplicação de propriedades das figuras, estabelecendo as relações entre procedimentos e propriedades geométricas que neles estão presentes (BRASIL, 1998).

Sobre a questão, Rossini (2010) ressalta que a utilização de atividades com régua e compasso são instrumentos fundamentais para o processo ensino e aprendizagem da Geometria, mas pondera que é possível desenvolver em uma mesma proposta a utilização de atividades de construções com lápis, papel e instrumentos de desenho como também atividades aliadas ao uso do computador.

As visões e entendimentos postos em destaque apontam para a possibilidade de se desenvolver um trabalho aliando tanto atividades concretas como em softwares de geometria dinâmica. Assim, buscou-se implementar nos materiais de estudos, sempre que possível, estes dois tipos de atividades, por se considerar que estas estratégias integradas podem potencializar a aprendizagem da Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental, assim como proporcionar o desenvolvimento de diferentes competências e habilidades dos estudantes.

No que se refere ao ensino e aprendizagem da Geometria é necessário destacar o modelo de desenvolvimento do pensamento geométrico de van Hiele, que conforme já ressaltado, é um dos referenciais mais utilizados nos trabalhos apresentados no XI e XII ENEM.

O modelo de van Hiele foi criado por Pierre van Hiele e sua esposa Dina van Hiele-Geoldof com base nas dificuldades apresentadas por estudantes do curso secundário na Holanda. Neste modelo enquanto os estudantes aprendem geometria, os mesmos progridem em uma sequência de níveis de compreensão de conceitos, onde cada um destes é caracterizado por relações entre objetos de estudo e linguagens próprias, os quais são apresentados no quadro da figura 20 (NASSER; SANT'ANNA, 2010).

Figura 20 - Os níveis de van Hiele para o desenvolvimento do pesnamento geométrico

Nível de Van Hiele	Características	Exemplos
1º Nível Reconhecimento	Reconhecimento, comparação e nomenclatura das figuras geométricas por sua aparência global.	Classificação de recortes de quadriláteros em grupos de quadrados, retângulos, paralelogramos, losangos e trapézios.
2º Nível Análise	Análise das figuras em termos de seus componentes, reconhecimento de suas propriedades e uso dessas propriedades para resolver problemas.	Descrição de um quadrado através de propriedades: 4 lados iguais, 4 ângulos retos, lados opostos iguais e paralelos.
3º Nível Abstração	Percepção da necessidade de uma definição precisa, e de que uma propriedade pode decorrer de outra; Argumentação lógica informal e ordenação de classes de figuras geométricas.	Descrição de um quadrado através de suas propriedades mínimas: 4 lados iguais, 4 ângulos retos. Reconhecimento de que o quadrado é também um retângulo.
4º Nível Dedução	Domínio do processo dedutivo e das demonstrações; Reconhecimento de condições necessárias e suficientes.	Demonstração de propriedades dos triângulos e quadriláteros usando a congruência de triângulos.
5º Nível Rigor	Capacidade de compreender demonstrações formais; Estabelecimento de teoremas em diversos sistemas e comparação dos mesmos.	Estabelecimento e demonstração de teoremas em uma geometria finita.

Fonte: Nasser e Sant'anna (2010, p.7)

O progresso de um nível para o outro ocorre por meio das vivências em atividades adequadas e organizadas pelo professor. Segundo Nasser e Sant'anna (2010, p.6) " a elevação de níveis depende mais de aprendizagem adequada do que de idade ou maturação".

No 1º nível (Reconhecimento) o reconhecimento das figuras geométricas é realizado por sua aparência global e a utilização de vocabulário não necessariamente padronizado. Segundo Fainguelernt (1999, p. 53) esse nível "se refere à habilidade de perceber, representar, transformar, descobrir, gerar, comunicar, documentar e refletir sobre as informações visuais".

No 2º nível (Análise) os estudantes estabelecem relações e implicações entre as figuras, mobilizando suas propriedades. Neste nível "os alunos começam a perceber conceitos geométricos, fazendo análise das características das figuras. Observam a figura não como um todo, mas identificam suas partes, propriedades geométricas e percebem as conseqüências das propriedades" (SILVA; CÂNDIDO, 2014, p.2).

Já no 3º nível (Abstração) os alunos são capazes de estabeler inter-relações entre as propriedades de uma figura e compará-las com outra figura. Segundo Silva e Cândido (2014) neste nível os estudantes podem realizar classificações inclusivas, definem corretamente conceitos e tipos de figuras, ou seja, apresentam raciocínio dedutivo informal, podendo entender uma demonstração, mas não são capazes de elaborar uma demonstração formal completa ainda, o que vai ocorrer no 4º nível (Dedução), no qual os estudantes serão capazes fazer distinção entre postulados, teoremas e definições, elaborarem demonstrações formais sem decorá-las, como também, perceber que podem chegar ao mesmo resultado mediante diferentes formas de demonstração, utilizando uma linguagem adequada e precisa (SILVA; CÂNDIDO, 2014).

No útimo e 5º nível (Rigor) os estudantes são capazes de estudar sistemas axiomáticos distintos do usual, realizando comparações entre diferentes sistemas axiomáticos para a Geometria.

Silva e Cândido (2014) destacam que no modelo de van Hiele os estudantes devem passar por todos os níveis para que haja compreensão de um determinado tema, não sendo possível estar no nível 2 sem ter passado pelo nível 1, porém o aluno pode estar em níveis diferentes em assuntos diferentes.

Para um estudante progredir de nível deve passar por cinco fases de aprendizagem, sendo elas: interrogação ou informação, orientação dirigida, explicitação, orientação livre e integração. A primeira fase é de **informação** sobre os objetos de estudo, o professor e os alunos conversam sobre o tema, e o professor verifica quais são as habilidades prévias dos alunos diante do objeto estudado. Na segunda fase de **orientação dirigida** os estudantes exploram o tópico estudado por meio de atividades, cuidadosamente escolhidas pelo professor e apresentadas em uma sequência de grau de dificuldade cresecente. Segundo Silva e Cândido (2014, p.3) "neste momento cada atividade deve estar voltada para que os alunos dêem respostas específicas de forma que possam perceber por si mesmos, as propriedades, conceitos e definições que o professor quer atingir". Já na fase de **explicação** os estudantes expressam de maneira oral ou escrita seus pontos de vista sobre as estruturas observadas "é o momento de diálogo entre professor e alunos, no intuito de chegarem a um comum acordo com relação ao tema estudado. Nesta fase não se introduzem conceitos novos, há somente a troca de experiências" (SILVA; CÂNDIDO, 2014, p.3).

Na fase de **orientação livre** os estudantes utilizam os conhecimentos estudados para resolver problemas utilizando soluções próprias. Os problemas nessa fase não devem ser só uma aplicação dos exercícios anteriores, mas devem ter grau de complexidade. Nesta fase o professor deve interferir o mínimo possível, deixando aos alunos a tarefa de formalizar o conceito e resolver os problemas. A última fase de **integração** o estudante retoma e produz um resumo do que aprendeu, formando uma visão geral do sistema de objetos e relações do nível atingido (SILVA; CÂNDIDO, 2014; NASSER; SANT'ANNA, 2010).

Silva e Cândido (2014) destacam a importância da utilização do modelo de van Hiele no processo de ensino e aprendizagem da Geometria.

> O modelo dá orientação aos professores de como melhorar o ensino de geometria, favorecendo assim os estudantes, para que estes tenham o máximo de aproveitamento na aprendizagem de cada tópico. Ajuda os professores a identificar formas de raciocínio do aluno verificando em que nível ele se encontra o aluno; se verificar que o aluno se encontra em um nível inferior em relação a toda a classe, o professor tem subsídios para que este avance seu nível se compreensão, o professor tem as ferramentas adequadas para ajudar o aluno a progredir de nível. O modelo visa sempre colocar o aluno não como um ser passivo na aprendizagem de geometria, mas sim um ser ativo, participando ativamente das aulas e obtendo assim o desenvolvimento necessário para a aprendizagem em geometria (p.5).

Discutiu-se aqui em termos gerais, a essência do modelo de van Hiele, que é um dos mais utilizado como aporte teórico em diversas pesquisas no âmbito da Geometria, conforme destacado e identificado na análise dos trabalhos do XI e XII ENEM. Ressalta-se, também, que aspectos deste modelo se fizeram presente na investigação, inspirando pricipalmente o planejamento da atividade incial sobre os conhecimentos prévios dos estudantes em relação a conhecimentos geométricos (Apêndice F).

No que segue apresentam-se os aspectos metodológicos estabelecidos para o desenvolvimento da investigação

5 SOBRE A INVESTIGAÇÃO: CAMINHOS METODOLÓGICOS

Apresentam-se, neste capítulo, os aspectos metodológicos estabelecidos para a organização e desenvolvimento da investigação. Assim, inicialmente, retoma-se a questão norteadora da investigação, os objetivos traçados para a mesma e as etapas que a constituem. Em seguida apresentam-se o local, os sujeitos participantes da pesquisa e os instrumentos de coleta de dados e, por fim, os caminhos estabelecidos para a análise.

5.1 DA QUESTÃO NORTEADORA ÀS ETAPAS DA INVESTIGAÇÃO

Conforme já destacado, a presente investigação tem como questão norteadora: **Como desenvolver uma proposta de estudos de recuperação referente à Geometria a ser ensinada e aprendida nos anos finais do Ensino Fundamental sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática?**

A fim de buscar elementos e evidências os quais possibilitem o encaminhamento de respostas em torno da questão norteadora tem-se como objetivo geral **investigar o desenvolvimento e implementação de uma proposta de estudos de recuperação, em torno da Geometria para os anos finais do Ensino Fundamental, sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática**

Para alcançar o objetivo geral proposto foram traçados os seguintes objetivos específicos:

- analisar e selecionar metodologias e recursos adequados ao desenvolvimento de uma proposta de estudos de recuperação;
- estruturar uma proposta de estudos de recuperação;
- investigar a implementação da proposta de estudos junto a um grupo de estudantes 9º ano do Ensino Fundamental;
- analisar a proposta de estudos de recuperação desenvolvida frente aos pressupostos do EOS.
- investigar se as estratégias utilizadas na proposta de estudo implementada favorecem estudos de recuperação.

A partir da constituição e essência da questão norteadora e dos objetivos, a investigação desenvolvida assumiu um caráter qualitativo, tomando como referência as características apontadas por Bogdan e Biklen (1994) para o desenvolvimento de investigações dessa natureza, sendo elas:

- a fonte dos dados é o ambiente e o investigador é o principal agente na coleta;
- os dados coletados são essencialmente de carácter descritivo;
- as metodologias utilizadas são na maioria qualitativas e o interesse está mais no processo do que propriamente nos resultados;
- a análise dos dados é feita de forma indutiva, buscando tentar compreender o significado que os participantes atribuem às experiências.

No contexto das pesquisas qualitativas, Ludke e André (1986) apontam três métodos básicos para coleta de dados: observação, entrevista e análise documental. Os autores apontam que os dados, em uma investigação qualitativa, podem advir de entrevistas transcritas, notas de campo, fotografias, produções pessoais, depoimentos ou outra forma de documento. Nesta abordagem busca-se analisar os dados em toda sua riqueza, respeitando, o máximo possível, a forma de registro ou transcrição, nada deve ser tomado como trivial, todo registro e manifestação tem potencial na construção e compreensão do fenômeno estudado (LUDKE; ANDRÉ, 1986).

Assim, tomando como referência as características de pesquisas qualitativas, a investigação foi estruturada considerando seis etapas. A primeira se constituiu em estudos exploratórios em torno dos aportes teóricos que embasariam a investigação, o que conduziu ao Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) como uma possibilidade de referencial a ser tomado, tendo em vista seu olhar, tanto para o objeto matemático, como para o processo de ensino e aprendizagem desenvolvido para o mesmo. Nesta etapa, iniciou-se então, a constituição do referencial teórico que compõem este trabalho, aprofundando os estudos em torno das temáticas recuperação e EOS, como também, buscando possíveis entrelaçamentos.

A segunda etapa foi planejada tomando como referência os resultados alcançados em Lemos (2013), os quais ressaltam a importância da participação de professores da Educação Básica na constituição de propostas de educativas, aqui tomada como uma proposta de estudos de recuperação, a qual será posteriormente explicitada. Assim, nesta etapa a investigação se desenvolveu a partir de uma integração ao Programa MatematicAção[26] visando articular encontros com um grupo de professores de Matemática para discutir, planejar e construir,

[26] O Programa MatematicAção é um programa desenvolvido conjuntamente pelo Programa de Pós-Graduação e Ensino de Ciências e Matemática - PPGECIM da ULBRA e a Secretaria Municipal de São Leopoldo, o qual será apresentado no capítulo 6 desta Tese.

conjuntamente, uma proposta de estudos de recuperação. Foi nesta etapa da investigação que se decidiu pela construção da proposta focada na Geometria trabalhada nos anos finais do Ensino Fundamental.

A partir das discussões oriundas do grupo de professores se desenvolveu a terceira etapa da investigação, que esteve centrada em pesquisas em torno das questões epistemológicas e didáticas dos conceitos a serem desenvolvidos em uma proposta de estudos de recuperação em torno da Geometria, assim como, as possíveis estratégias e metodologias a serem utilizadas. A quarta etapa foi dedicada a construção, elaboração e aperfeiçoamento dos materiais que constituem a proposta.

Já a quinta etapa se refere a implementação da proposta de estudos de recuperação junto a um grupo de 15 estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma Escola Municipal de São Leopoldo, Rio Grande do Sul, local de atuação de uma das professoras participante do grupo do MatematicAção.

A sexta, e última etapa da investigação, diz respeito a organização dos dados coletados, a análise dos resultados alcançados com o desenvolvimento e aplicação da proposta, bem como das reflexões e encaminhamentos advindos do trabalho desenvolvido. No quadro da figura 21 apresentam-se as ações realizadas em cada das etapas destacadas.

Figura 21 - Etapas e ações da investigação

Etapas	Ações
1ª etapa: a busca pelo referencial	- Estudo exploratório na busca dos referenciais a serem utilizados. - Revisão de literatura referente ao EOS e recuperação. - Aprofundamento teórico em torno do EOS. - Estudo da legislação quanto a recuperação e seus possíveis caminhos.
2ª etapa: constituição do grupo de professores	- Apresentação da proposta de investigação à coordenação do programa MatematicAção. - Inclusão da proposta de investigação ao programa MatematicAção. - Constituição do grupo de professores. - Planejamento dos encontros com o grupo de professores. - Realização dos encontros com o grupo de professores. - Discussão com o grupo sobre dificuldades de aprendizagem em Matemática e estudos de recuperação. - Discussão e análise das Diretrizes Curriculares Municipais. - Discussão sobre estratégias e metodologias no Ensino da Matemática. - Apresentação e discussão de aspectos teóricos do EOS. - Escolha da Geometria para ser desenvolvida como proposta de estudos de recuperação.
3ª etapa: estudo e planejamento da proposta	- Investigação de questões epistemológicas, didáticas e metodológicas em torno da Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental. - Definição dos tópicos a serem desenvolvidos na proposta. - Pesquisa em torno dos pressupostos teóricos do EOS no que se refere ao ensino de Geometria. - Estabelecimento de estratégias e metodologias a serem utilizadas na proposta.

4ª etapa: construção da proposta	- Articulação dos recursos e metodologias investigadas em torno da proposta. - Construção dos materiais de estudo considerando os aportes teóricos do EOS.
5ª etapa: implementação da proposta	- Apresentação da proposta de trabalho a equipe diretiva da escola e estudantes. - Ambientação dos estudantes com a metodologia de trabalho. - Investigação do perfil dos estudantes por meio de questionário (Apêndice D). - Investigação sobre os conhecimentos dos estudantes sobre conceitos iniciais de Geometria (Apêndice F). - Realização dos encontros com os estudantes para desenvolvimento da proposta.
6ª etapa: organização e análise dos resultados alcançados	- Organização dos dados coletados junto aos estudantes. - Entrevista (Apêndice C) com a professora regente da turma e participante do grupo. - Análise dos resultados alcançados pelos estudantes sob a perspectiva do EOS. - Análise da proposta desenvolvida sob a perspectiva do EOS.

Fonte: a pesquisa.

Embora inicialmente a investigação proposta não tivesse sido tratada como um tipo de pesquisa específica, apenas colocada em uma perspectiva qualitativa, ao longo do aprofundamento dos referenciais, os quais serviram de base para a investigação, foi possível perceber que a estrutura da proposta idealizada a aproximou da Investigação Baseada no *Design* (IBD)[27], que contempla o *design* e a análise sistemática de estratégias e ferramentas instrucionais. No âmbito da IBD, o *design* instrucional e a investigação são interdependentes, ou seja, uma investigação não contempla somente a fase de design (projetar), mas também, a experimentação e a avaliação de resultados (GODINO et al, 2013). Neste contexto, os autores destacam, ainda, que o IBD,

> Tenta superar a lacuna entre as investigações científicas e as práticas educativas. Assume-se que a investigação educativa separada da prática pode não levar em conta a influência dos contextos sobre a natureza complexa dos resultados, ou não identificar adequadamente as restrições e condicionantes[28] (GODINO et al, 2013, p.3, tradução nossa).

[27] Está se utilizando Investigação Baseada no *Design* (IBD) como uma tradução de Investigación basada en el Diseño (IBD) citada em Godino et al (2013).
[28] Trata de superar la brecha entre las investigaciones científicas desligadas de la práctica educativa de las innovaciones realizadas de manera poco, o nada rigurosas. Asume que la investigación educativa separada de la práctica puede no tener en cuenta la influencia de los contextos sobre la naturaleza compleja de los resultados, o no identificar adecuadamente las restricciones y factores condicionantes.

Godino et al (2013) ressaltam que o coletivo de autores que compõem o *The Design Based Research Collective* (DBRC)[29] estabeleceram cinco características para o IBD, sendo elas:

- o objetivo central do *design* em torno de aprendizagens e o desenvolvimento de teorias ou "proto-teorias" de aprendizagens estão interligados;
- o desenvolvimento e a investigação são ciclos contínuos de *design*, implementação e análise;
- a investigação baseada no *design* deve levar em conta teorias que podem ser compartilhadas com professores e *designers* instrucionais para comunicar implicações relevantes;
- a investigação deve explicar como funcionam os *design*s, não deve apenas documentar o sucesso ou fracasso, mas informar sobre as interações que refinam a compreensão das questões envolvidas na aprendizagem;
- o desenvolvimento e a implementação deve se basear em metódos que possam ser documentados e permitam conectar os processos de intervenção com os resultados.

Os autores destacam, ainda, a IBD como um paradigma metodológico que especifica como conduzir estudos de *design*, ou seja, uma investigação sobre as interações educacionais causadas por um conjunto de atividades. Normalmente é projetada em um "ambiente de aprendizagem" que contempla atividades, materiais, ferramentas e outros elementos para apoio à aprendizagem. Assim, a maioria destes experimentos são destinados a apoiar a aprendizagem de estudantes em um conteúdo particular.

Godino et al (2014) apontam que as investigações baseadas no *design* apresentadas em Cobb e Gravemeijer (2008) consideram três fases para a realização de um experimento: a preparação do experimento, a experimentação para auxiliar na aprendizagem e a análise retrospectiva dos dados gerados durante o experimento.

Em seus estudo Godino et al (2014) consideram quatro fases para a investigação:

> - *Estudo preliminar* das dimensões epistêmicas–ecológica, cognitiva–afetiva e instrucional.
> - *Design* da trajetória didática, seleção dos problemas, sequência e análise a priori dos mesmos, com indicações dos comportamentos esperados dos estudantes e a planifiação das intervenções controladas do professor.
> - *Implementação* da trajetória didática, observação das interações entre os sujeitos e os recursos e avaliação da aprendizagem atingida.
> - *Avaliação ou análise retrospectiva* , que segue um contraste entre o previsto no *design* e o observado na implementação e também se reflete sobre as normas que

[29] DBRC (Design-Based Research Collective). Design-based research: An emerging paradigm for educational inquiry. Educational Researcher, v. 32, n. 1, p. 5-8, 2003.

> condicionam o processo de instrução e sobre a Idoneidade Didática[30] (GODINO et al, 2014, p.6, tradução nossa).

Os autores destacam que estas fases se relacionam diretamente com as da Engenharia Didática, sendo que a utilização da denominação diferenciada se refere a fundamentação e desenvolvimento das fases segundo os pressupostos ontológicos, semióticos, pragmáticos e antropológicos próprios do EOS (GODINO et al, 2014).

Godino et al (2014) destacam, ainda, que em cada uma das fases do IBD (estudo preliminar, *design*, implementação e avaliação) se deve levar em contas as dimensões epistêmica, cognitiva, afetiva, interacional e ecológica. Assim, no âmbito da epistêmica-ecológica, se determinam os significados institucionais postos em jogo em cada fase do processo. Já as dimensões cognitiva-afetiva estão relacionadas aos significados pessoais dos estudantes. Ressalta-se que tanto os significados institucionais como os pessoais, são interpretados em termos de sistemas de práticas e configurações de objetos e processos matemáticos. No que se refere a Interacional, volta-se o olhar para padrões de interações entre professor, estudante, material e as negociações de significados (GODINO, 2014).

Assim, considerando as etapas apresentadas no quadro da figura 21 e as fases propostas pela Investigação baseada no *Disegn* (IBD) entende-se que a 1ª e 2ª etapa se referem ao *Estudo Preliminar,* tendo em vista que contemplam esclarecer os objetivos instrucionais, documentar os pontos iniciais de instrução, considerando os conhecimentos prévios dos estudantes. Já a 3ª e 4ª etapa se referem ao *Design,* que consiste em estabelecer uma trajetória instrucional, prevendo as atividades e recursos, levando em consideração as normas que condicionam o ambiente e a natureza do objeto trabalhado e situar o experimento em um contexto teórico.

A fase de *Implementação da trajetória didática* consiste no desenvolvimento do experimento, ou seja, a proposta sendo colocada em prática junto aos estudantes (5ª etapa). Nesta fase deve ser considerada a coleta de dados, esquemas interpretativos, ciclos de análises e teoria instrucional específica para o conteúdo trabalhado.

A última fase de *Avaliação ou Análise retrospectiva* se refere as análises dos dados alcançados com o experimento (6ª etapa), e seu objetivo está em analisar estes a partir de um

---

[30] - Estudio preliminar de las dimensiones epistémico – ecológica, cognitiva – afectiva e instruccional. — Diseño de la trayectoria didáctica, selección de los problemas, secuenciación y análisis a priori de las mismas, con indicación de los comportamientos esperados de los estudiantes y de la planificación de intervenciones controladas del docente. — Implementación de la trayectoria didáctica; observación de las interacciones entre personas y recursos y evaluación de los aprendizajes logrados. — Evaluación o análisis retrospectivo, que se sigue de un contraste entre lo previsto en el diseño y lo observado en la implementación También se reflexiona sobre las normas que condicionan el proceso instruccional y sobre la idoneidad didáctica

contexto teórico mais amplo, apresentando uma argumentação em torno dos dados, expressando confiabilidade por meio da apresentação de evidências e sobre a Idoneidade Didática alcançada. Ressalta-se que os caminhos adotados para a produção da análise desta investigação serão discutidos posteriormenete.

Nesta fase final da IBD é destacada, pelos autores, a questão da reprodutividade, que consiste em informar a possibilidade de generalização do experimento, ou seja, de ser utilizado por outros pesquisadores ou ainda servir como um exemplo prototípico. Entende-se esse aspecto muito importante na presente investigação, considerando-se elevada a possibilidade de reprodutividade, já que a metodologia utilizada para a construção dos materiais de estudos sobre Geometria, pode ser adaptável a qualquer conteúdo, buscando explorar suas especificidades e recursos adequados. Além disso, a própria proposta de estudos de recuperação pode ser desenvolvida junto a outros estudantes.

A partir do que foi apresentado, considera-se que a investigação está apoiada em uma Investigação baseada no *Design* (IBD), tendo em vista que contempla todas as fases estabelecidas para a mesma, como também, produziu um material com o objetivo de melhorar o ensino e aprendizagem de estudantes, sendo esta a problemática inicial da IBD, conforme destaca Godino et al (2013, p. 11)

> [...] a problemática da IBD consiste em desenvolver recursos instrucionais para melhorar do ensino e aprendizagem da matemática em contextos escolares, baseados na investigação. A investigação das intervenções educacionais depende dos marcos teóricos que são utilizados para fundamentar a concepção, implementação e interpretação dos resultados, dependendo da teoria, ou da falta de teoria, terá um IBD diferente. Portanto, devemos entender o IBD como uma família de metodologias e abordagens para a investigação educacional. Levando em conta que o objetivo é elaborar um produto baseado na investigação (currículo, seqüência de aulas, software educativo, etc.)[31] tradução nossa.

No que segue, apresenta-se o lócus e os sujeitos que possibilitaram o desenvolvimento desta esta investigação.

[31] [...]Como hemos indicado la problemática de la IBD consiste en elaborar recursos instruccionales para la mejora de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas, en contextos escolares naturalistas, basados en la investigación. Puesto que la investigación de las intervenciones educativas depende de manera crítica de los marcos teóricos que se utilicen para fundamentar el diseño, implementación e interpretación de los resultados, dependiendo de la teoría-base, o falta de teoría, se tendrá una IBD diferente. Por tanto, debemos entender la IBD como una familia de metodologías o enfoques de investigación educativa. Teniendo en cuenta que el objetivo es elaborar un producto basado en la investigación (currículo, secuencia de lecciones, software educativo, etc.).

5.2 LÓCUS E SUJEITOS PARTICIPANTES DA INVESTIGAÇÃO

Conforme já destacado, a investigação contou com a colaboração tanto de professores da Educação Básica, como de um grupo de estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental.

Assim, a proposta de estudos de recuperação de Geometria foi vislumbrada e sua constituição planejada, junto ao grupo de cinco professoras participantes do Programa MatematicAção, o qual será apresentado posteriormente. Neste contexto, entendeu-se pertinente oportunizar que a implementação da mesma fosse realizada nas escolas onde as professoras participantes do grupo atuavam. Uma das professoras demonstrou interesse em desenvolver os estudos em sua escola, assim a pesquisadora apresentou uma proposta inicial do trabalho à equipe diretiva da Escola, que o considerou de interesse para os estudantes e aceitou o desenvolvimento dos estudos de recuperação, criando espaços e um ambiente favorável para o desenvolvimento do mesmo. Outro aspecto que viabilizou a implementação da proposta foi a estrutura da escola, que conta com um laboratório de informática com 32 computadores com acesso à *internet*, funcionando em ótimas condições, sendo este ambiente adequado, condição necessária para que a proposta fosse desenvolvida da melhor forma possível, ou seja, explorando todos os recursos disponibilizados na mesma.

Assim, a implementação da proposta foi desenvolvida no ano de 2016 junto a um grupo de 15 estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental de uma escola municipal de Ensino Fundamental do município de São Leopoldo, Rio Grande do Sul. A referida escola funciona nos turnos manhã e tarde, conta com um grupo de 65 professores atendendo aproximadamente 1040 alunos. Seu Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB)[32], segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisa Educacionais Anísio Teixeira (INEP) é de 6,7 em 2015 para 4ª série/5º ano e de 5,1 para a 8ª série/9º ano, atingindo em ambas avaliações as metas estabelecidas pelo Ministério da Educação (MEC) para o Ensino Fundamental.

O trabalho foi disponibilizado para as turmas de 9º ano do Ensino Fundamental, tanto do turno da manhã como da tarde. Os estudantes foram convidados a participar de forma voluntária, organizados em dois grupos, um em cada turno, trabalhando no turno inverso ao que assistiam aula, em encontros semanais de 2 horas totalizando 40 horas (20 encontros). Durante todo o período de estudos, participaram 23 estudantes, porém estão sendo considerados na análise os 15 que concluíram o trabalho.

---

[32] Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) é um indicador educacional que relaciona informações sobre o rendimento escolar (aprovação) e desempenho (proficiências) em exames padronizados, como a Prova Brasil e o Saeb, formulado para medir a qualidade do aprendizado nacional e estabelecer metas para a melhoria do ensino.

A seguir apresentam-se os instrumentos de coletas de dados utilizados durante a investigação.

5.3 INSTRUMENTOS DE COLETA DE DADOS

Buscando alcançar os objetivos propostos e responder à questão norteadora desta investigação, foram utilizados os seguintes procedimentos e instrumentos para a coleta de dados:

- observação participante com registro em diário de campo;
- registro em áudio e vídeo;
- questionário para os professores (Apêndice A);
- aplicação da ferramenta de análise epistêmica nas Orientações Municipais (Apêndice B);
- análise das anotações e produções dos estudantes;
- entrevista semiestruturada com a professora titular (Apêndice C);
- questionários para os estudantes (Apêndice D e E);
- atividade inicial sobre conhecimentos geométricos (Apêndice F);

No âmbito da investigação desenvolvida, utilizou-se, como uma das principais fonte de coleta de dados na implementação da proposta junto ao grupo de alunos, a observação, a qual é destacada por Lakatos e Marconi (2001) como uma participação ativa do observador, isto é, o investigador está inserido no ambiente investigado, ocorrendo assim uma observação participante. Gil (2010, p. 100) ressalta que “a observação apresenta como principal vantagem, em relação às outras técnicas, a de que os fatos são percebidos diretamente, sem qualquer intermediação”. Assim, a pesquisadora participou ativamente de todas as etapas da investigação, buscando observar e captar manifestações e detalhes das ações dos estudantes no estudo proposto. Neste contexto, utilizou-se o diário de campo para registrar as evidências percebidas e, após, analisar e refletir sobre as mesmas.

As gravações em áudio e vídeo foram realizadas por meio de uma filmadora, para registrar os momentos de encontro com o grupo de professores, e também dos estudantes, quando estavam trabalhando na proposta de estudos e em situações em que expressavam alguma dúvida ou questionamento sobre o conteúdo, tanto nas interações com a pesquisadora como com os colegas.

Com os professores do grupo foi aplicado um questionário que objetivou identificar o perfil dos mesmos, investigar quais os recursos utilizados em seu planejamento, suas opiniões em relação as dificuldades dos estudantes e estratégias que utilizam para buscar superá-las (Apêndice A). Outro instrumento utilizado com os professores foi a Ferramenta de Análise Epistêmica (FAE) para analisar as Orientações Curriculares Municipais (Apêndice B) visando que os professores se apropriassem do documento e da utilização da FAE.

Foram utilizados dois questionários com os estudantes, sendo o Questionário 1 (Apêndice D), aplicado no 1º encontro, com o objetivo de traçar o perfil dos estudantes, como também, verificar suas expectativas sobre o trabalho e sobre questões envolvendo a Geometria. O Questionário 2 (Apêndice E) foi respondido pelos estudantes no último encontro, visando captar a opinião dos mesmos sobre o trabalho, as principais facilidades e dificuldades encontradas na realização do mesmo.

Visando investigar os conhecimentos prévios dos estudantes no que se refere a conceitos, procedimentos e proposições iniciais de Geometria aplicou-se, no primeiro encontro, a atividade apresentada no Apêndice F deste trabalho. A atividade visou investigar os conhecimentos prévios dos estudantes sobre figuras planas e espaciais, retas perpendiculares e paralelas, se reconheciam e nomeavam polígonos, se classificavam triângulos quanto aos lados e ângulos e se estabeleciam relações entre quadriláteros. As questões postas na atividade referiam-se a conhecimentos geométricos que, a partir dos planos de estudos, teriam sido desenvolvidos em anos anteriores ao que os alunos estavam cursando.

No que se refere a produção dos estudantes durante os estudos de recuperação, estas foram realizadas por meio de registros manuscritos, contendo anotações e resoluções sobre os tópicos estudados durante o encontro, sendo recolhidos ao final de cada um deles para, posteriormente, serem analisados.

Uma entrevista semiestrutura foi realizada com a professora de Matemática titular das turmas do 9º ano (Apêndice C), antes de inciar a aplicação da proposta, a fim de discutir quais suas concepções sobre o ensino da Geometria, captar como a mesma desenvolve suas aulas em torno da Geometria e qual sua opinião sobre o desenvolvimento de propostas de estudos de recuperação. Ao final buscou-se junto à professora suas considerações sobre o trabalho desenvolvido.

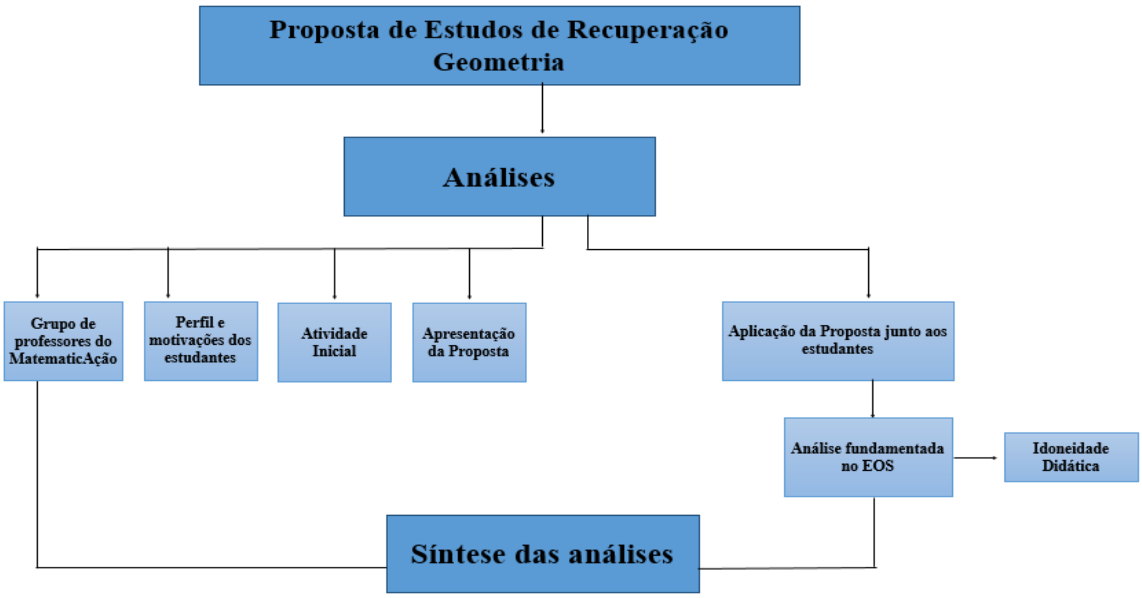
Esse conjunto de instrumentos de pesquisa foram utilizados integrados, a fim de possibilitar uma coleta de dados que refletisse, o mais próximo possível, os desenvolvimentos, as realizações, os entendimentos advindos da investigação. No que segue, apresentam-se os caminhos traçados e as estratégias estabelecidas na constituição das análises produzidas.

5.4 TRAÇANDO OS CAMINHOS PARA A ANÁLISE

O desenvolvimento e implementação da Proposta de Estudos de Recuperação para a Geometria dos anos finais do Ensino Fundamental serão analisadas tomando como referência os trabalhos de Godino (2013), Godino, Rivas e Arteaga (2012), Godino et al (2006) e Andrade (2014). Assim, as análises realizadas tomam como base, os pressupostos estabelecidos pelo Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática – EOS, mais especificamente, as noções e dimensões da Idoneidade Didática, sendo elas: epistêmica, cognitiva, interacional, mediacional, emocional e ecológica, considerando seus componentes e indicadores já destacados no capítulo 3 deste trabalho.

As análises serão apresentadas em três capítulos. O primeiro (capítulo 6) analisa e discute os primeiros passos dados na investigação, apresentando o grupo de professores participantes do Programa MatematicAção e o processo formativo estabelecido com os mesmos e, em seguida, é discutido o perfil e as motivações dos estudantes participantes, os conhecimentos geométricos prévios dos mesmos evidenciados na atividade inicial (Apêndice F). Já no segundo (capítulo 7) é apresentada a Proposta de Estudos de Recuperação para a Geometria dos Anos Finais no Ensino Fundamental, no que se refere a sua estruturação e constituição. O último capítulo (capítulo 8) é dedicado às discussões em torno das análises produzidas baseadas nos pressupostos do EOS referente ao desenvolvimento e implementação da proposta de estudos de recuperação. A figura 22 apresenta um esquema que ilustra, de modo geral, os caminhos a serem percorridos para a produção das análises.

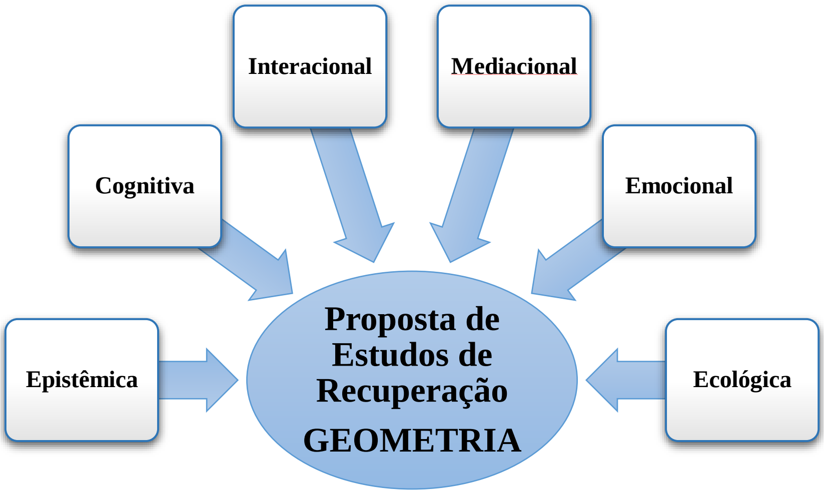
Figura 22- Esquema geral dos caminhos para a análise



Fonte: a autora.

No que se refere às análises fundamentadas pelo EOS, foi lançado um olhar para a proposta de estudos por meio das dimensões da Idoneidade Didática, buscando evidenciar os graus de idoneidade alcançados com os tópicos em cada uma das dimensões, conforme esquematizado na figura 23.

Figura 23– Dimensões da Idoneidade Didática: esquema de análise



Fonte: a autora.

A seguir, são detalhados os aspectos analisados em cada uma das dimensões.

No que se refere à dimensão epistêmica será avaliado o material produzido para cada tópico da proposta, considerando os componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Epistêmica – FAE, sendo eles: situações-problemas, linguagem, regras, argumentos e relações, buscando identificar o grau de idoneidade do mesmo frente aos pressupostos estabelecidos pelo EOS. Segundo Godino et al (2006), para se alcançar uma alta idoneidade epistêmica em um processo de estudo deve-se levar em conta as conexões e interações entre os elementos do significado de referência. Os elementos conceituais, proposições e procedimentais devem ser contextualizados mediante a situações, explicações e justificativas com argumentos pertinentes e todos estes elementos apoiados em recursos expressivos e eficazes.

A dimensão cognitiva terá sua análise focada nos significados pretendidos com o material frente aos significados declarados pelos estudantes no processo de estudo, levando em consideração tanto os componentes e indicadores propostos pela Ferramenta de Análise Cognitiva– FAC, sendo eles: raciocínio lógico, leitura/interpretação e análise/síntese, como também, os epistêmicos. Considera-se pertinente integrar nesta análise os componentes destas duas dimensões, pois, conforme destaca Andrade (2014), foi a partir das entidades primárias (situações-problema, linguagem, regras, argumentos e relações) que caracterizam um modelo epistêmico-cognitivo, que foram estabelecidos os componentes da FAC. Nesta dimensão serão analisadas as aprendizagens e os conflitos semióticos apresentados pelos estudantes durante os estudos, a partir dos registros em áudio e vídeo, da produção dos estudantes e da observação da pesquisadora. No EOS, segundo Godino (2013), a aprendizagem ocorre quando o estudante consegue se apropriar dos significados institucionais pretendidos em um processo de estudo, tornando-se assim significados pessoais, o que justifica nosso olhar para os significados pretendidos frente aos declarados pelos estudantes, visando refletir sobre o grau de idoneidade atingido neste aspecto.

A dimensão mediacional será contemplada nas análises dos materiais de estudos desenvolvidos para a proposta, no que se refere aos recursos utilizados frente aos componentes e indicadores da Ferramenta de Análise de Mediacional – FAM, sendo eles: recursos e tempo didático. Assim, esta análise permite verificar as potencialidades e as fragilidades encontradas nos materiais de estudos disponibilizados aos estudantes.

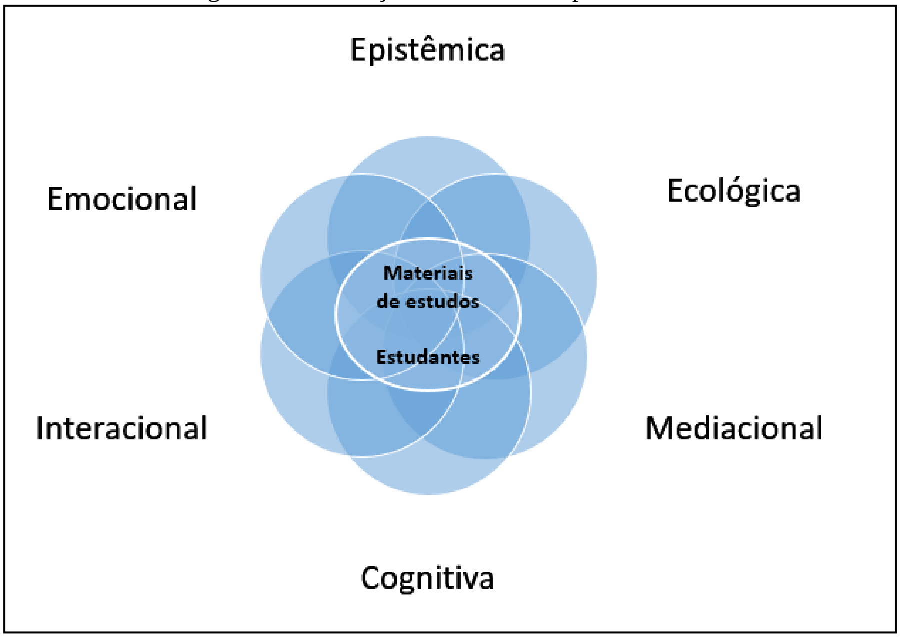
Na dimensão interacional serão analisadas as interações dos estudantes entre eles, com a pesquisadora e com o material, considerando os componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Interacional - FAI, sendo eles: diálogo/comunicação, interação e autonomia por meio dos registros realizados em áudio e vídeo e das observações da pesquisadora, objetivando refletir sobre o grau de idoneidade das interações produzidas ao longo do desenvolvimento do trabalho.

Com a dimensão emocional a análise produzida terá um olhar para as questões atitudinais dos estudantes frente ao trabalho desenvolvido, por meio dos componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Emocional – FAEMO, sendo eles: motivação/interesse, envolvimento e crenças/atitudes. Os principais instrumentos de coleta de dados para esta análise serão os registros em áudio e vídeo e as observações da pesquisadora durante os encontros.

Na dimensão ecológica novamente a análise estará voltada para o material produzido, no que se refere, a sua adequação aos significados institucionais de referência, ou seja, o que está posto nos documentos oficiais a nível internacional, nacional e regional e também o que é preconizado na escola para o desenvolvimento dos conhecimentos geométricos nos anos finais do Ensino Fundamental. Para esta análise serão considerados os componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Ecológica – FAECO, sendo eles: currículo, escola e sociedade.

Assim, considerando as dimensões apresentadas como critérios para a produção das análises dos resultados obtidos com o desenvolvimento desta investigação, entende-se que será produzida uma análise geral do grau de Idoneidade Didática alcançada com esta proposta de estudos de recuperação baseada nos pressupostos do EOS. Sendo as dimensões epistêmica, ecológica e mediaconal com um olhar mais voltado para o material produzido e os objetos matemáticos envolvidos na proposta e as dimensões cognitiva, interacional e emocional para as ações e conhecimentos posto em jogo pelos estudantes, porém ressalta-se que se entende estas análises como um todo e que as dimensões se relacionam e conectam entre si, conforme esquematizado na figura 24.

Figura 24– Ilustração dos caminhos para a análise

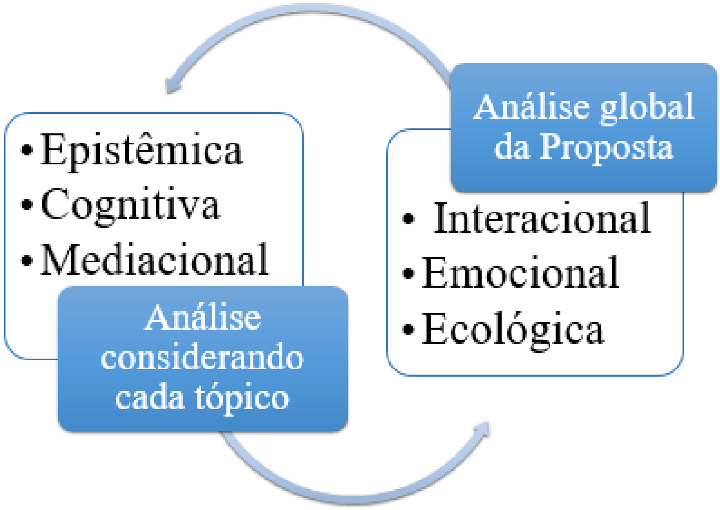


Fonte: a autora.

Buscou-se, na representação destacada na figura 24, relacionar as seis dimensões da Idoneidade Didática com os objetos de análise, visando ilustrar a essência da análise produzida, como também, destacar que, conforme Godino (2013), as dimensões não devem ser consideradas como fatores independentes, uma vez que existem interações entre as mesmas. Um recurso tecnológico escolhido, por exemplo, pode determinar os tipos de problemas e que configurações de objetos e processos serão desenvolvidos, o que implicará em novas formas de representação, raciocínio e generalização, como também, poderão ser afetados pelas interações entre professor e alunos, pelo interesse e motivação dos estudantes, e, finalmente, na aprendizagem.

Considerando os dados obtidos ao longo da investigação e a estrutura de análise estabelecida e discutida, entendeu-se pertinente realizar uma análise individual dos tópicos propostos para estudo no que se refere as dimensões Epistêmica, Cognitiva e Mediacional, tendo em vista, que estas dimensões apresentam especificidades em cada um deles, relevantes a serem discutidas individualmente. Já para as dimensões Interacional, Emocional e Ecológica será apresentada uma análise geral de toda a proposta, contemplando todos os tópicos em uma única análise, uma vez que as evidências percebidas nestas dimensões são semelhantes em todos os tópicos da proposta. Assim, apresenta-se na figura 25 um esquema que ilustra a estrutura destas análises.

Figura 25 - Análises x Dimensões



Fonte: a autora.

No capítulo seguinte serão apresentadas os primeiros passos realizados para a constituição da proposta, apresentando o Programa MatematicAção e as ações realizadas junto ao grupo de professores, as análises produzidas referentes aos estudantes participantes da investigação, traçando seus perfis, suas motivações em participar dos estudos, bem como, seus conhecimentos geométricos prévios evidenciados nas resoluções da atividade inicial.

6 EM BUSCA DE UMA PROPOSTA DE ESTUDOS DE RECUPERAÇÃO: OS PRIMEIROS PASSOS

Neste capítulo apresenta-se o Programa MatematicAção e as ações realizadas junto ao grupo de professores participantes do mesmo, os quais colaboraram para a constituição e implementação da proposta de estudos desenvolvida nesta investigação. São destacadas ainda, neste capítulo, as análises produzidas referentes ao Questionário 1 (Apêndice D) que permitiram traçar o perfil dos estudantes participantes da investigação, suas motivações em participar dos estudos, bem como, seus conhecimentos geométricos prévios evidenciados nas resoluções da Atividade Inicial (Apêndice F).

6.1 OS PRIMEIROS PASSOS DA INVESTIGAÇÃO: O PROGRAMA MATEMATICAÇÃO

Conforme já destacado, esta investigação começou a se delinear a partir dos resultados e considerações apontadas em Lemos (2013). Ressaltam-se dois aspectos oriundos destes resultados: o primeiro sobre a pertinência e importância da constituição de propostas de estudos de recuperação e, o segundo, sobre a necessidade de inclusão de professores de Matemática da Educação Básica na discussão e planejamento destas propostas. Neste contexto, buscou-se uma parceria com o Programa MatemáticAção desenvolvido conjuntamente pelo Programa de Pós-Graduação e Ensino de Ciências e Matemática - PPGECIM da ULBRA e a Secretaria Municipal de São Leopoldo, visando a formação de um grupo de discussão de professores de Matemática dos anos finais do Ensino Fundamental.

A escolha por esta parceria se justifica, pois o Programa MatemáticAção já vinha atuando no município de forma consistente e apresentando resultados positivos no que se refere a formação continuada de professores que atuam nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Até o ano de 2015, o Programa MatematicAção tinha como objetivo favorecer a aprendizagem matemática dos estudantes do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental de escolas públicas, proporcionando a formação continuada em serviço de professores que atuam nestas séries.

O programa visava contemplar a criação de grupos cooperativos de investigação, objetivando fomentar reflexões sobre o ensino de matemática, articulando teoria e prática, identificando as possibilidades reais para a aprendizagem na área de Matemática, tendo um foco intervencionista, as ações de formação continuada em serviço e as intervenções para o ensino e a aprendizagem matemática dos alunos eram planejadas pelos pesquisadores em cooperação com os sujeitos envolvidos na pesquisa (JUSTO, 2014).

Neste contexto, as ações desenvolvidas pelo programa MatematicAção em edições anteriores, segundo a coordenação do mesmo, se referem à:

> - compreender a realidade da educação da rede municipal;
> - acompanhar a metodologia e os processos de ensino de Matemática empregados com os alunos do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental;
> - planejar ações educativas que envolvam estratégias de ensino de Matemática;
> - realizar reuniões periódicas, presenciais e em ambientes virtuais, com cada um dos grupos para discutir aspectos metodológicos da pesquisa e didático-metodológicos
> - analisar os dados coletados através das entrevistas, questionários e observações decorrentes, inicialmente das aulas e, posteriormente, das ações-reflexões de cada um grupos
> - aplicar as ações educativas que envolvam estratégias de ensino de Matemática com alunos do 4º e 5º ano do Ensino Fundamental;
> - avaliar as ações educativas, com os grupos, que envolvam estratégias de ensino e de aprendizagem de Matemática (JUSTO, 2014, p.4).

Conhecendo o trabalho e as ações do Programa MatemticAção, entendeu-se que o desenvolvimento de uma investigação no âmbito deste seria uma oportunidade de ampliação do mesmo, no que se refere a envolver professores dos anos finais do Ensino Fundamental em uma proposta de formação continuada, com o que a coordenação do programa concordou. A proposta era de investigar e discutir questões didáticas, metodológicas e epistemológicas pertinentes ao processo de ensino e aprendizagem da Matemática, assim como sobre as dificuldades apresentadas pelos estudantes neste processo e as possíveis estratégias a serem estabelecidas em estudos de recuperação, então, a partir do ano 2015, com a inclusão da proposta desta investigação, o Programa passou a contemplar em seu objetivo e ações, também estudantes e professores dos anos finais do Ensino Fundamental.

Assim, esta investigação inseriu-se no programa MatematicAção como uma formação continuada, contando com a participação de cinco professoras de Matemática da rede municipal, em encontros quinzenais durante o ano de 2015 com a pesquisadora. O cronograma previsto contemplava 14 encontros no período de abril a novembro de 2015.

No que segue será apresentado o perfil do grupo de professores e discutidas as ações desenvolvidas junto a este grupo, buscando evidenciar a participação e a percepção das professoras sobre os assuntos discutidos, como também, sobre a análise epistêmica produzida das Orientação Curriculares Municipais e a colaboração das mesmas para a investigação desenvolvida. Estas evidências, que em sua maioria são manifestações orais e registros escritos, são oriundas dos registros em áudio e vídeo dos encontros, das aplicações do questionário e da Ferramenta de Análise Epistêmica – FAE (Apêndices A e B). As professoras serão identificadas como P1, P2, P3, P4 e P5.

No primeiro encontro foi apresentada e discutida uma proposta inicial de trabalho a ser desenvolvida na formação, bem como aplicado um Questionário (Apêndice A) buscando identificar o perfil dos professores e as expectativas no processo de formação continuada que estava se iniciando.

As professoras têm em média 53 anos e, no que se refere à formação, quatro professoras (P1, P2, P3 e P5) tem licenciatura em Matemática e P4 em Ciências Contábeis. Todas possuem especialização, sendo P1 e P4 em Psicopedagogia, e as demais na área de Metodologia do Ensino da Matemática. No que diz respeito à atuação, a experiência das professoras é grande, em média 30 anos em sala de aula da Educação Básica, em nível municipal e estadual.

Quando questionadas sobre as motivações e interesses na participação no grupo, as professoras apontaram, principalmente, conhecer estratégias e metodologias diferenciadas para o ensino da Matemática, assim como compartilhar experiências e angústias vivenciadas no dia a dia da sala de aula.

> "*sempre que posso gosto de participar de formação, a gente aprende conversando e fazendo com as colegas. E para mim mais ainda que não sou formada em matemática"* P4.
> "*vim aqui em busca de coisas novas e também tenho bastante coisas que faço para compartilhar, joguinhos e atividades concretas"* P3.

Buscando conhecer um pouco sobre a forma com que as professoras planejam e conduzem suas aulas, indagou-se sobre se levavam em consideração no seu planejamento as indicações dos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN), Orientações Curriculares Municipais (SÃO LEOPOLDO, 2012) e livros didáticos. As respostas das professoras foram unânimes indicando somente o livro didático como apoio ao planejamento, sendo que P1 destaca que "*uso o livro para trabalhar os conceitos e exercícios e a experiência adquirida ao longo dos anos."*

Outro aspecto questionado foi se seguiam metodologias ou procedimentos envolvendo resolução de problemas, uso do contexto histórico, recurso à tecnologia, jogos entre outros. Todas as professoras indicaram trabalhar com a resolução de problemas, sendo que P2 declarou "*não uso tecnologia, trabalho com problemas, jogos e alguns conteúdos entro na história da Matemática*". Já P3 ressalta "*a resolução de problemas com certeza, gosto muito de relacionar conteúdos com jogos concretos e no computador também. Com a história busco relacionar algumas palavras com o seu significado em latim e grego"*.

Questionou-se as professoras, também, sobre quais os conteúdos em que os estudantes apresentam maiores dificuldades. As professoras apontaram, principalmente, números racionais, números decimais e resolução de problemas, sendo que a professora P2 ressaltou *"acredito que toda a parte relacionada a problemas é muito difícil para os alunos, todo o* *conteúdo que exige a leitura e o equacionamento da situação problema"*. Quanto às estratégias que as professoras utilizam para a superação das dificuldades dos estudantes, as mesmas destacaram explicações, jogos e listas de exercícios.

A partir das respostas das professoras é possivel perceber a forte influência do livro didático no seu planejamento, assim como, uma limitação no uso das tecnologias e a valorização dos jogos e da resolução de problemas, sendo que a última, na sequencia é indicada como uma dificuldade dos estudantes, porém na questão seguinte, quando se referem as estratégias que utilizam para a superação destas dificuldades, não mencionam a resolução de problemas, pelo contrário apontam explicações, jogos e listas de exercícios que, a priori, não permitem o desenvolvimento de estratégias de resolução de problemas, assim não é oportunizado aos estudantes a superação das dificuldades neste aspecto.

Uma outra questão abordada se refere ao que as professoras entendiam por recuperação de conteúdos e como desenvolviam a mesma, ao que responderam:

> *É a apresentação de conteúdos novamente, busco trabalhar em grupo e fazer novas explicações"* P1.
> *"Recuperar conteúdo é trabalhar de outra forma e de preferência com material concreto"* P2.
> "*Faço através de listas de exercícios, correção em sala de aula, atividades de reforço e jogos de matemática"* P3.
> *"É retomar o que os alunos não conseguiram dominar, com atividades diferenciadas e na revisão de conteúdos de anos anteriores"* P4.
> *"Considero uma retomada dos conteúdos e desenvolvido de maneira diferente"* P5.

Considera-se que todas as professoras compreendem a recuperação como uma retomada e, de alguma forma, destacam a necessidade de que ocorra de modo diferente do já trabalhado. Porém, entende-se que as ações que declaram desenvolver estão alinhadas à realidade que se tem, atualmente para a recuperação nas escolas, que é retomar em sala de aula, para todos os alunos, os conteúdos e procedimentos nos quais os estudantes apresentaram baixo desempenho nas avaliações, fato este que não atende ao que está previsto na LDB (BRASIL, 2014) que é dever da escola promover meios e estabelecer estratégias para estudos de recuperação para alunos com baixo desempenho, preferencialmente, realizados paralelos ao período de estudos.

Em seguida questionou-se às professoras sobre acreditarem que o desenvolvimento de uma proposta específica de recuperação é um caminho para a superação das dificuldades dos estudantes.

> *"Acredito que as dificuldades dos alunos são amplas e diversificar as metodologias seria a melhor proposta para a recuperação de conteúdos"* P1.
> *"É um caminho para aqueles que querem estudar sim"* P2.
> "*Talvez seja sim, mas tem que ser algo que desperte o interesse dos alunos e a vontade de aprender e em sala de aula nos faltam recursos, os computadores poderiam ajudar"* P3.
> *"É uma possibilidade"* P4.

> *Acredito que sim, em momentos fora da sala de aula, como um reforço mesmo e separado dos outros aluno”* P5.

Considerando as respostas das professoras é possível perceber que acreditam na possibilidade de estudos de recuperação como um caminho para a superação de dificuldades dos estudantes, e destacam aspectos também considerado muito importantes nesta investigação, que é uma proposta com estratégias diferenciadas e desenvolvida separadamente e fora da sala de aula.

Ainda no primeiro encontro, iniciaram-se discussões sobre as dificuldades de aprendizagem dos estudantes em Matemática e possíveis estratégias utilizadas na busca pela superação das mesmas. As argumentações e ideias defendidas pelas professoras seguiram a mesma tendência de suas respostas no questionário, as quais já foram destacadas.

O segundo encontro também esteve focado nas dificuldades de aprendizagem dos estudantes, mas foram abordadas, ainda, as dificuldades encontradas pelas professoras no planejamento de determinados conteúdos. Neste encontro, a partir das declarações das professoras, foi possível perceber que cada escola tinha uma organização sobre os conteúdos e que as mesmas não tinham total conhecimento sobre as orientações curriculares estabelecidas pelo município. Assim encaminhou-se a discussão destas orientações para o terceiro encontro, disponibilizando para as professoras o documento Orientações Curriculares para a Educação Básica da Rede Municipal de Educação de São Leopoldo (SÃO LEOPOLDO, 2012) com o objetivo de realizarem uma leitura prévia.

Visando, também, aproximar as professoras das discussões em torno Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) e da possibilidade de utilização do mesmo para análise de documentos, indicou-se a leitura do artigo Orientações Curriculares para a Matemática no Ensino Médio: uma Análise sob o Enfoque Ontossemiótico (KAIBER;ANDRADE, 2014).

Assim, no terceiro encontro, iniciou-se uma discussão sobre os aspectos teóricos do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) e as possibilidades de utilizar seus pressupostos como ferramentas de análise de documentos. Apresentou-se a Ferramenta de Análise Epistêmica (FAE), discutindo seus componentes e indicadores e sua utilização no estudo e análise das Orientações Currriculares Municipais (Apêndice B).

Porém, na semana da realização do terceiro encontro, a categoria dos professores municipais entrou em greve, o que ocasionou uma interrupção no trabalho. A paralisação das atividades durou mais de 60 dias, sendo que os encontros foram retomados somente em setembro de 2015. Após este período de paralisação, retornaram aos encontros somente três professoras (P2, P3 e P5), sendo que as demais justificaram o grande desgaste devido às recuperações das aulas do período de paralisação.

Assim, foi possível realizar mais três encontros com estas professoras, finalizando as análises das Orientações Curriculares sob a perspectiva da FAE, que envolveu discussões sobre os conteúdos que se encontravam mais fragilizados dentro dos planos de aula, planos de estudos e das orientações curriculares. No que segue será apresentada a estrutura do documento e, em seguida, a análise epistêmica produzida sobre o mesmo.

O documento Orientações Curriculares para a Educação Básica da Rede Municipal de Educação de São Leopoldo foi elaborado a partir de estudos, diálogos, reuniões e debates realizados nos encontros de formação continuada propostos pelo município, tomando também como referência os documentos oficiais nacionais como a Constituição Federal de 1988 e a Lei nº 9394/96 de Diretrizes e Bases da Educação Nacional - LDB (SÃO LEOPOLDO, 2012).

O documento municipal inicia com uma apresentação onde são discutidas as origens e motivações para a sistematização do mesmo, em seguida, a introdução discute o papel da educação na sociedade atual e encaminha para o objetivo estabelecido para esta no referido munícipio sendo ele "As escolas municipais [...] devem orientar seu trabalho numa perspectiva de gestão democrática e inclusiva, além de primar pela educação como processo participativo de construção e apropriação do conhecimento e de tecnologias para a transformação da sociedade" (SÃO LEOPOLDO, 2012, p.6).

São apresentados, também, os objetivos das Orientações Curriculares para a Educação Básica da Rede Municipal de Educação, sendo eles:

> I – Orientar organizações curriculares e práticas pedagógicas da educação básica, com foco na aprendizagem e nos conceitos de educar e cuidar; II – Estimular processos reflexivos durante a construção, a execução e a avaliação dos Projetos Político-Pedagógicos das unidades escolares, integrando os diferentes níveis de ensino; III – Exercitar a democracia participativa no processo de construção coletiva das Orientações Curriculares Municipais (OCM), que orientarão a educação desenvolvida nas escolas municipais (SÃO LEOPOLDO, 2012, p.6).

No documento, também é apresentado os Princípios e Bases da Educação Municipal, a organização curricular, etapas, modalidades, discutindo os objetivos de cada um desses aspectos, bem como, dos componentes curriculares. Destacam-se, aqui, questões ressaltadas no documento no que se refere ao ensino e aprendizagem da Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental, os quais se considera relevantes.

> A Matemática contribui para o desenvolvimento de processos de pensamento e para a aquisição de atitudes, cuja utilidade e alcance transcendem o âmbito do próprio

> componente curricular. Desenvolve no estudante a capacidade de resolver problemas variados, incentiva o espírito investigativo, exercita a confiança e o desprendimento para analisar e enfrentar situações novas, propicia a formação de uma visão ampla e científica da realidade, assim como o desenvolvimento da criatividade e de outras capacidades pessoais (COM). Só é possível deflagrar ideias matemáticas quando o estudante é colocado diante de situações problemáticas interessantes, significativas e desafiadoras, que o estimulem a aprender (SÃO LEOPOLDO, 2012, p.56).

A partir desta discussão mais geral sobre os componentes curriculares, o documento é dividido pelos anos (1º, 2º,..., 9º) sendo apresentados os objetivos de cada componente curricular para o referido ano.

A seguir no quadro da Figura 26 apresenta-se a síntese da análise produzida. Ressalta-se que a mesma foi realizada de forma colaborativa entre a pesquisadora e as professoras, utilizando a Ferramenta de Análise Epistêmica (FAE), sendo que a aplicação da mesma possibilitou um olhar para os significados institucionais pretendidos pelo município para o ensino e aprendizagem da Matemática no Ensino Fundamental. Assim, estruturou-se a análise apresentando o objetivo geral estabelecido pelo município para cada um dos anos finais do Ensino Fundamental, e buscou-se identificar nos objetivos específicos de cada ano, os componentes situações-problemas, linguagem, regras, argumentos e relações e seus indicadores propostos pela FAE (Apêndice B).

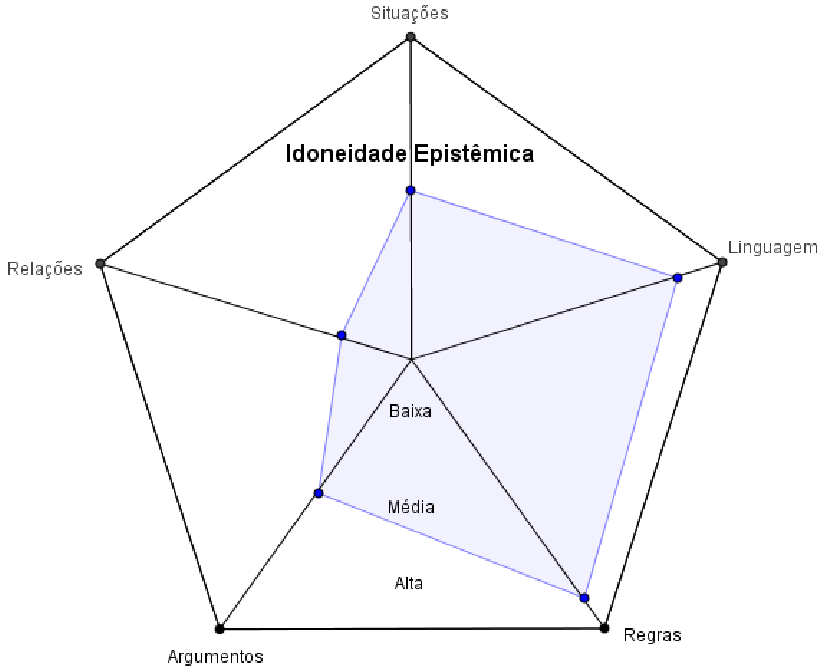
Figura 26 - Síntese da análise epistêmica das Orientações Curriculares Municipais

Componentes	Componentes/indicadores evidenciados nos objetivos	Grau de Idoneidade evidenciado
Situações-problema	O conjunto de objetivos apresenta indicações para o trabalho com situações-problema, tendo maiores referências no 6º, 7º e 9º ano. Já no 8º ano poucos objetivos referem-se s situações-problemas.	**Média**
Linguagem	O trabalho com linguagens se faz fortemente presente nos objetivos. Observou-se indicações para o trabalho com diferentes representações e a preocupação com o desenvolvimento de uma linguagem matemática adequada, clara e precisa.	**Alta**
Regras (definições, proposições, procedimentos)	Os indicadores do componente Regras foram os que tiveram maior destaque nos objetivos, por meio de referências a conceitos, definições, propriedades, assim como em objetivos focados em procedimentos, como calcular, dividir e determinar. Foi possível, também, identificar objetivos que encaminham para generalizações, principalmente os que se referem a verificação e validação de propriedades.	**Alta**
Argumentos	Foi possível constatar, em parte dos objetivos indicações referentes ao trabalho com argumentação, principalmente quando se refere a reconhecer, verificar e validar proposições, propriedades ou situações.	**Média**
Relações	Entende-se que os objetivos apresentam uma baixa representatividade no que se refere ao estabelecer relações entre o objeto matemático em estudo, principalmente relações mais amplas, como entre diferentes objetos matemáticos. Os objetivos para o 9º ano foram o que fizeram maiores referências a intenção de estabelecer relações.	**Baixa**

Fonte: a pesquisa.

Buscando sintetizar e ilustrar os resultados obtidos com a análise epistêmica das Orientaçãoes Curriculares Municipais organizou-se a representação apresentada na Figura 27, onde os vértices do pentágono são os componentes estabelecidos e o polígono interno é o grau de idoneidade alcançado, ou seja, a representatividade do componente no documento.

Figura 27 - Representatividade Epistêmica nas Orientações Curriculares



Fonte: a pesquisa.

A análise produzida permitiu identificar que os componentes epistêmicos se fazem presentes nas Orientações Curriculares, em maior número ou menor dependendo do ano, mas sendo contemplados pelo menos em um objetivo em cada ano. Assim, discutiu-se com as professoras sobre a possibilidade de organizar seus planejamentos levando em consideração estes aspectos. Todas concordaram que é possível, já que são elementos presentes no estudo de objetos matemáticos.

As análises, discussões e reflexões produzidas no âmbito do grupo permitiram perceber a Geometria como uma área pouco explorada, até mesmo nas Orientações Curriculares, muitas vezes sendo posta e desenvolvida mais focada em medidas do que nos objetos geométricos, ou até mesmo, não sendo trabalhada nos anos finais do Ensino Fundamental, conforme relato de P2 *"eu tenho tido dificuldade em dar geometria, fica sempre para o último trimestre e a maioria das vezes não dá tempo, ou quando dá tá mais focada nos cálculos de ângulos, área, perímetro, teorema de pitagóras"*. Estando em consonância com o que Pavanello (1993) já havia apontado, o estudo da Geometria tinha lugar na parte final do ano letivo e, via de regra, era desenvolvido superficialmente ou até mesmo não era trabalhado. Estas constatações levaram à reflexão e discussão sobre a pertinência do desenvolvimento de uma proposta de estudos de recuperação focada na Geometria. Foi consenso entre as professoras que seria uma oportunidade de resgatar as lacunas deixadas pela escassez do ensino da Geometria.

Assim, o último encontro foi dedicado à apresentação e discussão sobre as possíveis metodologias utilizadas no desenvolvimento de uma proposta de estudos de recuperação, a fim de discutir e refletir sobre as estratégias e a estrutura da proposta que estaria sendo desenvolvida. Foi entregue às professoras o Livro "Práticas Escolares no Ensino de Ciências e Matemática"(KAIBER, 2015) o qual contempla artigos que tratam das experiências desenvolvidas no Projeto Observatório da Educação[33] e tem como anexo digital duas Sequências Didáticas Eletrônicas, uma sobre Equações de 1º grau e outra sobre Frações.

Finalizou-se a formação com reflexões sobre a mesma, aspectos considerados positivos e negativos e também se estabeleceu a parceria com a professora P3 que se interessou em desenvolver a proposta de estudos de recuperação para a Geometria nos anos finais em sua escola.

Ressalta-se que as ações planejadas e vislumbradas para este processo de formação continuada estavam muito além das aqui apresentadas, porém, devido à interrupção das atividades não foi possível realizá-las. Assim, nosso foco maior está na análise do desenvolvimento e implementação da proposta de estudos de recuperação, porém, destaca-se que as discussões, reflexões e encaminhamentos oriundos do trabalho do grupo de professoras foi de suma importância e contribuíram de forma decisiva para a constituição e desenvolvimento da proposta por parte da pesquisadora.

A seguir discute-se o perfil dos estudantes participantes da fase de experimentação da proposta de estudos.

6.2 PERFIL DOS ESTUDANTES, SUAS MOTIVAÇÕES E PERCEPÇÕES SOBRE O TRABALHO

Visando traçar um perfil dos estudantes participantes da investigação com relação a suas experiências de estudo envolvendo tecnologias digitais e a Geometria, bem como, suas motivações e expectativas em relação aos estudos de Geometria a serem desenvolvidos, estruturou-se o Questionário 1 (Apêndice D), aplicado no primeiro encontro com os estudantes.

[33] Projeto Observatório de Educação citado é oriundo do Edital Nº 38/2010/CAPES/INEP e teve como objetivos buscar ações que permitam desenvolver, aplicar e avaliar como é possível aprimorar o desempenho dos estudantes do Ensino Fundamental de escolas públicas em Ciências e Matemática, assim como qualificar a prática docente dos professores envolvidos, através de estratégias de formação continuada, de forma presencial e à distância.

Conforme já destacado, estão sendo considerados para as análises produzidas, o trabalho de 15 estudantes que concluíram a proposta de estudo, sendo estes 5 meninos e 10 meninas, com idade média entre 14 e 15 anos, todos cursando o 9º ano do Ensino Fundamental. Ainda, no texto, os estudantes serão identificados por um numeral de 1 a 15, da seguinte forma: aluno01, aluno02, ..., aluno15.

Questionou-se os estudantes sobre a frequência que utilizavam o computador na escola e para quais atividades. Todos responderam que utilizam semanalmente o computador, indicando que as atividades escolares realizadas são pesquisas, trabalhos, atividades solicitadas pelos professores e aplicativos. É importante destacar que a escola disponibiliza horários para os professores utilizarem o Laboratório de Informática, contando com o apoio de uma professora responsável.

Especificamente em relação à disciplina Matemática, indagou-se aos estudantes se os professores utilizavam o Laboratório de Informática e quais as atividades desenvolvidas. Oito estudantes indicaram que os professores de Matemática não utilizam o Laboratório de Informática e sete que sim, sendo destacadas atividades como jogos matemáticos e utilização de aplicativos.

No que se refere a Geometria questionou-se se já haviam estudado, se lembravam de algum conteúdo específico e se tinham apresentado dificuldades. Todos indicaram já ter estudado Geometria, sendo que dois estudantes destacaram ter sido bem pouco. Quanto aos conteúdos, oito estudantes responderam não lembrar de nenhum conteúdo, cinco indicaram ângulos e um aluno destacou triângulos, quadrados, perímetro e área e outro retas, semirretas e segmentos. A partir das respostas foi possível perceber fortemente a presença do estudo de ângulos e, quanto as dificuldades em torno da Geometria, nove estudantes indicaram não ter apresentado dificuldades, quatro destacaram ter tido e dois indicaram ter tido muitas dificuldades.

As últimas questões se referiam sobre quais suas motivações e expectativas em relação ao trabalho a ser desenvolvido. As principais motivações indicadas pelos estudantes foram “aprender mais”, ter mais conhecimento em Geometria e se preparar para as provas de seleção para ingresso no Ensino Médio em escolas que, por excesso de procura, realizam provas. Em relação às expectativas, os estudantes, em sua maioria, ressaltaram a possibilidade de aprender mais sobre Matemática para conseguir aprovação nas provas de seleção. A partir dessas primeiras manifestações dos estudantes, foi possível perceber o forte interesse em se prepararem para as provas de seleção, o que foi considerado na proposta de estudos, por meio da inclusão de atividades, as quais envolvessem o que, via de regra, é solicitado nestas provas.

No que segue apresentam-se e discutem-se os resultados obtidos com a aplicação da atividade inicial em torno dos conhecimentos geométricos.

6.3 ATIVIDADE INICIAL: INVESTIGANDO OS CONHECIMENTOS GEOMÉTRICOS PRÉVIOS DOS ESTUDANTES

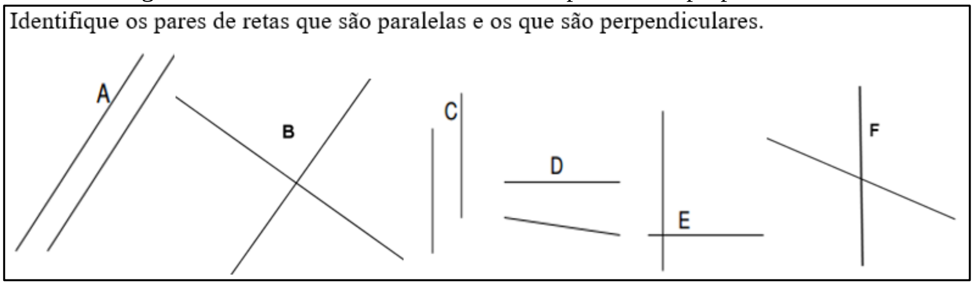
Visando investigar conhecimentos prévios dos estudantes em torno de conceitos, definições, procedimentos e argumentos envolvendo conhecimentos geométricos, estruturou-se um conjunto de atividades (Apêndice F) inspirado e adaptado da sequência de atividades propostas pelo Projeto Fundão (NASSER; TINOCO, 2004).

Esta atividade foi realizada no primeiro encontro e tinha por objetivo investigar o conhecimento dos estudantes em relação a: diferenciar figuras planas de espaciais, identificar retas perpendiculares e paralelas, diferenciando-as; reconhecer e nomear polígonos; classificar triângulos quanto aos lados e ângulos; estabelecer relações entre quadriláteros. Entendeu-se pertinente desenvolver esta atividade, pois caso os estudantes já apresentassem conhecimentos consolidados em relação a estes aspectos iniciais de Geometria, os estudos poderiam iniciar em tópicos mais avançados, o que não ocorreu. Os estudantes apresentaram dificuldades nas atividades propostas, o que levou a iniciar os estudos desde os tópicos iniciais. As atividades propostas e as soluções apresentadas pelos estudantes passam a ser discutidas.

A primeira atividade refere-se à identificação de figuras planas e espaciais em um conjunto de figuras geométricas. De modo geral, os estudantes não apresentaram dificuldades nesta atividade, e somente dois alunos indicaram não saber diferenciar as figuras (aluno11 e aluno14). Quando questionados se já haviam estudado ou se tinham algum conhecimento sobre o assunto, um deles (aluno11) disse já ter estudado, porém não lembrava *"quem era o que"* e o outro (aluno14), disse não ter estudado, mas já tinha ouvido falar, porém não conseguiu fazer a atividade. A pesquisadora questionou os estudantes, se caso a atividade solicitasse que as figuras fossem nomeadas se saberiam responder. Em geral manifestaram não saber, sendo que o aluno02 disse "o quadrado, retângulo, triângulo e a *bola* sim, os outros não" fala com a qual os demais concordaram. Destaca-se na manifestação do aluno02 que nomeia a esfera como "bola", possivelmente atendo-se a forma já conhecida, mas não sabendo nomeá-la em termos geométricos.

No que se refere atividade de identificar retas paralelas e perpendiculares (figura 28) as dificuldades foram maiores, tanto no que se refere a definição das mesmas como em conseguir identificá-las a partir de representações.

Figura 28 - Atividade de diferenciar retas paralelas e perpendiculares



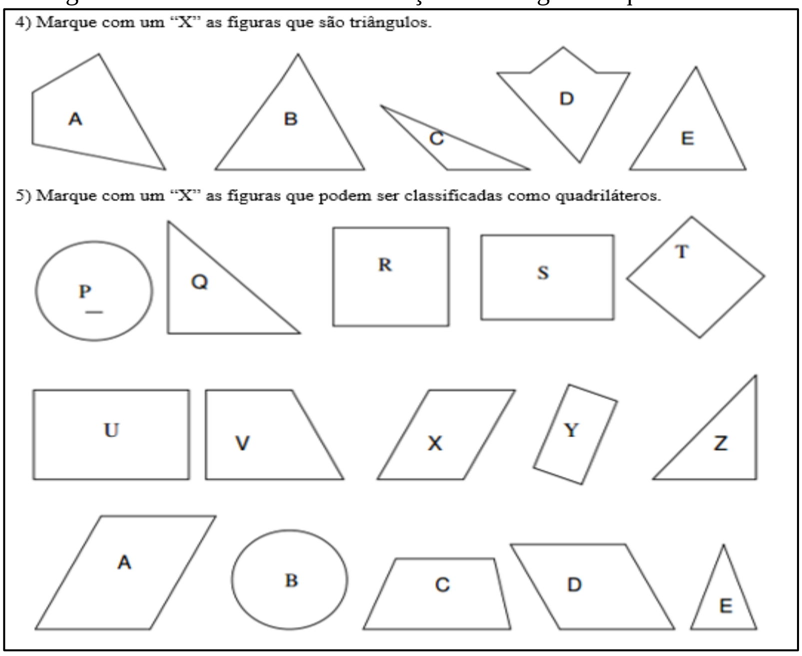
Fonte: a pesquisa.

Em geral, indicaram as retas A, C e D como paralelas e B, E e F como perpendiculares, sendo que somente A e C são paralelas e B e E perpendiculares. Três estudantes (aluno05, 12 e 15) indicaram somente A e C como paralelas, porém colocaram as demais como sendo perpendiculares, o que evidencia não terem clareza sobre a definição de retas perpendiculares. Considera-se que os estudantes buscaram identificar todas as retas apresentadas, não considerando que algumas delas não eram nem paralelas e nem perpendiculares, classificando-as desconsiderando as características e definições das mesmas.

A terceira atividade sobre identificar o número de lados e nomear polígonos quanto aos lados, todos os estudantes responderam corretamente, porém quanto à nomenclatura, só o triângulo foi respondido corretamente por todos e o quadrilátero foi indicado, equivocadamente, como quadrado por dois estudantes (aluno09 e 15), o pentágono e o hexágono foram nomeados corretamente por 4 estudantes (aluno04, 05, 07 e 14).

As atividades quatro e cinco (figura 29) os estudantes não apresentaram dificuldades, indicando corretamente as figuras.

Figura 29 - Atividade de identificação de triângulos e quadriláteros



Das figuras marcadas identifique, utilizando as letras (A, B, C...) quais são:
5.1 Quadrados: ______________________________.
5.2 Retângulos: ______________________________.
5.3 Paralelogramos: ___________________________.
5.4 Trapézios: _______________________________.

Fonte: a pesquisa.

Considera-se que as atividades apresentadas na figura 29 são bem iniciais, pois somente era solicitado que os estudantes identificassem os triângulos e quadriláteros em conjuntos de figuras. A atividade 5 ainda solicitava que a partir das figuras marcadas os estudantes identificassem quais eram quadrados, retângulos, paralelogramos e trapézios, sendo que nesta segunda parte os estudantes apresentaram dificuldades. Os alunos 04, 05, 11 e 13 responderam não saber ou não lembrar, o aluno01 identificou todas as figuras corretamente, não considerando as classes de inclusão (era esperado e não era o objetivo da atividade). Os demais estudantes identificaram apenas os quadrados e retângulos corretamente.

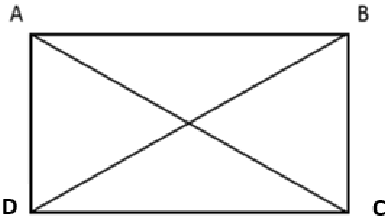
Nas atividades 6, 7 e 8 foram abordadas propriedades dos triângulos, no que se refere principalmente aos lados e ângulos. Quando questionados sobre um triângulo equilátero ter os três lados com a mesma medida, todos os estudantes que responderam à questão completando a lacuna corretamente. Já no que se refere aos lados do isósceles a grande maioria não respondeu. Ressalta-se que o aluno05 indicou "não sei o que é isso" circulando a palavra isósceles. As questões sobre as propriedades e definições sobre ângulos e lados de triângulos equiláteros e isósceles, a grande maioria dos estudantes respondeu não saber, não indicando nem ser Verdadeiro ou Falso como era o solicitado. A questão 8 perguntava o que se pode afirmar sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo e somente os alunos10 e 11 indicaram a resposta correta, o aluno01 respondeu incorretamente como sendo 90º e os demais responderam não saber ou lembrar.

A atividade 9 se refere as propriedades dos retângulos, conforme ilustrado na figura 30.

Figura 30 - Atividade sobre propriedades de retângulos.

Observe o retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de ________________. Indique se as alternativas são verdadeiras ou falsas para todos os retângulos.

a) Tem quatro ângulos retos ( ).
b) Tem lados opostos paralelos ( ).
c) Tem diagonais com o mesmo comprimento ( ).
d) Tem os quatro lados com a mesma medida ( ).



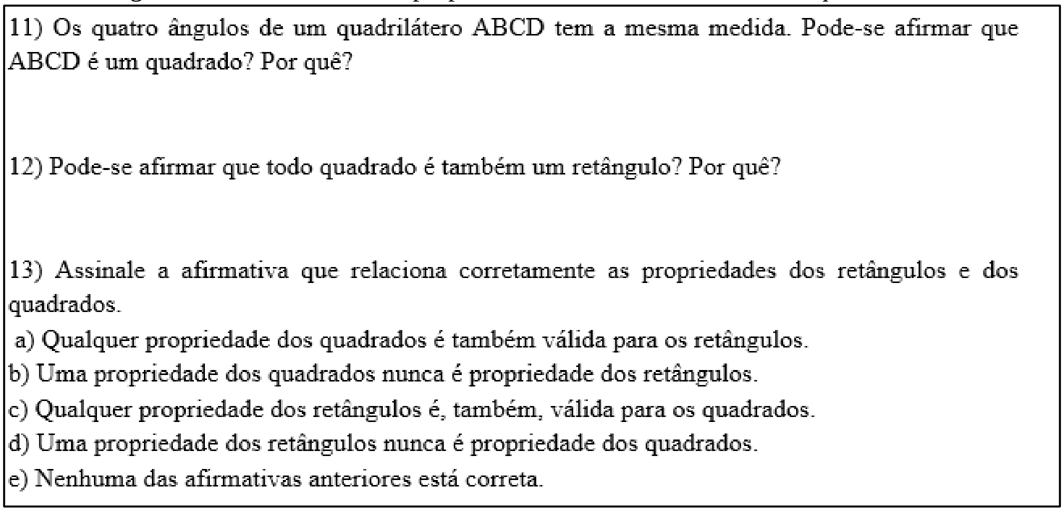
Fonte: a pesquisa.

Com esta atividade esperava-se que os estudantes conseguissem identificar os segmentos AC e BD como diagonais, mas nenhum deles respondeu corretamente, sendo que a maioria deixou a lacuna em branco ou colocou não sei. Quando questionados em o retângulo ter os quatro ângulos retos todos os estudantes indicaram como verdadeira, assim como todos colocaram falsa para os quatro lados com mesma medida. Já no que se refere aos lados opostos paralelos e diagonais com o mesmo comprimento a grande maioria indicou incorretamente, o que corroborou a declaração anterior em relação as diagonais e evidenciou a não compreensão ou entendimento de "lados opostos paralelos".

Na atividade 10 era solicitava que os estudantes indicassem três propriedades dos quadrados e grande parte não respondeu à questão. Dos estudantes que responderam, as propriedades mais indicadas foram que: os quadrados têm todos os lados iguais (ou mesma medida), ângulos iguais e com quatro ângulos de 90º.

As questões 11, 12 e 13 (figura 31) se referem as propriedades dos quadrados e retângulos e a inclusão de classes dos quadriláteros.

Figura 31- Atividades sobre propriedades e inclusão de classes de quadriláteros



11) Os quatro ângulos de um quadrilátero ABCD tem a mesma medida. Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado? Por quê?

12) Pode-se afirmar que todo quadrado é também um retângulo? Por quê?

13) Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados.
a) Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.
b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.
c) Qualquer propriedade dos retângulos é, também, válida para os quadrados.
d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.
e) Nenhuma das afirmativas anteriores está correta.

Fonte: a pesquisa.

Com estas atividades esperava-se que os estudantes conseguissem argumentar e estabelecer relações para responder aos questionamentos, mobilizando minimamente os conhecimentos prévios em torno das propriedades dos quadriláteros que pelos planos de estudos já haviam sido estudadas, porém nenhum dos estudantes respondeu corretamente a essas questões.

No que segue apresenta-se no quadro da figura 32 um resumo da análise produzida e discutida.

Figura 32 - Quadro síntese da atividade inicial

Atividades	**Resumo das análises**
Diferenciar figuras planas e espaciais	Os estudantes não apresentaram dificuldades em identificar e diferenciar figuras planas e espaciais.

Identificar retas paralelas e perpendiculares	No que se refere a identificação de retas paralelas e perpendiculares os estudantes apresentaram dificuldades, demonstrando não ter clareza da definição das mesmas.
Reconhecer e nomear polígonos	Os estudantes reconhecem os lados dos polígonos, porém a maioria não consegue nomeá-lo, com exceção do triângulo nomeado por todos.
Identificar triângulos	Os triângulos foram identificados com facilidade pelos estudantes.
Identificar quadriláteros e classificar em retângulo, quadrado, paralelogramo e trapézio.	No que diz respeito a identificação dos quadriláteros, os estudantes não apresentaram dificuldades, porém grande parte não conseguiram realizar a classificação dos mesmos, principalmente no que se refere a paralelogramos e trapézios.
Identificar as propriedades de triângulos quanto aos lados e ângulos	Nas atividades sobre propriedades de triângulos os estudantes apresentaram grandes dificuldades, exceto sobre o triângulo equilátero ter lados congruentes.
Identificar as propriedades de quadriláteros	Os estudantes apresentaram grandes dificuldades em identificar e relacionar as propriedades de quadriláteros, sendo que a maioria não respondeu a atividade, justificando não ter conhecimentos suficientes.

Fonte: a pesquisa.

A partir da análise das respostas dos estudantes para as atividades propostas, foi possível perceber que os mesmos apresentaram dificuldades e escassos conhecimentos sobre os aspectos abordados. Assim, julgou-se pertinente e necessário iniciar os estudos da proposta desde o primeiro tópico, que é Figuras Geométricas, a fim de retomar e aprofundar com os estudantes conceitos, definições, propriedades e procedimentos já esquecidos ou não estudados, como também, oportunizar aos mesmos conhecer e compreender outros conhecimentos geométricos.

No que segue apresenta-se a estrutura e constituição da Proposta de Estudos de Recuperação de Geometria para os anos finais do Ensino Fundamental.

7 ESTUDOS DE RECUPERAÇÃO: UMA PROPOSTA PARA A GEOMETRIA DOS ANOS FINAIS DO ENSINO FUNDAMENTAL

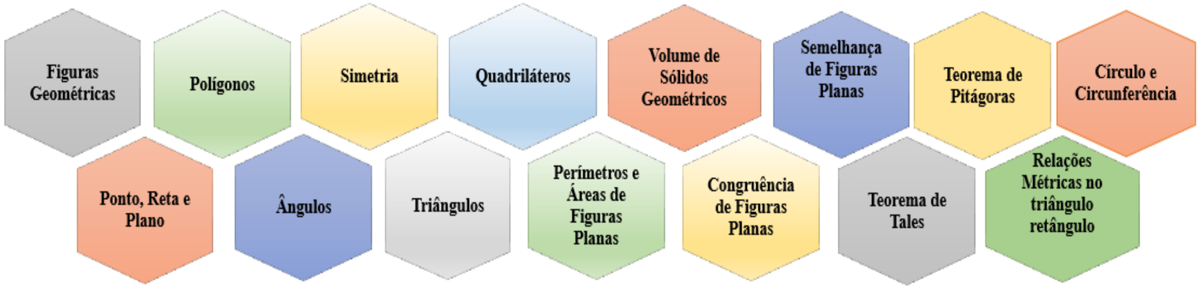
Foi a partir dos resultados alcançados em Lemos (2013) que a visão da constituição de propostas de estudos de recuperação começou a se materializar como um caminho possível para superação de dificuldades apresentadas pelos estudantes. Parte-se do pressuposto que os estudos de recuperação devem ser pensados e organizados considerando estratégias distintas das já utilizadas em sala de aula, visando oportunizar aos estudantes, os quais apresentem dificuldades na apropriação dos conhecimentos, conceitos e procedimentos, a vivência de situações e ações que retomem, sob outras perspectivas, caminhos já trilhados.

A proposta de estudos de recuperação desenvolvida nesta investigação, focada nos conhecimentos geométricos do Ensino Fundamental, contempla quinze materiais de estudos, os quais foram planejados levando em consideração as indicações de documentos oficiais para o ensino da Geometria e os aportes teóricos já apresentados neste trabalho, como os constructos do EOS e pesquisas na área. Estes materiais foram estruturados visando integrar tanto o uso das tecnologias digitais, por meio de atividades, jogos *online*, objetos de aprendizagem, vídeos e uso de *software*, como também, atividades envolvendo manipulações e construções.

Entendeu-se pertinente desenvolver o trabalho buscando a integração destes recursos, tendo em vista a importância, no ensino de Geometria, de atividades que potencializem visualizações, manipulações, comparações, construções, estabelecimento de relações, conjecturas, análises e sínteses. Considera-se que, desse modo, criam-se condições favoráveis para uma maior interação entre o estudante e o conteúdo, já que são disponibilizadas diferentes mídias para o desenvolvimento do mesmo.

Apresentam-se, na figura 33 os tópicos desenvolvidos na proposta de estudo elaborada.

Figura 33– Tópicos de Geometria desenvolvidos na proposta



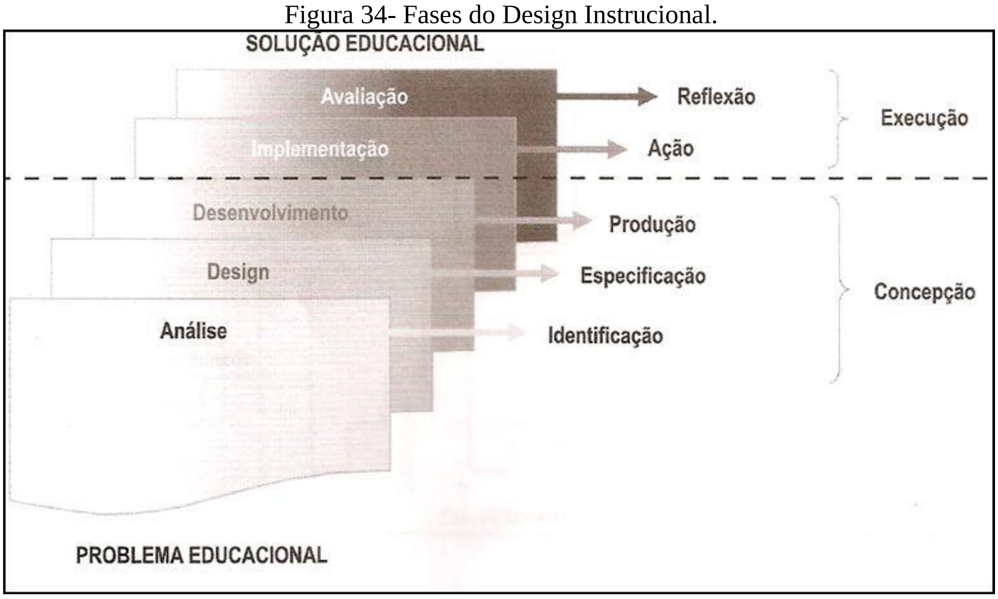
Fonte: a autora.

Para cada tópico apresentado na figura 33 foi desenvolvido um material de estudo, construído no *Power Point*, nos quais foram sendo apresentadas e desencadeadas as situações de aprendizagens. Esta concepção de organização de material de estudo, como já apresentado em Lemos (2013), está apoiada no Design Instrucional que, segundo Filatro (2009), consiste em uma ação intencional e sistemática de ensino que envolve o planejamento, o desenvolvimento e a aplicação de métodos, técnicas, atividades, materiais, eventos e produtos educacionais em situações didáticas com a finalidade de promover a aprendizagem. Porém, o Design Instrucional (DI), está sendo utilizado, aqui, somente como um aporte para a estruturação dos materiais de estudos. No que se refere ao conhecimento matemático e as metodologias de ensino desenvolvidas nos mesmos tomam-se como referência os aspectos teóricos já destacados neste trabalho. Do mesmo modo, no que se refere a questões metodológicas envolvendo a investigação, embora o DI conte com a etapa de implementação e avaliação, foram utilizados os aportes da Investigação Baseada no *Design* (IBD) propostas em Godino et al (2013)

Assim, para a constituição dos materiais de estudo buscou-se apoio nas fases estabelecidas no *Design* Instrucional Fixo (FILATRO, 2009). Neste modelo o planejamento e construção das atividades propostas ocorrem antes da implementação com os estudantes, ou seja, o material disponibilizado tem organização e elaboração prévia.

Este modelo fixo é composto de duas etapas, Concepção e Execução. A primeira contempla as fases de Análise, Design e Desenvolvimento, enquanto que a segunda, se refere a Implementação e Avaliação, conforme ilustrado na figura 34.

Figura 34- Fases do Design Instrucional.



Fonte: Filatro (2009, p.25).

A fase de Análise consiste em entender o problema e projetar uma solução para este. No presente trabalho esta fase se situou na revisão de literatura e na imersão em estudos em torno dos processos de ensino e aprendizagem da Geometria na Educação Básica, da temática recuperação e do EOS.

A fase de Design contempla o planejamento das ações a serem desenvolvidas, a partir do levantamento e do estudo realizado na fase de análise. No âmbito desta pesquisa, esta fase se desenvolveu por meio do planejamento das ações e estratégias a serem utilizadas na constituição dos materiais de estudo, assim como, na tomada de decisão dos conceitos a serem trabalhados no âmbito da Geometria no Ensino Fundamental. Assim, estabeleceu-se que para cada conceito seria desenvolvido um material de estudo, construído no Power Point e salvo em html[34], utilizando o *software* Ispring no qual estariam contemplados os demais recursos, como atividades *online*, objetos de aprendizagem, vídeos e também atividades de construção e manipulação, por meio de *links* no próprio material que encaminhem para páginas da *internet*, instruções sobre atividades ou para o uso de *softwares*.

É na fase de Desenvolvimento que ocorre a produção e adaptação dos recursos e atividades didáticas a serem utilizados, ou seja, é nesta fase que foram construídos os materiais de estudos que constituem a proposta de estudos de recuperação para a Geometria nos anos finais do Ensino Fundamental. Assim, estruturou-se os materiais seguindo as indicações de Filatro (2009) no que diz respeito a construção de materiais para o aprendizado eletrônico, que devem incluir textos, imagens, gráficos, animações, *links* externos e vídeos. Os textos devem ser sucintos e utilizar uma linguagem acessível aos estudantes, destacando as informações mais importantes através de cores, negrito ou itálico, buscando organizar os elementos da interface do material de maneira que não sobrecarreguem a tela. Ressalta-se que os materiais de estudos serão discutidos mais detalhadamente na seção que referente a cada um dos conceitos/conteúdos desenvolvidos na proposta.

A segunda etapa prevista no Design Instrucional se refere à Execução, constituída pelas fases de Implementação e de Avaliação. A Implementação é dividida em duas: publicação e execução. A publicação consiste em disponibilizar o material produzido aos alunos e, a execução, é o momento em que os alunos realizam as atividades. No âmbito da pesquisa, a publicação foi realizada no momento em que a pesquisadora disponibilizou os materiais de estudos nos computadores do laboratório de Informática da escola e a execução ocorreu quando os estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental começaram a desenvolver seus estudos.

[34] **HTML** (abreviação para a expressão inglesa HyperText Markup Language, que significa Linguagem de Marcação de Hipertexto) é uma linguagem de marcação utilizada na construção de páginas na Web. Documentos **HTML** podem ser interpretados por navegadores.

Já a fase de Avaliação consiste nas considerações sobre a efetividade do projeto proposto, bem como a revisão das estratégias implementadas. Nesta, avalia-se tanto o projeto proposto como os resultados de aprendizagem dos alunos. Entende-se que esta fase está contemplada nas análises que se propõem baseadas no Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS).

7. 1 ESTRUTURA DOS MATERIAIS DE ESTUDOS

Os materiais de estudos foram construídos visando retomar ideias, conceitos, definições, proposições e procedimentos em torno dos conteúdos de Geometria dos anos finais do Ensino Fundamental. Todos os materiais foram construídos no Power Point e salvos em html pelo *software* ISpring Free, que é um programa de conversão de slides em flash. No que se refere ao *layout* e estrutura dos materiais de estudo seguiu-se as indicações de Filatro (2009) sobre a construção de materiais para o aprendizado eletrônico:

- devem incluir textos, imagens, gráficos, animações e vídeos;
- os textos devem ser sucintos e objetivos;
- utilizar uma linguagem acessível;
- destacar as informações mais importantes através de cores, negrito ou itálico;
- organizar os elementos da interface do material, para que estes não sobrecarreguem a tela.

A partir destas indicações, buscou-se construir cenários que fossem adequados ao nível de ensino dos estudantes, ou seja, para adolescentes do 9º ano do Ensino Fundamental, e que comtemplassem os objetivos de aprendizagem de cada tópico. Assim, nestes materiais são articuladas situações que possibilitem aos estudantes realizarem tanto um estudo focado no conhecimento teórico do objeto matemático que está sendo trabalhado, como também, são articuladas atividades que encaminhem para a aplicação destes conhecimentos em situações-problema, podendo estas serem de contextualização, exercícios, construção ou explicações e justificativas presentes no próprio material, na utilização de *software,* objetos de aprendizagem ou por meio de atividades online.

Para melhor explicitar a organização dos materiais de estudos, no que segue, inicialmente será apresentada uma síntese (figura 35) do que foi desenvolvido em cada tópico, em termos de conceitos, definições, propriedades e procedimentos, como também, as estratégias e recursos utilizados. Em seguida, será apresentada a estrutura geral dos materiais, ou seja, como são desenvolvidos os apectos apontados no quadro da figura 35. E, por fim, serão destacados de forma individual, os principais recursos utilizados nos materiais, como atividades *online,* animações, vídeos, objetos de aprendizagem, links externos, atividades de construções com régua e compasso e no geogebra. A seguir, no quadro da figura 35, apresenta-se a síntese do que foi trabalhado em cada um dos tópicos da proposta.

Figura 35 - Quadro síntese sobre os materiais de estudos

Tópicos	Conceitos, definições, preposições e procedimentos abordados nos materiais	Estratégias e Recursos utilizados nos materiais
Figuras Geométricas	• Retomada das noções intuitivas de Formas Geométricas. • Definição de Figuras Planas e Espaciais. • Conceito de Sólidos Geométrico. • Planificação de Sólidos Geométricos. • Definição de Poliedros e Não Poliedros (Corpos Redondos). • Elementos dos Poliedros: vértices, faces e arestas. • Características dos corpos redondos. • Características dos prismas e pirâmides. • Conceito dos Sólidos de Platão. • Demonstração da relação de Euler.	• Para desenvolver o estudo em torno das Figuras Geométricas foi proposto inicialmente estabelecer uma relação entre as mesmas e imagens reais. A partir desta associação foram retomada as definições de Figuras Planas e Espaciais. • O conceito de Sólidos Geométricos foi abordado por meio da identificação de formas em objetos do cotidiano, encaminhando-se em seguida para os procedimentos de planificações destes sólidos. • As definições de Poliedros e não Poliedros foram estabelecidas por meio de suas características, diferenciando-os. Em seguida foram apresentados os elementos: vértices, faces, arestas e bases. • O estudo específico dos prismas e pirâmides foi encaminhado por meio de uma atividade na qual deveriam ser destacadas as diferenças e semelhanças destes objetos. • O estudo sobre os Sólidos de Platão foi proposto a partir de um *link* externo que destacava as características dos mesmos e apresentava animações para ilustrá-los. • A demonstração da relação de Euler foi encaminhada a partir de um objeto de aprendizagem que retoma as características e elementos dos sólidos geométricos e estabelece as relações entre eles. • No que diz respeito aos recursos utilizados para o desenvolvimento do conjunto de conceitos, definições, conceitos, proposições e procedimentos destacados, foram articuladas situações-problema, exercícios, atividades online, objetos de aprendizagem, animações e aplicações no Geogebra.
Ponto, Reta e Plano	• Noção e possíveis representações de Ponto, Reta e Plano. • Conceito de retas concorrentes e paralelas e distinção entre: oblíquas e perpendiculares, distintas e coincidentes. • Definição de Semirretas e Segmento de Reta. • Construção de retas paralelas e perpendiculares.	• Iniciou-se o estudo em torno das noções primitivas de Ponto, Reta e Plano relacionando suas representações com objetos cotidianos. Em seguida, suas características, e formas de representações foram abordadas. • São apresentadas as definições de retas concorrentes e paralelas e a classificação das mesmas em oblíquas e perpendiculares, distintas e coincidentes. É proposto, no material, a construção de retas paralelas e perpendiculares. • Encaminha-se uma discussão em torno das definições de Semirretas e Segmento de Reta. • Os recursos utilizados no material para encaminhar as discussões em torno deste conjunto de definições, conceitos, preposições e procedimentos foram:

		situações-problema, atividades *online*, vídeos, animações e construções com régua e compasso.
Polígonos	• Definição de Linha poligonal. • Definição de Polígonos. • Classificação de Polígonos em Concâvos e Convexos, Regulares e Irregulares. • Nomenclatura dos Polígonos quanto aos lados e ângulos. • Construção de Polígonos. • Soma dos Ângulos internos e externos de um Polígono. • Retomada do conceito e construção de Diagonais.	• A definição de linha poligonal foi trabalhada por meio da diferenciação de tipos de linhas, encaminhando para a definição de polígonos. • Apresentaram-se as definições e características de polígonos Concâvos e não Concâvos, Regulares e Irregulares, diferenciando-os. • A nomenclatura dos polígonos foi destaca por meio de uma atividade que relaciona número de lados e ângulos. • No material é proposto a construção de polígonos regulares no Geogebra, encaminhando para a observação da regularidade das medidas dos ângulos internos e externos e suas respectivas somas e para a construção das diagonais dos mesmos, buscando relacionar o número de vértices e diagonais. • Para o desenvolvimento das definições, conceitos, proposições e procedimentos que constituem este material de estudos, buscou-se trabalhar com um conjunto de situações-problema, atividades online, links externos, aplicações e construções no Geogebra.
Ângulos	• Conceito de Ângulos associado as noções de inclinação, rotação, região, abertura e direção. • Definição de Ângulos e seus elementos. • Medida de Ângulos: graus e radianos • Classificação de Ângulos: agudo, reto, obtuso, raso (meia volta) e volta completa. • Construção de Ângulos. • Definição e construção de bissetriz. • Definição de Ângulos consecutivos, adjacentes, complementares, suplementares e opostos pelo vértice. • Definição de Ângulos formados por paralelas cortadas por uma transversal: correspondentes, alternos e colaterais.	• Para introduzir a definição de Ângulos, foi retomado o conceito de ângulos associado as suas distintas noções, buscando relacionar com situações cotidianas por meio de imagens. • Destacou-se a medida dos Ângulos através de transferidor e suas unidades (graus ou radianos). • Apresentou-se a classificação dos Ângulos a partir de suas medidas, buscando relacionar a medida de referencia 90º, menor, maior ou igual. • É proposto a construção de Ângulo com o uso do transferidor. • A definição de bissetriz foi encaminha a partir de uma situação-problema e em seguida proposta a construção. • Apresentaram-se características e definições de Ângulos consecutivos, adjacentes, complementares, suplementares e opostos pelo vértice. • As definições e relações entre os ângulos formados por paralelas cortadas por uma transversal foram discutidas por meio da atividade no Geogebra e posteriormente apresentada, no material, a formalização. • Os recursos mobilizados e articulados para este material foram: situações-problema, atividades *online*, animações, objetos de aprendizagem, atividades de construção no Geogebra, e vídeos.
Simetria	• Conceito de Simetria e Assimetria. • Eixos de Simetria. • Conceito de Isometria: Reflexão, Rotação e Translação.	• O estudo em torno de Simetria foi introduzido tomando como referencia imagens reais, estimulando os estudantes a visualizarem regularidades e padrões. • As Isometrias foram trabalhadas por meio de uma atividade concreta com uma folha de papel, e com indicações sobre os movimentos a serem realizados que caracterizavam Reflexão, Rotação e Translação, sendo realizada a verificação por meio de animações. • Utilizaram-se como recursos para o desenvolvimento dos conceitos envolvidos em torno

		das simetrias e isometrias, situações-problema, animações, atividades *online* e concretas.
Triângulos	• Retomada do conceito e definição de triângulos e seus elementos. • Condição de existência de triângulos. • Classificação de triângulos quanto aos lados e ângulos. • Propriedades dos triângulos. • Construção de triângulos: equilátero, isósceles, escaleno, acutângulo, retângulo e obtusângulo. • Verificação/demonstração da propriedade da soma dos ângulos internos. • Propriedade da soma dos ângulos externos.	• Iniciou-se o estudo de triângulos retomando suas características e elementos por meio de um vídeo. • A condição de existência de triângulos foi abordada através de uma situação-problema que problematiza a necessidade de uma relação entre as medidas para formar o triângulo. • As classificações dos triângulos quanto aos lados e ângulos foram desenvolvidas a partir de atividades nas quais os estudantes deveriam agrupar os triângulos dados por suas características (**lados:** todos com mesma medida, todos com medidas diferentes ou dois lados com mesma medida; **ângulos internos**: um ângulo com medida igual a um ângulo reto, menores que um reto ou maiores que um reto). • As construções dos triângulos foram realizadas considerando as classificações e posteriormente conhecendo medidas, ambas com régua e compasso e no Geogebra. Foi explorada também a desigualdade triangular. • A propriedade da soma dos ângulos internos foi abordada por meio de uma atividade concreta que encaminhava para a demonstração da mesma que, posteriormente, poderia ser conferida e formalizada a com a ajuda de um vídeo. • Já no que se refere a propriedade da soma dos ângulos externos foi estimulada a discussão entre os estudantes e após verificada e formalizada em vídeo. • Para o desenvolvimento deste conjunto de conceitos, definições, propriedades e procedimentos em torno dos triângulos, foram articuladas situações-problema, vídeos, construções com régua e compasso, atividades *online* e concretas, aplicações e construções no Geogebra.
Quadriláteros	• Retomada do conceito de quadriláteros. • Propriedades dos quadriláteros: retângulo, quadrado, losango, trapézio e paralelogramo. • Construção de quadriláteros. • Inclusão de classes de quadriláteros: trapézios e paralelogramos. • Diagonais de quadriláteros.	• O estudo dos quadriláteros foi iniciado por meio da retomada de suas diferentes formas dependendo dos seus lados e ângulos. • A construção e as propriedades dos quadriláteros foram desenvolvidas a partir de construções no Geogebra por meio de instruções e questionamentos que levassem os estudantes a observarem características e regularidades a fim de encaminhar para conclusões em torno das propriedades mínimas, definições e inclusão de classes. Tais aspectos foram formalizados e ilustrados ao final com vídeos. • A definição e construção de diagonais dos quadriláteros foram desencadeadas pela proposta de discussão entre os estudantes e posteriormente estudada a partir de atividade em um *link* externo. • O estudo dos quadriláteros contou com a articulação dos recursos: situações-problema, vídeos, animações, exercícios, atividades *online* e concretas, *links* externos, aplicações e construções no Geogebra.
Perímetro e Áreas de Figuras Planas	• Retomada da noção de área e perímetro. • Cálculo de perímetro de figuras planas.	• Retomou-se a noção de perímetro e área por meio de uma atividade em folha quadriculada. • Os cálculos em torno do perímetro e áreas de figuras planas foram desenvolvidos por meio de situações-problemas e aplicações no Geogebra.

	• Cálculo de áreas de figuras planas: quadrado, retângulo, triângulo, losango e trapézio.	• Os recursos mobilizados e articulados para este material foram: situações-problema, atividades *online*, animações, objetos de aprendizagem, aplicações no Geogebra e Tangram.
Volume de Sólidos Geométricos	• Conceito de Volume e Capacidade. • Cálculo do volume: cubo, paralelepípedo, cilindro e prismas.	• O estudo em torno do volume de sólidos foi iniciado por meio de uma animação que retoma o conceito de volume e capacidade, diferenciando-os. • Os cálculos para determinar o volume dos sólidos geométricos foram trabalhados por meio de situações-problemas. • Para desenvolver os conceitos, definições e procedimentos em torno do volume dos sólidos geométricos foram utilizados os seguintes recursos: animações, atividades *online*, situações-problema, objetos de aprendizagem, aplicações no Geogebra e vídeos.
Congruência de Figuras Planas	• Definição de congruência de figuras planas. • Retomada das definições de rotação, translação e reflexão. • Congruência de triângulos: LAL, LLL, ALA e LAAº.	• Apresentação da noção de congruência de figuras planas e exemplos. • Retomou-se por meio de uma animação as definições de rotação, translação e reflexão e trabalhou-se as mesmas em conjunto com a congruência de figuras planas em atividade impressa. • Os casos de congruência de triângulos foram estudados por meio de atividades de construção com régua, compasso e transferidor estimulando a observação de relações e regularidades e posteriormente apresentadas as formalizações. • Para o desenvolvimento deste conjunto de definições, conceitos, propriedades e procedimentos em torno da congruência de figuras planas, foram articuladas animações, vídeos, construções com régua, transferidor e compasso, atividades *online* e concretas e exercícios.
Semelhança de Figuras Planas	• Conceito e definição de figuras semelhantes. • Definição de polígonos semelhantes. • Semelhança de triângulos: AA, LAL, e LLL.	• O estudo de figuras semelhantes foi iniciado por meio de um objeto de aprendizagem, no qual é trabalhada a noção de proporcionalidade a fim de encaminhar para o conceito de figuras semelhantes. • A definição de figuras semelhantes, assim como exemplos são apresentados por meio de vídeo. • A definição de polígonos semelhantes é desenvolvida em uma atividade concreta, a qual busca estabelecer as relações e as condições necessárias para a semelhança e posteriormente formalizada por um vídeo. • Apresentação e identificação dos casos de semelhança de triângulos foi realizada apresentando a definição e as relações estabelecidas entre lados e ângulos. • Os conceitos, definições, propriedades e procedimentos em torno da semelhança de figuras, foram desenvolvidas a partir de animações, vídeos, objetos de aprendizagem, atividades *online* e concretas, situações-problema e exercícios.
Teorema de Tales	• História de Tales de Mileto. • Retomada dos conceitos de razão, proporção e segmentos proporcionais.	• Iniciou-se o estudo por um vídeo que abordava a história de Tales de Mileto. • Os conceitos de razão, proporção e segmentos proporcionais foram retomados através de um estudo complementar em um *link* externo ao material.

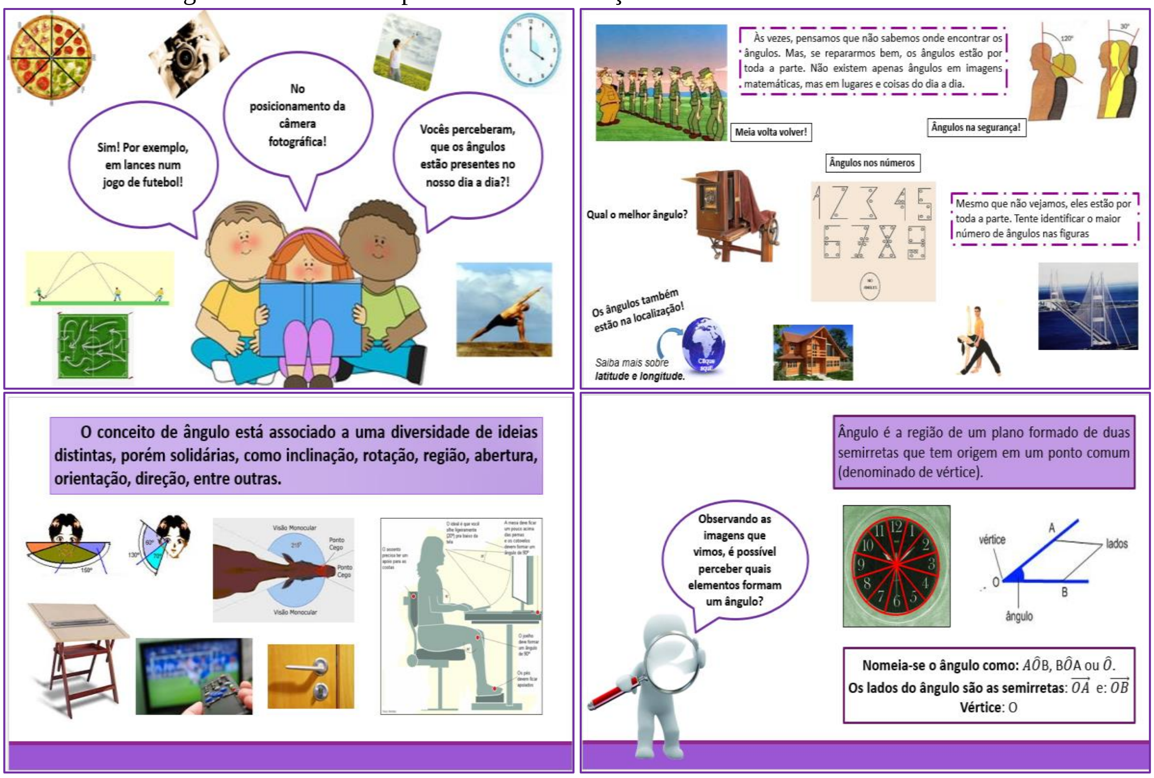
	• Definição e exemplo do Teorema de Tales. • Aplicações do Teorema de Tales em triângulos.	• O estudo em torno do teorema de Tales foi encaminhado por meio da problematização da altura da pirâmide e apresentada a sua dedução. • Apresentação por meio de situações-problemas de exemplos de aplicações do Teorema de Tales em triângulos. • O estudo em torno do Teorema de Tales e suas aplicações foi desenvolvido a partir da articulação dos recursos: situações-problema, vídeos, exercícios, atividades *online*, links externos e aplicações no Geogebra.
Teorema de Pitágoras	• Retomada da definição e elementos de um triângulo retângulo. • Dedução e formalização do Teorema de Pitágoras. • Aplicações do Teorema de Pitágoras.	• Retomou-se, inicialmente, a definição e os elementos de um triângulo retângulo. • O Teorema de Pitagóras foi trabalhado por meio de uma atividade concreta que relaciona as áreas construídas sobre os catetos com a área da hipotenusa, a fim de deduzi-lo e posteriormente, formalizá-lo com a ajuda de um vídeo. • A história, exemplos e aplicações do Teorema de Pitágoras foram apresentados por animações e situações-problema. • Para o desenvolvimento deste conjunto de definições, conceitos, propriedades e procedimentos em torno do Teorema de Pitágoras, foram articuladas animações, vídeos, atividades *online*, situações-problema e exercícios.
Relações Métricas no triângulo retângulo	• Retomada sobre as alturas de um triângulos. • Relações e propriedades estabelecidas em um triângulo retângulo.	• Realizou-se a retomada dos conceitos em torno das alturas de um triângulo, no caso o retângulo, por uma atividade de construção, visando encaminhar para as relações e propriedades a serem estabelecidas entre os dois triângulos semelhantes formados. • As relações métricas no triângulo retângulo foram sendo construídas e deduzidas a partir da atividade de construção e posteriormente formalizadas. • O conjunto de propriedades e relações estabelecidas foram desenvolvidas a partir de atividades de construção, *online*, situações-problema, *links* externos e vídeos.
Círculo e Circunferência	• Definição de Círculo e Circunferência. • Conceito de corda, raio, diâmetro e centro. • Comprimento de uma circunferência. • Estudo sobre o número π (pi) • Área do círculo. • Definição de arcos, ângulos e circunferências.	• As definições em torno de círculo e circunferência foram desencadeadas a partir da observação de imagens que encaminhassem para a diferenciação das mesmas e posteriormente realizada a apresentação formal da definição. • O conceito de corda, raio, diâmetro e centro foram abordados a partir de imagem e vídeo. • O comprimento de uma circunferência foi trabalhado por meio de uma atividade construção, visando que o estudante fosse capaz de estabelecer a relação entre o comprimento da circunferência e o diâmetro. • O estudo em torno do número π (pi) e da área do círculo foram realizados por animações. • As definições de arcos, ângulos e circunferências foram apresentadas por imagens e *links* externos. • No que diz respeito aos recursos utilizados para o desenvolvimento deste conjunto de definições, conceitos, propriedades e procedimentos destacados, foram articuladas situações-problema, atividades *online*, animações e vídeos.

Fonte: a pesquisa.

Visando ilustrar os aspectos destacados no quadro da figura 35, apresenta-se, no que segue, telas dos materiais de estudos, a fim de exemplificar como o trabalho foi desenvolvido, no sentido de como foi realizada a introdução, o desenvolvimeno e a finalização dos tópicos trabalhados.

Na figura 36 apresentam-se telas do material de estudo sobre Ângulos, com o objetivo de elucidar como são realizadas as discussões iniciais em torno de cada tópico a ser trabalhado. Neste caso, buscou-se instigar os estudantes a refletir sobre a presença dos ângulos no meio que o cerca e, a partir de imagens, foi ilustrado possíveis situações que indicam a presença de ângulos. A partir desta introdução mais visual e intuitiva foi encaminhada a formalização o conceito de ângulo.

Figura 36- Telas exemplificando a introdução de um conceito de um material

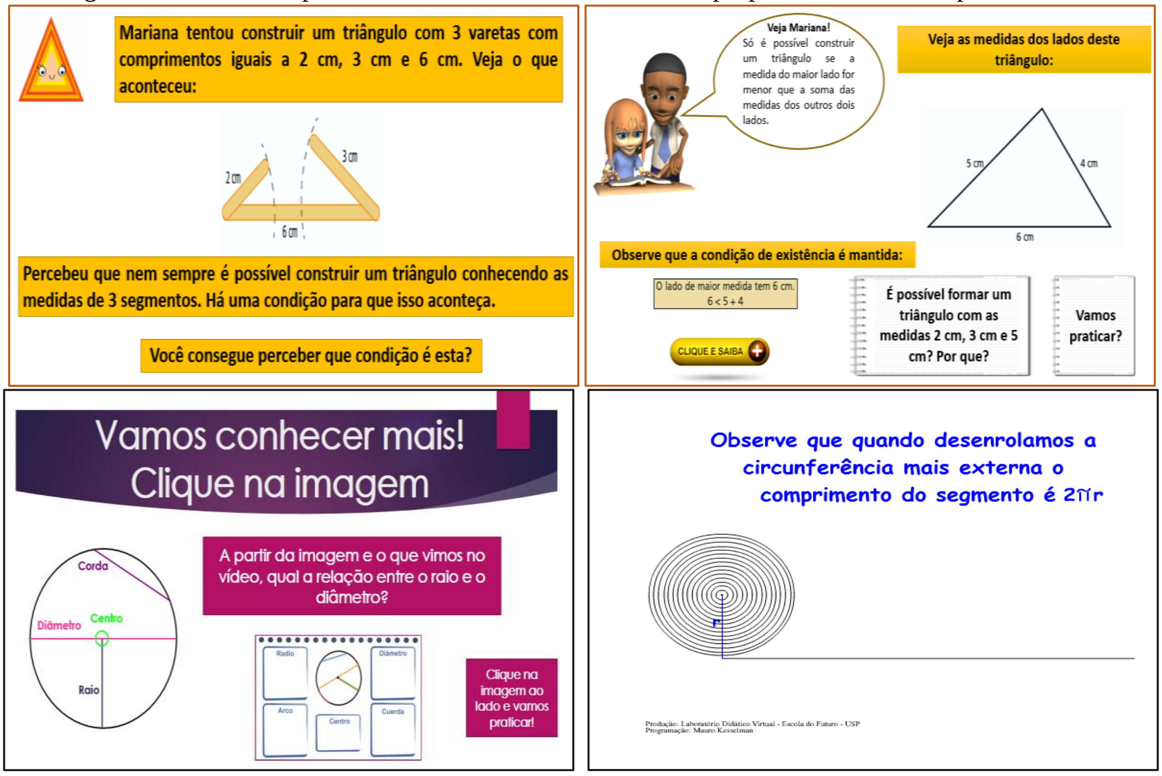


Fonte: a pesquisa.

Em geral, buscou-se introduzir os tópicos de forma mais intuitiva, buscando relacionar os objetos em estudo com conhecimentos prévios, representações de contruções, elementos da natureza, outros objetos ou problematizando a questão a ser estudada, a fim de encaminhar para uma noção, definição ou conceito.

Na figura 37 apresentam-se telas do material de estudo referente a Triângulos, buscando ilustrar uma situação problema trabalhada com o objetivo de discutir uma definição ou propriedade, exemplificando e encaminhando para a resolução de exercícios em um link externo (Vamos Praticar) e um vídeo como material complementar (Saiba +) no qual é possivel verificar a desigualdade triangular. São apresentadas também, telas do material sobre círculo e circunferência exemplificando a discussão sobre as definições de raio, diâmetro e área do círculo por meio da utilização de imagens, vídeos e animações.

Figura 37- Telas exemplificando discussão em torno de uma propriedade com exemplos e exercícios



Fonte: a pesquisa.

Conforme destacado na figura 37, o desenvolvimento dos conceitos, definições e propriedades, assim como a apresentação de exemplos, foram sendo, em geral, trabalhados nos materiais de estudo, por meio de situações no próprio material, em *links* externos, animações ou vídeos. A partir deste estudo, encaminha-se para a realização de atividades.

A figura 38 apresenta telas de materiais de estudos que destacam a forma como, em geral, se realizou os encaminhamentos para atividades, exercícios, situações problemas e construções, sejam elas apresentadas no próprio material ou em links externos.

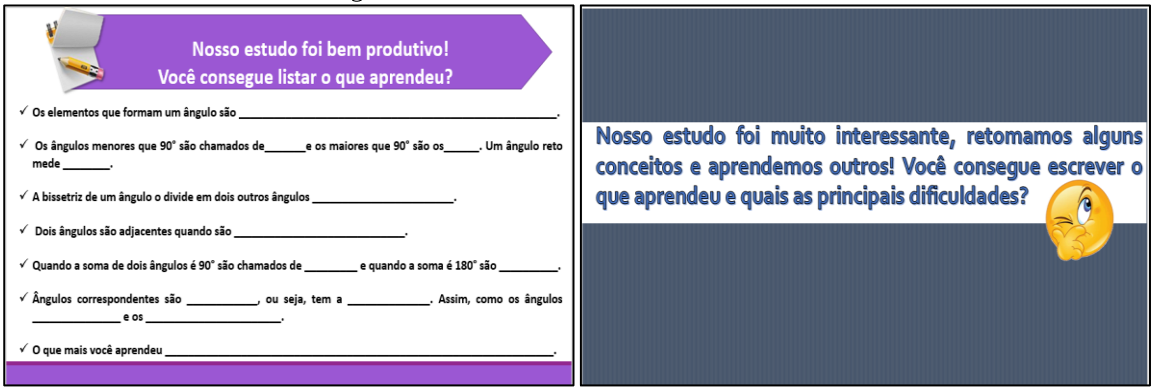
Figura 38- Exemplos de atividades de construção e situações problemas dos materiais de estudos

Fonte: a pesquisa.

Conforme pode ser observado na figura 38, os materiais de estudos contaram com um conjunto de atividades diversificadas, organizadas afim de possibilitar aos estudantes paticarem e compreenderem o que estava sendo estudado, contemplando assim situações-problemas, exercícios, atividades de manipulação, observação e construção, sendo estas apresentadas no próprio material ou por meio de links externos, como atividades *online* ou em software, as quais serão destalhadas na seção seguinte.

Com o objetivo de incentivar os estudantes a refletirem e relacionarem o que estudaram nos materiais buscando produzir uma síntese, ao final de cada tópico trabalhado é proposto que seja registrado por escrito o que conseguiram aprender, apontando os aspectos mais significativos ou que tiveram maior dificuldade. Nos primeiros materiais, para iniciar este processo de construção de sínteses, foram apresentadas questões para que os estudantes respondessem . Porém, ao longo do trabalho já não eram pontuadas questões e, em espaço livre, as sínteses eram feitas de modo espontâneo, conforme exemplificado na figura 39.

Figura 39- Síntese final dos materiais de estudos



Fonte: a pesquisa.

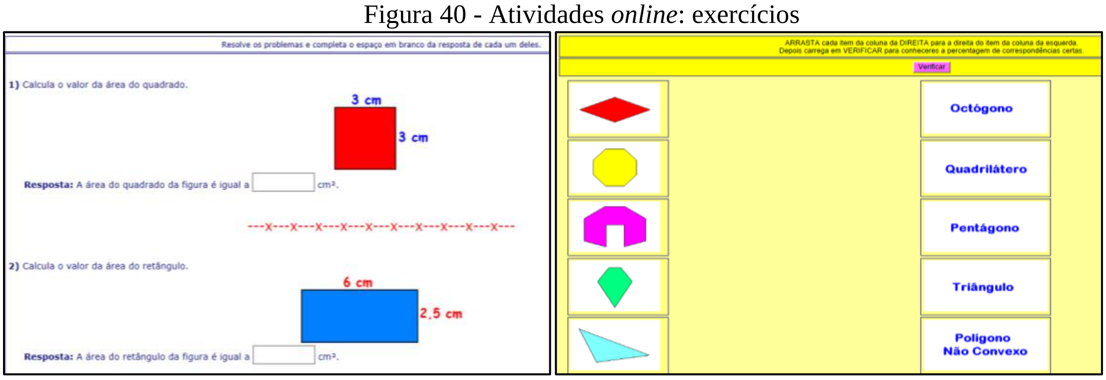
Apresentaram-se, nesta seção, uma síntese das definições, conceitos, e procedimentos abordados em cada tópico da proposta, como também, telas dos materiais de estudos, visando apresentar uma visão geral de como estes foram estruturados, quais as estratégias estabelecidas e os recursos utilizados. Ressalta-se que a íntegra dos materiais de estudos da proposta encontra-se no Apêndice G deste trabalho.

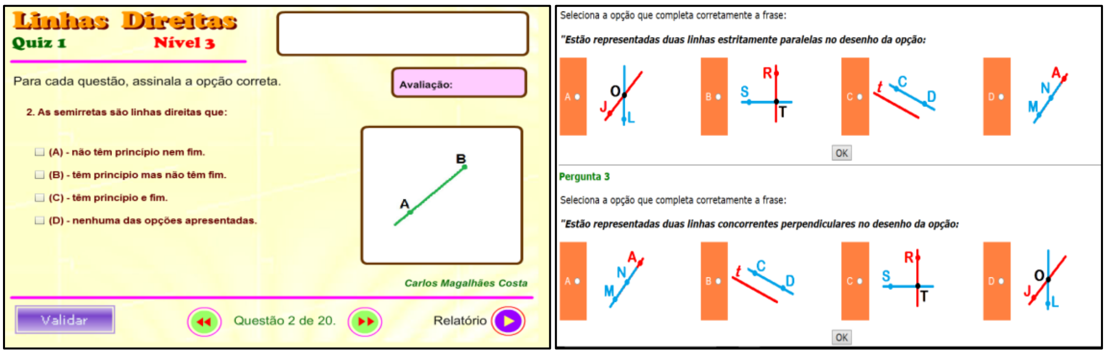
No que segue, serão destacados, mais detalhadamente, os recursos utilizados nos materiais de estudos, como, atividades *online*, objetos de aprendizagens, animações, atividades de construções, vídeos, entre outros. No que se refere as estratégias estabelecidas e o desempenho dos estudantes frente às atividades, serão discutidas posteriormente no capítulo dedicado as análises.

7.1.1 Atividades *online*

As atividades *online* foram selecionadas e utilizadas nos materiais de estudos, objetivando oportunizar que os conceitos, definições, propriedades e procedimentos estudados nos tópicos fossem exercitados, o que se buscou atingir propondo-se atividades *online* com diferentes características e objetivos. Na figura 40, destacam-se atividades com características de exercícios, onde os estudantes deveriam mobilizar diretamente o que estudaram nos materiais e aplicar aos exercícios propostos.

Figura 40 - Atividades *online*: exercícios



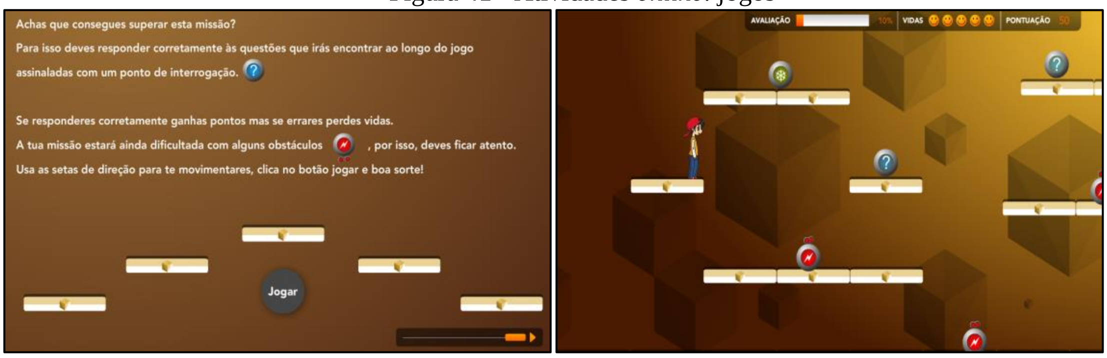


Fonte: a pesquisa[35]

No que se refere a atividades *online* utilizadas como exercícios, ressalta-se como um aspecto diferenciado, a estrutura das atividades, as quais contemplam questões no formato de associações, respostas escritas, múltipla escolha, representações, entre outras formas de apresentação. Considera-se que esta diversidade, torna o estudo e a resolução de exercícios mais dinâmico e atrativo para os estudantes, tendo em vista que os mesmos estão exercitando o que está sendo estudado de diferentes formas e com abordagens distintas, podendo apresentar dificuldades ou facilidades em determinadas atividades e em outras não, o que possibilita identificar entraves específicos em relação ao conteúdo ou parte dele.

Outra característica a ser destacada das atividades *online* se refere a ludicidade. Buscou-se atividades que ao mesmo tempo contemplassem os conteúdos trabalhados, como também, que os abordassem por meio de jogos ou interfaces mais dinâmicas. Na figura 41 apresenta-se exemplos de atividades lúdicas utilizadas nos materiais de estudos.

Figura 41 - Atividades *online*: jogos



[35]http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT5/21_PER_ARE/HOT_POTATOES/HP_AR_2/E8_JCl_Enunc_1.htm
http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT5/11_POL/HOT_POTATOES/E3_JMa_Po_1.htm
http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT5/10_LIN/PROG_A/LINHAS=CM/n3_q1_linhas=cm.asp
http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT5/10_LIN/QUIZ_FABER/teste_2/Linhas%20-%20Quiz%2021.htm

Fonte: a pesquisa[36].

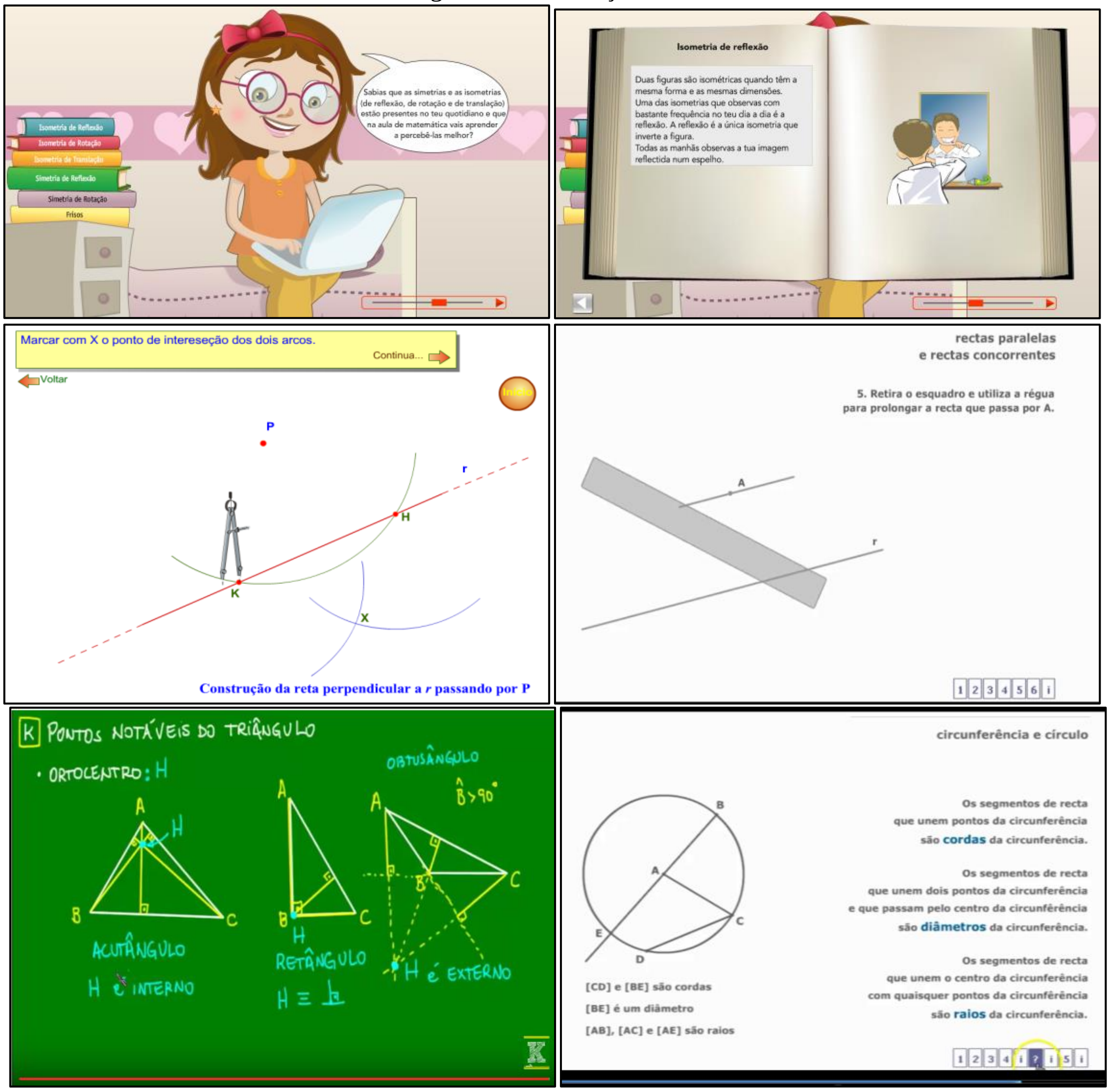
As atividades *online* propostas e o conjunto de situações-problema apresentadas nos materiais, tiveram grande importância, tanto para o estudo, como para a investigação desenvolvida, pois por meio da resolução das mesmas pelos estudantes, foi possível realizar análises sobre o grau de compreensão dos mesmos em relação ao que estava sendo estudado e o que era esperado.

7.1.2 Animações e vídeos

Os materiais de estudos foram contemplados, também, com animações e vídeos, visando auxiliar os estudantes na compreensão dos tópicos trabalhados, tanto no que se refere a conceitos, definições e propriedades, como também, procedimentos de resolução e construções. Assim, estes recursos foram utilizados em distintos momentos dos materiais, por vezes para introduzir ou retomar uma ideia ou noção, como para aprofundar os conhecimentos em torno do que estava sendo estudado. Na figura 42 apresenta-se imagens de animações e vídeos utilizados nos estudos.

[36] http://www.cmcmc.pt/rec_mat6_isometrias.asp
http://www.educacaodinamica.com.br/ed/views/game_educativo.php?id=14&jogo=Jogo%20dos%20Pol%C3%ADgonos
http://guiadoestudante.abril.com.br/estudar/jogos-multimidia/voce-sabe-quais-sao-tipos-triangulos-687832.shtml

Figura 42 - Animações e Vídeos



Fonte: a pesquisa[37].

Conforme pode ser observado na figura 42, as animações e vídeos utilizados, tem abordagens e estruturas e dinâmicas distintas, sendo cada uma delas adequada ao objetivo com que está sendo utilizado, seja como um estudo complementar para superar dificuldades e aprofundar os conhecimentos, ou explicativo com procedimentos de resoluções e construções.

Ressalta-se uma característica comum à maioria deles, a narrativa, ou seja, os vídeos ou animações tem sons e um narrador, o qual vai conduzindo o estudo, aspecto este considerado importante dentro da proposta de estudos, pela aproximação da forma que os estudantes estão habituados a estudar, a explicação oral, e também, pelo fato que os demais recursos

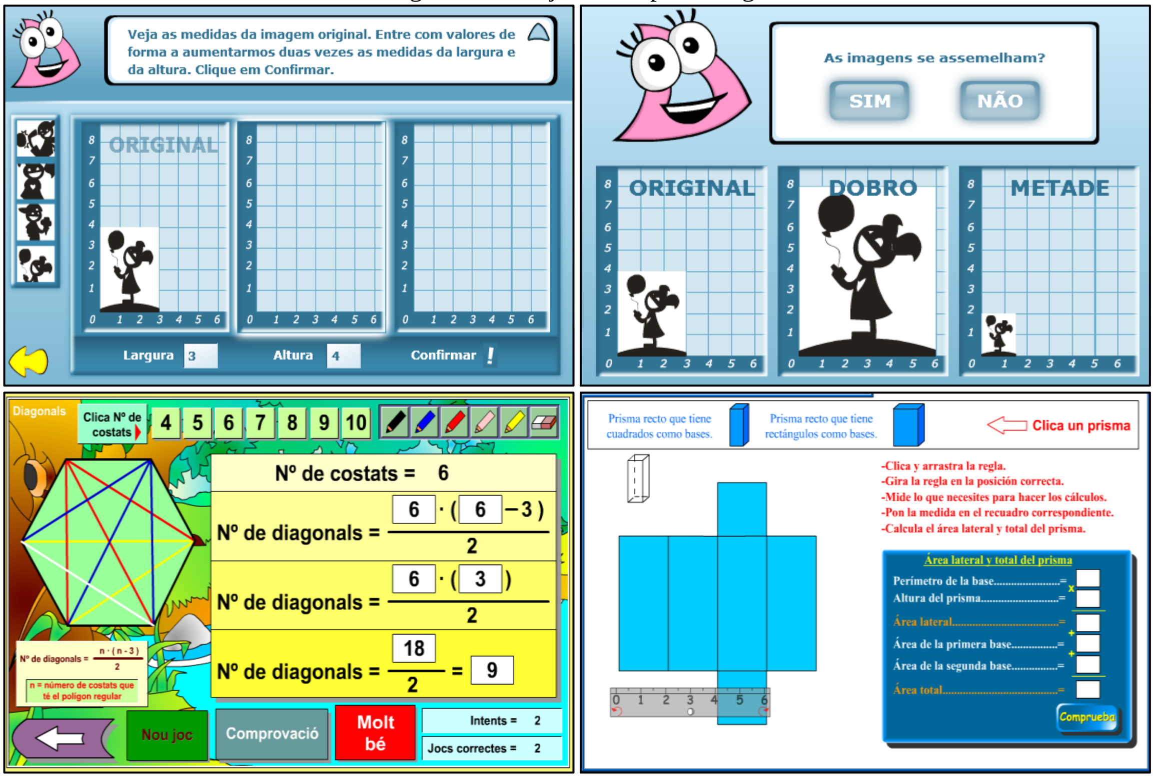
[37]http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT6/05_ISOM/PROG_P/04_5_DESCOB_ISOMETRIAS_SIMET=TEXTO.swf
http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT5/10_LIN/PROG_P/R_PARAL.swf
https://www.youtube.com/watch?v=Wm3txWnFcfI
http://www.3ponto14.net/intro.swf

disponibilizados nos materiais não têm esta característica, estando mais voltados para a leitura e interpretação do estudante frente ao que está escrito ou ilustrado.

7.1.3 Objetos de Aprendizagem

Estão sendo considerados como objetos de aprendizagem, recursos que contemplam ao mesmo tempo uma retomada do que está sendo estudado, apresentando explicações e exemplos encaminhando, em seguida, para atividades, as quais são propostas manipulações, resoluções parciais ou o estabelecimento de relações. Ainda, em grande parte destes objetos é possível que o estudante confira se a resposta indicada é a correta. Na figura 43 apresenta-se exemplos de objetos de aprendizagem utilizados nos materiais de estudos.

Figura 43 – Objetos de aprendizagem



Fonte: a pesquisa[38].

Considera-se que os objetos de aprendizagem utilizados contribuíram, fortemente, na constituição dos materiais, no sentido que os mesmos não encaminham para uma resolução imediatas de questões, conforme pode ser observado na figura 43. Suas atividades visam retomar e construir conceitos e procedimentos pertinentes aos conteúdos, privilegiando as

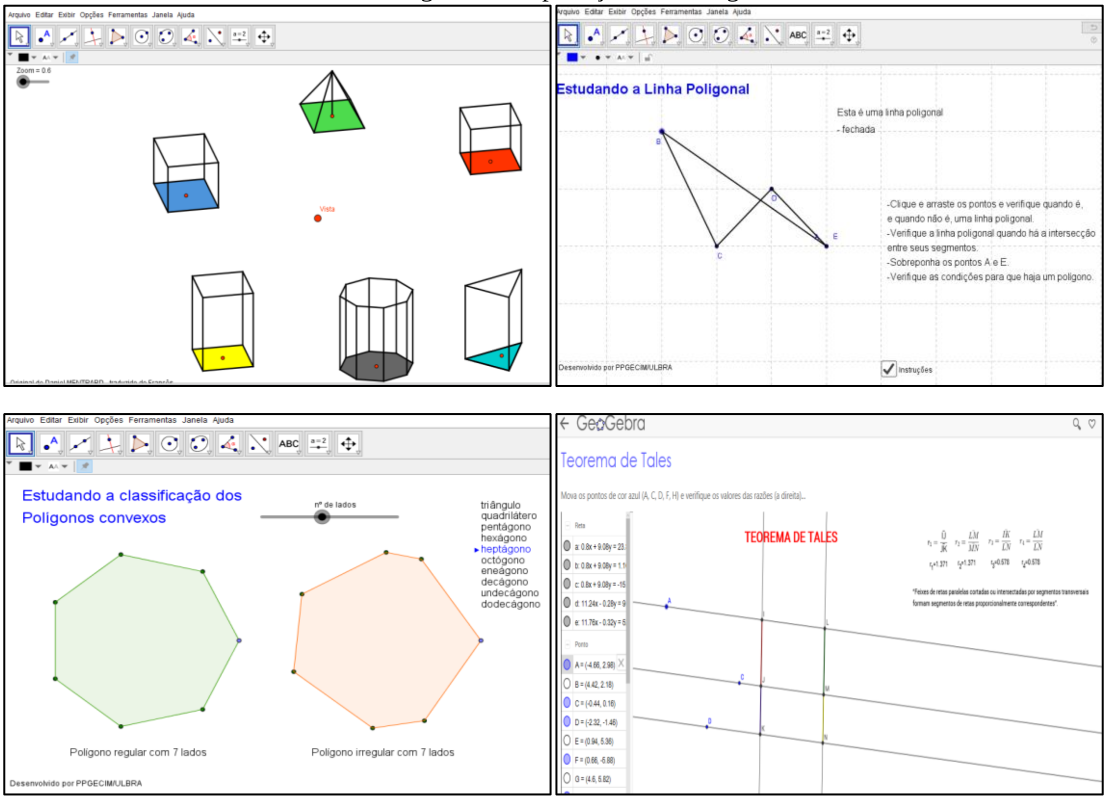
[38] http://rived.mec.gov.br/atividades/matematica/semelhanca_atraves_da_ampliacao/index2.html
http://www.genmagic.net/repositorio/displayimage.php?album=6&pos=12
http://www.genmagic.org/mates1/prisr1c.swf

representações e possibilitando que seja realizada manipulações dos objetos em estudo, o que pode potencializar o estabelecimento de conjecturas e a aprendizagem dos estudantes.

7.1.4 Atividades de construção e aplicações no Geogebra

Nos materiais de estudos optou-se por utilizar o *software* Geogebra, tanto para realizar atividades de construções, como para apresentar aplicações do *software*, ou seja, objetos já construído que possibilitam a manipulação. Na figura 44 apresentam-se exemplos de aplicações do Geogebra utilizadas nos materiais.

Figura 44 - Aplicações no Geogebra



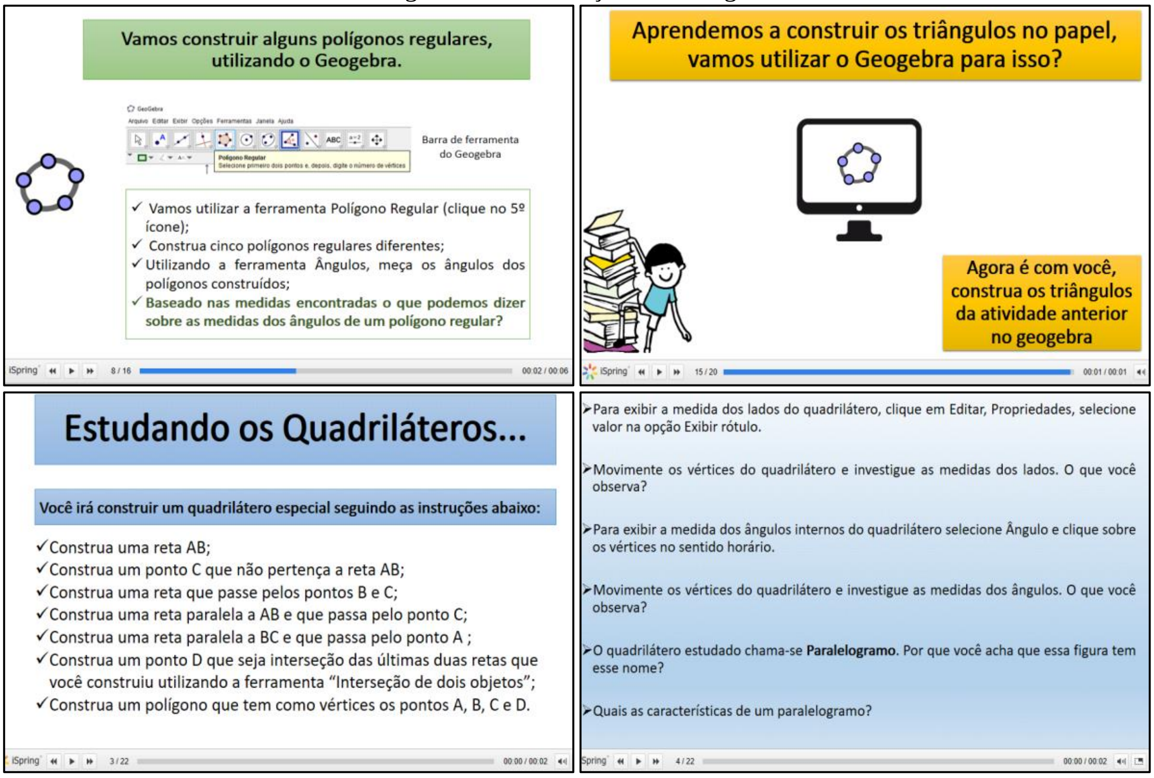
Fonte: a pesquisa[39].

As imagens apresentadas na figura 44, destacam exemplos de atividades de aplicações no Geogebra, as quais tem como características a apresentação de objetos já construídos que possibilitam a movimentação, por meio de controles deslizantes, de pontos ou dos próprios objetos. Utilizou-se este tipo de atividade visando oportunizar aos estudantes experimentarem, verificarem e comprovarem as definições e propriedades trabalhadas, assim como uma atividade de estudo complementar.

[39] https://archive.geogebra.org/en/upload/files/zeca/solidtrace.html
http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio/index.php/atividades-didaticas/ensino-fundamental-2/
https://www.geogebra.org/m/efmfvdZ4

Já na figura 45 apresentam-se imagens dos materiais de estudos com as instruções que encaminham para as atividades de construção no Geogebra. Objetivou-se com estas atividades que os estudantes construíssem os objetos em estudo, considerando as definições e propriedades estudadas. Em conjunto com as atividades no Geogebra foram trabalhadas as atividades de construção com régua em compasso, as quais passam a ser discutidas a seguir.

Figura 45 - Construções no Geogebra

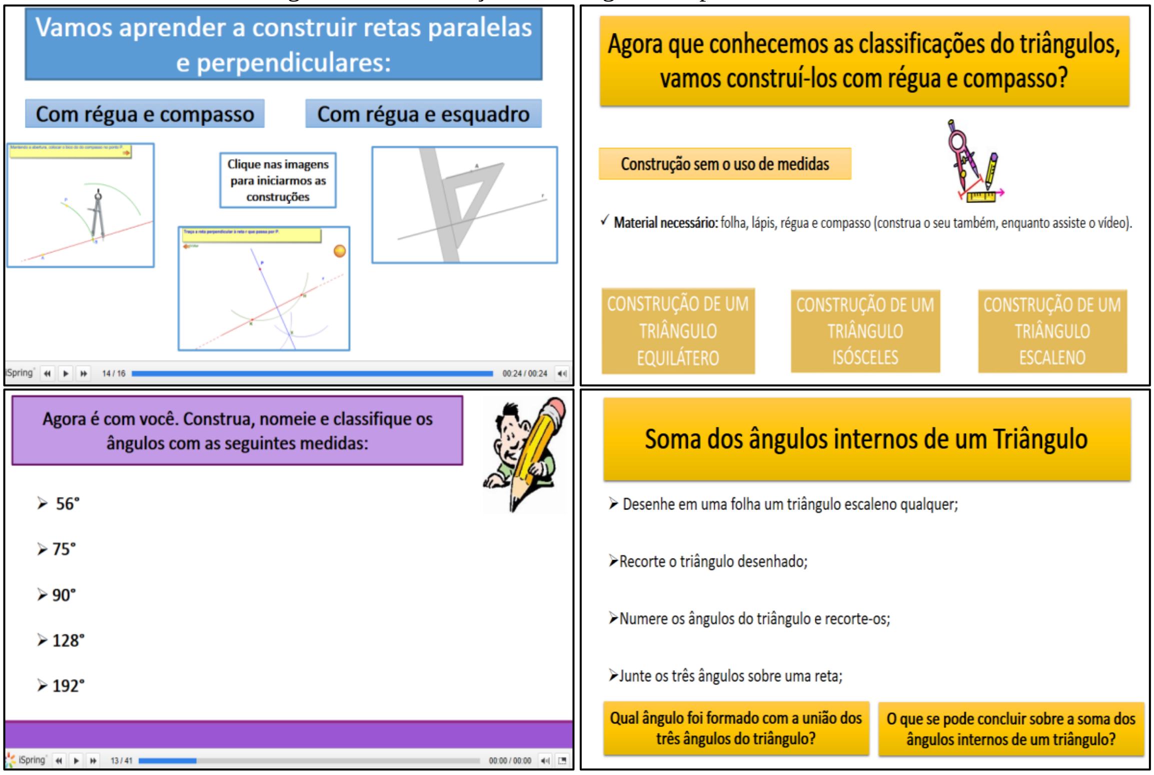


Fonte: a pesquisa.

7.1.5 Atividades de construção: régua, compasso e transferidor

Assim como foram propostas atividades no Geogebra, os materiais contemplaram também, atividades de construções com instrumentos de desenhos adequados, como régua, compasso e transferidor, conforme ilustrado na figura 46. Entende-se que as atividades de construções devem ser trabalhadas, de modo articulado tanto por meio de um *software* como com lápis e papel, pois cada recurso possibilita o desenvolvimento de habilidades e competências específicas, considerando, sempre, conceitos e propriedades pertinentes nas construções.

Figura 46 - Construções com régua, compasso e transferidor



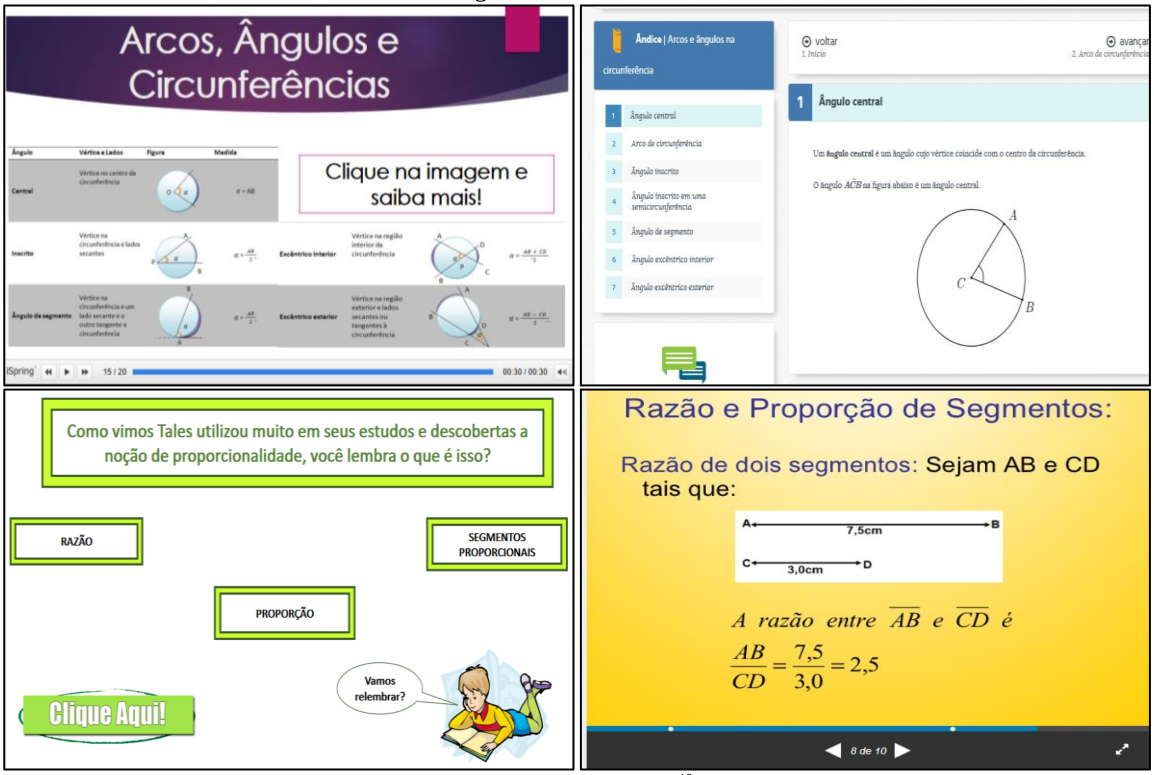
Fonte: a pesquisa.

Destaca-se que, nas construções com régua e compasso, as atividades envolviam a utilização de régua não graduada, buscando colocar em evidência aspectos das propriedades dos objetos geométricos e não suas medidas, embora também tenham sido desenvolvidas tarefas envolvendo medidas.

7.1.6 Estudos Complementares: links externos

Utilizou-se o recurso de *links* externos, com a intenção de proporcionar um estudo complementar. Em geral, foram destacados como um **Saiba mais**, **Não fique com dúvidas, Clique aqui**, com o que o estudante era encaminhado a uma página da *web*, a qual apresentava uma discussão mais teórica, com exemplos ou resoluções de atividades, conforme exemplificado na figura 47.

Figura 47 - *Links* externos



Fonte: a pesquisa[40].

Apresentou-se, neste capítulo, uma visão geral de como os materiais de estudos foram estruturados, os recursos utilizados e os caminhos adotados para o desenvolvimento e a retomada dos tópicos trabalhados. Ressaltam-se como aspectos positivos dos materiais produzidos, a diversidade de recursos e atividades, os quais articulados podem potencializar o estudo, no sentido de trabalhar a partir de diferentes perspectivas e estratégias, visando estabelecer um caminho para o aprofundamento nos conhecimentos geométricos, como também, a superação de dificuldades de aprendizagens.

No que segue são apresentadas análises e discussões específicas dos tópicos desenvolvidos na proposta. O capítulo é dedicado às análises dos materiais de estudos e da implementação dos mesmos com um grupo de estudantes, frente aos pressupostos do EOS.

[40] http://www.matika.com.br/arcos-e-angulos-na-circunferencia/angulo-central
https://pt.slideshare.net/AdrianoCapilupe/aula-9-ano-razo-e-proporo

8 ESTUDOS DE RECUPERAÇÃO EM GEOMETRIA: UMA ANÁLISE NA PERSPECTIVA DO EOS

Apresentam-se, neste capítulo, as análises da Proposta de Estudos de Recuperação de Geometria desenvolvida e aplicada junto a estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental, considerando as dimensões epistêmica, mediacional, cognitiva, interacional, emocional e ecológica da Idoneidade Didática, nível de análise do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS).

A proposta envolve o estudo de quinze tópicos: **Figuras Geométricas, Ponto, Reta e Plano, Polígonos, Ângulos, Simetria, Triângulos, Quadriláteros, Perímetro e Áreas de Figuras Planas e Volume de Sólidos, Congruência de Figuras Planas, Semelhança e Teorema de Tales, Teorema de Pitágoras, Relações Métricas no Triângulo Retângulo, Círculo e Circunferência.**

Conforme já apresentado, a análise está estruturada considerando dois aspectos: um específico, relacionado a cada tópico da proposta e, um geral, o qual refere-se a análise da proposta como um todo, considerando os tópicos abordados, bem como sua implementação junto aos estudantes.

No que se refere às análises específicas, as mesmas serão produzidas no âmbito das dimensões epistêmica, mediacional e cognitiva. Assim, visando evidenciar os resultados alcançados com a implementação da proposta, dividiu-se os quinze tópicos em três grupos referente aos conhecimentos geométricos do Ensino Fundamental, sendo eles: **conhecimentos iniciais** (Figuras Geométricas, Ponto, Reta e Plano, Polígonos, Ângulos e Simetria), **intermediários** (Triângulos, Quadriláteros, Perímetro e Áreas de Figuras Planas e Volume de Sólidos) e **finais** (Congruência de Figuras Planas, Semelhança e Teorema de Tales, Teorema de Pitágoras, Relações Métricas no Triângulo Retângulo, Círculo e Circunferência). As designações inicial, intermediário e final referem-se a conhecimentos geométricos relativos, respectivamente, 6º ano, 7º e 8º anos e 9º ano.

Apesar da proposta envolver quinze tópicos, serão apresentadas, aqui, as análises de dois tópicos de cada grupo, **Figuras Geométricas** e **Ângulos** dos conhecimentos estabelecidos como iniciais**, Triângulos** e **Quadriláteros** dos intermediários e **Teorema de Tales** e **de Pitágoras** dos tomados como finais. A escolha destes tópicos foi baseada na representatividade dos mesmos ao longo do Ensino Fundamental, considerando a importância e necessidade dos estudantes se apropriarem destes conceitos. Especificamente, os dois últimos escolhidos foram os únicos tópicos em que os estudos de recuperação ocorreram paralelo ao que estava sendo trabalhado, pelos estudantes, nas aulas de Matemática com a professora titular, caracterizando uma efetiva recuperação paralela.

Conforme já ressaltado, as dimensões interacional, emocional e ecológica são analisadas tomando a proposta como um todo, no que se estabeleceu como geral, considerando todos os tópicos e a implementação junto aos estudantes.

No que segue apresentam-se as análises epistêmicas, mediacionais e cognitivas referente aos tópicos específicos e, na sequência, as demais dimensões no âmbito da proposta.

8.1 FIGURAS GEOMÉTRICAS PLANAS E ESPACIAIS

O primeiro material que compõe a proposta de estudos, se refere ao tópico sobre Figuras Geométricas. Foram retomadas as figuras planas e espaciais, evidenciando seus elementos, características, propriedades, conceitos e possíveis relações.

O estudo se inicia pela apresentação de imagens (prédios, monumentos, ...) as quais guardam relação ou remetem a representações planas e espaciais e, em seguida, diferencia-se as formas geométricas pela característica bidimensional e tridimensional por meio de uma animação e atividades *online*. Em seguida o estudo é direcionado para os sólidos geométricos, suas planificações e a classificação dos mesmo em poliedros e não poliedros, a partir de um conjunto de atividades *online* e situações problemas. Na figura 48 são apresentadas telas do material de estudos Figuras Geométricas a fim de exemplificar os aspectos destacados acima. Ressalta-se que o conjunto de telas exemplificam o material produzido, mas não são o todo e nem uma sequência, e sim partes dele.

Figura 48- Telas do material de estudo Figuras Geométricas

Fonte: a pesquisa.

Proença e Pirola (2007) argumentam que é no trabalho com figuras tridimensionais e bidimensionais que os conceitos podem ser formados,

> pois a geometria é um tema presente desde a educação infantil, a qual se preocupa com atividades de manipulação e percepção de formas geométricas. Nos outros níveis de ensino, um amplo trabalho com os atributos definidores de conceitos como prismas, pirâmides, triângulos, quadriláteros entre outros pode desenvolver no aluno a capacidade de reconhecimento dessas formas, ou seja, dado um cubo, o aluno pode discorrer verbalmente sobre seus elementos e dar exemplos de cubos e ainda realizar a representação de sua figura (PROENÇA; PIROLA, 2007, p.1).

Neste contexto, o material de estudo produzido foi constituído considerando os objetivos para as temáticas de Figuras Planas e Espaciais estabelecidos pelos PCN (BRASIL, 1998) e nas Orientações Municipais (SÃO LEOPOLDO, 2012). Assim as atividades desenvolvidas objetivaram:

- estabelecer as relações entre figuras espaciais e suas representações planas, envolvendo a observação das figuras sob diferentes pontos de vista, construindo e interpretando suas representações;
- realizar a composição e decomposição de figuras planas;
- identificar as diferentes planificações de alguns poliedros;
- classificar de figuras tridimensionais e bidimensionais, segundo critérios diversos, como: corpos redondos e poliedros, poliedros regulares e não-regulares, prismas, pirâmides e outros poliedros, círculos, polígonos e outras figuras, número de lados dos polígonos, eixos de simetria de um polígono, paralelismo de lados, medidas de ângulos e de lados;
- distinguir, em contextos variados, figuras bidimensionais e tridimensionais, descrevendo algumas de suas características, estabelecendo relações entre elas e utilizando nomenclatura própria.
- quantificar e estabelecer as relações entre o número de vértices, faces e arestas de prismas e de pirâmides, da relação desse número com o polígono da base e identificação de algumas propriedades, que caracterizam cada um desses sólidos, em função desses números.

A partir destes objetivos, tomando como referência estudos em torno da temática em pesquisas da área, assim como o que é apresentado nos livros didáticos, produziu-se o material de estudos referente a Figuras Geométricas Planas e Espaciais, o qual passa a ser discutido e analisado sob a perspectiva da Idoneidade Didática, no âmbito das dimensões epistêmica, mediacional e cognitiva.

8.1.1 Figuras Geométricas: uma análise epistêmica

A análise epistêmica realizada no material Figuras Geométricas, assim como a realizada nos demais materiais, tomou como referência a Ferramenta de Análise Epistêmica – FAE, buscando identificar o grau de idoneidade do material nesta perspectiva. No quadro da figura 49 apresenta-se a análise produzida.

Figura 49- Análise epistêmica: Figuras Geométricas

Componentes	**Indicadores**	**Análise**	**Grau de Idoneidade**
Situações-problema	a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações; b)propõem-se situações de generalização de	- As atividades propostas se caracterizaram por situações de contextualização e exercícios, as quais buscam relacionar as figuras planas e especiais com imagens reais e objetos do dia a dia (figura 50). - Considera-se como uma situação de generalização a atividade na qual é solicitado identificar os sólidos que rolam e os que não rolam, encaminhando para a generalização	**Média**

	problemas (problematização).	que os que rolam são os não poliedros e os que não rolam são os poliedros. Outra situação de generalização se faz presente na atividade que solicita o estabelecimento da relação existente entre as arestas, faces e vértices (figura 51). O material não apresenta atividades com características de aplicação, mas sim atividades de contextualização do objeto em estudo.	
Linguagem	a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas; b) nível de linguagem adequado aos estudantes; c) propor situações de expressão matemática e interpretação.	- O material apresenta uma linguagem adequada ao nível dos estudantes. - São utilizadas diferentes formas de linguagem, tendo o predomínio da natural e gráfica, por meio das representações das figuras, das planificações e associações a objetos (figura 52).	**Alta**
Regras (definições, proposições, procedimentos)	a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado; c) propõem-se situações onde os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.	- As definições apresentadas e os procedimentos encaminhados foram organizados de acordo com o nível educativo dos estudantes. - Definições, proposições e procedimentos pertinentes e necessários para o desenvolvimento do trabalho em torno das figuras geométricas são apresentadas a partir de situações e atividades que encaminham para formalizações (figura 53). - Atividades nas quais é solicitado que sejam estabelecidas semelhanças e diferenças entre prismas e pirâmides, assim como entre figuras planas e espaciais, possibilitam reflexões sobre as definições quando podem ocorrer negociação de significados.	**Alta**
Argumentos	a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem; b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que argumentar.	- Explicações e demonstrações apresentadas estão de acordo com o nível educativo dos estudantes, sendo utilizada linguagens acessíveis, aliadas a exemplos. - Foram oportunizadas situações que exigiam a apresentação de argumentação ao longo de todo o material. Atividades com esta característica foram focadas, principalmente, em situações em que era necessário diferenciar objetos geométricos a partir de suas características e das definições e propriedades estudadas (figura 54).	**Alta**
Relações	a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si.	- Foi solicitado o estabelecimento de relações entre os objetos estudados e sua presença em elementos do mundo físico. Porém, não se identificou situações que possibilitassem relações entre outros objetos matemáticos.	**Média**

Fonte: a pesquisa.

A partir dos aspectos destacados no quadro da figura 49, é possível observar que os componentes e indicadores epistêmicos estão presentes no material de estudo, considerando que o mesmo foi planejado partindo do pressupostos do EOS.

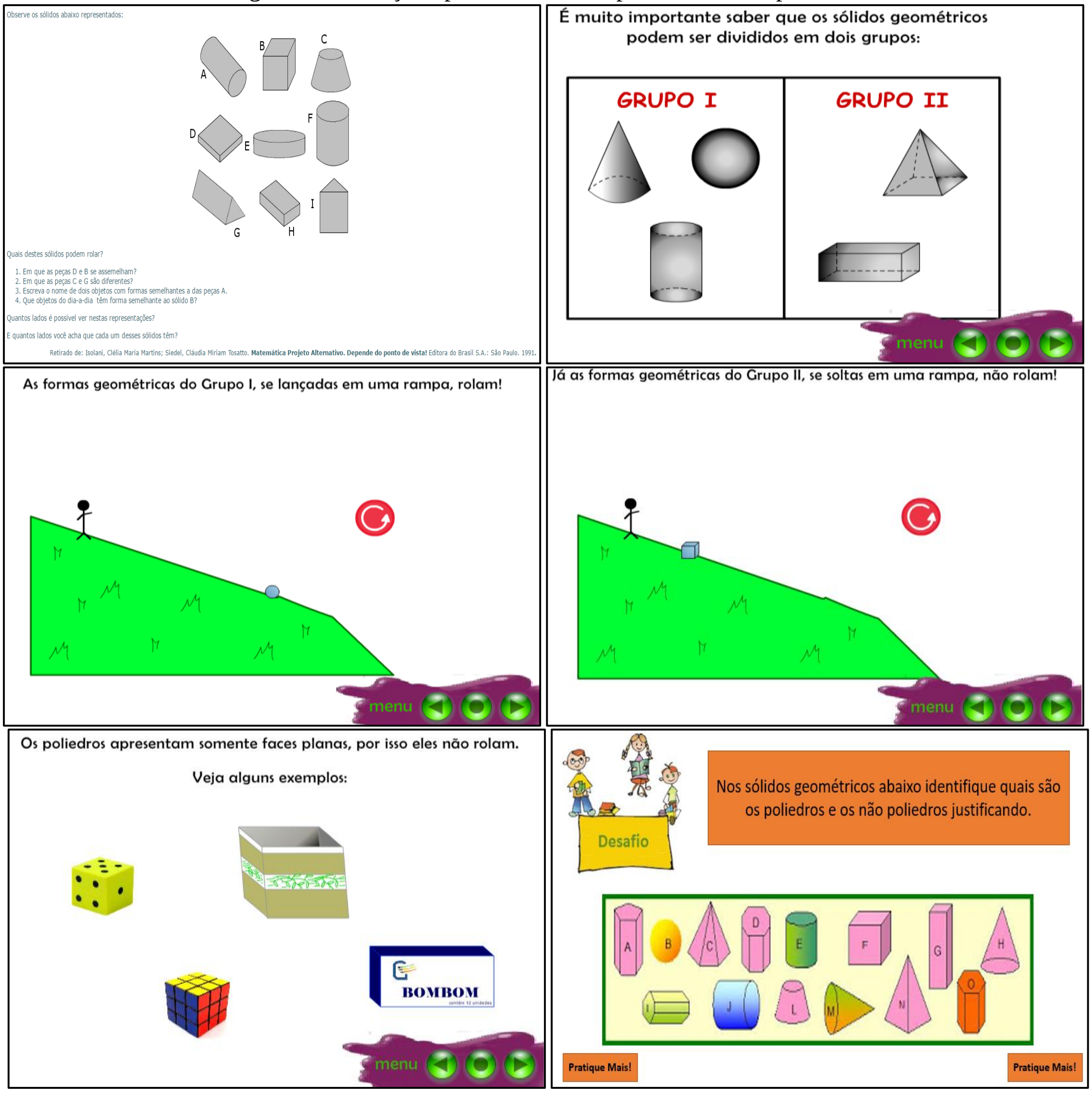
No que se refere ao componente **situações-problema**, apresenta-se no material de estudos um conjunto de situações-problema de contextualização e exercícios, que se entende permitir aos estudantes identificar e reconhecer as figuras geométricas a partir de imagens do mundo físico (prédios, monumentos, ...), bem como em objetos do dia a dia, buscando que os mesmos relacionem o conteúdo trabalhado com ideias e representações já conhecidas por eles. Na figura 50 apresentam-se exemplos destas situações.

Figura 50- Situações Problemas de contextualização e exercícios das Figuras Geométricas

Fonte: a pesquisa.

O componente **situações-problema** foi considerado com idoneidade média, pois, apesar de no material serem propostas atividades que encaminham para generalizações, que as mesmas não se caracterizam, propriamente, por uma problematização. As atividades envolvem situações onde os estudantes devem identificar características e, a partir delas, consigam distinguir, por exemplo, poliedros e não poliedros (no caso da atividade generalizando que todos os sólidos que rolam (corpos redondos) são não poliedros e os que não rolam são poliedros), como também, que prismas tem duas bases enquanto as pirâmides somente uma, conforme exemplificado na figura 51.

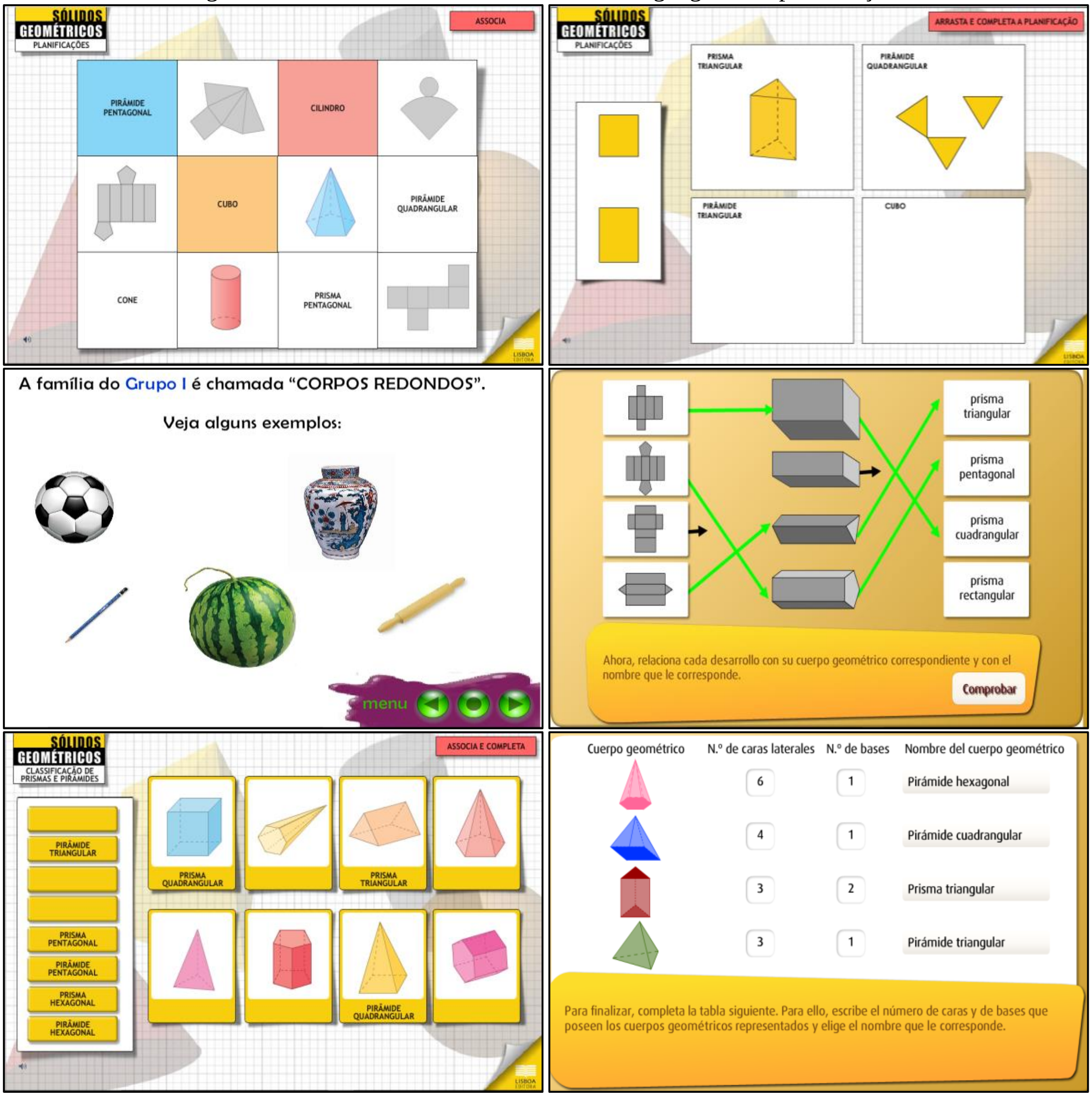
Figura 51- Situações-problemas sobre poliedros e não poliedros



Fonte: a pesquisa.

No que se refere à **linguagem**, entende-se que foi alcançada uma alta idoneidade, pois foram exploradas as diversas representações dos objetos em estudo, fortemente a presença gráfica, por meio das ilustrações e animações das figuras e suas planificações. Foram explorados aspectos referentes a visualização e percepção dos estudantes, sendo que as atividades *online* permitiam a manipulação e construção de figuras, conforme ilustrado na figura 52.

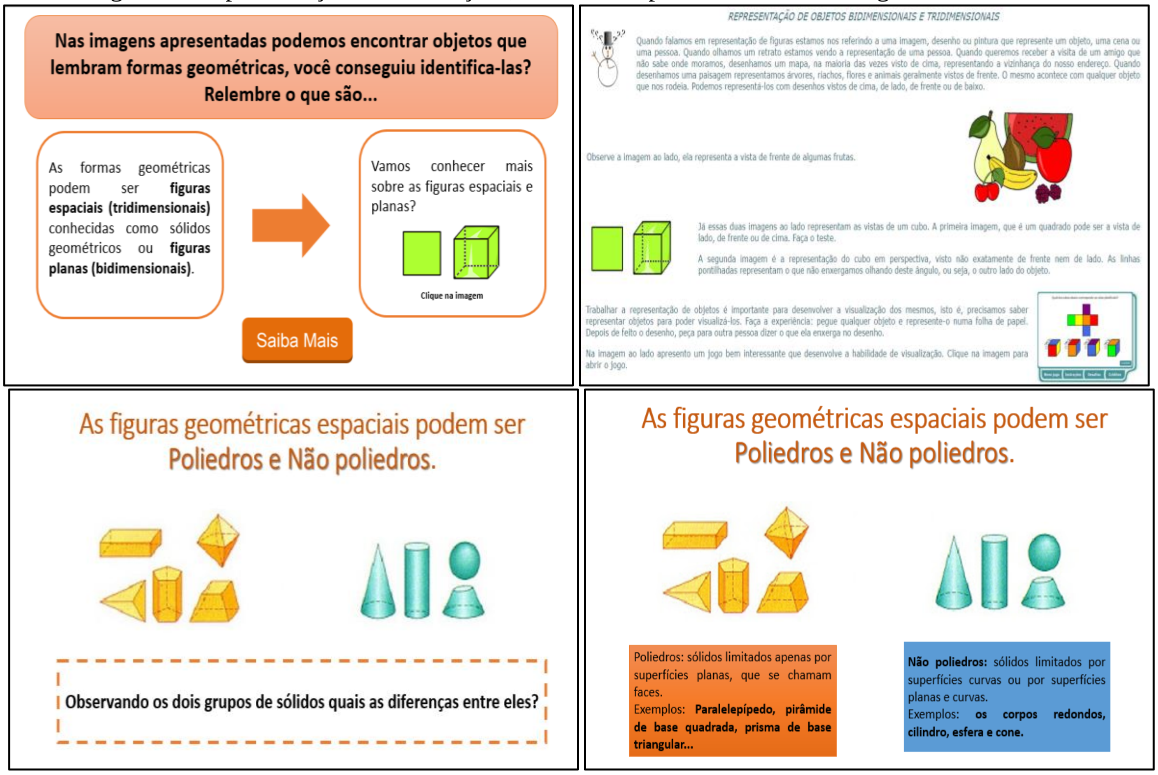
Figura 52- Atividades e o uso de diferentes linguagens e representações



Fonte: a pesquisa.

O componente regras também se considerou com uma alta idoneidade, uma vez que todas as definições, conceitos e proposições foram trabalhadas de acordo com o nível educativo dos estudantes. Buscou-se, sempre que possível, apresentar situações ou atividades que introduzissem o estudante na temática, como também, que os mesmos refletissem sobre elas, sendo que os aspectos formais e definições dos conceitos trabalhados apresentados ao final. A figura 53 ilustra essa situação.

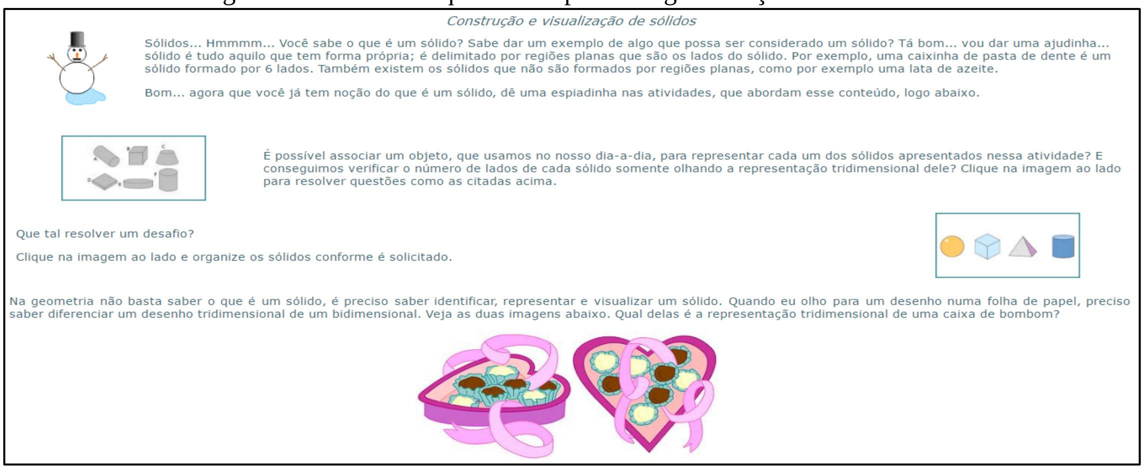
Figura 53- Apresentação das definições, conceitos e procedimentos das Figuras Geométricas

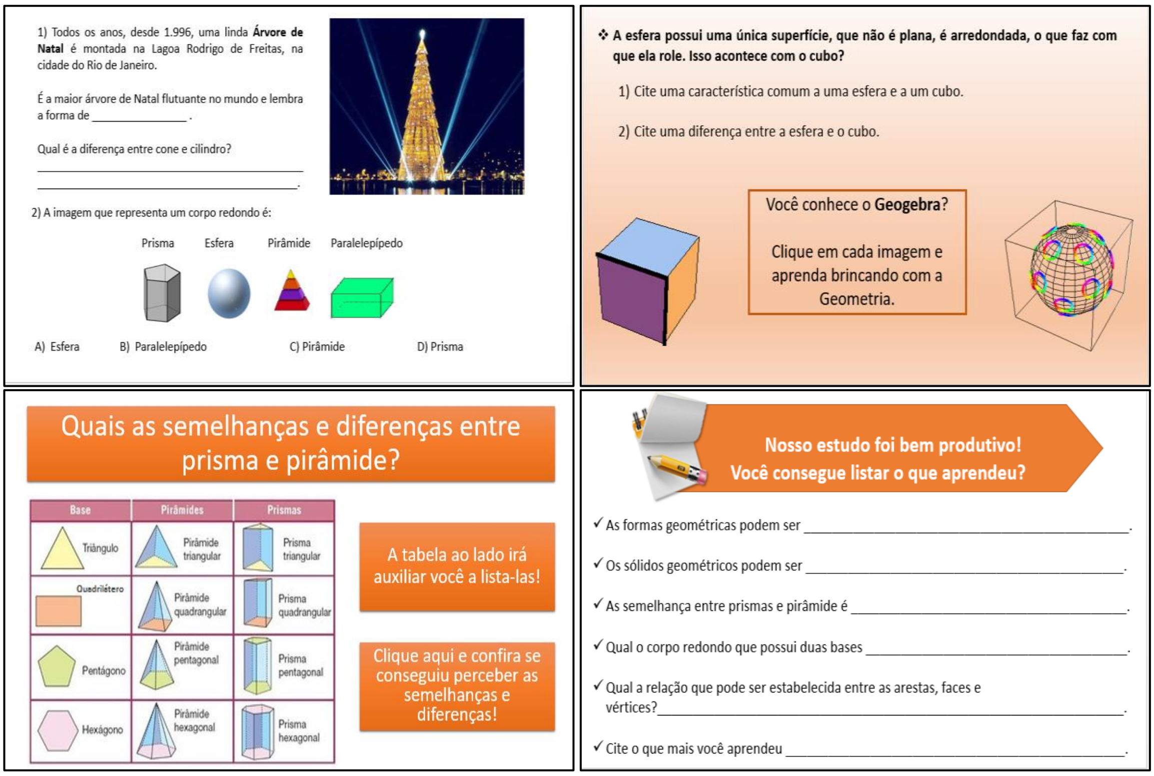


Fonte: a pesquisa.

Entende-se que o componente **argumentos** teve uma representatividade alta neste material, pois foi proposto um conjunto de situações e atividades as quais possibilitavam aos estudantes argumentar sobre as semelhanças, diferenças e características dos objetos em estudo, objetivando que os mesmos se apropriassem destas resolvendo situações postas ao longo do estudo, conforme pode ser visto na figura 54.

Figura 54- Atividades que contemplam a argumentação dos estudantes.



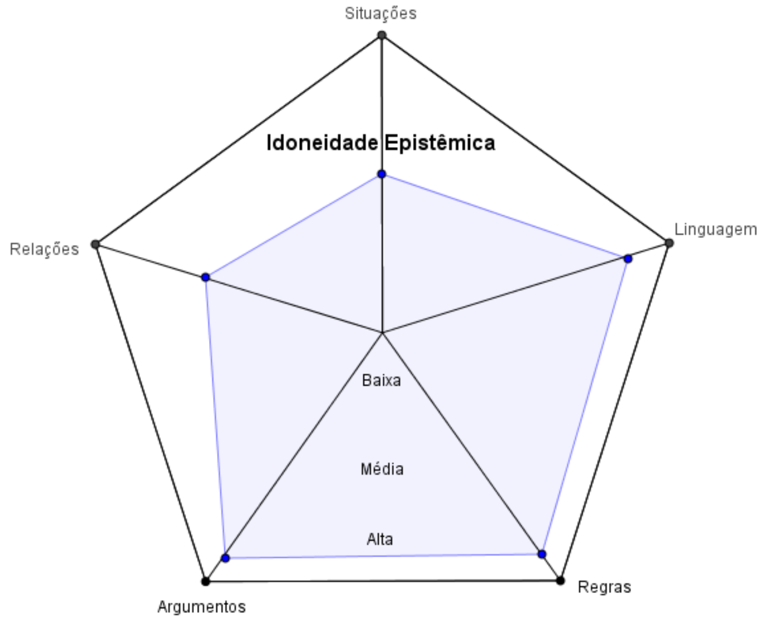


Fonte: a pesquisa.

Já no que se refere ao componente **relações,** observou-se uma fragilidade no que diz respeito a estabelecer relações com outros objetos matemáticos. No material foi priorizado a identificação dos objetos em estudo em possíveis representações no dia a dia, por meio da apresentação de situações, imagens e atividades *online*, conforme já ilustrado nas figuras anteriormente apresentadas. Diante destes aspectos considera-se que se alcançou uma idoneidade média neste componente.

De maneira geral, considera-se que o material proposto para o estudo de Figuras Geométricas Planas e Espaciais atende ao que é preconizado pelos componentes e indicadores epistêmicos, não conseguindo, porém, alcançar em sua totalidade uma idoneidade alta. Buscando sintetizar e ilustrar a análise epistêmica produzida, criou-se uma representação pentagonal (figura 55), inspirada na representação hexagonal apresentada em Godino (2011), onde os vértices são os componentes e apontam um grau de idoneidade máximo, sendo que o polígono inscrito se refere ao grau de idoneidade alcançado no material de estudo.

Figura 55– Representação do grau de Idoneidade Epistêmica alcançado com o material Figuras Geométricas



Fonte: a pesquisa

A análise epistêmica produzida possibilitou um olhar para como o material de estudo referente a Figuras Geométricas está estruturado, quais aspectos são privilegiados e quais estão fragilizados. Assim, é possível perceber que os componentes estão alinhados ao que é proposto pelo EOS, obtendo uma alta idoneidade em Linguagens, Regras e Argumentos. Entende-se que o que está sendo apresentado aos estudantes contempla diferentes tipos de representações, sendo que definições, conceitos e proposições são trabalhadas a partir de uma linguagem acessível aos estudantes sem perder o rigor matemático necessários. A produção de argumentos é estimulada por meio das atividades, a fim de que os estudantes apresentem e articulem uma argumentação coerente em torno das questões postas. Já no que se refere aos componentes situações-problemas e relações considerou-se os mesmos com uma idoneidade média, tendo em vista que, apesar de serem contemplados satisfatoriamente no material, não o são plenamente. Nas situações-problemas, por exemplo, não são apresentadas situações de aplicação, mas apresentadas diversas situações de contextualização que, entende-se, ser mais pertinente para o estudo em torno das Figuras Geométricas. Quanto às relações buscou-se relacionar os objetos em estudos com imagens e até mesmo as relações e diferenças existentes nas próprias figuras estudadas, mas não se apresentou nenhuma relação com outros conteúdos da Matemática.

No que segue será lançado um olhar para os recursos utilizados e as articulações estabelecidas com os mesmos, destacando suas potencialidades e fragilidades.

8.1.2 Figuras Geométricas: uma análise mediacional

Visando refletir sobre os recursos utilizados no material de estudos para o desenvolvimento do trabalho com Figuras Geométricas, propõem-se uma análise a partir dos componentes da Ferramenta de Análise de Mediacional – FAM, recursos e tempo didático, e seus respectivos indicadores. Considera-se que esta análise possibilita identificar as potencialidades e fragilidades do material e o grau de idoneidade alcançado no que se refere aos recursos disponibilizados aos estudantes. No quadro da figura 56 apresenta-se uma síntese da análise produzida.

Figura 56– Análise mediacional: Figuras Geométricas

Componentes	Indicadores	Análise	Grau de Idoneidade
Recursos Didáticos	a) evidencia-se a presença de materiais adequados ao desenvolvimento do processo de ensino e adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) há uma diversificação de recursos para auxiliar no processo de ensino, tais como: audiovisuais, material concreto, livros, entre outros; c) propõe-se a organização e experimentação de situações práticas.	- Considera-se que o material de estudo proposto está adequado ao nível educativo dos estudantes, pois utiliza linguagem acessível mantendo, porém, aspectos formais quando pertinentes. - No que se refere aos recursos utilizados destaca-se fortemente a presença das tecnologias digitais, por meio da estrutura do próprio material, utilização de imagens, vídeos, animações, atividades *online*, aplicações no software geogebra e objetos de aprendizagem os quais também privilegiam a manipulação dos objetos de forma interativa. - No material se destacam as atividades *online* que privilegiaram a visualização e manipulação das figuras geométricas e suas planificações por meio de associações e de construções (figura 57). - O objeto de aprendizagem sobre Poliedros que foi utilizado como um "saiba mais" visando retomar e complementar o que já havia sido discutido no material também merece destaque, tendo em vista que oportuniza discussões mais teóricas, com definições e exemplos, como também, atividades (figura 58).	**Alta**
Tempo didático	a) apresentam-se situações de ensino que contemplam diversas modalidades (estudo pessoal, cooperativo, tutorial, presencial); b) evidencia-se organização do tempo para intervenção docente, trabalho autônomo dos estudantes e momentos de discussão; c) dedica-se um tempo maior para o desenvolvimento dos conhecimentos, caso os estudantes apresentem	- A proposta de estudo se caracteriza por um estudo presencial, que privilegia o trabalho individual, porém conforme já destacado, a interação entre os estudantes, assim como, com a pesquisadora se faz presente no processo de estudo. - Considera-se que o material possibilita desenvolver a autonomia nos estudantes, uma vez que os mesmos se tornam responsável pelo seu estudo, estabelecendo seu ritmo de estudo e aprendizagem. - Conforme já destacado na análise anterior não há, no material, atividade especifica que incentive a discussão entre os estudantes, porém estas foram surgindo no desenvolvimento dos estudos, tanto entre os estudantes como com a pesquisadora, sendo	**Média**

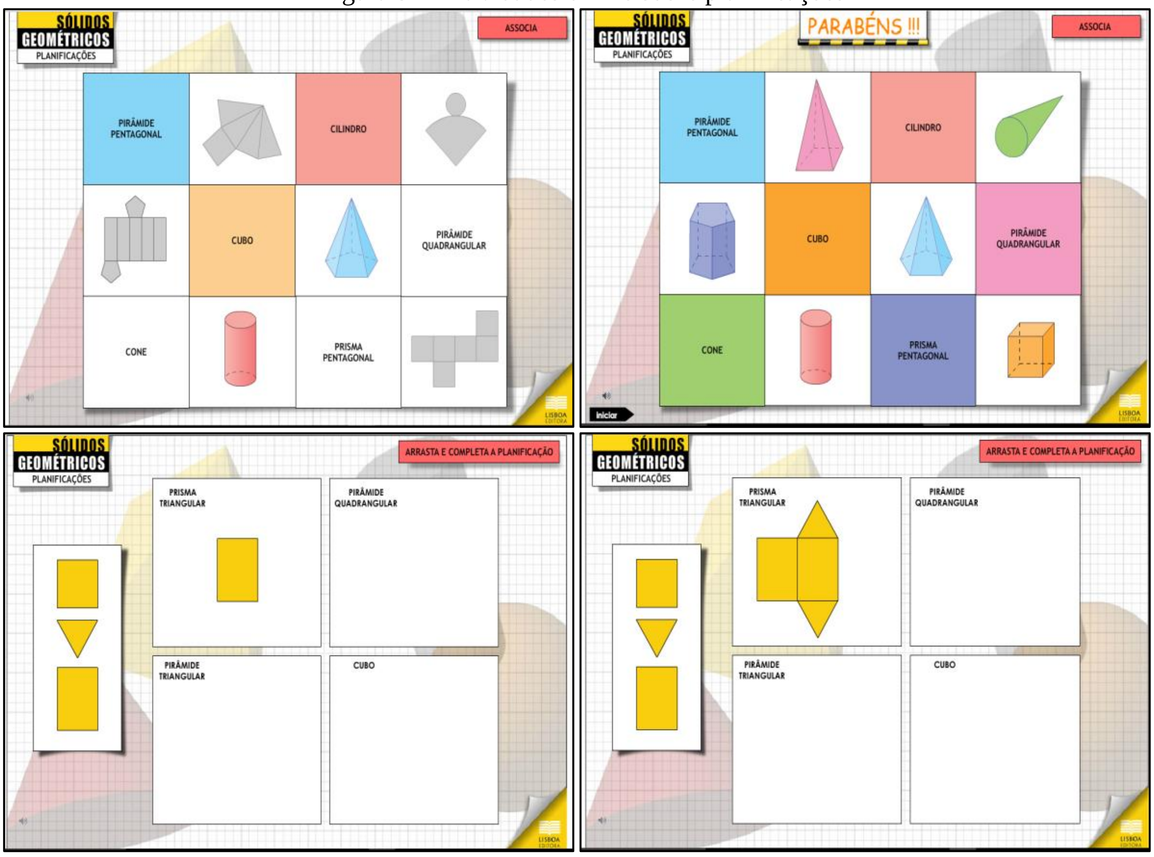
	dificuldade de compreensão.	também, nestes momentos, trabalhados as dificuldades, dúvidas e conflitos semióticos apresentados pelos estudantes.	

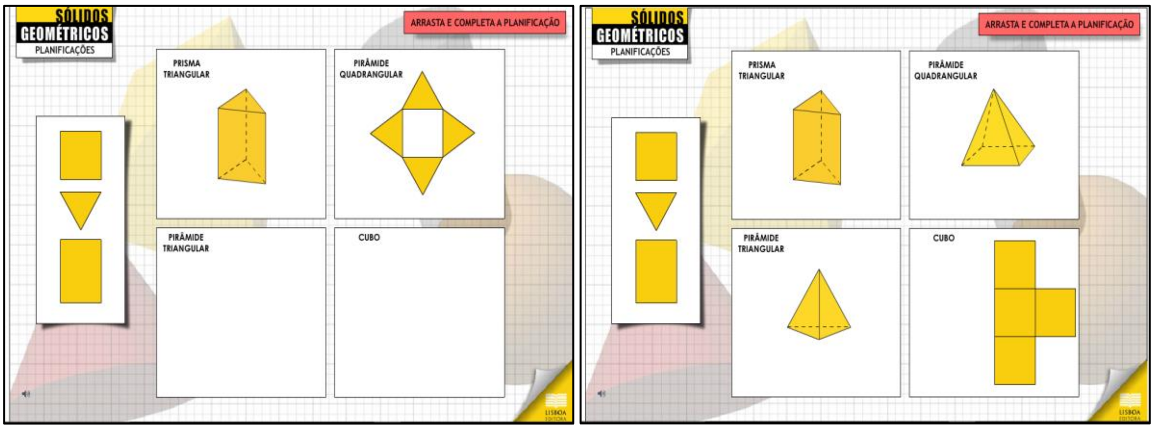
Fonte: a pesquisa.

A partir da análise apresentada no quadro da figura 56 é possível perceber que os componentes e indicadores estão representados no material de maneira satisfatória. No que se trata dos **recursos**, considerou-se uma alta idoneidade, pois buscou-se um grande apoio nas tecnologias digitais, recorrendo a diversos recursos como imagens, vídeos, animações e *links* externos, sem deixar de lançar mão de outros recursos como construções com régua e compasso.

Destacam-se as atividades *online* sobre planificações de sólidos geométricos. Na primeira atividade o estudante deveria associar o nome do sólido a sua planificação e, assim que associada corretamente, a planificação se transformava no sólido. Na segunda atividade os estudantes montavam a planificação, a partir de um conjunto de peças e após completar, por meio de uma animação o sólido se apresenta. Na figura 57 são destacadas telas destas atividades.

Figura 57 - Atividades online sobre planificações



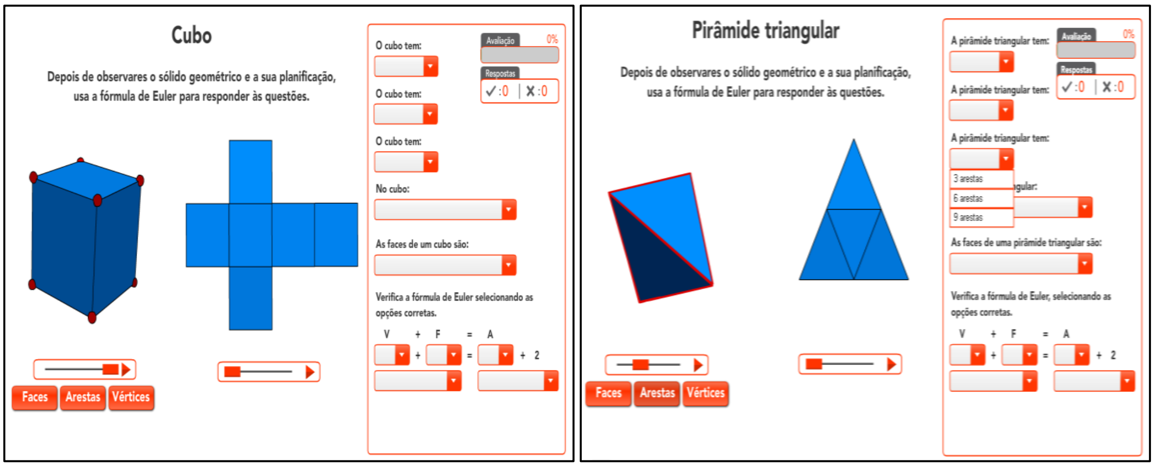


Fonte: a pesquisa[41].

Considera-se que atividades como as apresentadas na figura 57 contribuem e potencializam a aprendizagem dos estudantes no que se refere a visualização, associação, manipulação das partes dos sólidos e na identificação das peças em cada planificação. Já a animação de transformar a planificação no sólido pode auxiliar os estudantes na compreensão do objeto em diferentes representações.

Entende-se que outro recurso que favoreceu a aprendizagem dos estudantes se refere ao objeto de aprendizagem que destaca as faces, arestas, vértices e planificação dos objetos, objetivando que os estudantes consigam observar as regularidades a fim de chegar na relação de Euler, conforme exemplificado na figura 58.

Figura 58– Objeto de Aprendizagem sobre a Relação de Euler



Fonte: a pesquisa[42].

Este objeto de aprendizagem (figura 58) foi muito importante para os estudantes no que se refere a identificação das faces, arestas e vértices, assim como, na compreensão da relação

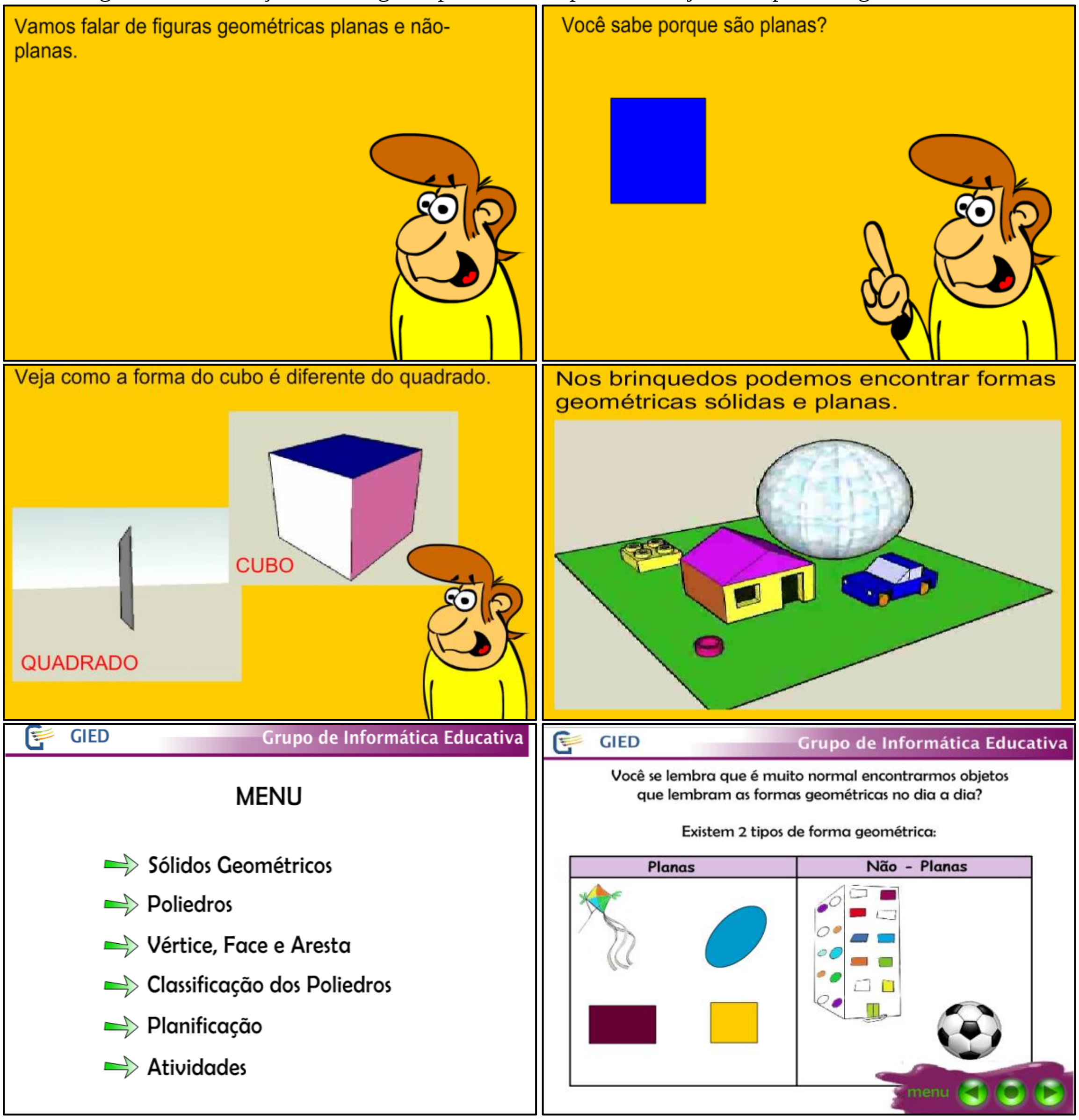
---

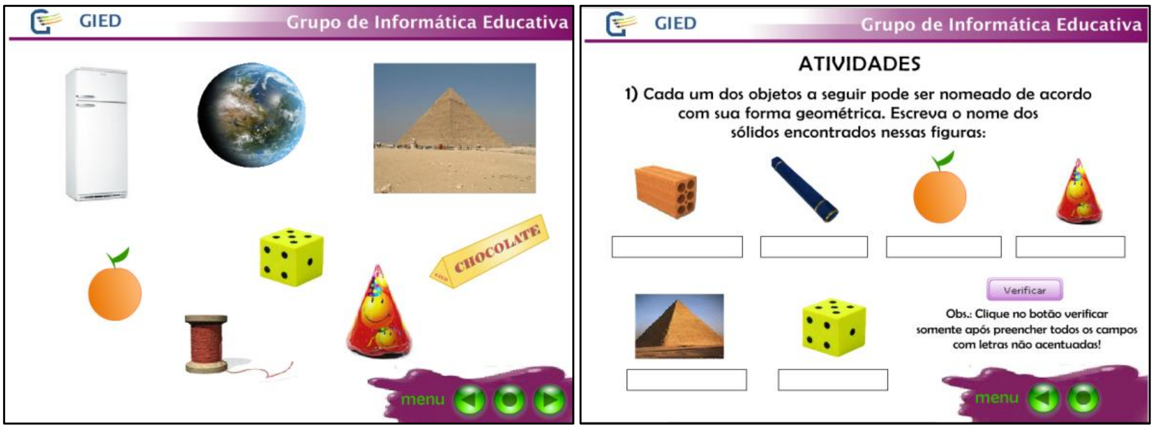
[41] http://www.lisboaeditora.pt/assets/Uploads/1SG5.swf. http://www.lisboaeditora.pt/assets/Uploads/1SG4.swf
[42] http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT6/SOLIDOS/PROG_A/Formula_Euler=LEYA.swf.

existente entre elas, pois a atividade é encaminhada para que os estudantes percebam e estabeleçam a igualdade.

Ressalta-se, também, como um recurso importante neste material a animação apresentada no início do estudo, na qual é discutida as características de figuras planas e não planas, por meio de uma narrativa, diferenciando-as e apresentando exemplos. Outro material de apoio que cabe destacar é o objeto de aprendizagem sobre poliedros, no qual os sólidos geométricos são divididos em dois grupos, poliedros e corpos redondos, sendo apresentados, também, exemplos e atividades, conforme ilustrado na figura 59.

Figura 59– Animação sobre figuras planas e não-planas e Objeto de aprendizagem Poliedros



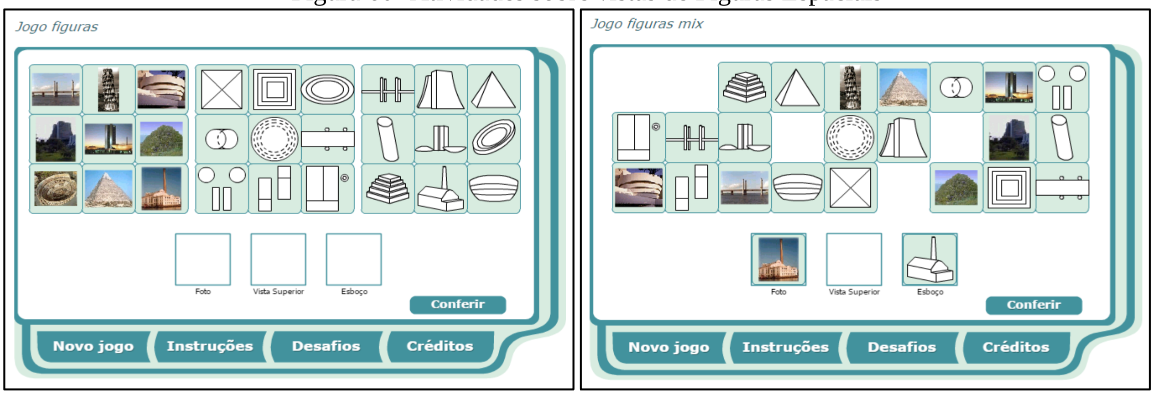


Fonte: a pesquisa[43].

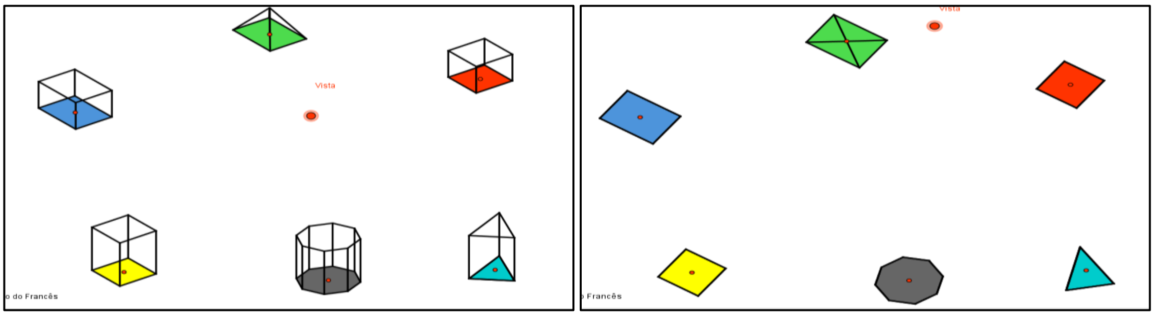
Considera-se que atividades como as apresentadas na figura 59 são importantes no material de estudo, tendo em vista que retomam o que está sendo estudado no material de uma outra forma, no caso por meio de narração, o que para alguns estudantes, é um diferencial. O áudio da explicação, aliado a leitura e mesmo a apresentação de outros exemplos e novos elementos que ainda não foram abordados no material contribuem para uma ampliação da visão e entendimento dos aspectos envolvidos. No caso do objeto de aprendizagem, é apresentado uma animação sobre quais sólidos rolam e quais não rolam (figura 51) complementando e retomando o que já foi discutido em outras atividades.

Ressaltam-se, também, as atividades nas quais são trabalhadas as vistas dos sólidos e de imagens reais, privilegiando a visualização e percepção dos estudantes em atividades online e aplicações do Geogebra, conforme exemplificado na figura 60.

Figura 60- Atividades sobre vistas de Figuras Espaciais



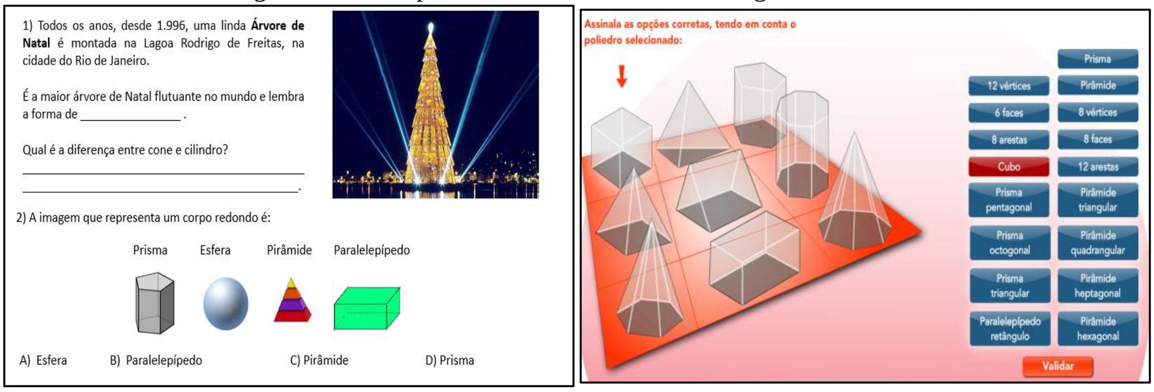
[43] http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/14000/arestas2.swf?sequence=1. http://gied.ffalm.br/OAs/OAGIEDPoliedros.swf



Fonte: a pesquisa[44].

No que se refere as atividades apresentadas na figura 61 entende-se que a realização das mesmas estimulou o raciocínio dos estudantes, pois para suas soluções era necessário observar, analisar e tomar decisões baseadas no estudo realizado e nas informações fornecidas pela atividade.

Figura 61– Exemplo de atividades do material Figuras Geométricas



Fonte: a pesquisa[45].

Considera-se que a análise produzida permitiu refletir sobre os recursos utilizados no material de estudos Figuras Geométricas. Entende-se que os mesmos estão de acordo com o nível dos estudantes, assim como, são pertinentes para desenvolver os conceitos, definições, propriedades, estabelecer as relações e procedimentos no estudo das Figuras Geométricas. Ressalta-se como positivo a diversidade de recursos utilizados, como atividades *online*, objetos de aprendizagem, animações, aplicações, *links* de explicações externos ou situações problemas apresentadas no próprio material. Considera-se que os recursos selecionados e articulados no material oportunizaram aos estudantes um estudo diferenciado potencializando, principalmente as habilidades de visualização, observação, identificação de características e estabelecimento de relações sendo estas importantes de serem desenvolvidas ao longo do estudo de Geometria.

[44]http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/objetos/jogo_figuras.htm; http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/objetos/jogo_figuras_mix.htm;http://www.geogebra.org/en/upload/files/zeca/solidtrace.html

[45] http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT6/SOLIDOS/PROG_A/Descobre_Matematico=LEYA.swf

No que segue será lançado um olhar para os significados produzidos pelos estudantes frente aos significados pretendidos (GODINO, 2011) com este material, visando analisar e identificar as potencialidades e os conflitos semióticos apresentados no estudo das Figuras Geométricas.

8.1.3 Figuras Geométricas: uma análise cognitiva

Visando lançar um olhar para a aprendizagem dos estudantes, assim como as dificuldades e conflitos apresentados ao longo do estudo sobre Figuras Geométricas, foi proposta uma análise cognitiva, na qual foram considerados tanto os componentes da Ferramenta de Análise Cognitiva – FAC (raciocínio lógico, leitura/interpretação e análise/síntese), como também, os componentes epistêmicos, já discutidos na análise apresentada anteriormente, porém agora com o foco na produção de significado por parte do estudante e não no material proposto.

Para evidenciar a presença destes componentes e indicadores foram apontados os significados pretendidos com o material de estudo, ou seja, o que se espera que os estudantes sejam capazes de fazer/compreender/significar, a partir do conjunto de atividades e situações propostas. Tomando estes significados estabelecidos como referência, busca-se evidências nos significados declarados pelos estudantes, considerando aqui toda e qualquer manifestação, seja escrita ou falada, correta ou não, na busca por estabelecer o grau de idoneidade nesta dimensão. No quadro da figura 62 apresenta-se a análise produzida.

Figura 62- Análise cognitiva: significados pretendidos x declarados para as Figuras Geométricas

Componentes Epistêmicos-cognitivos	**Significados Pretendidos**	**Significados Declarados**	**Grau de idoneidade**
Situações- problemas	-Identificar figuras geométricas em situações do cotidiano. -Associar sólidos geométricos a objetos. -Resolver as situações propostas, utilizando os conceitos, procedimentos e argumentos necessários.	- Os estudantes identificaram as figuras geométricas, indicando como exemplos caixas de papelão, casquinha de sorvete, bola, cubo mágico, dado, entre outros. Alguns estudantes somente indicaram ser possível identificar as figuras, porém não citaram exemplos. -A maioria dos estudantes conseguiu resolver corretamente as situações propostas, apresentando maiores dificuldades onde era necessário apresentar justificativas com base em argumentação.	**Alta**
	- Identificar os sólidos com suas planificações. - Associar uma imagem a sua representação	- No que se refere as planificações os estudantes apresentaram facilidades em identificá-las, principalmente na atividade onde o sólido era obtido a	

Linguagens	(esboços, vistas laterais, superiores…). - Utilizar linguagem matemática adequada na solução das situações.	partir da seleção das figuras que compõem sua planificação. - Nas atividades de associação de imagem a representações como esboços e vistas, apresentaram dificuldades com as vistas laterais e superiores. - Apresentaram dificuldades em completar uma imagem com parte faltante. - Foi possível perceber que prevaleceu a linguagem natural, sendo utilizadas, também, representações figurais, por meio de esboços das figuras geométricas (figura 63). - Quanto à utilizar a linguagem matemática adequadamente, nem sempre os estudantes utilizaram as denominações adequadas (por exemplo, “ponta” designando vértice).	**Alta**
Regras (definições, proposições, procedimentos)	-Identificar objetos que rolam e não rolam. -Identificar figuras planas e não planas. -Identificar poliedros e não poliedros. -Identificar as faces, arestas e vértices. - Identificar objetos a partir de seus elementos, definição ou características.	- Todos os estudantes conseguiram identificar os objetos que rolam e não rolam na atividade proposta, como também identificar as figuras planas e não planas. - Nas atividades de identificar os poliedros, apenas dois estudantes apresentaram dificuldades, sendo que indicaram como não poliedro, os prismas que tinham como base um octógono e eneágono, que na representação poderiam parecer “arredondado” desconsiderando as faces na identificação. O outro estudante indicou como não poliedro as pirâmides. Conjectura-se que possa ter respondido desta forma, pois na visualização não aparecem as bases (figura 64). - Quanto às faces, arestas e vértices, os estudantes, incialmente, apresentaram dificuldades. A partir da atividade que possibilitava movimentar e destacava as partes a partir do selecionado, os alunos não apresentaram maiores dificuldades.	**Alta**
Argumentos	-Diferenciar figuras planas e espaciais. -Diferenciar poliedros e não poliedros. - Diferenciar esfera e cubo; -Diferenciar cone e cilindro. -Apresentar as semelhanças e diferenças de prismas e pirâmides.	-Os estudantes diferenciaram as figuras planas das espaciais utilizando principalmente os argumentos de que as planas tem duas dimensões (bidimensionais) e as espaciais três dimensões (tridimensionais). Também argumentaram dizendo que as planas tem somente largura e altura e as espaciais profundidade, largura e altura. -Os argumentos em torno das diferenças dos poliedros e não poliedros foram relativos a poliedros	**Média**

		terem face, vértices e arestas e os não poliedros terem superfícies curvas, como também que os não poliedros são corpos redondos. -As principais diferenças apontadas para a esfera e o cubo foram que a esfera rola, e o cubo não, e que a esfera é um corpo redondo e o cubo um poliedro. Já como semelhança destacaram os dois como sólidos geométricos e figuras espaciais. -A principal diferença apontada pelos alunos para o cone e o cilindro é que o cone tem "ponta" ou "bico", também foi indicado que o cilindro "tem duas bases" e o cone uma. -No que se refere as pirâmides e prismas, os alunos apresentaram dificuldades iniciais. A pesquisadora retomou a imagem apresentada e os mesmos observaram que os prismas "têm duas bases" enquanto as pirâmides tem uma só e tem "bico" ou "ponta". Como semelhanças destacaram que ambas são poliedros e figuras espaciais (figura 66).	
Relações	-Compreender a relação entre prismas e pirâmides. -Estabelecer relações entre as figuras geométricas estudadas.	-Os estudantes relacionaram os prismas e pirâmides como sendo poliedros, mas formados por elementos diferentes, assim como estabeleceram relações entre algumas figuras geométricas, como os corpos redondos, os poliedros, figuras planas e espaciais.	**Média**
Raciocínio Lógico	- Observar e apresentar uma semelhança entre esfera e cubo. - Observar e apresentar uma diferença entre esfera e cubo. - Observar e diferenciar cone e cilindro.	- No que se refere a observar as características e elementos das figuras trabalhadas para posteriormente apresentar uma argumentação em torno da mesma, os estudantes não apresentaram dificuldades em identificá-las, porém tinham dificuldades de expressar o que tinham observado.	**Média**
Leitura/Interpretação	- Conseguir ler e interpretar adequadamente as informações e situações propostas no material. - Associar um objeto a suas representações, sendo apresentadas em diferentes formas; - Identificar, analisar e refletir sobre as informações da tabela apresentada para estabelecer as semelhanças e diferenças entre pirâmides e prismas	- Entende-se que os estudantes apresentaram um bom desempenho no que se refere a leitura do material, sempre realizada com atenção e registrando o que consideravam mais importante. Porém em algumas situações apresentavam dificuldades de interpretação do que era para ser feito, principalmente quando o questionamento ou atividade não estava em forma de "questão" e sim apresentada no contexto de estudo. - Considera-se que os estudantes transitaram com facilidade entre as diferentes representações das figuras trabalhadas, tendo um predomínio da gráfica, por meio de imagens e da	**Média**

		língua natural, pela característica do estudo. - A partir da leitura e reflexão sobre a tabela apresentada com as principais características dos prismas e pirâmides, os estudantes, em sua maioria, conseguiram expressar satisfatoriamente as semelhanças e diferenças das mesmas. Porém, em alguns casos, apenas copiaram as considerações do *link* externo disponibilizado como uma complementação de estudo.	
Análise/Síntese	- Realizar síntese durante e ao final do estudo, conseguindo identificar e expressar o que foi aprendido.	- Este componente se apresentou como um dos mais difíceis para os estudantes, pois os mesmos não estão habituados a ter que produzir uma análise do estudo realizado ou produzir uma síntese. Seus melhores desempenhos se referem a questões onde tenham que responder "algo" e não buscar refletir e, a partir do estudo, se expressar sobre algo. Ressalta-se que estes aspectos foram sendo trabalhados ao longo do estudo, porém como este é o primeiro material ficou bem evidenciada a dificuldade.	**Baixa**

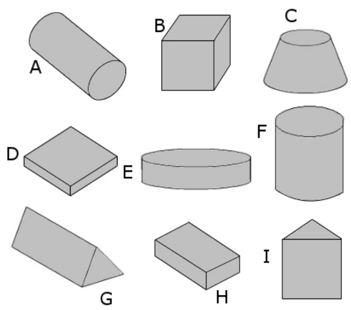
Fonte: a pesquisa.

Com base no que foi apresentado no quadro de análise, é possível perceber que os significados declarados pelos estudantes se aproximaram significativamente dos pretendidos.

Considera-se que o componente **situações-problemas** obteve uma alta idoneidade, pois os estudantes conseguiram resolver corretamente as situações propostas, principalmente no que se refere ao identificar figuras e sólidos geométricos em situações cotidianas e estabelecer diferenças e semelhanças entre elas. Na figura 63 apresenta-se a análise de uma atividade e as respostas dos estudantes.

Figura 63- Atividade de identificação de sólidos geométricos

Observe os sólidos abaixo representados:



Quais destes sólidos podem rolar?

1. Em que as peças D e B se assemelham?
2. Em que as peças C e G são diferentes?
3. Escreva o nome de dois objetos com formas semelhantes a das peças A.
4. Que objetos do dia-a-dia têm forma semelhante ao sólido B?

Quantos lados é possível ver nestas representações?

E quantos lados você acha que cada um desses sólidos têm?

Retirado de: Isolani, Clélia Maria Martins; Siedel, Cláudia Miriam Tosatto. **Matemática Projeto Alternativo. Depende do ponto de vista!** Editora do Brasil S.A.: São Paulo. 1991.

Fonte: a pesquisa.

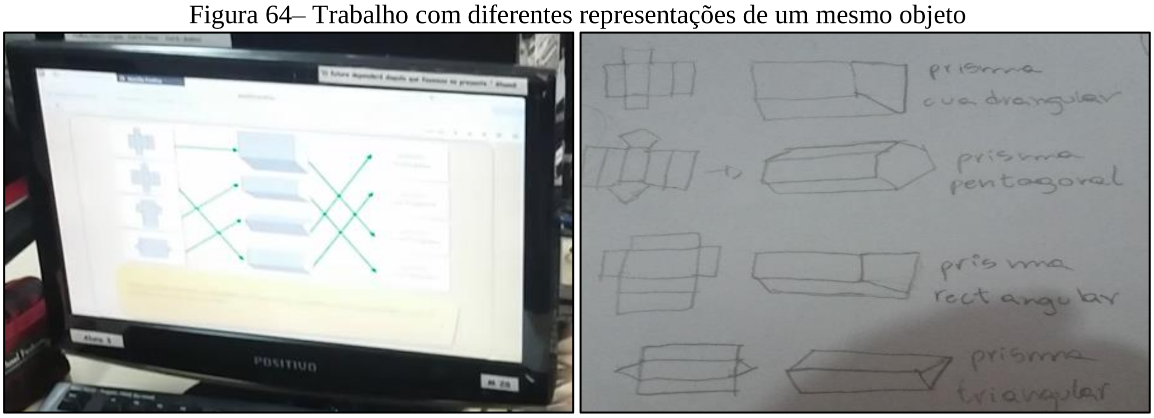
No que se refere ao primeiro questionamento da atividade sobre quais sólidos rolam, todos os estudantes conseguiram identificar que são A, C, E e F. Sobre a semelhança dos sólidos B e D, em geral os estudantes não apresentaram dificuldades e as principais características identificadas foi que ambas são espaciais e tridimensionais. No que se refere as diferenças entre C e G, a principal resposta apresentada foi que C rola e G não.

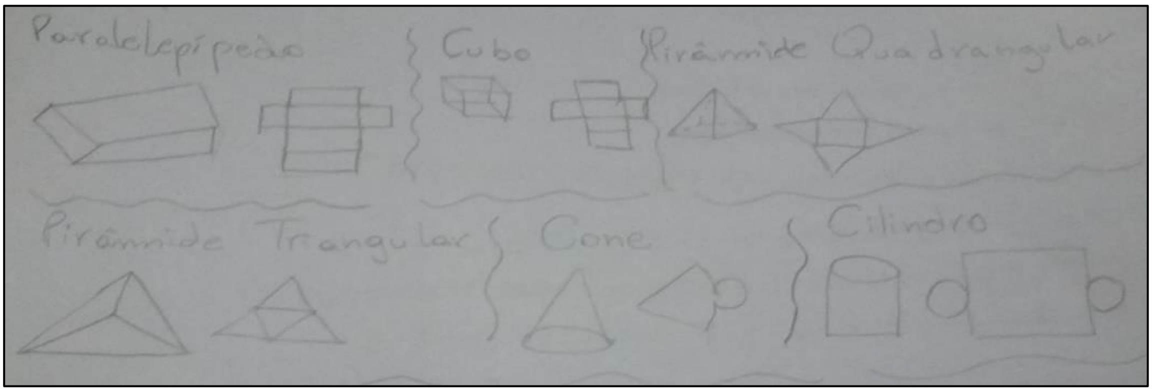
Um possível conflito semiótico foi identificado a partir da manifestação do aluno02 quando, ao apontar as diferenças entre os objetos C e G, declarou que “ *um é triangular e com profundidade quanto o outro tem uma forma mais arredondada aproximada de um cilindro*”. É possível perceber que o aluno tenta diferenciar os sólidos pela base, indicando corretamente o primeiro como triangular, mas em relação ao G indica como forma arredondada e próxima ao formato de um cilindro, focando-se somente em um atributo, desconsiderando que em um cilindro as bases são iguais o que não é o caso da figura.

Quando questionados sobre objetos do dia a dia com forma semelhante a peça A e B as respostas foram bem diferenciadas, mas todas corretas. Entre as indicações para a A, foram mencionados cola bastão, rolo de papel toalha, cano, lata, copo, extintor, entre outras. No que se refere a B, foram caixa de papelão, puff, cubo mágico, dado, tv antiga, entre outros.

O componente **linguagens** também foi considerado com um grau de idoneidade alto, pois entende-se que os estudantes conseguiram trabalhar com diferentes representações de um mesmo objeto, contemplando tanto linguagem natural, gráfica e por representações figurais de esboços produzidos por eles, o que é apresentado na figura 64, na produção do aluno07.

Figura 64– Trabalho com diferentes representações de um mesmo objeto



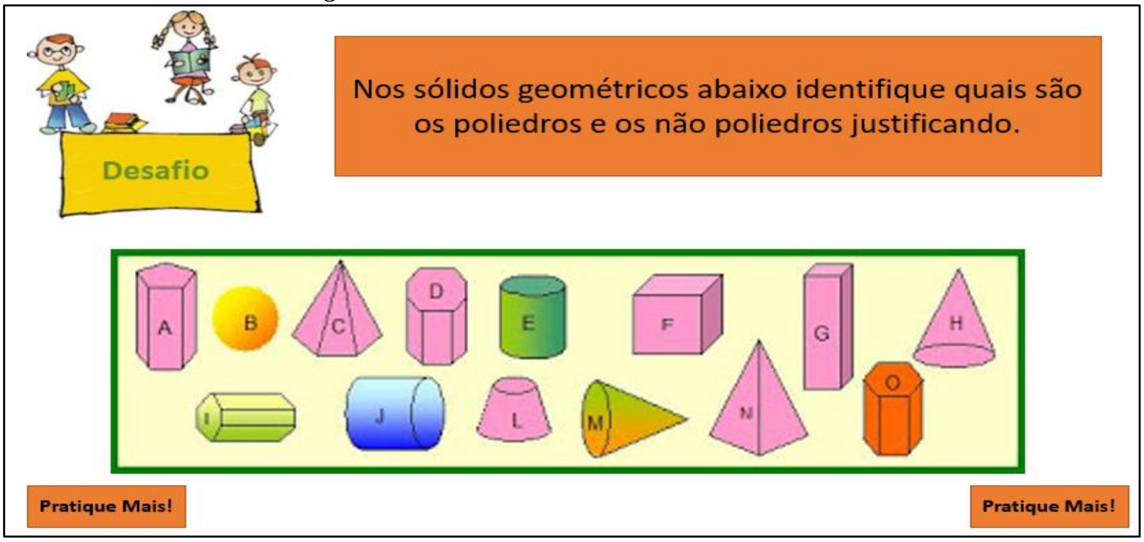


Fonte: a pesquisa.

Observa-se, nos registros do aluno07, e na imagem capturada pela pesquisadora, a facilidade dos estudantes em trabalhar com as questões de planificações, seja nas atividades *online* como na do próprio material, considerando as representações tanto na forma figural planificada ou do sólido, como na linguagem natural.

O componente **regras** também foi considerado com uma idoneidade alta, pois entendeu-se que os estudantes conseguiram compreender e mobilizar as definições, proposições e procedimentos a fim de resolver as situações propostas ao longo do estudo sobre Figuras Geométricas. No que segue nas figuras 65 e 66 discutem-se as atividades e a produção dos estudantes na resolução das mesmas, no que se refere a regras.

Figura 65- Atividade de Poliedros e não Poliedros.



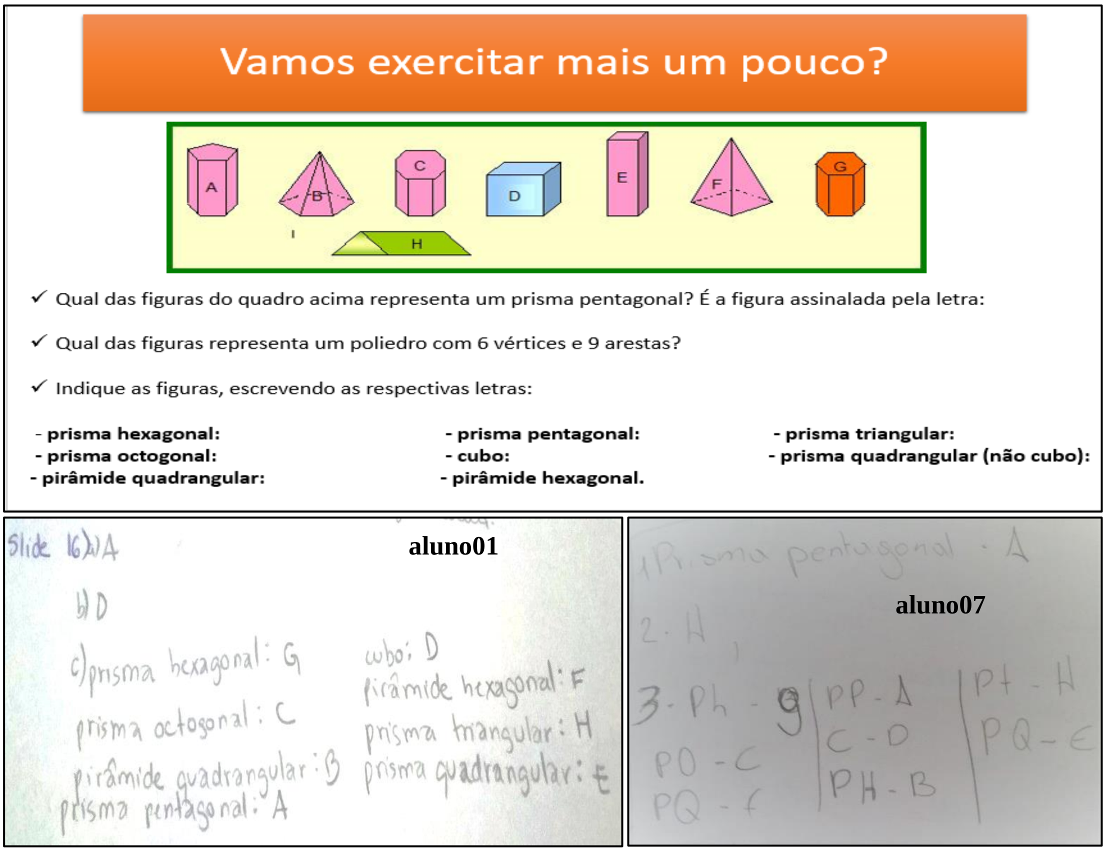
Fonte: a pesquisa.

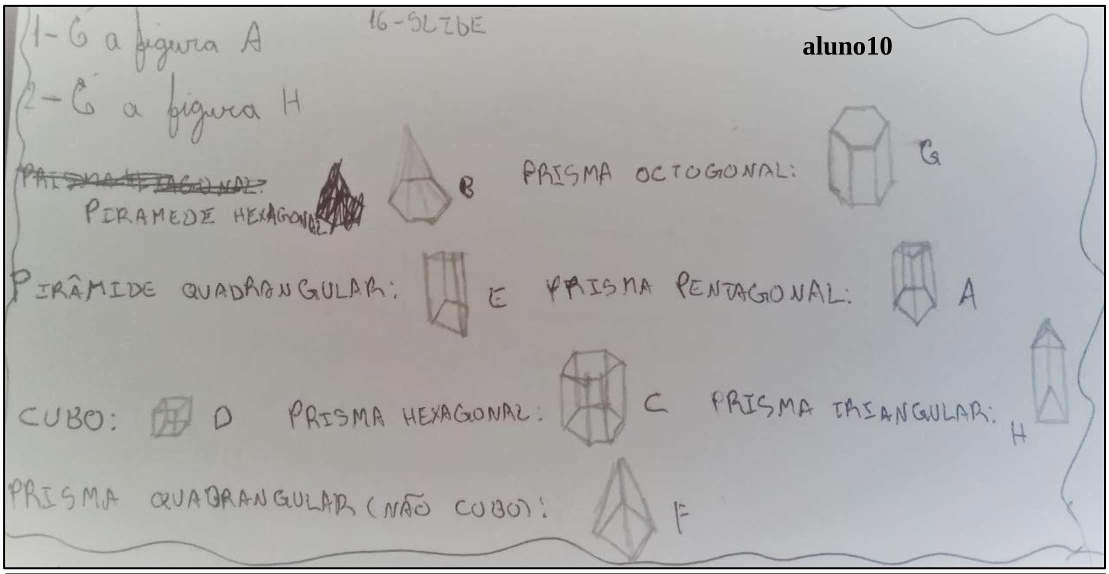
A atividade destacada na figura 65 foi resolvida com facilidade pela maioria dos estudantes, identificando como Poliedros os sólidos A, C, D, F, G, I, N e O e não Poliedros como B, E, H, J, L e M, porém apenas indicaram quais sólidos pertenciam a cada grupo, não justificando a escolha. Apenas os alunos03 e 12 não responderam corretamente esta atividade.

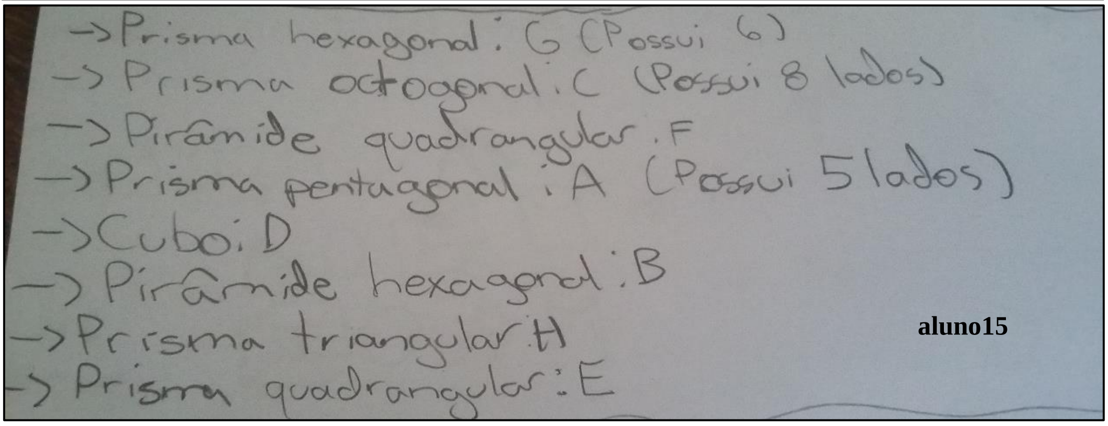
O aluno12 indicou os sólidos C e N, que são pirâmides, como sendo não poliedros. Conjectura-se que a resposta dada pelo estudante está relacionada ao fato de não ser possível visualizar as bases das pirâmides, sendo desconsiderado, também, as características das faces, o que pode se configurar um conflito em relação a definição de poliedros. Já o aluno12 indicou como não poliedros os sólidos D, I e O, sendo que estas indicações podem ter sido encaminhadas devido ao fato de, na representação dos sólidos, especialmente o D, a base "pode parecer mais arredondada", o que não justifica o erro, pois o estudante desconsiderou, também, as características das faces laterais.

Na figura 66 apresenta-se uma situação proposta no material e discute-se três respostas apresentadas pelos estudantes, sendo que a partir de um conjunto de representações os estudantes deveriam identificar as características e definições dos objetos para conseguir atender ao que é solicitado na atividade.

Figura 66– Atividade sobre Sólidos Geométricos







Fonte: a pesquisa.

A figura 40 apresenta uma atividade na qual, em geral, os estudantes não apresentaram dificuldades mobilizando as definições, conceitos e procedimentos discutidos e retomados durante o estudo. Buscaram-se quatro resoluções , dos alunos 01, 07, 10 e 15, para serem analisadas.

Na resolução do aluno01 é possível perceber que o mesmo não indicou corretamente a figura que se refere ao poliedro com 6 vértice e 9 arestas indicando, incorretamente, como a figura D. Conjectura-se que o estudante contou somente as arestas que estão visíveis desconsiderando as demais. Outro equívoco cometido pelo estudante se refere às pirâmides, onde indicou a representação da pirâmide quadrangular como B e da hexagonal F, ou seja, inverteu-as o que nos leva a conjecturar que desconsiderou o formato diferente das bases das pirâmides para indicá-las ou simplesmente se equivocou, trocando as nomenclaturas.

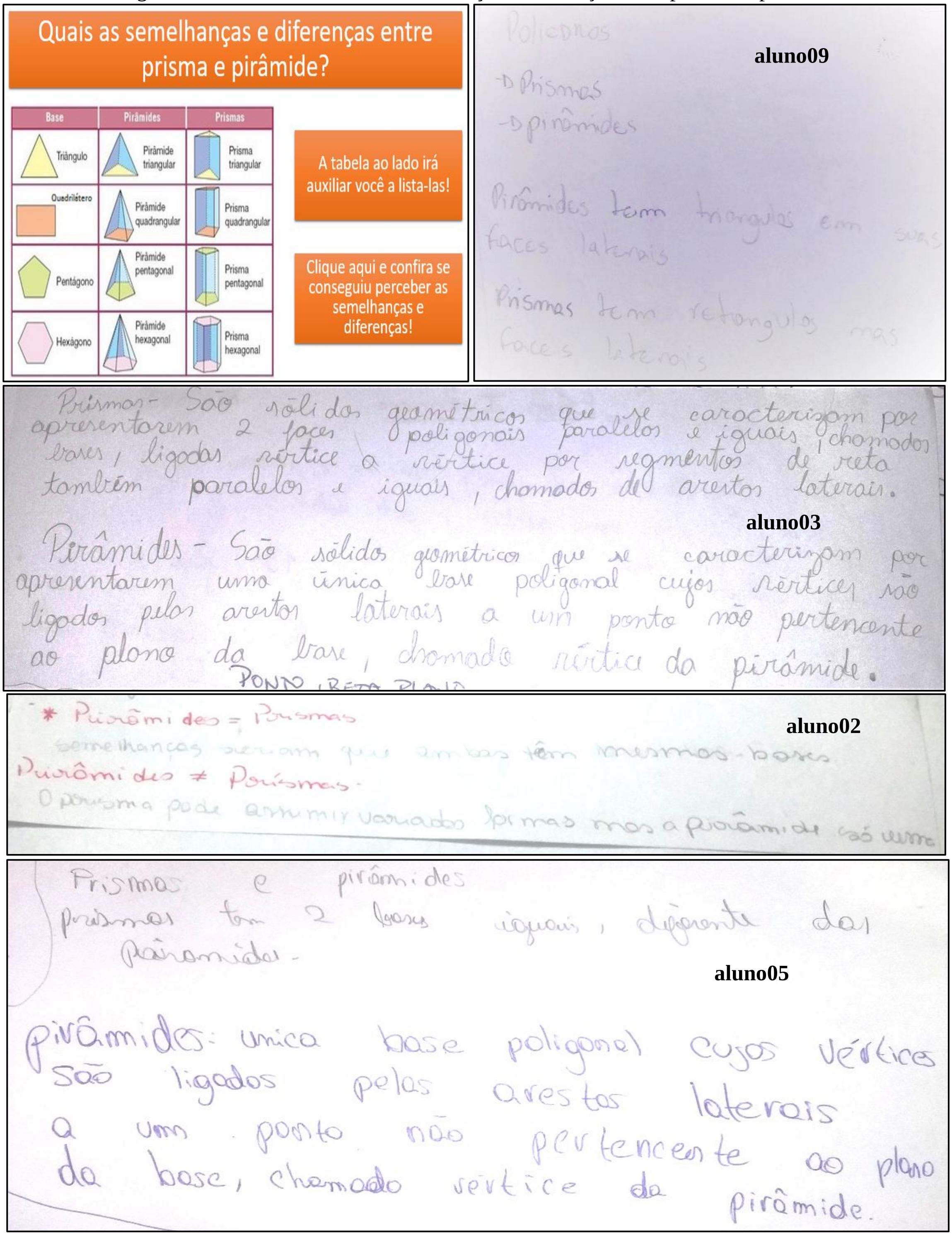
A resolução do aluno07 é apresentada para exemplificar a atividade resolvida corretamente, o que foi realizado pela maior parte dos estudantes. Já a resolução do aluno10 está sendo destacada, inicialmente, pela estratégia do estudante em esboçar os sólidos ao lado da nomenclatura que julgou correta, como também, para ressaltar que o mesmo apresentou o que se julga um conflito no que se refere a diferenciar as pirâmides dos prismas de base quadrangular. Conjectura-se que, aqui, o estudante desconsiderou as demais características dos sólidos observando somente as bases. Outro aspecto da sua resolução foi que representou os prismas octogonal e hexagonal da mesma forma em seu esboço, ou seja, desenhou prismas hexagonais nos dois itens, associando incorretamente também as letras G para octogonal e C para hexagonal.

Em relação à resolução do aluno15, o mesmo não respondeu as duas primeiras questões, mas as demais estão corretas. Ressalta-se que ao lado da nomenclatura dos prismas que tinham como base polígonos de mais de quatro lados o estudante indicou a quantidade de lados do polígono o que, entende-se, ser uma forma de associação entre o número de lados do polígono da base e a nomenclatura do prisma.

No que se refere aos componentes **argumentos**, **relações**, **raciocínio lógico**, **leitura** e **interpretação** considerou-se a idoneidade média, pois entende-se que, apesar dos mesmos terem sidos contemplados, poderiam ter sido explorados com mais intensidade no material, com um maior número de atividades que envolvessem justificativas e argumentações. Respostas apresentadas pelos estudantes envolvendo os componentes apontados e que, em algumas situações, foram incompletas ou parcialmente corretas, ou ainda apresentaram conflitos semióticos, passam a ser discutidas a fim de evidenciar a análise produzida.

Destaca-se a atividade apresentada na figura 67 que contempla significados pretendidos dos componentes e indicadores argumentos, relações, raciocínio lógico, leitura e interpretação, a fim de discutir e evidenciar aspectos que levaram, na análise, a considerar a idoneidade média dos componentes. A atividade solicitava aos estudantes que indicassem as semelhanças e diferenças de prismas e pirâmides a partir do que já havia sido estudado e de uma tabela que apresentava elementos e representações dos mesmos. No que segue, apresenta-se a atividade e as resoluções de quatro estudantes.

Figura 67 - Atividade sobre as semelhanças e diferenças entre prismas e pirâmides



Fonte: a pesquisa.

A análise da atividade permite perceber certa dificuldade dos estudantes em conseguir observar, analisar e relacionar as informações dadas. Em geral, as respostas produzidas pelos estudantes não estavam incorretas, porém superficiais ou incompletas, não destacando as principais semelhanças e diferenças, conforme pode ser observado na resolução do aluno09, apresentada na figura 67. No caso das diferenças esperava-se que os estudantes indicassem que os prismas possuem duas bases, que são paralelas, enquanto as pirâmides uma só e, ainda, que as faces laterais dos prismas são retângulos e das pirâmides triângulos. Quanto às semelhanças quase totalidade indicou que ambos são sólidos geométricos, figuras espaciais e poliedros, o que se considerou, em parte, satisfatório. Porém, considera-se que poderiam ter destacado que as bases, tanto dos prismas quanto das pirâmides, são formadas por polígonos com distintos números de lados, como também, que ambos têm como elementos vértices, faces e arestas.

Ressalta-se que alguns estudantes não formularam sua resposta, apenas copiaram o que estava posto no *link* externo, que foi indicado para que os mesmos conferissem se tinham conseguido identificar as semelhanças e diferenças, como pode ser observado na resolução do aluno03, da figura 67. Em contrapartida, houve estudantes que leram o conteúdo do *link* e produziram uma resposta com suas palavras, conforme a apresentado na resolução do aluno05. Pode-se observar, também, que na resolução do aluno02 há um conflito semiótico do tipo cognitivo, segundo Godino (2013) este tipo de conflito se refere a disparidade entre o significado atribuído pelo estudante (pessoal/declarado) frente ao significado de referência (institucional/pretendido), tendo em vista que o estudante indica, como semelhança que prismas e pirâmides tem as mesmas bases, o que conjectura-se que o estudante esteja se referindo que os dois podem ter polígonos como base e, como diferença, que os prismas podem assumir várias formas enquanto a pirâmide não, demonstrando que sua compreensão está mais relacionada a visualização do objeto, observando somente as faces laterais da pirâmide e desconsiderando a alteração da base como uma possibilidade de formar outras pirâmides.

Outro aspecto que se entende pertinente destacar, diz respeito ao fato que os estudantes não estavam habituados a justificar, argumentar e estabelecer relações no trabalho com a Matemática. Foi possível perceber, já desde o início do trabalho, que os mesmos buscavam por questões ou tarefas as quais envolvessem um procedimento rotineiro de seu conhecimento, ou procedimentos com passos a serem seguidos. Justificativas e argumentações foram sendo introduzidas ao longo do trabalho e, como Figuras Geométricas foi o primeiro material, estes componentes ficaram fragilizados, apesar de se fazerem presentes.

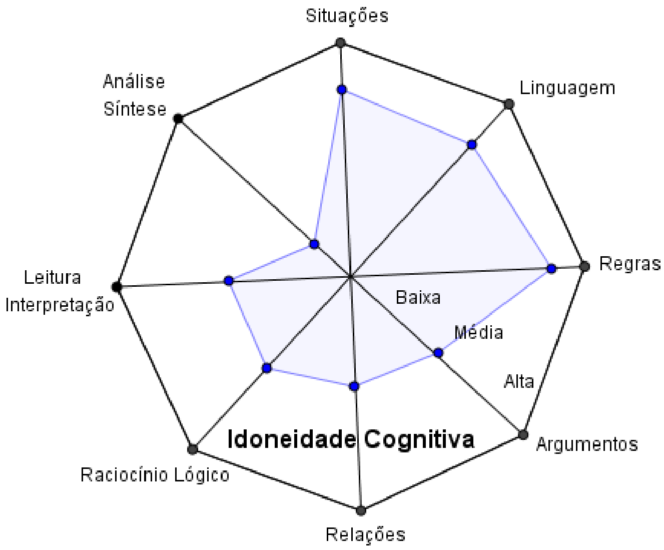
Neste contexto, considerou-se o componente Análise/Síntese com uma idoneidade baixa, já que os estudantes não conseguiram realizar com facilidade, neste primeiro material, a produção de análises e sínteses a fim de compreender, expressar e comunicar o que estava sendo estudado. Uma atividade que pode ilustrar esta dificuldade se refere ao final do estudo, quando foi solicitado que descrevessem o que conseguiram aprender com o material. As respostas, em geral, foram bem sucintas e ficaram em torno da indicação da denominação do que tinha sido tratado no material, conforme exemplificado por registros dos estudantes transcritos a seguir:

> *"Aprendi a diferenciar pirâmides de prismas, o que são poliedros e não poliedros, vértices, arestas, faces, bases e corpos redondos"*aluno05.
> *"A gente aprendeu que figuras espaciais podem ser poliedros e não poliedros"*aluno08.
> *"Poliedros, não Poliedros, planificação e formas geométricas"*aluno12.
> *"Poliedros, não poliedros, planas, espaciais, e a fórmula de EULER V+F = A + 2"*aluno10.
> *"A diferença das figuras planas e não planas, poliedros e não poliedros e suas divisões (corpos redondos são todos os objetos que rolam)"* aluno15.

A partir do que foi apresentado e discutido, considera-se que a análise produzida permitiu um olhar para o que se pretendia e o que foi efetivamente alcançado pelos estudantes, possibilitando observar, analisar e refletir sobre as potencialidades e fragilidades do material, referente aos significados pretendidos, dos significados manifestados pelos estudantes, bem como identificar as possíveis tensões/relações e conflitos semióticos nos significados atribuídos pelos estudantes. Assim, entende-se que os significados pretendidos foram em parte alcançados, mas não o suficiente para se considerar uma idoneidade alta, mas se fazendo presente de maneira satisfatória nos componentes epistêmicos e cognitivos, exceto na Análise/Síntese, conforme já destacado.

Assim, buscando sintetizar e ilustrar a análise produzida, criou-se uma representação octogonal (figura 68), onde os vértices são os componentes e o polígono inscrito refere-se ao grau de idoneidade alcançado frente aos significados pretendidos e declarados.

Figura 68– Representação do grau de Idoneidade Cognitiva alcançado com o material Figuras Geométricas



Fonte: a pesquisa.

8.1.4 Figuras Geométricas: síntese das análises

As análises produzidas sobre o material de estudos Figuras Geométricas permitiram refletir sobre a forma de condução do estudo, os recursos utilizados, os significados pretendidos com o conteúdo do material e os declarados pelos estudantes.

Considera-se que os componentes propostos pelas ferramentas de análise epistêmica, mediacional e cognitiva, se fizeram presente no material de maneira satisfatória. No que se refere a dimensão epistêmica, destaca-se os componentes Linguagens, Regras e Argumentos com uma alta idoneidade, sendo que os dois primeiros também alcançaram uma alta idoneidade na dimensão cognitiva, o que indica uma produção, pelos estudantes, de significados fortemente relacionado com os significados pretendidos. O único componente que apresentou uma baixa idoneidade foi Análise e Síntese, sendo que os demais componentes foram considerados com uma média idoneidade (situações-problema, relações, raciocínio lógico, leitura e interpretação).

Neste contexto, entende-se que os resultados alcançados com o material de estudos sobre Figuras Geométricas foram positivos, pois os estudantes conseguiram atingir grande parte dos significados pretendidos, destacando seus desempenhos na mobilização e articulação das definições e propriedades para resolver as situações-problema envolvendo Figuras Geométricas, como também, na diferenciação e no estabelecimento de relações entre figuras planas e espaciais. Porém, mais uma vez se destacam as dificuldades apresentadas nas atividades que envolviam argumentação e justificativas.

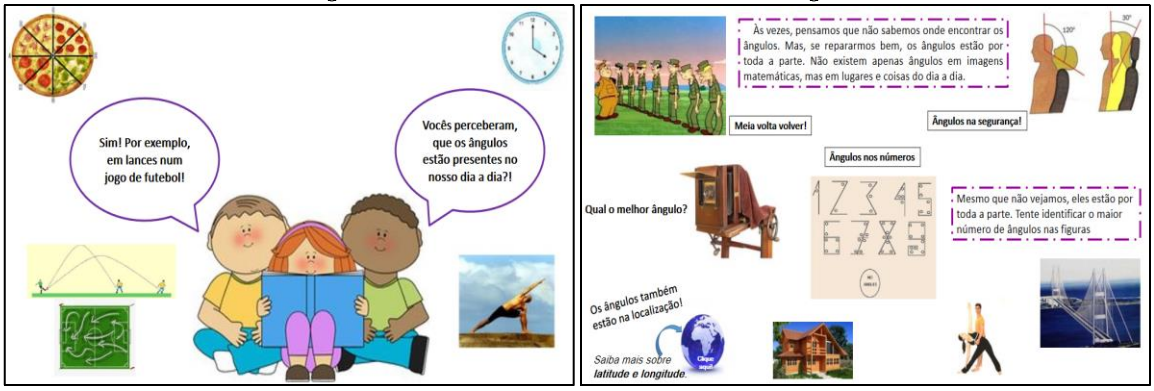
No que segue, apresentam-se as análises produzidas referente ao tópico Ângulos.

8.2 ÂNGULOS

O material de estudos que trata da temática Ângulos foi estruturado e planejado objetivando retomar as ideias e noções associadas a ângulos, sua definição, elementos, propriedades e relações, assim como, sua contextualização e representação em situações passíveis de serem encontradas ou enfrentadas pelos estudantes.

Iniciou-se o estudo pela apresentação de imagens que remetem a situações onde é possível identificar a presença de representações de ângulos, como por exemplo a inclinação de uma câmera fotográfica, lances de futebol, um relógio, passos de dança, entre outros, conforme ilustrado na figura 69.

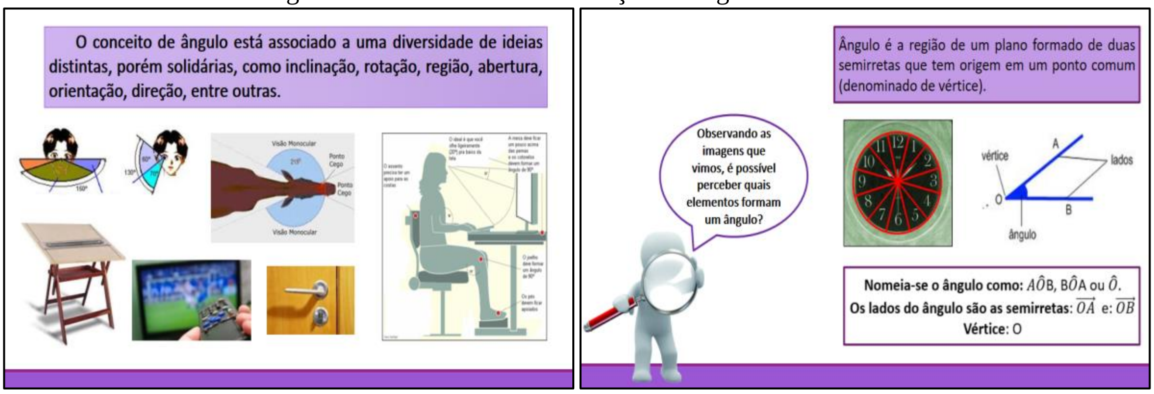
Figura 69 - Telas iniciais do material sobre Ângulos



Fonte: a pesquisa.

Após esta apresentação inicial, discutiu-se que, ao conceito de ângulos, estão associadas distintas ideias, a fim de encaminhar para a identificação dos elementos de um ângulo, como também, visando formalizar sua definição e elementos, explorando e destacando nomenclaturas e linguagem matemática adequada, conforme ilustrado na figura 70.

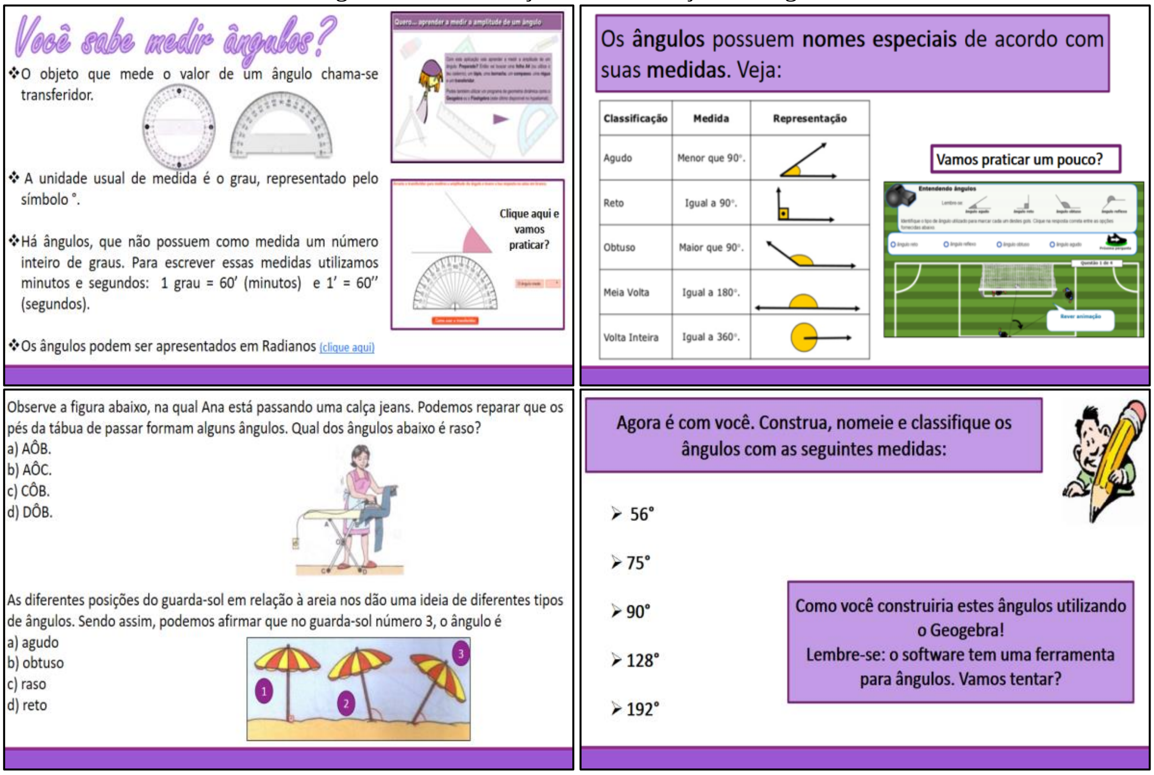
Figura 70 – O conceito e a definição de ângulos no material



Fonte: a pesquisa.

Em seguida, foram apresentadas as unidades de medidas utilizadas para ângulos, como também, o transferidor como um instrumento para medi-los, o que foi explorado por meio de um objeto de aprendizagem que demonstrava como manipular e utilizar este recurso. A partir desta discussão foram propostas atividades em que os estudantes tivessem que medir ângulos, o que permitiu encaminhar o estudo para a classificação e construção de ângulos, como também, outras atividades e situações problemas, conforme ilustrado nas telas do material apresentado na figura 71.

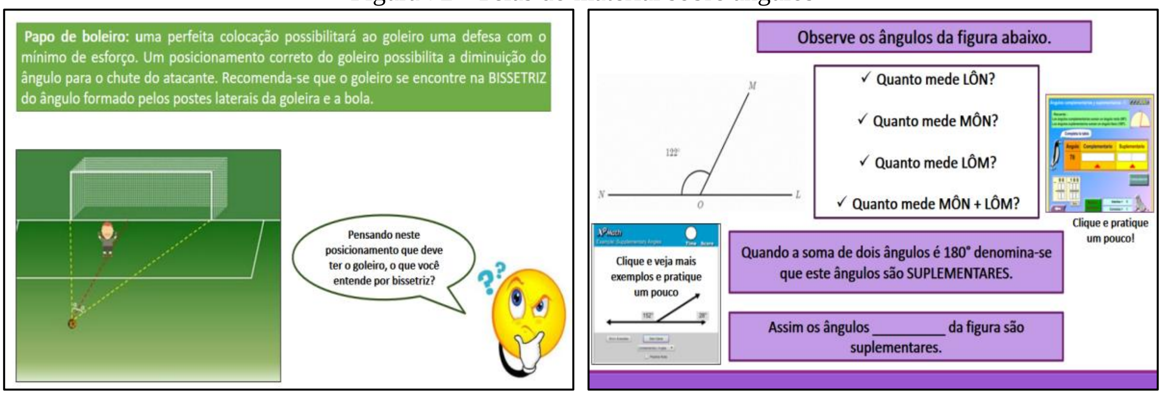
Figura 71 - Construção e classificação de ângulos

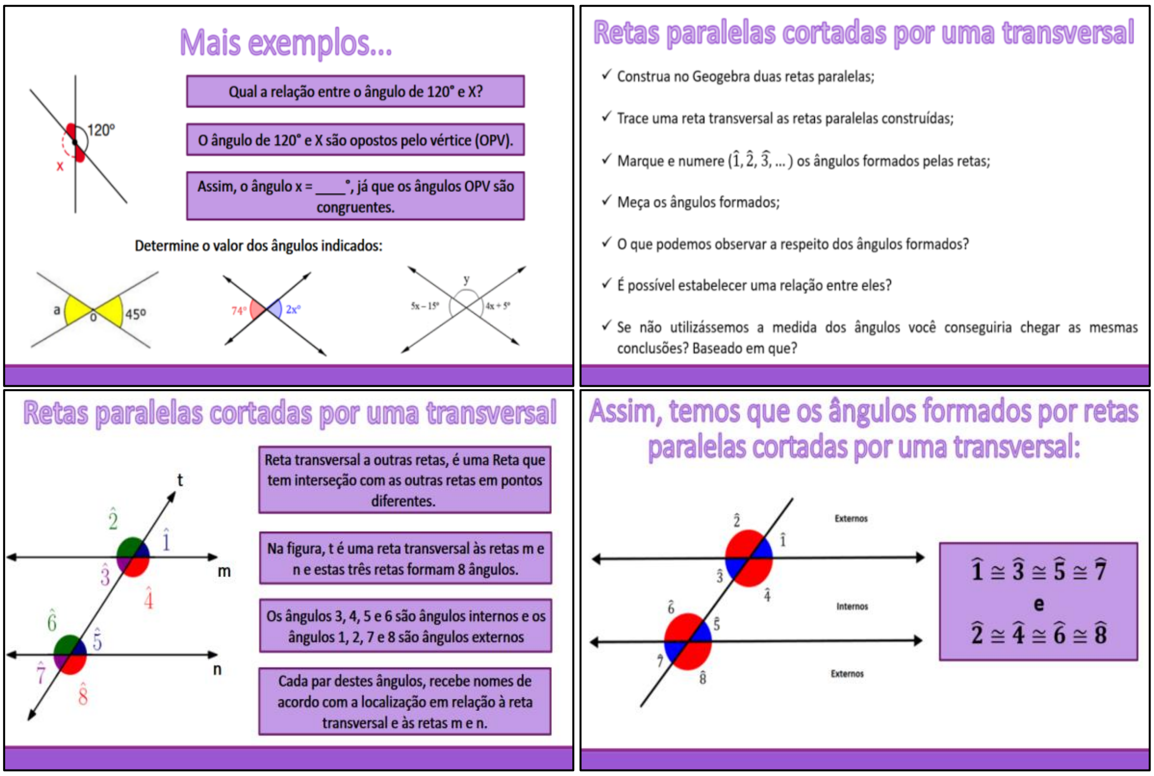


Fonte: a pesquisa.

O material contempla, também, o estudo em torno da bissetriz de um ângulo, ângulos opostos pelo vértice, adjacentes, consecutivos, complementares, suplementares, bem como ângulos formados a partir de paralelas cortadas por uma transversal. Assim, o material explora desde a noção e a construção de ângulos, até propriedades e relações, as quais serão detalhadas e discutidas nas análises. A seguir, na figura 72 apresenta-se telas do material produzido.

Figura 72 - Telas do material sobre ângulos





Fonte: a pesquisa.

Pondera-se, concordando com Silva (2012), que a noção de ângulo se constitui em conceito chave dentro do currículo de Matemática da Educação Básica, pois é utilizado no estudo de figuras semelhantes, casos de congruência de triângulos, construção de polígonos regulares, relações métricas no triângulo retângulo, trigonometria, geometria analítica, geometria espacial entre outros. Ainda para o autor “usam-se ângulos para a construção de representações relacionadas à estatística, à porcentagem e às probabilidades, considerando que uma das metas da geometria é auxiliar os alunos a aprender, entender e aplicar propriedades e relações geométricas” (p.190).

Ressalta-se que o material de estudo sobre Ângulos foi constituído considerando os objetivos estabelecidos pelos PCN (BRASIL, 1998), BNCC (2017) e Orientações Municipais (SÃO LEOPOLDO, 2012). Assim, as atividades desenvolvidas objetivaram:

- Construir a noção de ângulo;
- Reconhecer os elementos de um ângulo;
- Construir, utilizando instrumentos de desenho e tecnologias digitais ângulos e bissetriz de um ângulo;
- Reconhecer ângulos opostos pelo vértice, adjacentes, consecutivos, complementares, suplementares, correspondentes, alternos e colaterais;

- Compreender relações entre ângulos (complementares, suplementares e opostos pelo vértice);
- Compreender as relações entre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por uma transversal.
- Resolver problemas que envolvam a noção de ângulo em diferentes contextos e em situações reais.

A partir destes objetivos, com apoio nos estudos em torno da temática em pesquisas da área, assim como em livros didáticos, produziu-se o material de estudos referente Ângulos, o qual passa a ser discutido e analisado sob a perspectiva da Idoneidade Didática e suas dimensões (epistêmica, cognitiva e mediacional).

8.2.1 Ângulos: uma análise epistêmica

Apresenta-se no quadro da figura 73 a análise epistêmica produzida a partir dos componentes e indicadores da FAE sobre o material de estudos Ângulos.

Figura 73- Análise epistêmica:Ângulos

Componentes	Indicadores	Análise	Grau de Idoneidade
Situações-problema	a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações. b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).	- O material de estudo contempla um conjunto de atividades e situações de contextualização e aplicações, buscando relacionar e identificar ângulos a partir de imagens e situações, como em objetos, posições e ações do cotidiano, como passar em uma roleta de ônibus, visando associar a situação a noção de ângulo. Ainda, uma jogada de futebol permitiu conduzir a construção da noção de bissetriz de um ângulo. Assim, para se desenvolver a noção, conceito ou definição de ângulo, bissetriz e outros tópicos trabalhados ao longo do material buscou-se, sempre que possível, fazer por meio da introdução de uma situação problema de contextualização ou aplicação, para se discutir inicialmente a ideia e buscar desenvolver a formalização a partir dela (figura 74). - Considera-se que no material situações de generalização se fizeram presente, principalmente nas atividades referentes aos ângulos formados em retas paralelas cortadas por uma transversal, onde é proposto aos estudantes que construam e observem as propriedades dos ângulos e a partir destas, estabeleçam relações, para, por fim, chegar a generalização e apresentação das nomenclaturas pertinentes.	**Alta**

Linguagem	a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas. b) nível de linguagem adequado aos estudantes. c) propor situações de expressão matemática e interpretação.	- O material apresenta uma linguagem adequada ao nível dos estudantes. - São utilizadas diferentes formas de linguagem no material: natural, gráfica e simbólica, por meio da escrita no material, das imagens associadas às noções de ângulo trabalhadas e nas situações de contextualização apresentadas; escrita formal considerando nomenclaturas e simbologias especificas para ângulos, congruência, definições, entre outros (figura 75). - Ao longo do estudo são propostas situações onde os estudantes devem se expressar utilizando a linguagem matemática pertinente e adequada sendo, em determinadas situações, utilizada a linguagem natural e, em outras, simbólicas (figura 75).	**Alta**
Regras (definições, proposições, procedimentos)	a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem. b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado. c) propõem-se situações onde os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.	- As definições apresentadas e os procedimentos encaminhados foram organizados de acordo com o nível educativo dos estudantes. - No que se refere a abordagem das definições, proposições e procedimentos ao longo do material buscou-se, sempre que possível, desenvolver a partir de situações de contextualização ou atividades que possibilitassem um encaminhamento para as formalizações. - Considera-se que ao longo do material são oportunizadas situações onde os estudantes possam generalizar ou negociar definições, proposições e procedimentos. Na atividade onde é apresentada uma situação de futebol e, a partir dela, estimula-se os estudantes a conjecturar em torno do que é bissetriz, ou ainda, na atividade sobre retas paralelas cortadas por transversal, onde os mesmos são questionados sobre os procedimentos realizados, o que possibilita reflexões podendo ocorrer negociação dos significados estabelecidos (figura 76).	**Alta**
Argumentos	a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem. b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que argumentar.	- As explicações, exemplos, demonstrações e atividades apresentadas no material estão de acordo com o nível educativo dos estudantes, sendo utilizada linguagens acessíveis aliadas a exemplos concretos. - Entende-se que no material foram propostas situações nas quais os estudantes deveriam produzir uma argumentação em torno da atividade, possibilitando, assim, uma reflexão sobre o que estava sendo estudado e discutido. Uma atividade com esta característica, por exemplo, quando solicitado que a partir da situação apresentada os estudantes formulassem com suas palavras uma definição para bissetriz. Outra situação que os estudantes deveriam argumentar se refere a atividade das retas paralelas, onde os mesmos são questionados sobre, caso não tivessem as medidas como chegariam as	**Alta**

		mesmas conclusões. Também nas situações de estudo sobre ângulos consecutivos, adjacentes, complementares e suplementares onde é proposto que os mesmos observassem as imagens e a partir delas conjecturassem (figura 77).	
Relações	a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si.	- Considera-se que ao longo do material são propostas situações em que os estudantes podem estabelecer relações entre os objetos em estudo, como também, em situações cotidianas. Estas relações se estabelecem tanto para conseguir alcançar uma compreensão do objeto em estudo e formular uma argumentação pertinente a uma situação, como também, para comparar e estabelecer semelhanças e diferenças que facilitam na resolução de situações dadas, como em uma atividade que apresenta sentenças e os mesmos devem indicar se são verdadeiras ou falsas (figura 78). - Ressalta-se, porém, que não se identificou situações que possibilitassem relações entre outros objetos matemáticos.	**Média**

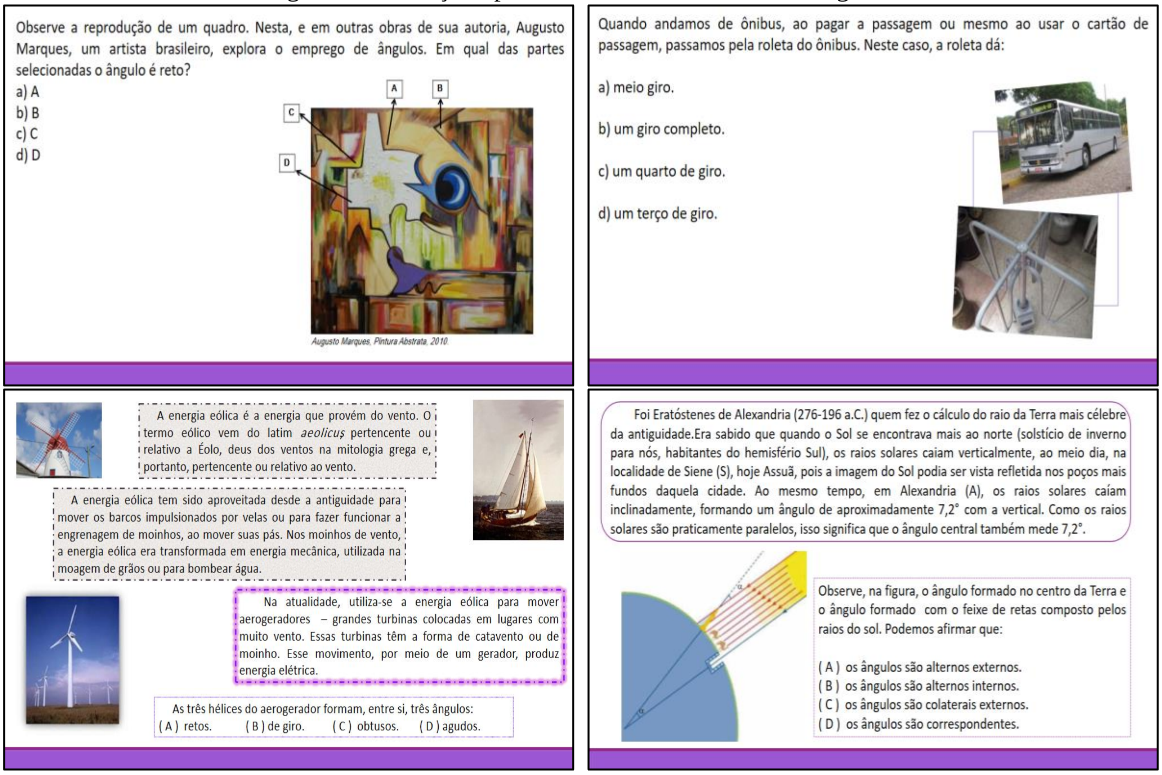
Fonte: a pesquisa.

A partir dos aspectos destacados no quadro da figura 73, é possível observar que os componentes e indicadores da FAE estão fortemente presentes no material de estudo, sendo que a análise busca identificar em que medida se conseguiu implementar os mesmos para o trabalho com Ângulos.

No que se refere ao componente **situações-problemas**, considerou-se o mesmo com uma alta idoneidade, uma vez que, no material, há um satisfatório conjunto de situações de contextualização e aplicações para o desenvolvimento da noção e definição de ângulo e bissetriz. Buscou-se apresentar as noções iniciais associadas a imagens de situações ou ações cotidianas, visando possibilitar aos estudantes identificar e relacionar o conteúdo trabalhado com ideias e representações já conhecidas por eles, conforme já destacado nas telas do material da figura 69.

Situações de contextualização, aplicações e exercícios se fizeram presentes ao longo do material objetivando que os estudantes mobilizassem as noções, conceitos, definições e procedimentos estudados a fim de resolve-las, conforme exemplos apresentados na figura 74.

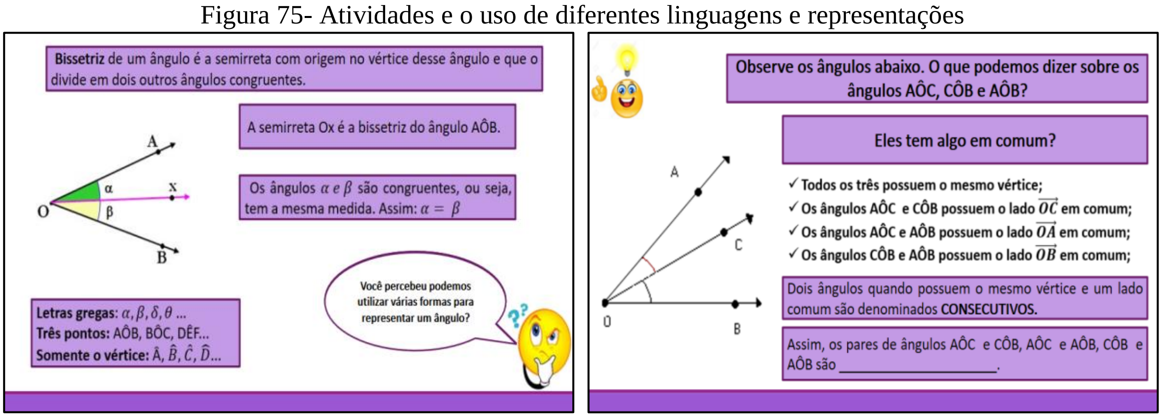
Figura 74- Situações-problemas do material sobre Ângulos.

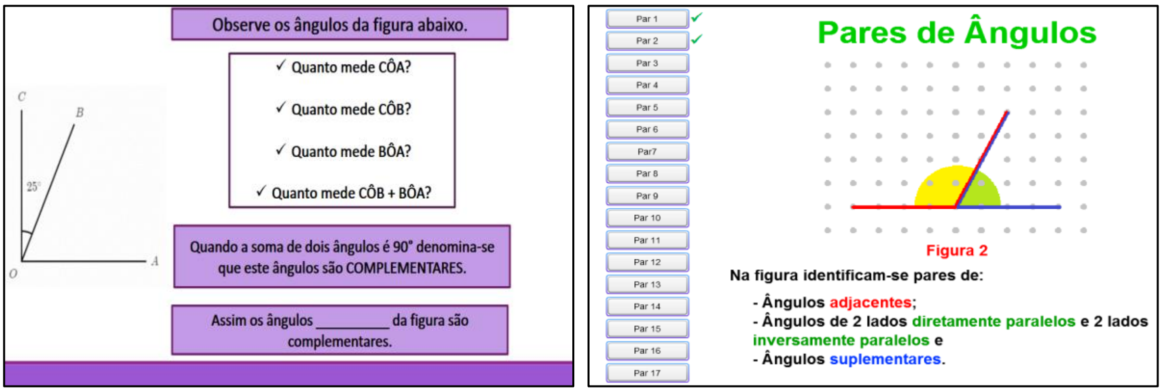


Fonte: a pesquisa.

No que se refere à l**inguagem**, entende-se que se alcançou uma alta idoneidade, pois buscou-se contemplar, no material, os diferentes tipos de linguagens, natural, gráfica e simbólica, por meio de explicações, imagens, figuras, nomenclaturas e símbolos matemáticos. Destaca-se que as atividades solicitavam que os estudantes respondessem aos questionamentos, em algumas situações, em língua natural e, em outras, utilizando a simbologia matemática pertinente partindo, por vezes, das observações das imagens ou a partir das conjecturas e do já aprendido no estudo. Desse modo, considerando atividades, as quais requeressem não só tratamentos, mas também conversões entre diferentes formas de representações, buscou-se possibilitar aos estudantes diferentes formas de se expressarem matematicamente. A seguir na figura 75, apresenta-se telas do material exemplificando algumas situações destacadas.

Figura 75- Atividades e o uso de diferentes linguagens e representações

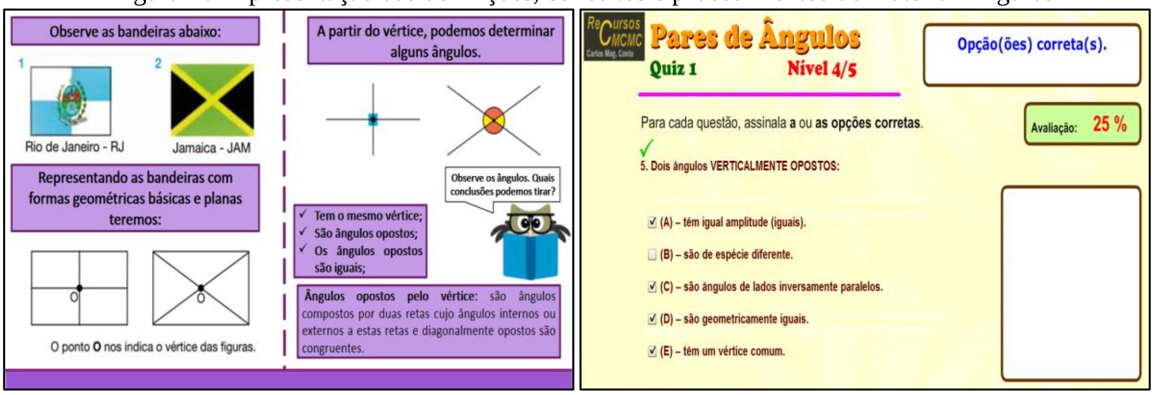




Fonte: a pesquisa.

Considerou-se o componente **regras** com uma alta idoneidade, uma vez que as definições, conceitos e proposições foram trabalhadas de acordo com o nível educativo dos estudantes. Buscou-se, sempre que possível, apresentar situações de contextualização ou atividades que introduzissem o estudante na temática e, partir destas situações, desenvolver e formalizar conceitos, definições e procedimento pertinentes. Ao longo do estudo são propostas, também, atividades que encaminhem para generalizações, nas quais os estudantes necessitam mobilizar o que foi aprendido, refletir e estabelecer conexões, o que abre espaço para a negociação de significados e a identificação de conflitos semióticos (GODINO, 2011). Na figura 76 apresentam-se telas do material de estudo que contemplam os indicadores deste componente.

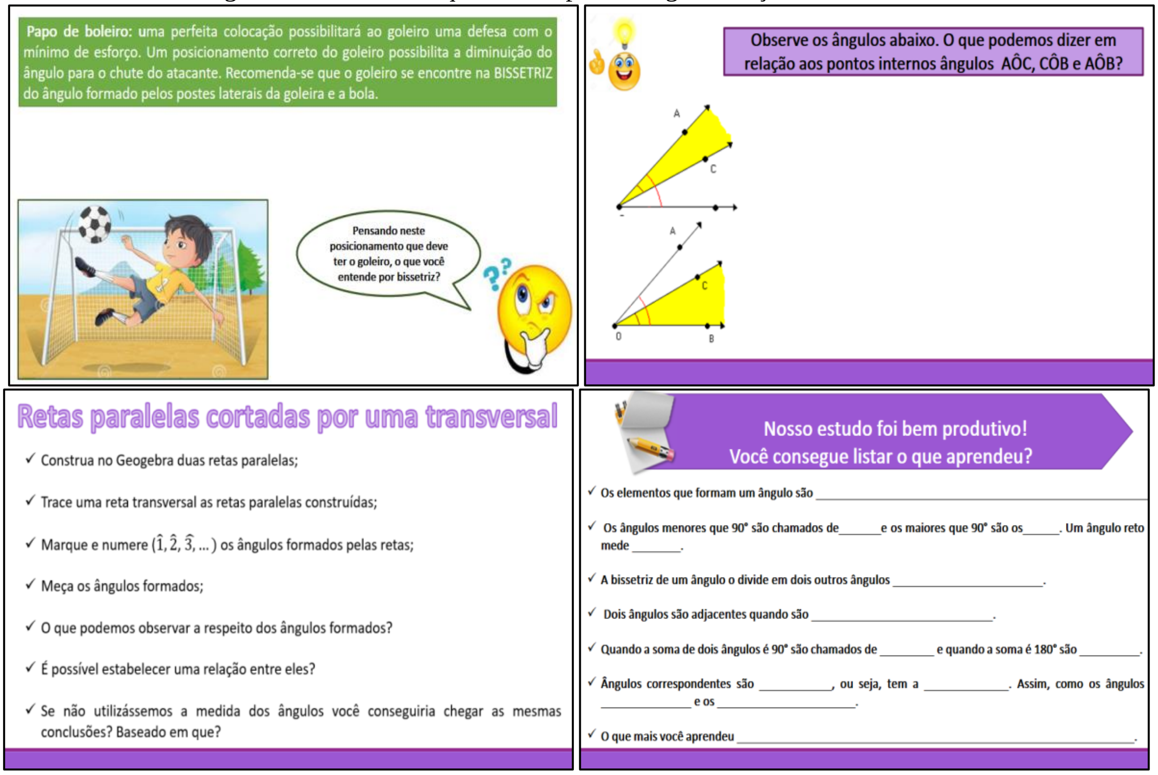
Figura 76- Apresentação das definições, conceitos e procedimentos do material Ângulos



Fonte: a pesquisa.

Entende-se que o componente **argumentos** teve uma representatividade alta neste material, pois apresentam-se situações e atividades as quais os estudantes devem argumentar, como quando da atividade que solicitava uma definição para a bissetriz de um ângulo, ou ainda a atividade sobre os ângulos formados em um feixe de retas paralelas cortadas por uma transversal (já destacados na figura 72). Ressalta-se que se buscou, sempre que possível, estimular e possibilitar, nas situações, o desenvolvimento da argumentação, conforme destacado nas telas do material da figura 77.

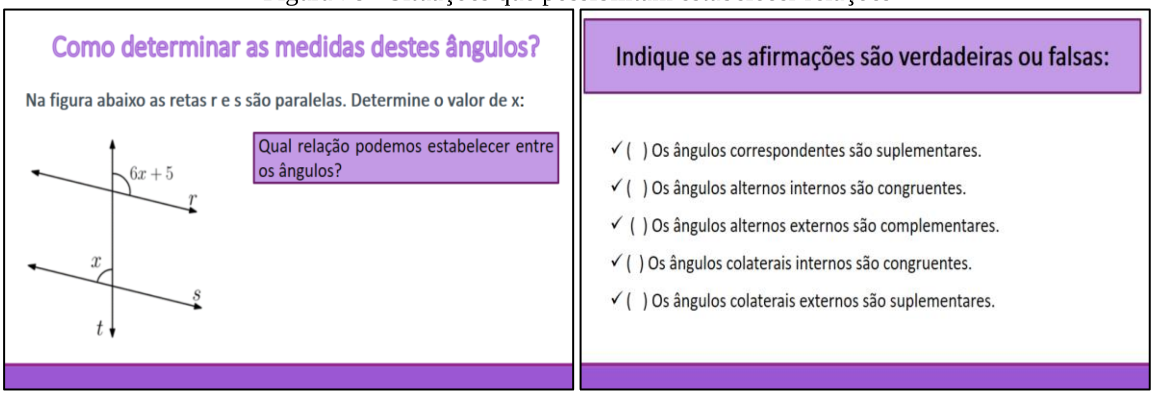
Figura 77- Atividades que contemplam a argumentação dos estudantes.



Fonte: a pesquisa.

Já no que se refere ao componente **relações**, observou-se uma fragilidade no que diz respeito a estabelecer relações com outras áreas da Matemática, uma vez que, no material, foi priorizado estabelecer relações entre os objetos em estudo, com o intuito de promover a compreensão dos mesmos, o que levou a considerar que uma idoneidade média foi alcançada neste componente. Na figura 78 apresenta-se exemplos de atividades que possibilitam aos estudantes estabelecer relações entre os objetos matemáticos em estudo.

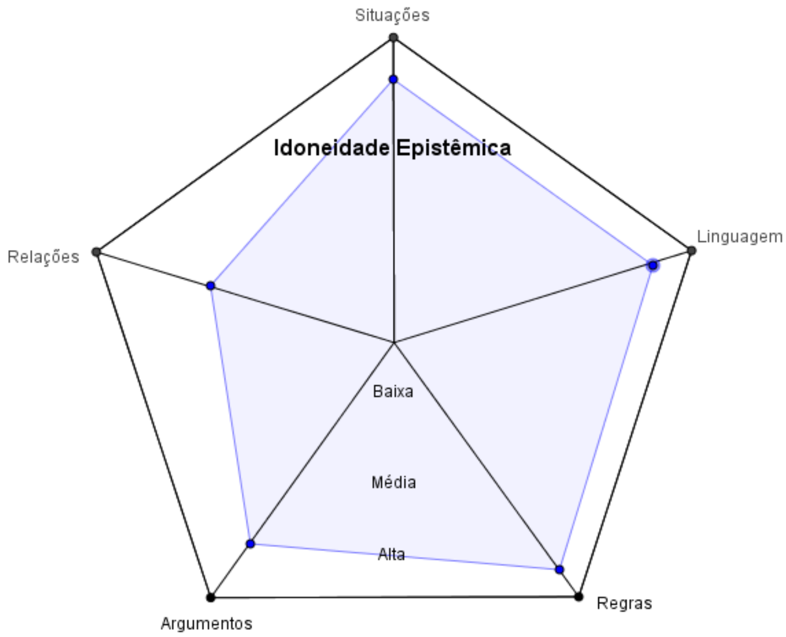
Figura 78 - Situações que possibilitam estabelecer relações



Fonte: a pesquisa.

De maneira geral, considera-se que o material proposto para o estudo de ângulos atende ao que é preconizado pelos componentes e indicadores epistêmicos sem, contudo, atingir uma idoneidade alta. A figura 79 destaca a representação do grau de idoneidade alcançado no material de estudo no que se refere a dimensão epistêmica.

Figura 79– Representação do grau de Idoneidade Epistêmica alcançado no material Ângulos



Fonte: a pesquisa.

A análise epistêmica produzida possibilitou um olhar para como o material de estudo referente a ângulos está estruturado, quais aspectos são privilegiados e quais estão fragilizados podendo ser melhorados. O material proposto contempla diferentes tipos de representações, sendo que definições, conceitos e proposições são trabalhadas a partir de uma linguagem acessível aos estudantes, sem perder o rigor matemático necessário. A produção de argumentos é estimulada por meio das atividades, a fim que os estudantes apresentem e articulem uma argumentação coerente em torno das questões propostas. Estas constatações levaram a considerar o material com uma alta idoneidade nas Situações-problemas, Linguagens, Regras e Argumentos (figura 79). Já no que se refere ao componente Relações, considerou-se os mesmos com uma idoneidade média, tendo em vista que os mesmos são contemplados satisfatoriamente no material, mas não plenamente. Embora se tenha buscado relacionar os objetos em estudos com imagens e mesmo identificar relações e diferenças existentes nas próprias figuras estudadas, não se possibilitou o estabelecimento de relações com conteúdos de outras áreas da Matemática.

A análise epistêmica aqui apresentada e discutida evidenciou a estrutura e a forma como o estudo sobre as Ângulos foi conduzido. No que segue será lançado um olhar para os recursos utilizados e as articulações estabelecidas como os mesmos, destacando suas potencialidades e fragilidades no material produzido, no âmbito de uma análise na perspectiva mediacional.

8.2.2 Ângulos: uma análise mediacional

A análise mediacional do material de estudos sobre ângulos considera os componentes e indicadores da FAM, os quais se referem a recursos e tempo didático. O objetivo é identificar as potencialidades e fragilidades do material e o grau de idoneidade alcançado, no que se refere aos recursos disponibilizados aos estudantes. No quadro da figura 80 apresenta-se a análise produzida.

Figura 80– Análise mediacional: Ângulos

Componentes	Indicadores	Análise	Grau de Idoneidade
Recursos Didáticos	a) evidencia-se a presença de materiais adequados ao desenvolvimento do processo de ensino e adaptados ao nível educativo a que se dirigem. b) há uma diversificação de recursos para auxiliar no processo de ensino, tais como: audiovisuais, material concreto, livros, entre outros. c) propõe-se a organização e experimentação de situações práticas.	- Considera-se que o material de estudo proposto está adequado ao nível educativo dos estudantes, pois utiliza linguagem acessível mantendo, porém, aspectos formais quando pertinentes. - No que se refere aos recursos utilizados destaca-se fortemente a presença das tecnologias digitais, por meio da estrutura do próprio material, utilização de imagens, vídeos, animações, atividades online, links externos, construções no software Geogebra e objetos de aprendizagem, os quais privilegiam a manipulação dos objetos de forma interativa. - As animações foram utilizadas com objetivo de ilustrar e indicar aos estudantes como medir e construir ângulos com transferidor e como traçar a bissetriz de um ângulo (figura 81). - No material de estudos foram utilizadas atividades *online* a fim de possibilitar aos estudantes praticar por meio de situações e exercícios o que estava sendo estudado. Assim as atividades contemplaram situações desde a medição de ângulos até a solução de situações problemas (figura 83). - Os objetos de aprendizagem, assim como as atividades *online*, também contam com situações e exercícios, porém se diferenciam pela manipulação de objetos, como uso de um transferidor online, por exemplo. Os objetos de aprendizagem contemplam também, atividades complementares de estudo, apresentando exemplos por meio de representações e associações (figuras 84). - Destaca-se, também, que as construções de ângulos e bissetrizes são propostas indicando tanto a utilização de régua e compasso como o software Geogebra, pois considera-se necessário para o estudante	**Alta**

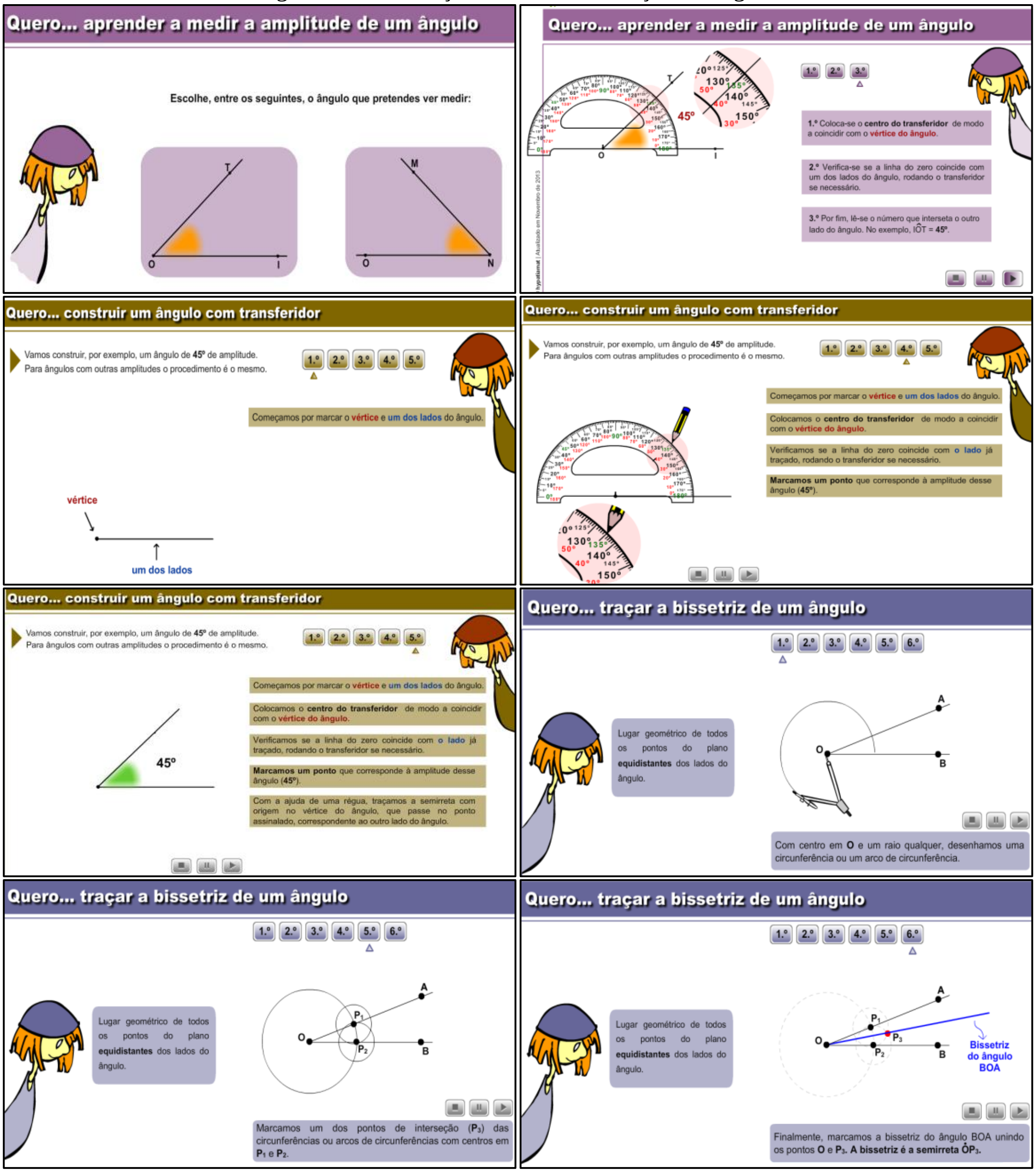
		tanto uma manipulação concreta destes instrumentos como a habilidade de construir com uso das tecnologias, considerando os conceitos, procedimentos e proposições estudados (figura 85).	
Tempo didático	a) apresentam-se situações de ensino que contemplam diversas modalidades (estudo pessoal, cooperativo, tutorial, presencial). b) evidencia-se organização do tempo para intervenção docente, trabalho autônomo dos estudantes e momentos de discussão. c) dedica-se um tempo maior para o desenvolvimento dos conhecimentos, caso os estudantes apresentem dificuldade de compreensão.	- A proposta de estudo se caracteriza por um estudo presencial, que privilegia o trabalho individual, porém, a interação entre os estudantes bem como com a pesquisadora se fazem presentes. - Considera-se que o material possibilita desenvolver a autonomia nos estudantes, uma vez que os mesmos se tornam responsáveis pelo seu estudo, estabelecendo seu ritmo de estudo e aprendizagem. - Conforme já destacado na análise anterior, não há, no material, atividade especifica que incentive a discussão entre os estudantes, porém estas foram surgindo no desenvolvimento dos estudos, tanto entre os estudantes como com a pesquisadora, sendo também, nestes momentos, trabalhados as dificuldades, dúvidas e conflitos semióticos apresentados pelos estudantes.	**Média**

Fonte: a pesquisa

A partir da análise apresentada no quadro da figura 80, é possível perceber que os componentes e indicadores estão representados no material. No que se trata dos recursos, considerou-se uma alta idoneidade, pois buscou-se apoio tanto nas tecnologias digitais, recorrendo a recursos como imagens, animações, atividades online, objetos de aprendizagens e *links* externos, como em atividades de construções concretas com régua e compasso contemplando, assim, diversas atividades que articuladas e conduzidas ao do desenvolvimento teórico matemático do material de estudo, objetivaram possibilitar aos estudantes vivenciar diferentes formas de aprendizagem.

As animações foram utilizadas no material para indicar aos estudantes como medir e construir ângulos e bissetrizes com os instrumentos adequados, como transferidor, régua e compasso. Na figura 81 são apresentadas telas das animações, a título de exemplo.

Figura 81 – Animações sobre a construção de ângulos.



Fonte: a pesquisa[46].

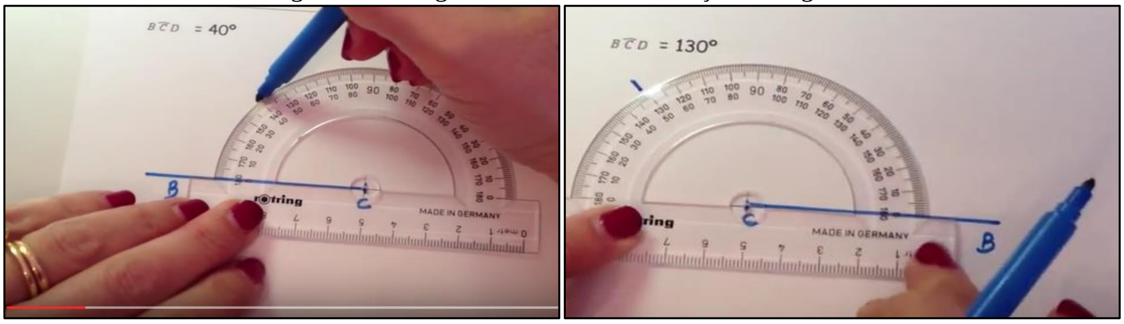
Considera-se que as animações utilizadas favorecem a aprendizagem, pois as mesmas apresentam, de forma interativa, os caminhos para a medição e construção de ângulos e bissetrizes, o que pode possibilitar aos estudantes assistir e construir junto com a animação, registrando os passos se acharem necessário. Entende-se que a utilização das animações se mostraram mais vantajosas do que apenas listar os procedimentos a serem realizados, pois com

46 http://www.hypatiamat.com/medir_ampl_angulo.php. http://hypatiamat.com/construir_angulo.php. http://www.hypatiamat.com/bissetriz_hypatia.php

a animação é possível que os estudantes acompanhem os exemplos e analisem se o que estão fazendo está correto.

Visando complementar o que foi apresentado nas animações, consta no material um vídeo que apresenta mais exemplos sobre a construção de ângulos com o uso de transferidor, conforme destacado pela figura 82.

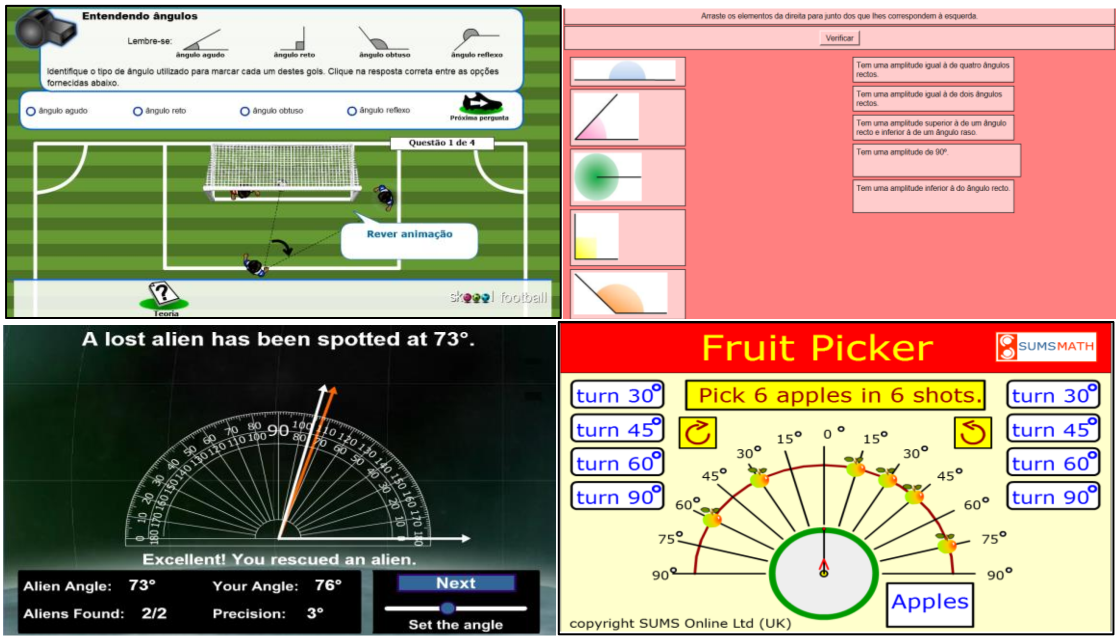
Figura 82 - Imagens do vídeo de construção de ângulos

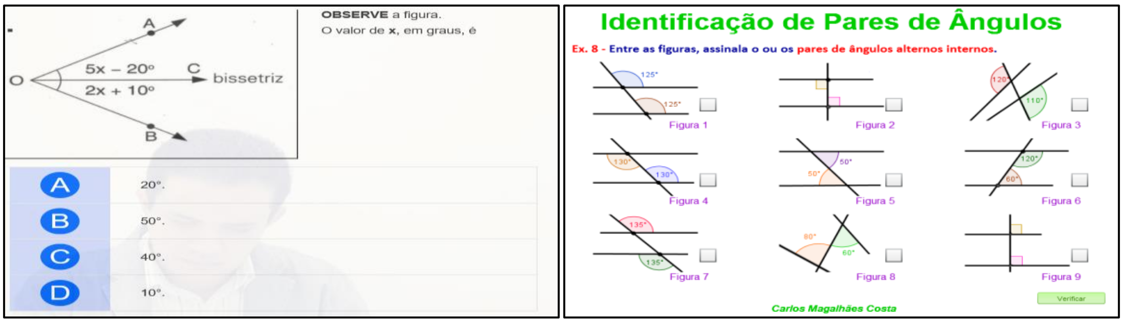


Fonte: disponível em: https://www.youtube.com/watch?v=5GeDKUhyhO8.

As atividade *online* tiveram um papel importante no material de estudo, pois foi por meio delas que os estudantes exercitaram o que estava sendo estudado. Na figura 83 apresenta-se exemplos de atividades utilizadas.

Figura 83– Atividades online do material sobre Ângulos





Fonte: a pesquisa[47].

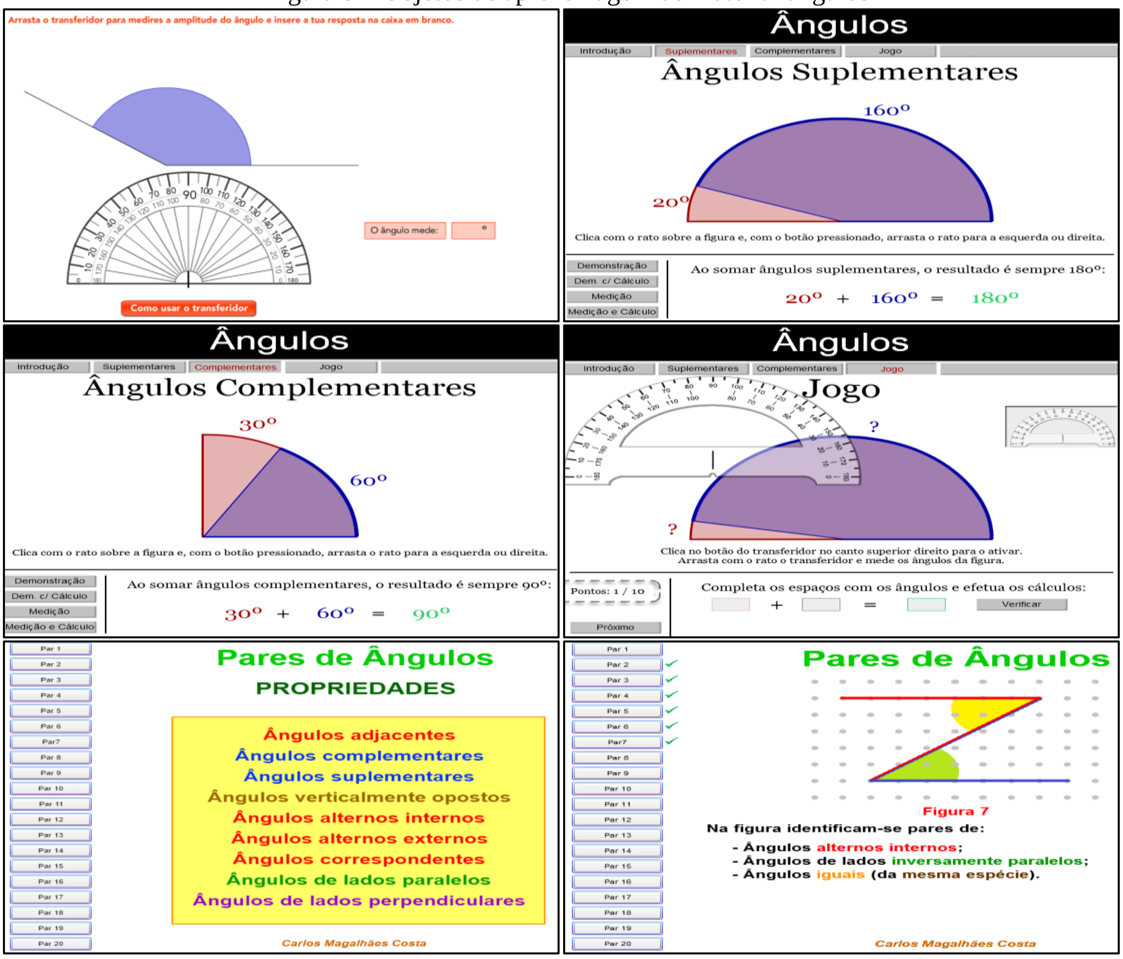
As imagens apresentadas na figura 83 permitem perceber que o material de estudos contempla um conjunto de atividades *online* diversificadas, estruturado a partir de associações entre representações e definições/propriedades, de estimativas, estratégias, resolução direta e identificações. Considera-se que essas diversas formas de apresentar as atividades e tratar o objeto matemático em estudo, podem favorecer a aprendizagem dos estudantes, uma vez que são trabalhadas diferentes situações e representações, os quais consideram aspectos e abordagens distintas.

Neste sentido, com as atividades (figura 83) abordou-se a classificação dos ângulos partindo de uma representação a partir da qual os estudantes deveriam associar a nomenclatura. Em determinadas atividades era apresentado o valor da medida do ângulo e, em outras, a associação deveria ser realizada por meio da identificação da abertura na representação relacionando com as ideias de menor, igual ou maior a 90º. Esta noção da representação sem ter a medida, também é trabalhada em atividade *online* onde é apresentado um valor para o ângulo e os estudantes devem indicar uma representação por estimativa. Outra atividade a ser destacada, se refere às estratégias estabelecidas pelos estudantes para resgatar maças que se localizavam em determinado ângulo, devendo utilizar o menor número de movimentos possíveis. Ressaltam-se, também, as atividades de resolução onde os estudantes deveriam descobrir os valores desconhecidos dos ângulos formados por uma bissetriz, assim como, as de identificação de pares de ângulos a partir das propriedades e definições estudadas. Considera-se, assim, que o conjunto de atividades *online* possibilitam aos estudantes desenvolver as habilidades de observar, analisar e tomar decisões baseadas no estudo realizado e nas informações fornecidas pela atividade, na busca de uma solução para a situação proposta.

[47] http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/19479/PlayFootball_Lesson1.swf?sequence
http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT5/13_ANG/JOGOS/01_JOG_ALIEN_ANGLES.swf
http://www.ajudaalunos.com/Quiz_mat/angulos_html/angulos_amplitu.htm
http://www.fruitpicker.co.uk/activity/
http://www.auladoguto.com.br/exercicios-online-de-matematica/teste-online-bissetriz-de-um-angulo
http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT5/13_ANG/PROG_A/ID_Pares_Ang/ID_Pares_Ang.as

Outro recurso que merece destaque no material de estudos sobre Ângulos são os objetos de aprendizagem, pois, além de parte deles apresentarem atividades interativas que privilegiam a manipulação de objetos, como um transferidor *online*, por exemplo, foram utilizados objetos de aprendizagem como recursos complementares para o estudo. Em tais objetos são apresentados os conceitos, definições e propriedades, discutindo outros exemplos e representações, oportunizando aos estudantes retomar e ter acesso a novos elementos que poderiam, ainda, não terem sido abordados no material, o que, entende-se, contribuiu para uma ampliação da visão e a compreensão da noção de ângulo, identificação e representação de ângulos complementares, suplementares, adjacentes, alternos e opostos pelo vértice. Na figura 84 apresentam-se telas dos objetos de aprendizagem mencionados.

Figura 84–Objetos de aprendizagem do material ângulos

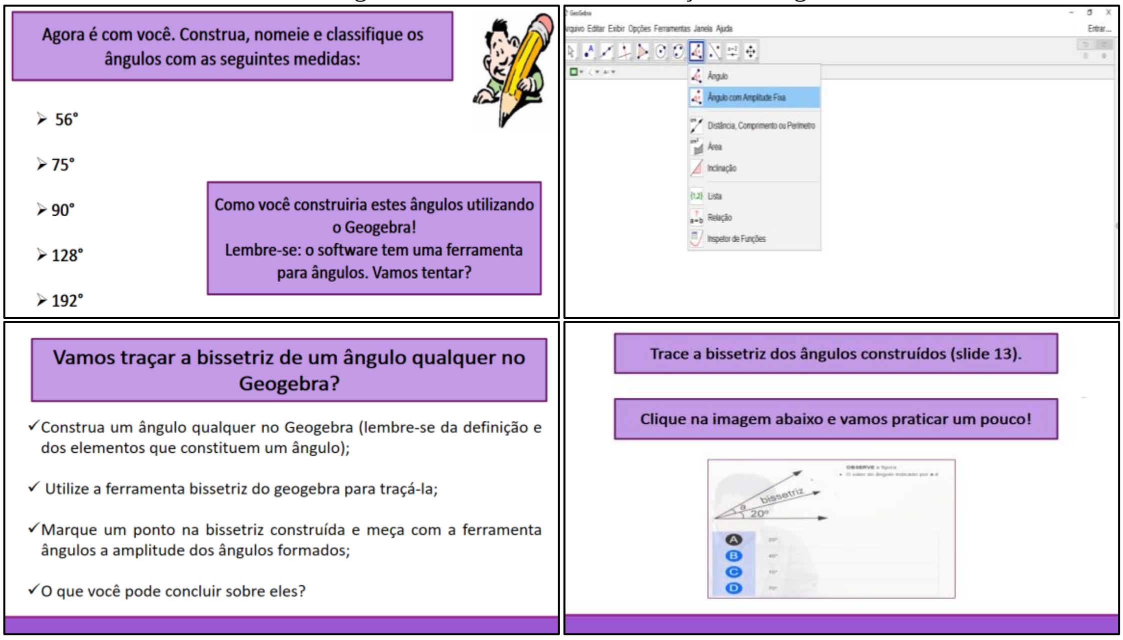


Fonte: a pesquisa[48].

48 http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT5/13_ANG/PROG_A/Medicao_Angulos_Transferidor=LEYA.swf
http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT5/13_ANG/PROG_A/ang_comp_supl=cc.asp
http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT5/13_ANG/PROG_P/pares_ang_Prop=cm.as

Entende-se como parte necessária no estudo de ângulos atividades que privilegiem as construções do objeto em estudo, porém, considera-se importante contemplar tanto atividades com régua, compasso e transferidor, como construções em *software* de geometria dinâmica, no caso, mais especificamente no Geogebra. Na figura 85 apresenta-se telas do material de estudo as quais destacam estas atividades.

Figura 85- Atividades de construções de ângulos



Fonte: a pesquisa.

Conforme apresentado na figura 85, foi contemplado no material de estudo construções de ângulos de diferentes amplitudes e bissetrizes, realizados tanto com régua, transferidor e compasso, como por meio da utilização do *software* Geogebra. Ressalta-se que, mesmo que o *software* conte com ferramentas específicas as quais possibilitam a construção de ângulos e bissetrizes, é necessário que o estudante tenha compreendido o conceito envolvido e as propriedades dos objetos matemáticos em estudo, para conseguir manipular adequadamente as ferramentas. Nesse contexto, o Geogebra pode ser utilizado, também, como régua e compasso eletrônico, onde os objetos podem ser construídos de forma similar quando do uso de régua e compasso tradicionais. Assim, destaca-se a importância de trabalhar as diferentes formas de construção conjuntamente explorando as propriedades e definições, com régua e o compasso tradicionais e a precisão e agilidade do *software*.

Assim, considera-se que a análise produzida permitiu refletir sobre os recursos utilizados no material de estudos Ângulos, sendo possível afirmar que os mesmos são adequados ao nível dos estudantes, assim como, são pertinentes para desenvolver os conceitos, definições, propriedades, construções e estabelecer as relações existentes. Ressalta-se a diversidade de recursos utilizados, como atividades *online*, objetos de aprendizagem, animações e construções no Geogebra e com régua, transferidor e compasso. Considera-se que os recursos selecionados e articulados no material oportunizaram aos estudantes um estudo diferenciado, potencializando, principalmente, as habilidades de construção dos objetos em estudo, observação e identificação de propriedades, a fim de estabelecer as relações pertinentes, como também, as diferenças evidenciadas.

No que segue será lançado um olhar para os significados produzidos pelos estudantes frente aos significados pretendidos com o material de estudo, visando analisar o desempenho dos mesmos e identificar os possíveis conflitos semióticos apresentados.

8.2.3 Ângulos: uma análise cognitiva

Apresenta-se no quadro da figura 86 a análise cognitiva produzida do material de estudos ângulos considerando tanto os componentes da FAC, raciocínio lógico, leitura/interpretação e análise/síntese, como também, os componentes epistêmicos já discutidos na análise sob a perspectiva epistêmica, porém agora com o foco na produção de significado por parte do estudante e não no material proposto.

Para evidenciar a presença destes componentes e indicadores foram apontados os significados pretendidos com o material de estudo, ou seja, o que se espera que os estudantes sejam capazes de fazer/compreender/significar, a partir do conjunto de atividades e situações propostas. Tomando estes significados estabelecidos como referência, busca-se evidências nos significados declarados pelos estudantes, considerando aqui toda e qualquer manifestação, seja escrita ou falada, correta ou não, na busca por estabelecer o grau de idoneidade nesta dimensão, bem como identificar possíveis conflitos.

Figura 86- Análise cognitiva: significados pretendidos x declarados sobre Ângulos

Componentes Epistêmicos-cognitivos	**Significados Pretendidos**	**Significados Declarados**	**Grau de idoneidade**
Situações- problemas	-Reconhecer a representação de ângulos em situações-problemas e ações cotidianas. -Identificar elementos de um ângulo a partir de situações-problemas. - Classificar a amplitude de ângulos a partir de situações-problemas. -Resolver as situações-problemas propostas, utilizando os conceitos,	- Os estudantes não apresentaram dificuldades em reconhecer, identificar e classificar ângulos a partir de situações-problemas, conforme destacado na figura 87. -A maioria dos estudantes conseguiu resolver corretamente as situações propostas, conforme destacado nas figuras 88, 89 e 90.	**Alta**

	procedimentos e argumentos necessários.		
Linguagens	- Reconhecer as representações de ângulos, bissetrizes, ângulos complementares, suplementares, opostos pelo vértice, adjacentes, colaterais, alternos e correspondentes. - Nomear ângulos utilizando linguagem natural e simbólica. - Utilizar linguagem matemática adequada na solução das situações-problemas.	- Os estudantes não apresentaram dificuldades em reconhecer ângulos, bissetrizes, ângulos complementares, suplementares e opostos pelo vértice. Já no que se refere aos demais, como adjacentes, correspondentes, colaterais e alternos quando eram questionados necessitavam retomar as representações e anotações realizadas no rascunho ou voltar ao próprio material, mas, por fim, conseguiam responder corretamente. - Quanto à utilização da linguagem matemática, os estudantes não apresentaram dificuldades, se expressando corretamente e adequadamente a situação proposta, que por vezes solicitava resposta em língua natural e, em outras, por meio da simbologia (figura 91).	**Alta**
Regras (definições, proposições, procedimentos)	- Identificar ângulos a partir de propriedades. - Medir adequadamente a amplitude de ângulos; - Construir ângulos com os instrumentos necessários; - Construir ângulos utilizando o Geogebra. - Identificar a bissetriz de um ângulo. - Compreender a definição de bissetriz. - Construir a bissetriz de um ângulo com os instrumentos necessários; - Construir a bissetriz de um ângulo utilizando o geogebra. - Resolver corretamente as atividades propostas utilizando as definições e procedimentos estudados.	- Os estudantes conseguiram mobilizar as definições e procedimentos estudados a fim de identificar, medir e construir ângulos e bissetrizes não apresentando dificuldades e manipulando adequadamente tanto os instrumentos de desenho como o Geogebra. Mais especificamente, na construção de ângulos com o transferidor, os estudantes apresentaram maiores dificuldades quando o ângulo indicado era maior que 180º, nos demais todos construíram corretamente (figura 92). - No que se refere à classificação dos ângulos quanto a sua amplitude e a identificação dos mesmos a partir de representações, os estudantes tiveram grande facilidade e apresentaram conhecimentos prévios sobre as temáticas. - No que diz respeito a bissetriz, os estudantes conseguiram compreender sua definição, estabelecer sua relação com um ângulo e resolver as atividades propostas (figura 94).	**Alta**
	- Conjecturar em torno da definição de bissetriz.	- No que se refere a proposta dos estudantes conjecturarem em torno de uma possível definição para bissetriz, apenas dois	

Argumentos	- Argumentar sobre a congruência dos ângulos formados pela bissetriz. - Produzir argumentos e relações em torno dos ângulos formados por retas paralelas cortadas por transversal;	estudantes buscaram refletir e apresentar uma definição com suas palavras. - Já em torno da argumentação a partir das construções de bissetriz realizadas no Geogebra, somente um aluno se expressou. - Somente três estudantes apresentaram argumentações aos questionamentos propostos na atividade sobre os ângulos formados por retas paralelas cortadas por transversal.	**Baixa**
Relações	-Compreender as relações entre ângulos (complementares, suplementares, opostos pelo vértice, adjacentes, colaterais, alternos e correspondentes). - Compreender as diferenças dos ângulos (complementares, suplementares, opostos pelo vértice, adjacentes, colaterais, alternos e correspondentes).	- A partir das resoluções dos estudantes foi possível perceber que os mesmos conseguiram estabelecer as relações ente ângulos, apresentando maior facilidade para os ângulos opostos pelo vértice, complementares e suplementares (figura 95). - No que se refere a diferenciar ângulos, entende-se que os estudantes compreenderam as diferenças por meio do estudo das propriedades, definições e na atividade de construção de ângulos em retas paralelas cortadas por transversal (figura 96).	**Média**
Raciocínio Lógico	- Estimar a medida de ângulos a partir de representações sem a amplitude. - Classificar ângulos a partir de representações sem a amplitude. - Estabelecer estratégias e realizar operações com ângulos para solucionar situações.	- Considera-se que o conjunto de atividades *online*, propostas no material, estimularam os estudantes a trabalhar com estimativas e estabelecer estratégias para a solução das atividades, sendo que os mesmos apresentaram desempenho satisfatório neste sentido. - No que se refere às atividades que não apresentavam as medidas dos ângulos e os estudantes deveriam estimar e classificar a partir da representação, os mesmos tiveram um ótimo desempenho (figura 97).	**Alta**
Leitura/Interpretação	- Conseguir ler e interpretar adequadamente as informações e situações propostas no material. - Identificar, analisar e compreender as propriedades existentes em ângulos complementares, suplementares, opostos pelo vértice, adjacentes,	- Entende-se que os estudantes leram com atenção o que estava proposto no material, na maioria das vezes interpretaram corretamente o que deveria ser realizado, quando tinham dúvidas perguntavam à pesquisadora. - Considera-se que os estudantes conseguiram interpretar e analisar satisfatoriamente as propriedades existente entre ângulos complementares, suplementares, opostos pelo vértice, adjacentes, colaterais, alternos e	**Média**

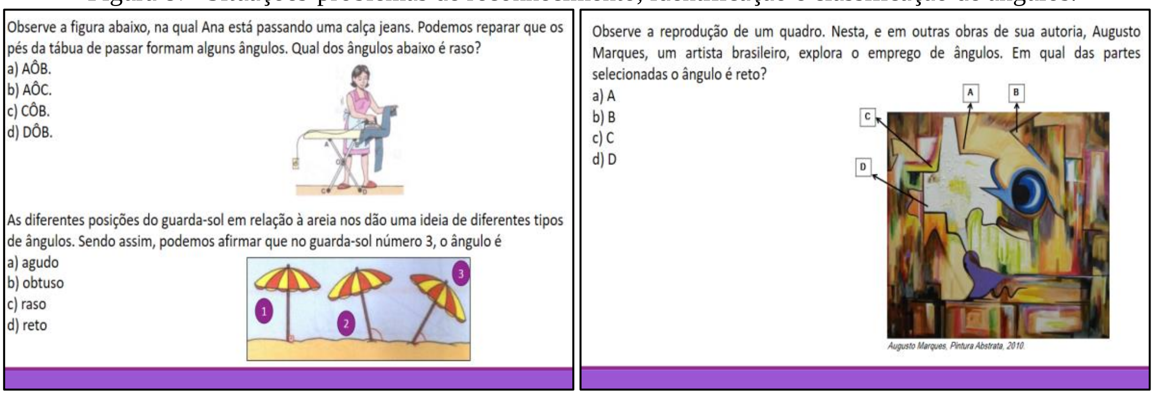
	colaterais, alternos e correspondentes.	correspondentes, porém sempre que a atividade exigia que os mesmos mobilizassem as definições e relações estabelecidas entre eles, os mesmos retomavam seus registros ou a representação no material.	
Análise/Síntese	- Realizar síntese durante e ao final do estudo, conseguindo identificar e expressar o que foi aprendido.	- Este componente se apresentou como um dos mais difíceis para os estudantes, pois os mesmos não estão habituados a ter que produzir uma análise do estudo realizado ou produzir uma síntese. Assim, organizou-se ao final do material questionamentos visando estimular os estudantes a argumentar sobre o que foi estudado. Nesse aspecto apresentaram um bom desempenho respondendo as questões, porém a última questão que era aberta e solicitava que os estudantes indicassem o que aprenderam, somente dois responderam e apenas indicaram os nomes dos tópicos como "ângulos, bissetriz ..."	**Média**

Fonte: a pesquisa.

Com base no que foi apresentado no quadro de análise, é possível perceber que os significados declarados pelos estudantes se aproximaram dos pretendidos.

Considera-se que o componente situações-problemas obteve uma alta idoneidade, pois os estudantes conseguiram resolver corretamente as situações propostas, principalmente no que se refere a reconhecer, identificar e classificar ângulos a partir de situações-problemas, nas figura 87 e 89 apresentam-se um conjunto de situações propostas e, em seguida, a análise das respostas dos estudantes frente as mesmas.

Figura 87- Situações-problemas de reconhecimento, identificação e classificação de ângulos.



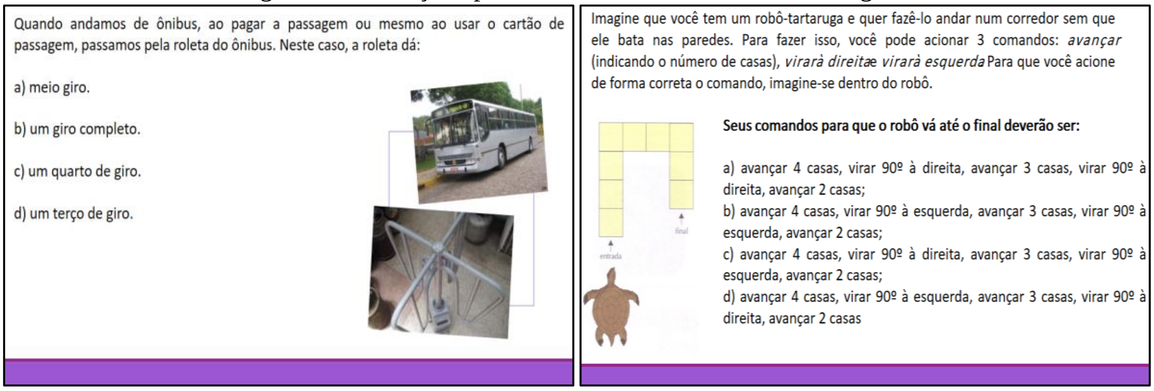
Fonte: a pesquisa.

No que se refere a primeira situação apresentada buscava-se que os estudantes identificassem o ângulo CÔB como raso. Apenas o aluno03 indicou incorretamente o ângulo raso como sendo o AÔB, os demais estudantes responderam corretamente.

A segunda situação (figura 87), na qual os estudantes deveriam classificar o ângulo formado pelo guarda-sol 3, todos os indicaram corretamente como sendo agudo. Destaca-se, aqui, um aspecto considerado importante no desempenho dos estudantes: mesmo no início do estudo já conseguiam identificar a classificação do ângulo por uma representação mais genérica, não necessitando ser apresentada a medida precisa do mesmo.

A terceira situação (figura 87), na qual são destacados ângulos que se apresentam em uma obra de arte sendo solicitado o reconhecimento do ângulo reto, os estudantes não apresentaram dificuldades, indicando corretamente o ângulo "D", sendo que apenas o aluno07 respondeu que seriam "todos os ângulos". Conjectura-se que o estudante pode não ter observado com atenção a imagem , identificando que todos os ângulos eram retos não avaliando (por comparação) com precisão e ainda a resposta dada não constava entre as opções apresentadas.

Figura 88 - Situações-problema do material de estudos Ângulos

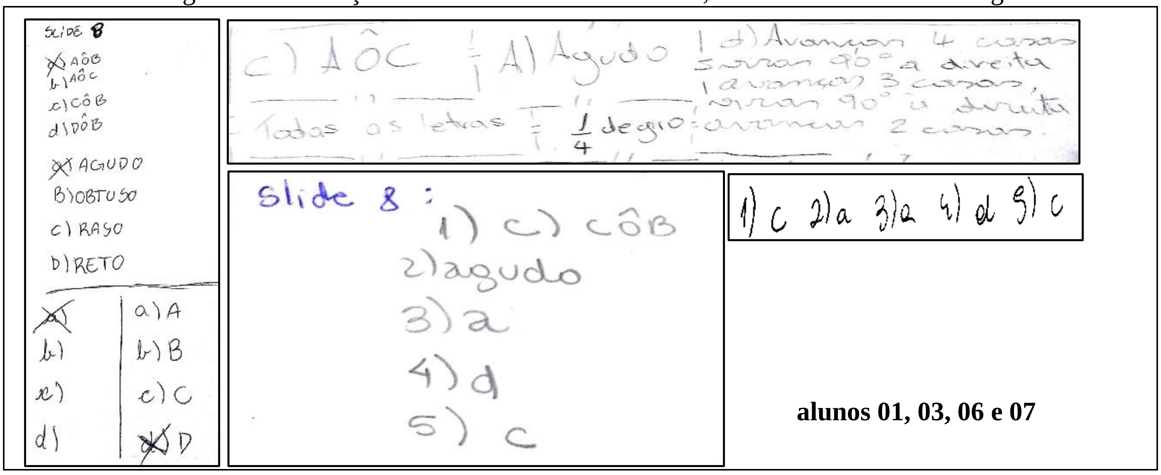


Fonte: a pesquisa.

Com a situação da roleta do ônibus (figura 88), buscou-se identificar se os estudantes compreendiam a noção de ângulo, a partir da ideia de giro. As respostas apresentadas foram todas corretas se atribuindo a esta facilidade que os estudantes tiveram, o fato da situação (o giro) fazer parte do cotidiano da maioria deles, tanto que a pesquisadora presenciou os mesmos comentando "*vamos lembrar o movimento que a roleta faz, fizemos isso agora pouco*" [referindo-se a utilização da roleta na entrada da escola].

Já com a situação do robô-tartaruga (figura 88) objetivava-se verificar se os estudantes compreenderam a noção de ângulo associada a direção, mais uma vez todos os estudantes responderam corretamente. Com esta atividade foi possível verificar que os estudantes reconhecem e identificam um conjunto de orientações corretamente, mas, pondera-se sobre a necessidade do enfrentamento de situações onde seja necessário que os próprios estudantes descrevam um caminho a ser percorrido, utilizando a linguagem adequada, o que não foi apresentado no material, identificando-se, aí, uma fragilidade em relação a situações propostas. Na figura 89 apresenta-se a produção de estudantes para ilustar os aspectos dicutidos e destacados na análise na análise das situações (figura 87 e 88).

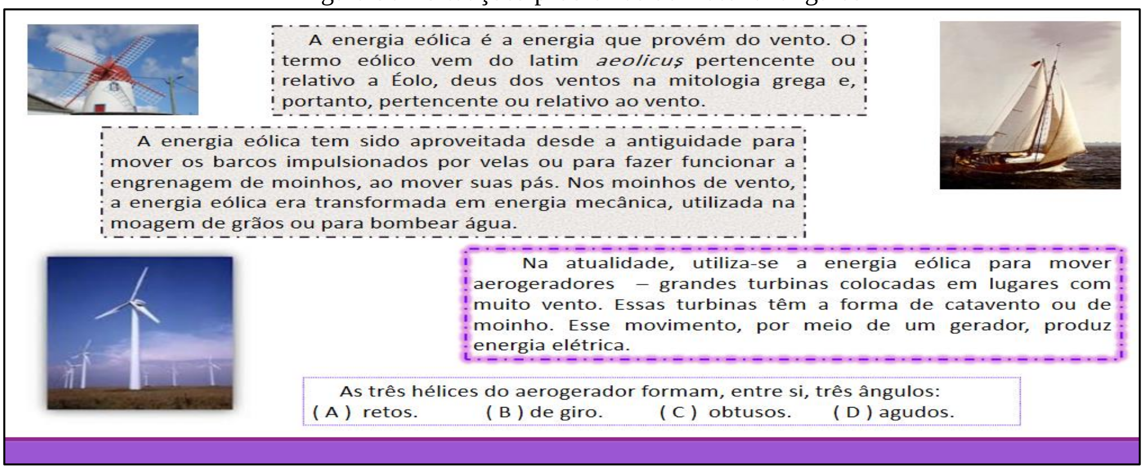
Figura 89 - Produção dos estudantes ao reconhecer, identificar e classificar ângulos.



Fonte: a pesquisa.

Apresentam-se, na figura 90, uma situação-problema do material de estudos, na qual os estudantes deveriam mobilizar os conceitos e definições discutidos no material, para conseguir responder a questão.

Figura 90 - Situações-problemas do material ângulos



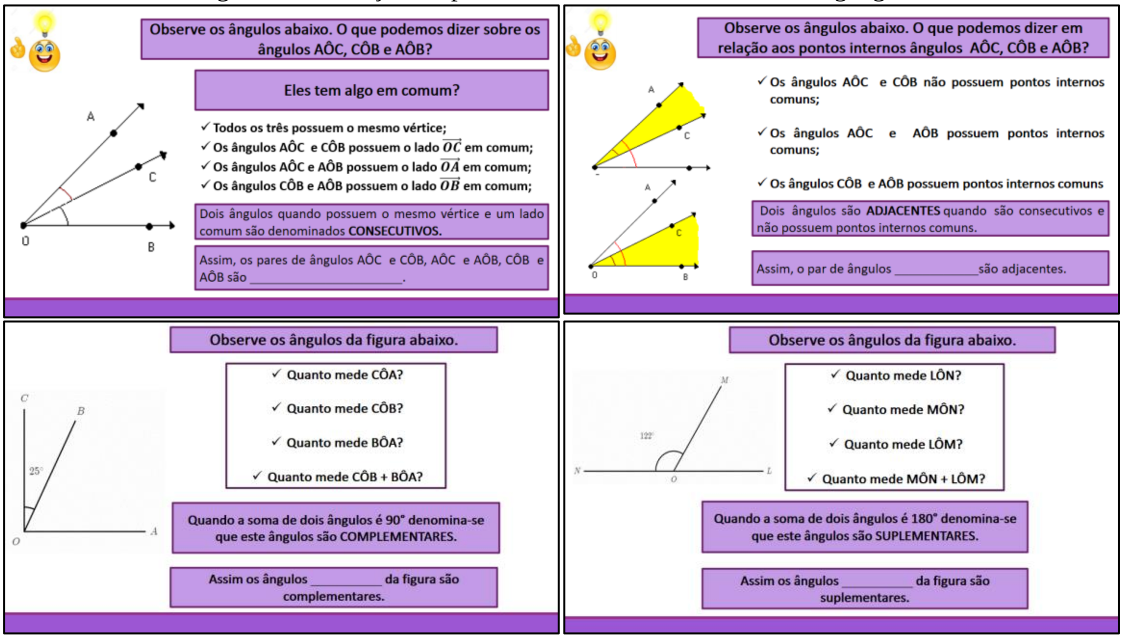
Fonte: a pesquisa.

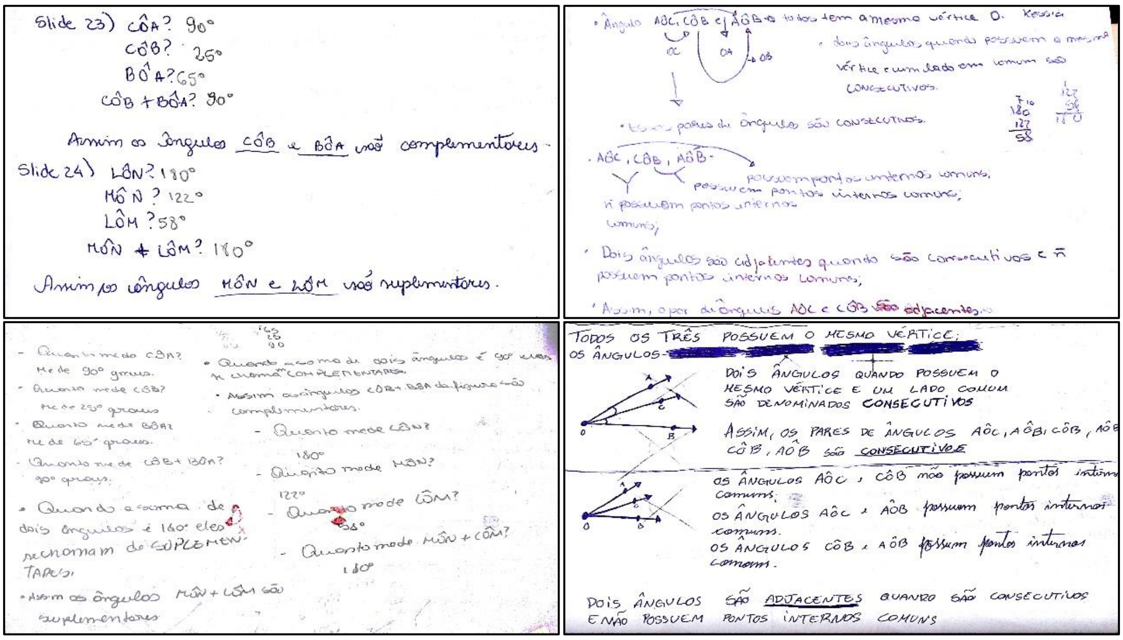
As respostas indicadas pelos estudantes para a situação (figura 90) foram os itens b e c. Entende-se que os que indicaram como resposta o item b, de giro, olharam para o conjunto de imagens, com destaque para o moinho e o aerogerador cujo movimento, de fato, está relacionado a giro, mas que não era o que o problema solicitava. Fica evidenciado, assim, a importância da leitura e interpretação na resolução de problemas, bem como a necessidade do enfrentamento de situações que suscitem habilidades que vão além do estabelecimento de relações e entendimentos baseado em percepção visual e manifestações intuitivas. Entende-se que a necessidade da leitura, da análise do que é apresentado relacionado com o que está posto como questionamento, da validação do que foi apontado como resposta a partir da retomada da situação, são movimentos essenciais no processo no processo de apropriação de conhecimentos e procedimentos.

A partir do que foi apresentado e discutido por meio das situações e produções dos estudantes, considera-se que os significados pretendidos para o componente **Situações-problemas** foram fortemente contemplados e atingidos nos significados declarados pelos estudantes, justificando assim a idoneidade alta atribuída neste componente.

O componente **Linguagen**s também foi considerado com um grau de idoneidade alto, pois entende-se que os estudantes conseguiram utilizar adequadamente diferentes tipos de linguagem (natural, simbólica e gráfica) respondendo as situações propostas e interpretando corretamente as representações gráficas apresentadas. Na figura 91 apresenta-se telas de algumas situações e as respostas dos alunos 01, 02 e 03.

Figura 91– Situações explorando as diferentes formas de linguagens.





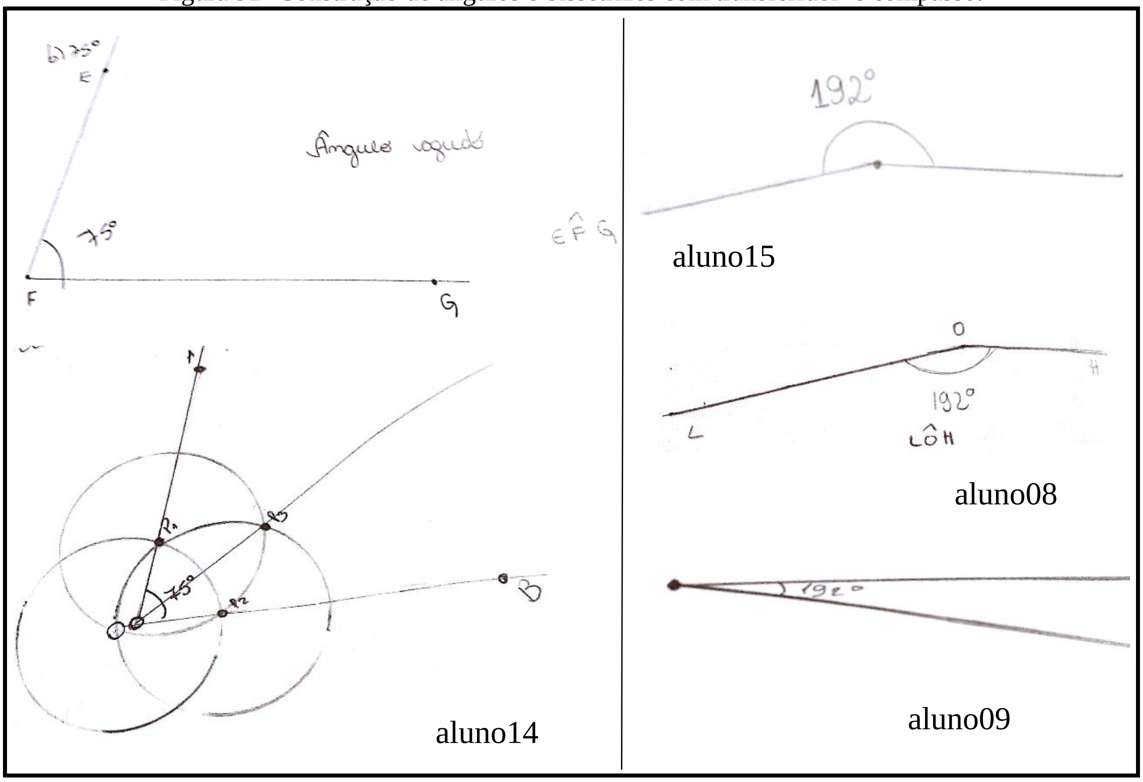
Fonte: a pesquisa.

A partir dos registros dos alunos 01, 02 e 03 (figura 91) é possível perceber que os mesmos utilizam a linguagem adequada para responder aos questionamentos apresentados nas situações. Destaca-se a resolução do aluno 02 no sentido que o mesmo buscou utilizar um esquema com setas para indicar os pares de ângulos consecutivos, assim como para destacar características e propriedades observadas por meio da representação gráfica dos ângulos do próprio material. Ressalta-se nas resoluções dos estudantes as estratégias e as formas de registros utilizados, afim de compreender o que está sendo estudado. O aluno 01 destaca as partes consideradas por ele mais importantes e o que deve ser respondido. O aluno 02 busca esquemas tanto para registrar aspectos mais teóricos como para responder ao questionamentos, mas também utiliza a estratégia de copiar a íntegra do que está posto no material, no que se refere a linguagem natural e simbólica. Já o aluno 03 além de copiar o que está nos materiais, sente a necessidade de registrar também as representações gráficas, ou seja, os desenhos e imagens utilizadas.

Destacaram-se, aqui, três estudantes, porém estas formas de registro representam do conjunto dos estudantes, os quais se caracterizaam, em geral, por registrar em linguagem natural o que está posto nos materiais, a maioria de forma literal, outros destacando também as representações gráficas e figurais e alguns casos, como o do aluno 02 buscam esquemas para o registro. Neste sentido, entende-se que os estudantes buscam criar linguagens próprias, na busca do estabelecimento de conexões entre o material de estudo, os significados que estão atribuindo aos mesmo e suas estratégias de resolução.

O componente **Regras** também foi considerado com uma idoneidade alta, pois os estudantes conseguiram mobilizar as definições, proposições e procedimentos estudados a fim de construir representações de ângulos e bissetrizes e resolver as situações propostas. No desenvolvimento das atividades os estudantes lançaram mão de diferentes ferramentas: a régua e compasso tradicionais e *software* Geogebra, além de apresentar soluções algébricas quando as atividades assim solicitavam. As figuras 92 e 93 destacam-se produções dos estudantes (significados declarados) que evidenciam a presença dos significados pretendidos para o componente regras.

Figura 92- Construção de ângulos e bissetrizes com transferidor e compasso.

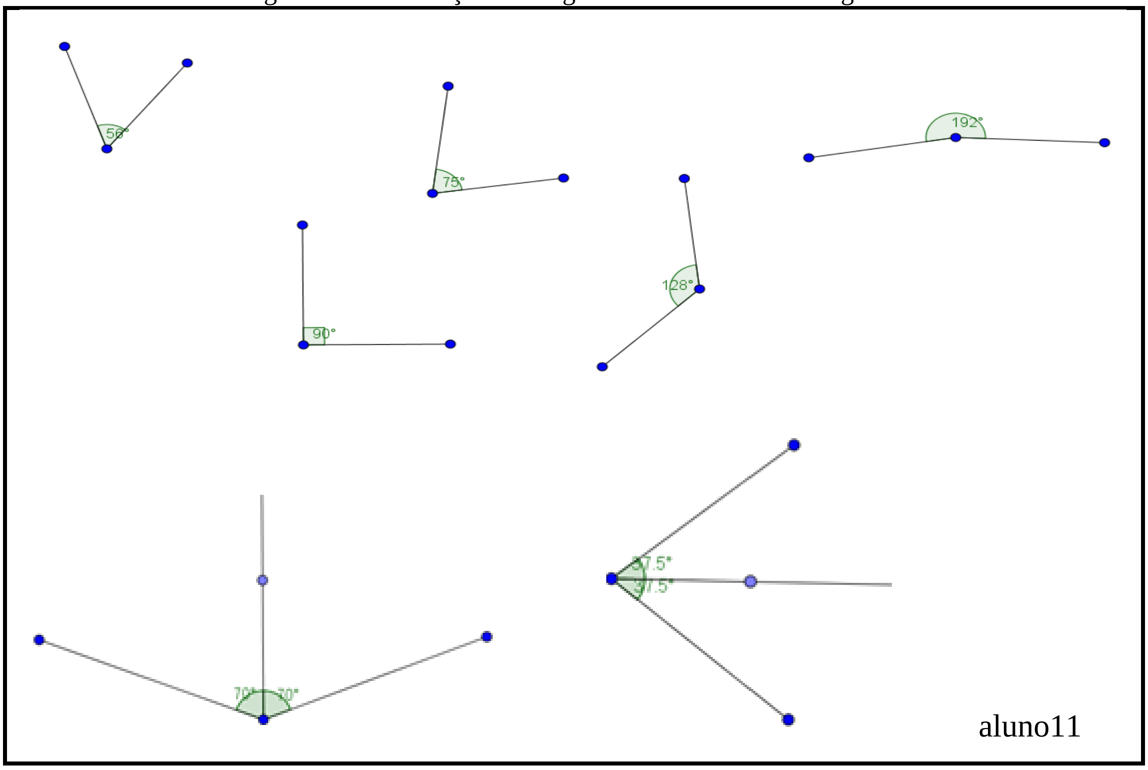


Fonte: a pesquisa.

A figura 92 apresenta as construções dos estudantes 08, 09, 14 e 15. A produção do aluno14 foi destacada a fim de evidenciar a facilidade com que os estudantes apresentaram na construção e classificação de ângulos menores que 180º, assim como para as bissetrizes dos referidos ângulos. Ainda, na produção do aluno14, chama atenção a construção realizada com régua e compasso que, em termos de representação, se iguala a obtida com régua e compasso eletrônico (no caso o próprio *software* Geogebra). Quando se usa a régua e compasso, normalmente, se marcam pequenos arcos de circunferência para marcar as intersecções desejadas, que levam a construção da bissetriz; porém, ao se utilizar o software se constroem as circunferências que podem ser “escondidas”, se desejado. Já as produções dos alunos 15, 08 e 09 ressaltam os possíveis conflitos semióticos encontrados nas construções de ângulos maiores que 180º. O aluno 15 construiu corretamente o ângulo, porém não nomeou e nem classificou o mesmo. O aluno 08 construiu corretamente o ângulo de 192º, demonstrando a compreensão que o ângulo se refere a meia volta mais 12º, mas no momento de marcar a amplitude, considerou o ângulo LÔH igual a 168º, tomado no sentido horário. Conjectura-se, aqui, que a classificação de ângulos em reto, agudo e obtuso (relacionado ao de medida igual, maior ou menor que 90º) aliado a atividades que, via de regra, colocam em foco ângulos com tais medidas, acrescentando-se a estes o ângulo raso (180º), pouco explorando ângulos que tenham medida superior a 180º, levam os estudantes a somente se referirem ou utilizarem ângulos com medidas entre 0º e 180º. Tal conjectura estende-se, também, para a representação apresentada pelo aluno09, que desenhou um ângulo de 12º desconsiderando o 180º.

No que segue, na figura 93 destacam-se as construções do aluno11 no Geogebra, dos ângulos e bissetrizes solicitados no material de estudos. Esperava-se que os estudantes, espontaneamente, conferissem se as representações construídas com régua, compasso e transferidor eram semelhantes as obtidas com o Geogebra (quando tinham a mesma medida), porém, a maioria dos estudantes não realizou a comparação, apesar da pesquisadora ter instigado a fazê-lo. Ressalta-se que nenhum estudante apresentou dificuldades nas construções no Geogebra.

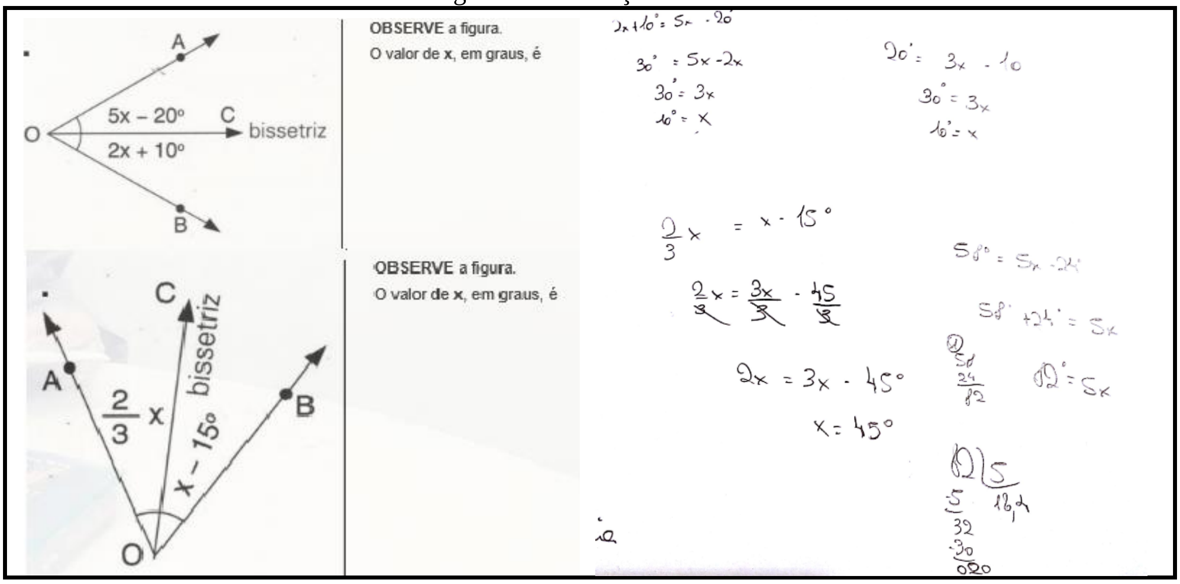
Figura 93 - Construções de ângulos e bissetrizes no Geogebra.



Fonte: a pesquisa.

Ainda referente a regras, na figura 94 apresenta-se a resolução do aluno05 para a atividade online referente ao cálculo de um valor desconhecido, utilizando a definição de bissetriz. A partir da resolução do estudante é possível perceber que o mesmo mobiliza e aplica a definição de bissetriz, buscando determinar o valor da incógnita. Nesta atividade, de modo geral, os estudantes não apresentaram dificuldades em mobilizar a definição de bissetriz, mas sim, em alguns momentos, em resolver as equações decorrentes da aplicação da mesma, aspecto já destacado no componente situações-problemas.

Figura 94 - Produção aluno05



Fonte: a pesquisa.

Destacou-se na figura 94 a resolução do aluno05 para as atividades online referente ao cálculo do valor desconhecido de x, utilizando a definição de bissetrizes. A partir da resolução do estudante é possível perceber que o mesmo consegue mobilizar e aplicar a definição de bissetriz, a fim de resolver a situação e determinar o valor da incógnita desconhecida. Esta atividade em geral os estudantes não apresentaram dificuldades em utilizar a definição de bissetriz, mas sim em alguns momentos em resolver as equações decorrentes da mesma, aspectos semelhantes aos já destacados no componente situações-problemas.

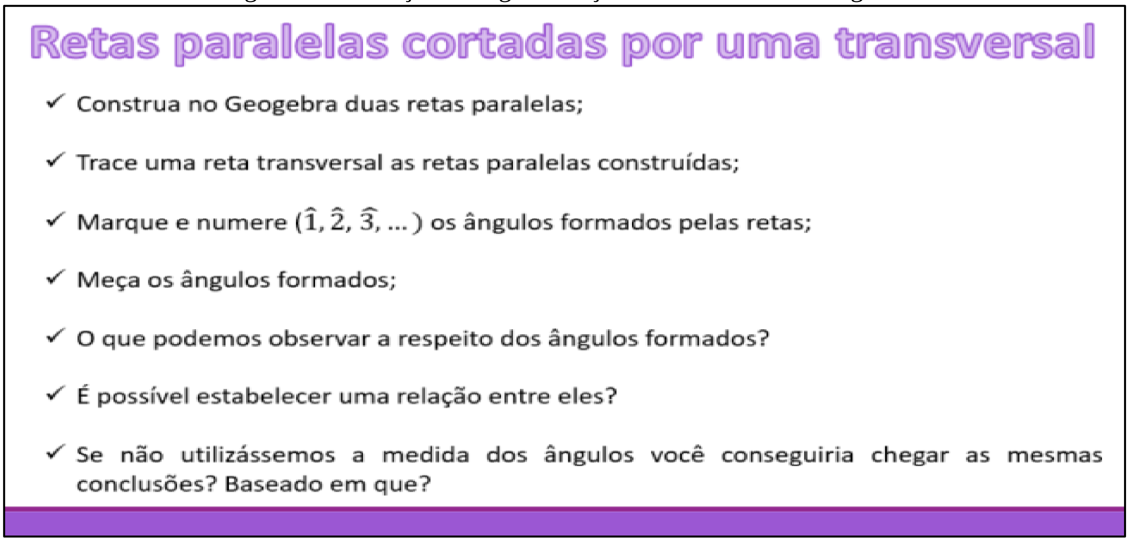
Ressalta-se que o componente regras e os significados pretendidos para o mesmo, se aproximaram satisfatoriamente dos significados declarados pelos estudantes, o que justificou sua idoneidade alta, principalmente no que se refere as construções realizadas com transferidor e a mobilização de definições e procedimentos a fim de resolver uma situação proposta.

No que se refere aos componentes **argumentos** considerou-se a idoneidade baixa, pois somente três estudantes apresentaram argumentações em torno das atividades propostas, o aluno 01, 04 e 07. Destaca-se o aluno 01, no sentido de sempre buscar escrever algo, em algumas situações não conseguindo apresentar a ideia, noção ou definição completa, mas busca encontrar uma argumentação própria, por exemplo para a definição de bissetriz o estudante conjecturou que “*bissetriz é uma reta que divide ao meio determinado ângulo”*, neste caso há um pequeno conflito, sendo que o correto seria utilizar o termo semirreta, porém a ideia principal de uma bissetriz está correta, pois quando se divide ao meio temos duas partes iguais, ou seja dois ângulos congruentes. O outro estudante que esboçou uma definição foi o aluno 04, porém bem sucinto *“bissetriz é o meio do ângulo”* novamente a essência está correta, mas incompleta.

Na atividade seguinte que propõem construir a bissetriz de um ângulo qualquer e solicita conclusões sobre os ângulos formados, somente o aluno 01 as apresentou, já melhorando sua argumentação em relação a primeira definição “*posso concluir que a bissetriz vai sempre dividir o ângulo ao meio e os outros ângulos formados terão a mesma medida, serão congruentes”.*

A outra atividade que buscava estimular a produção de argumentos se refere aos ângulos formados em retas paralelas cortadas por transversais (figura 95).

Figura 95 - Situação de argumentação no material sobre ângulos

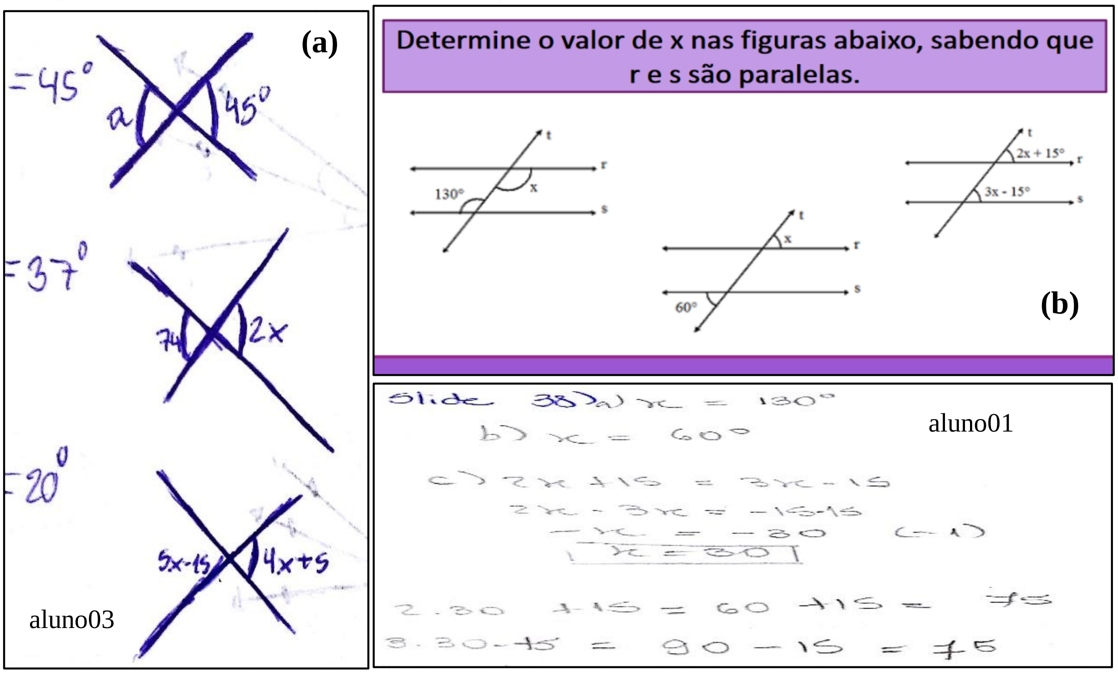


Fonte: a pesquisa.

Após os estudantes construírem os ângulos formados pelas retas, conforme indicado na atividade (figura 95) questionou-se sobre o que era possível observar dos ângulos formados. O aluno 01 indicou “*possuem mesma medida e são opostos pelo vértice*”, o aluno 04 “*formam juntos um ângulo de 360º*” e o aluno 07 representou “*1=3, 2=4, 5=7, 8=6*”. A partir das respostas dos alunos 01 e 07 é possível observar que os mesmos conseguem identificar os ângulos como opostos pelo vértice, logo com a mesma medida. A argumentação do aluno 04 está correta, porém não contribui para as relações a serem estabelecidas. O segundo questionamento se refere a possível relação entre os ângulos formados, o aluno 01 “*por serem* *cortados por uma mesma transversal possuem mesma medida os de fora e os de dentro*”, o aluno 04 “*são opostos pelo vértice”* e o aluno 07 não indicou nenhuma resposta. O último questionamento indaga se caso não houvesse medidas, se conseguiriam chegar as mesmas conclusões e embasados em que. Os três estudantes indicaram que conseguiriam por serem opostos pelo vértice, o aluno 07 ainda apresentou a seguinte conclusão complementando a primeira resposta dele “ *2=6, 4=8, 1=7, 3=5” e “ 2=6=8=4, 1=7=3=5*”. Apesar de somente estes três estudantes apresentarem argumentações e conjecturas, considerou-se satisfatório o que os mesmos conseguiram produzir, tendo em vista suas limitações neste sentido, e que se atribuiu, em parte, por não estarem habituadas a atividades com estas características.

No que se refere a **relações** entende-se que foi alcançada uma idoneidade média, já que os significados pretendidos foram alcançados em parte pelos estudantes. Os mesmos apresentaram um desempenho satisfatório ao trabalhar com ângulos opostos pelo vértice, complementares, suplementares e mesmo quando o par de ângulo destacado é congruente, resolvendo corretamente as atividades propostas. Porém, quando necessitavam mobilizar propriedades, comparando e identificando ângulos alternos e colaterais apresentaram maiores dificuldades, conforme destacado na figura 96.

Figura 96 - Relações estabelecidas entre ângulos opostos pelo vértice, alternos e correspondentes

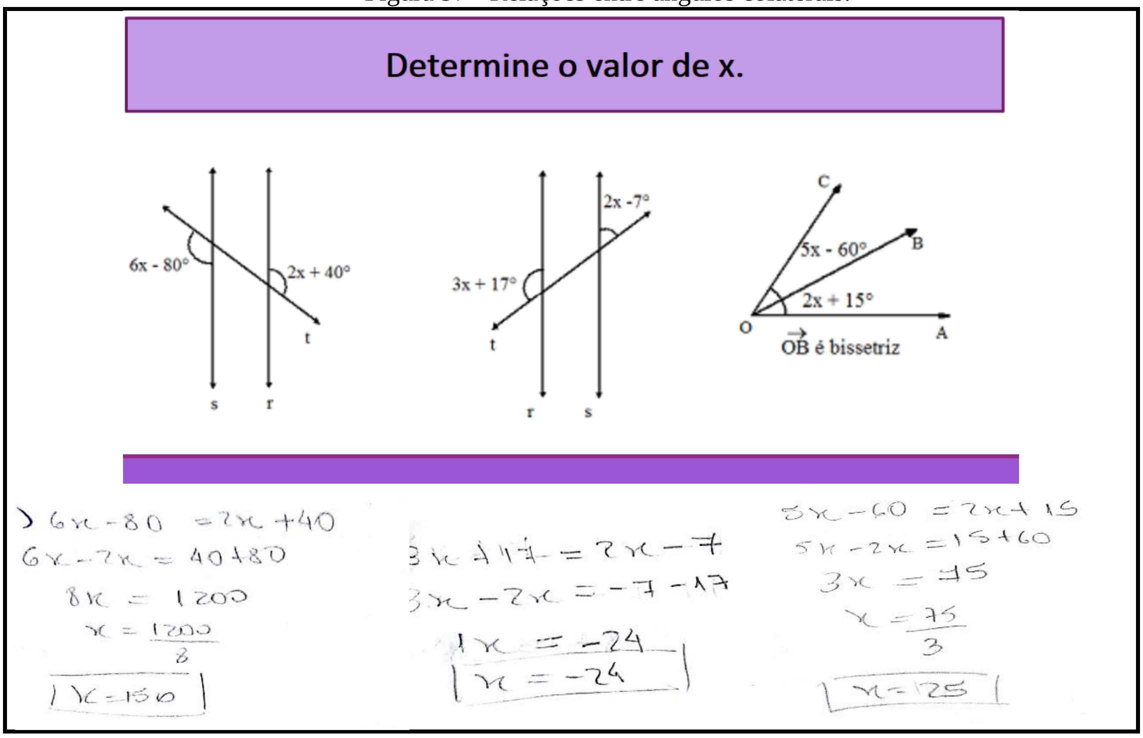


Fonte: a pesquisa.

A produção do aluno03 (figura 96a) se refere a atividade que solicitava que os estudantes determinassem o valor de x, sendo que, para conseguir responder corretamente deveriam estabelecer a relação de que os ângulos são opostos pelo vértice e a partir disso, determinar o valor do termo desconhecido. A atividade foi resolvida corretamente por todos os estudantes, incluindo o aluno03 mencionado, que, entretanto, não apresentou o desenvolvimento da questão, estando, porém, as relações estabelecidas corretas, assim como o valor encontrado para x. Destacou-se a produção do aluno03 porque, mais uma vez, o estudante sentiu a necessidade de lançar mão de representações auxiliares para resolver as questões.

A segunda atividade destacada (figura 15b) tem por objetivo que os estudantes determinem o valor de x nos ângulos indicados, para o que é necessário estabelecer as relações entre pares de ângulo alternos e pares correspondentes. Destaca-se, aqui, a resolução do aluno01, o qual indica corretamente a congruência entre os ângulos x e 130º e x e 60º. Já a terceira situação, envolvendo ângulos correspondentes, do mesmo modo o estudante estabeleceu a congruência, igualou as duas expressões para determinar o valor de x e a resolveu corretamente apresentando, ainda, a substituição do valor de x para conferir se realmente eram iguais. Nestes casos em que os estudantes deveriam estabelecer uma relação de igualdade entre o par de ângulos indicado, os mesmos não apresentaram dificuldades, as quais surgiram quando as relações deveriam ser baseadas em propriedades e definições, conforme exemplificado na figura 97.

Figura 97 - Relações entre ângulos colaterais.



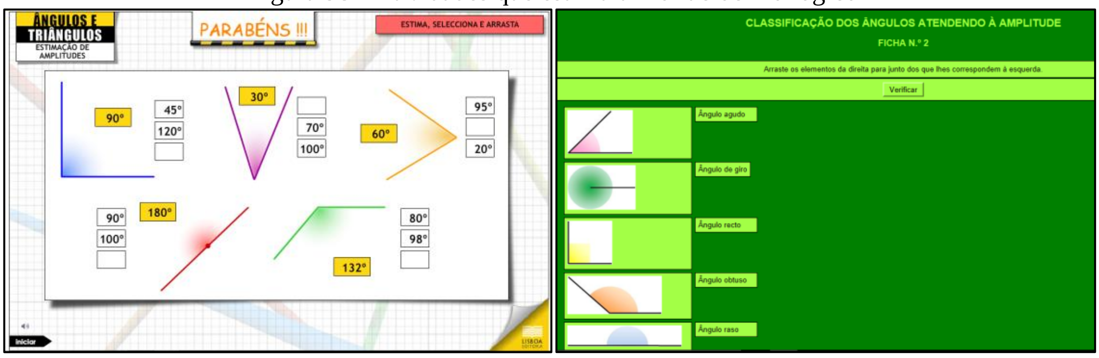
Fonte: a pesquisa.

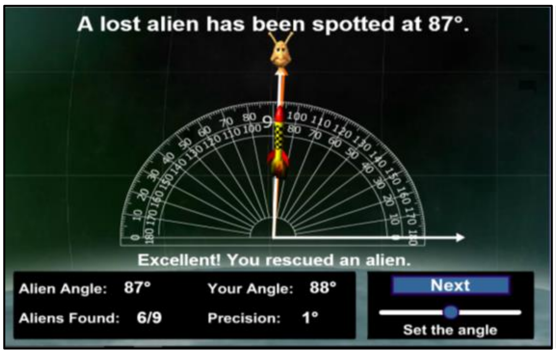
A produção posta em destaque na figura 97 refere-se, novamente, a do aluno01, em continuidade a análises posteriores de soluções apresentadas pelo mesmo e que foram resolvidas corretamente. A primeira situação foi resolvida corretamente pelo estudante, relacionando os ângulos como alternos externos, portanto congruentes. Já na segunda situação o estudante relacionou os ângulos de forma incorreta, uma vez que os tratou também como congruentes, sendo os mesmos, porém, colaterais, logo suplementares, e a relação correta a ser estabelecida deveria ser $3x + 17^{o} + 2x - 7^{o} = 180^{o}$. Na terceira atividade, a relação a ser estabelecida se refere a congruência dos ângulos formados pela bissetriz, a qual foi corretamente utilizada pelo estudante. Conjectura-se, aqui, sobre uma possível generalização feita pelo estudante das relações entre os ângulos formados a partir de paralelas cortadas por transversal, a de que as relações são sempre de igualdade, o que se identifica como um possível conflito semiótico.

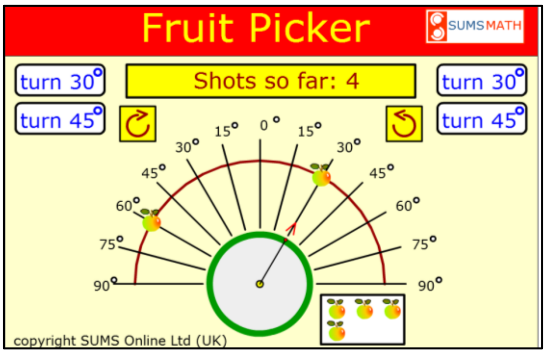
Ressalta-se que as produções aqui destacadas representam os caminhos percorridos pelos estudantes na resolução das atividades, onde foi possível perceber a existência de conflitos no que se refere a diferenciar e relacionar ângulos alternos, colaterais e correspondentes, justificando, assim, a idoneidade média estabelecida para o componente relações.

No que se refere ao componente **raciocínio lógico** entende-se que o conjunto de atividades estimulam o desenvolvimento do mesmo, pois são propostas nas mesmas, além de atividades que envolvem o estabelecimento de relações e a necessidade de se estabelecerem conjecturas, situações que envolvem o estabelecimento de estimativas a partir de representações, informações e propriedades. O desempenho dos estudantes nestas atividades foi muito positivo, pois conseguiram mobilizar o que foi estudado a fim de resolver as atividades propostas. Destaca-se na figura 98, exemplos das atividades mencionadas.

Figura 98 - Atividades que estimulam o raciocínio lógico







Fonte: a pesquisa.

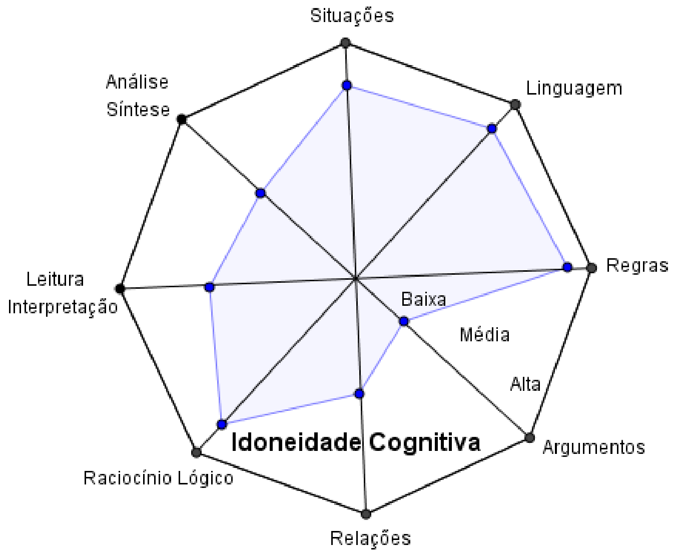
Sobre o componente **Leitura e Interpretação**, entende-se que os estudantes apresentaram um bom desempenho (idoneidade média), conseguindo interpretar, analisar e utilizar, satisfatoriamente, definições e as possíveis relações existentes entre ângulos complementares, suplementares, opostos pelo vértice, adjacentes, colaterais, alternos e correspondentes. Porém, frente a necessidade de mobilizarem definições, propriedades e relações, muito frequentemente, retomavam seus registros ou a representação no material, o que, se entende como indicativo de que as mesmas ainda não estavam consolidadas.

O componente **Análise e Síntese** foi considerado com uma idoneidade média, pois apesar dos estudantes terem respondido corretamente a maioria dos questionamentos ao final do estudo, já discutidos nas análises realizadas nos componentes, quando se apresentou uma questão mais aberta, sobre o que mais os estudantes tinham aprendido, grande parte dos estudantes não respondeu e os que indicaram resposta foram bem sucintas e ficaram em torno da indicação dos "nomes" do que tinha sido tratado no material, como *" ângulos, bissetriz, agudo, reto..."*. Esperava-se que os estudantes conseguissem produzir uma síntese do material, articulando e destacando o que de fato aprenderam, como por exemplo, "*os ângulos podem ser classificados em agudos, retos e obtusângulos, sendo os agudos menores que 90º, os retos iguais e os obtusângulos maiores que 90º*".

A partir do que foi apresentado e discutido, considera-se que a análise produzida permitiu um olhar para o que se pretendia e o que foi efetivamente alcançado pelos estudantes, possibilitando observar, analisar e refletir sobre as fragilidades e as potencialidades tanto do material (significados pretendidos) como dos significados apresentados pelos estudantes, sendo possível, também, identificar as possíveis tensões/relações e conflitos semióticos nos significados atribuídos pelos estudantes. Assim, entende-se que os significados pretendidos foram em parte alcançados, o que, entende-se, leva a visão que, no conjunto não se tem uma alta idoneidade se fazendo presente, porém, de maneira satisfatória nos componentes epistêmicos e cognitivos, exceto nos Argumentos conforme já destacado.

Assim, buscando sintetizar e ilustrar a análise produzida, criou-se uma representação octogonal (figura 99), onde os vértices são os componentes e o polígono inscrito refere-se ao grau de idoneidade alcançado frente aos significados pretendidos e declarados, no âmbito da idoneidade cognitiva, no que se refere ao estudo de ângulos.

Figura 99– Representação do grau de Idoneidade Cognitiva alcançado com o material Ângulos



Fonte: a pesquisa.

8.2.4 Ângulos: síntese das análises

As análises produzidas e discutidas sobre o material de estudos Ângulos permitiram refletir sobre a forma que o estudo foi conduzido, os recursos utilizados, os significados pretendidos, a partir da elaboração do material, e os declarados pelos estudantes.

Considera-se que os componentes propostos pelas ferramentas de análise epistêmica, mediacional e cognitiva, se fizeram presente no material de maneira satisfatória, destacando a epistêmica que foi considerada com uma idoneidade alta em quatro dos seus cinco componentes, somente as relações apresentaram uma idoneidade média, o que permite identificar o material potencialmente adequado para o ensino e retomada da temática. Esse entendimento foi, em parte, confirmado, pois os componentes cognitivos Situações-problema, Linguagens, Regras e Raciocínio Logico também apresentaram uma alta idoneidade, o que demonstra uma coerência entre o que foi pretendido e declarado e compreendido pelos estudantes. Uma fragilidade identificada a partir das análises se refere a Argumentos, pois apesar do material promover e estimular a produção de justificativas, conjecturas e argumentação, os estudantes não conseguiram realizar de forma satisfatória. Considera-se, porém, que este fato é um reflexo da forma como, via de regra, o processo de ensino e aprendizagem é conduzido e os estudantes estão habituados a enfrentar, onde o foco está em realizar cálculos solicitados.

Entende-se que os resultados alcançados com o material de estudos sobre Ângulos foram satisfatórios, pois os estudantes conseguiram atingir grande parte dos significados pretendidos, destacando seus desempenhos na compreensão e associação de ângulos a representações em situações cotidianas, na construção dos ângulos, na mobilização e articulação das definições e propriedades para resolver as situações-problema. Já no que se refere as dificuldades, considera-se que os maiores entraves se fizeram presentes nas atividades que envolviam argumentação e justificativas, principalmente quando do trabalho com os ângulos formados em um feixe de retas paralelas cortadas por uma transversal.

No que segue, apresentam-se as análises produzidas referente ao tópico Triângulos.

8.3 TRIÂNGULOS

O material de estudos que trata da temática Triângulos foi estruturado e planejado objetivando retomar a definição, condição de existência, elementos, propriedades e classificações, assim como, a utilização destas noções na resolução de situações-problema e de contextualização.

Entende-se que o estudo de triângulos é dos tópicos mais importante e abrangente trabalhados nos anos finais do Ensino Fundamental, pois o objeto matemático e suas propriedades são utilizados e se relacionam de forma direta com outras temáticas, como os casos de congruência, semelhança, Teorema de Tales e Pitágoras. Assim considera-se necessário que este estudo seja realizado de forma consistente, privilegiando a compreensão de suas propriedades e o entendimento da sua utilização em diversos contextos. Neste sentido, buscou-se estruturar o material considerando estes aspectos, como também, os objetivos estabelecidos pelos PCN (BRASIL, 1998), BNCC (2017) e Orientações Municipais (SÃO LEOPOLDO, 2012). Assim, as atividades desenvolvidas no material objetivaram:

- identificar triângulos;
- reconhecer os elementos de um triângulo: vértices, lados, ângulos internos e externos;
- verificar as condições de existência ou não de um triângulo;
- construir triângulos, usando régua e compasso;
- construir triângulos, utilizando *software;*
- classificar triângulos em relação aos lados e aos ângulos;
- identificar características e propriedades dos triângulos;.

• verificar e compreender que a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo é 180°;

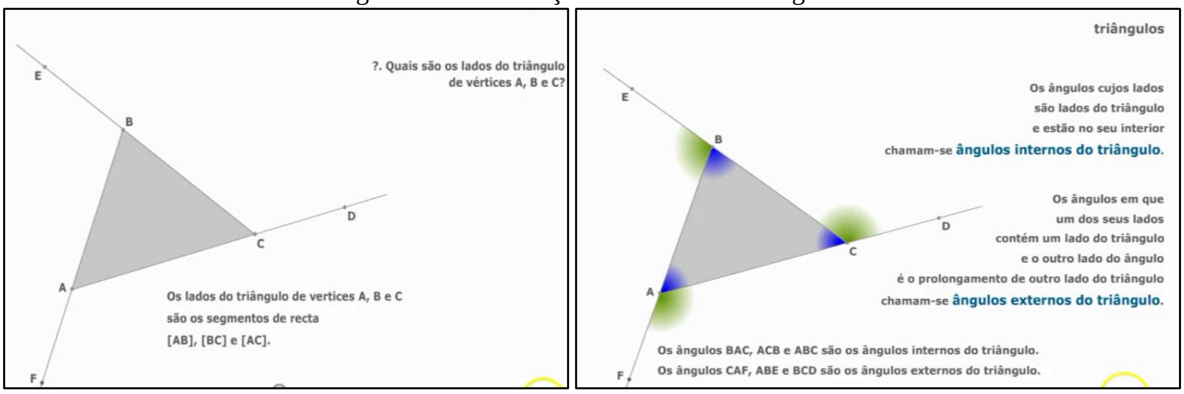
• verificar e compreender que a soma das medidas dos ângulos externos de um triângulo é 360º;

• reconhecer a rigidez geométrica dos triângulos e suas aplicações;

• resolver situações-problemas envolvendo triângulos.

Visando alcançar os objetivos destacados, iniciou-se o estudo por meio da apresentação de um vídeo, que retoma a definição de triângulos, destacando seus elementos, como número de lados e ângulos, discutindo como os mesmos são nomeados. Optou-se por começar o estudo com o vídeo, pois os elementos essenciais de um triângulo qualquer já haviam sido abordados no estudo de polígonos, considerando-se pertinente retomá-los utilizando este recurso, conforme ilustrado na figura 100.

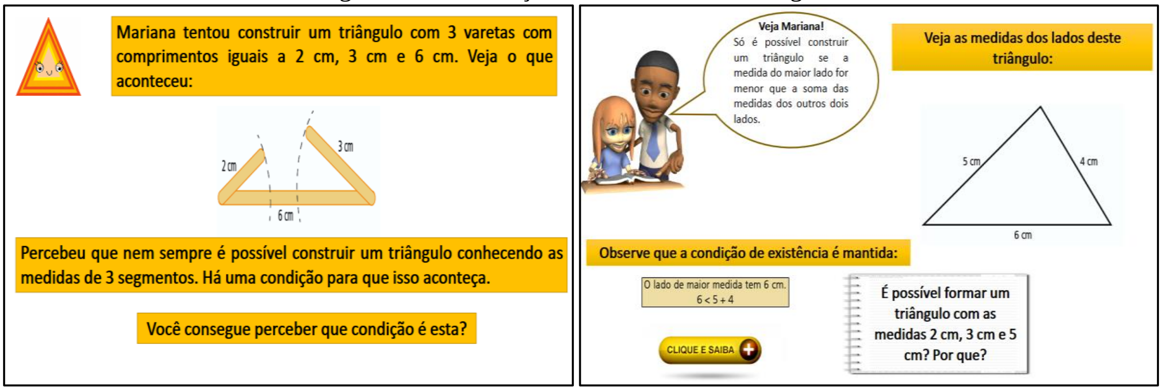
Figura 100 - Introdução ao estudo de Triângulos



Fonte: a pesquisa.

Em seguida, encaminhou-se o estudo para se trabalhar a condição de existência de um triângulo, a qual foi problematizada por meio de uma situação, que apresentava três possíveis medidas para os lados de um triângulo. A partir da representação da figura formada com as medidas dadas, foi proposto que os estudantes observassem que não foi possível formar um triângulo e, nesse caso, qual seria a condição para que se constituísse um triângulo. A partir desta discussão buscou se formalizar a condição de existência de um triângulo, conforme ilustrado na figura 101.

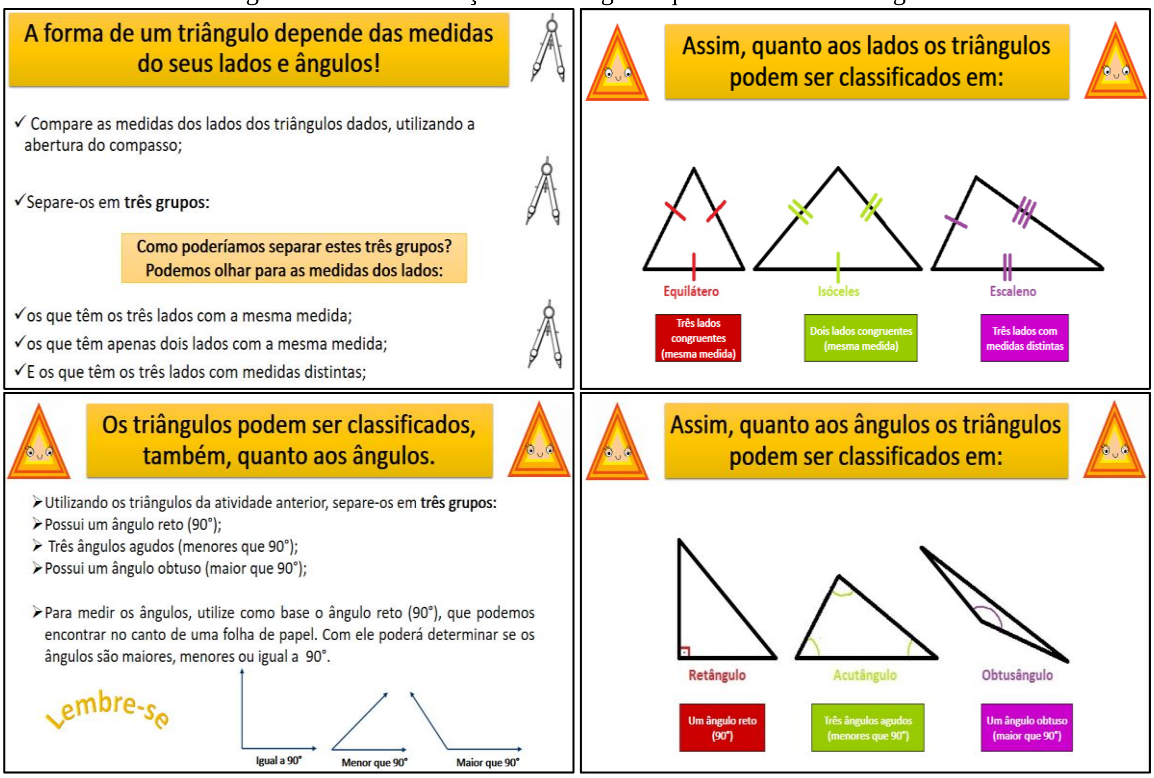
Figura 101 - Condição de existência de triângulos



Fonte: a pesquisa.

Após trabalhada a definição e condição de existência de triângulos, o estudo tratou da classificação dos triângulos quanto ao seus lados e ângulos. Quanto aos lados foi proposto que os estudantes agrupassem um conjunto de triângulos dados, em três grupos, comparando suas medidas com a abertura do compasso. E quanto aos ângulos, a atividade contemplava a comparação dos ângulos dos triângulos dados na atividade anterior, em relação ao um ângulo reto e agrupando-os em maior, menor ou igual a um reto. As formalizações das classificações foram realizadas após o desenvolvimento das atividades citadas, conforme ilustrado nas telas apresentadas na figura 102.

Figura 102 - Classificação de Triângulos quanto aos lados e ângulos



Fonte: a pesquisa.

Após o estudo referente a classificação dos triângulos, abordou-se no material a construção de triângulos por meio de régua e compasso e posteriormente, utilizando o software Geogebra, conforme destacado na figura 103.

Figura 103 - Construindo triângulos

Fonte: a pesquisa.

Discutiu-se no material, também, sobre a soma dos ângulos internos e externos de um triângulo, realizando a verificação do teorema por meio de uma atividade de construção, conforme destacado na figura 104.

Figura 104 - Trabalhando com os ângulos internos e externos de um triângulo

Fonte: a pesquisa.

Buscou-se ilustrar a partir das telas apresentadas no conjunto de figuras, uma visão geral de como o material de estudo sobre Triângulos foi estruturado. No que segue, discute-se a análise deste material, sob a perspectiva da Idoneidade Didática e suas dimensões (epistêmica, cognitiva e mediacional).

8.3.1 Triângulos: uma análise epistêmica

Apresenta-se no quadro da figura 105 a análise epistêmica produzida a partir dos componentes e indicadores da FAE sobre o material de estudos Triângulos.

Figura 105 - Análise epistêmica: Triângulos

Componentes	Indicadores	Análise	Grau de Idoneidade
Situações-problema	a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações. b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).	- Considera-se que o material de estudo apresenta um conjunto de situações-problema pertinentes ao estudo de triângulos, caracterizadas, predominante, em formato de exercícios, nos quais os estudantes necessitavam relacionar conceitos e propriedades estudadas (figura 106). - No que se refere a generalização, entende-se que no material propõe-se situações que possibilitem os estudantes a generalizarem, deduzirem e verificarem propriedades (figura 102)	**Média**
Linguagem	a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas. b) nível de linguagem adequado aos estudantes. c) propor situações de expressão matemática e interpretação.	- No material buscou-se desenvolver o estudo dos triângulos, por meio de uma linguagem acessível e de acordo com o nível dos estudantes. - Considera-se que o material propõe o uso de diferentes formas de expressão matemática, predominando a língua natural e gráfica, por meio das resoluções das atividades e das construções realizadas pelos estudantes (figura 107).	**Alta**
Regras (definições, proposições, procedimentos)	a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem. b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado. c) propõem-se situações onde os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.	- Considera-se que, no material, as definições, proposições e procedimentos são trabalhados de forma clara e de acordo com o nível educativo dos estudantes. Buscou-se desenvolver o estudo das propriedades e dos procedimentos por meio de situações em que os estudantes tivessem que observar, conjecturar e concluir a partir de suas manipulações ou construções, visando que os mesmos pudessem perceber as regularidades, particularidades e generalizações (figura 108).	**Alta**
Argumentos	a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem. b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que argumentar.	- Ao longo do material são propostos momentos nos quais os estudantes tenham que argumentar a partir de uma situação dada, seja por meio da discussão de uma propriedade ou a partir de um conjunto de ações realizadas por ele, no caso de uma construção, por exemplo (figura 109).	**Alta**
Relações	a) os objetos matemáticos (problemas, definições,	- Considera-se que foi possível estabelecer relações entre as propriedades do objeto matemático em estudo, principalmente no que se refere a soma dos ângulos internos e	**Média**

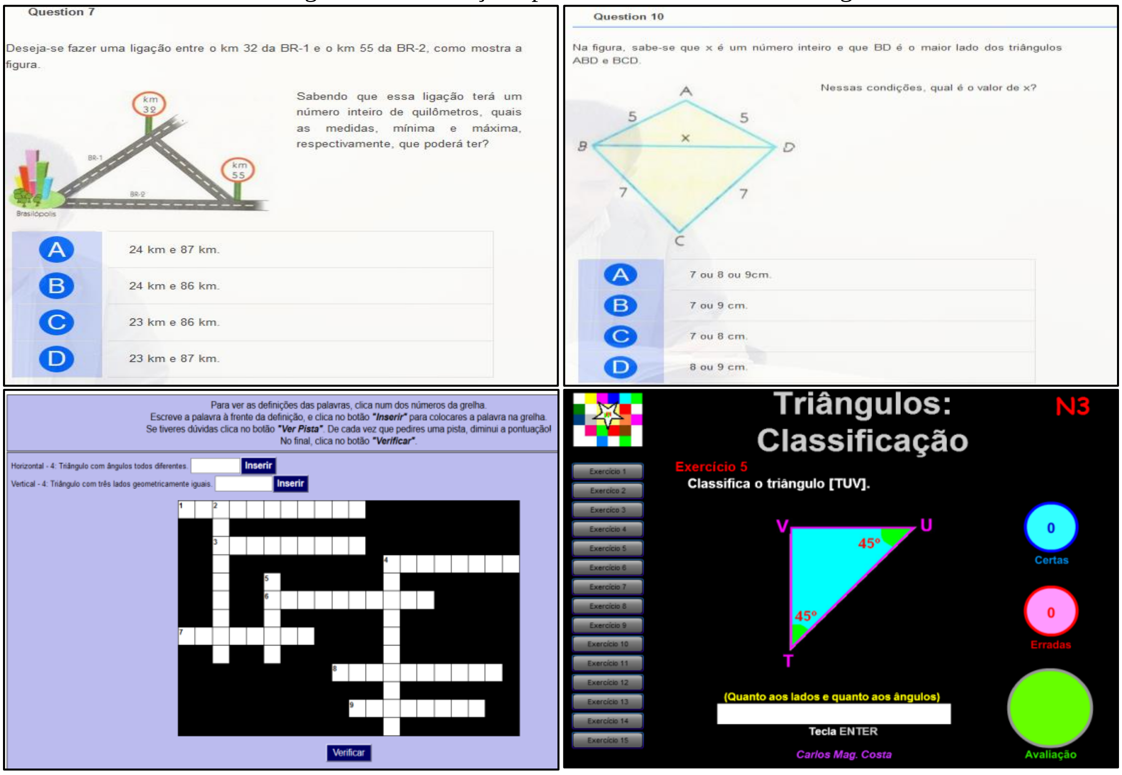
	proposições) se relacionam e se conectam entre si.	externos do triângulo e entre triângulos isósceles e equilátero.	

Fonte: a pesquisa.

A partir dos aspectos destacados no quadro da figura 104, é possível observar que os componentes e indicadores da FAE estão fortemente presentes no material de estudo. A análise busca identificar em que medida se conseguiu implementar os mesmos para o trabalho com Triângulos.

No que se refere ao componente **situações-problema**, considerou-se que foi alcançada uma idoneidade média, tendo em vista que as atividades propostas se caracterizaram mais por exercícios e estão focadas no estudo do objeto matemático em si, não apresentando uma variedade de situações de contextualização ou aplicações, apesar de se fazerem presentes, conforme ilustrado na figura 106. Em termos de situações que possibilitem a generalização, entende-se que são contempladas no material, principalmente nas atividades de encaminhamento para a classificação dos triângulos quanto aos lados e ângulos (figura 102) e na verificação e discussão sobre a soma dos ângulos internos e externos de um triângulo.

Figura 106 - Situações-problemas no estudo de triângulos

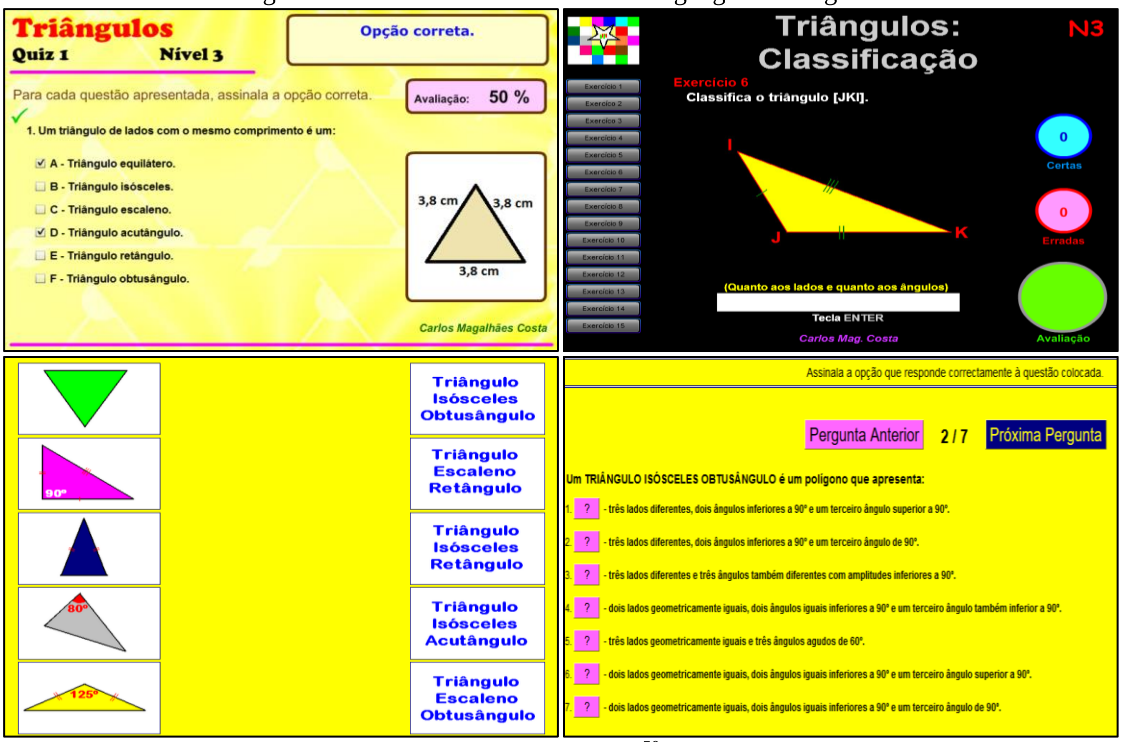


Fonte: a pesquisa[49].

[49] http://www.auladoguto.com.br/exercicios-online-de-matematica/exercicio-online-condicao-de-existencia-de-triangulos-desigualdade-triangular-2
http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT5/14_TRI/HOT_POTATOES/E7_JC_Tri_1.htm

Já no que diz respeito ao componente **linguagens**, considera-se que com mesmo alcançou-se uma idoneidade alta, pois buscou-se desenvolver o estudo de triângulos, utilizando diferentes tipos de linguagens, com o predomínio da língua natural e gráfica. Entende-se que as situações propostas no material, possibilitaram os estudantes a reconhecer e compreender triângulos, tanto a partir de suas características e propriedades, descritas em língua natural, como quando apresentada por meio de representações gráficas, conforme destacado na figura 107.

Figura 107 - Trabalho com diferentes linguagens: triângulos



Fonte: a pesquisa[50].

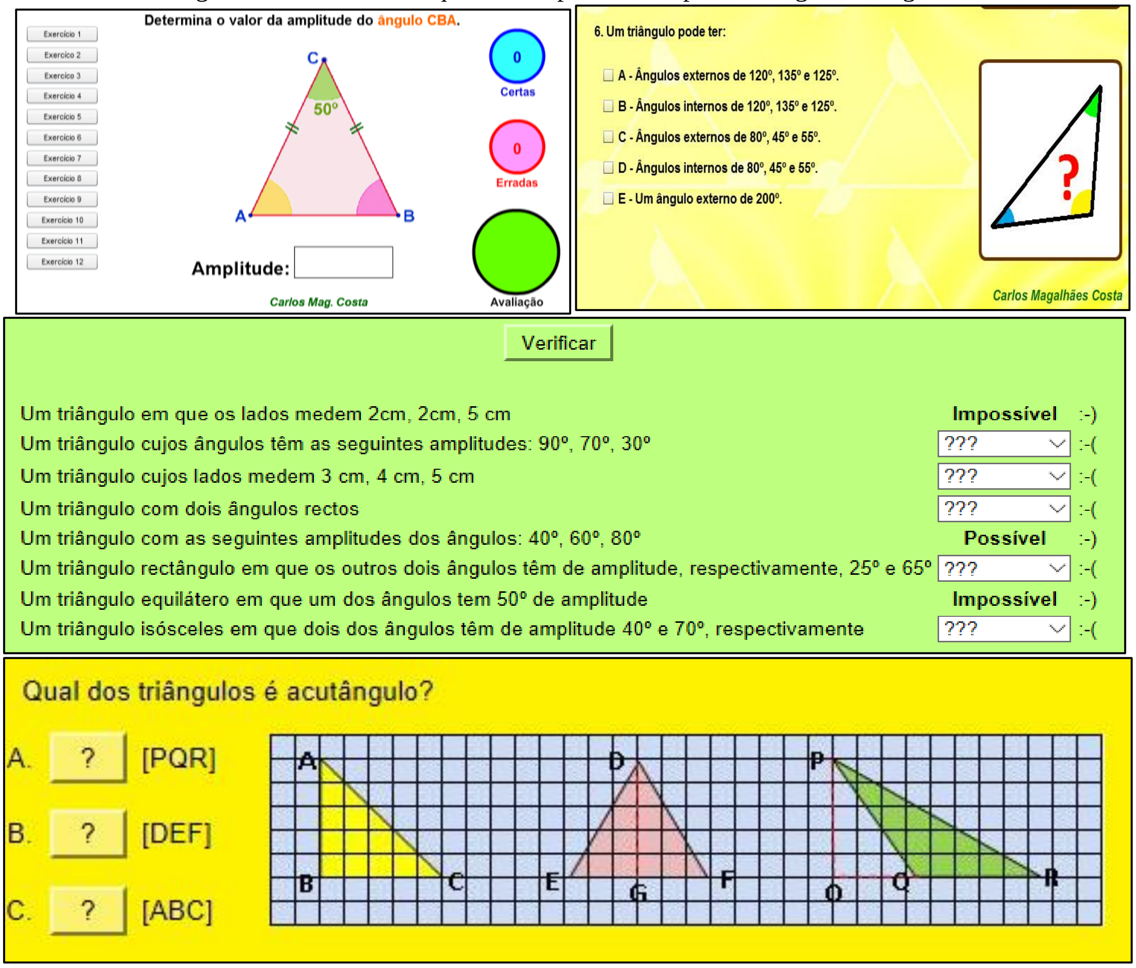
O componente **regras**, também foi considerado com uma idoneidade alta, pois entende-se que a definição, os elementos, a classificação, as propriedades e as construções de triângulos foram trabalhadas e encaminhadas por meio de situações e atividades visando que os estudantes compreendessem o objeto em estudo, as propriedades e procedimentos em torno do mesmo, assim como, fossem capazes de mobilizar o que foi aprendido, a fim de resolver as situações

http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT5/14_TRI/PROG_A/03_CLASSIFICACAO/triangulos_Classificacao_n3=cm.asp

[50] http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT5/14_TRI/HOT_POTATOES/E3_JMa_Tri_2.htm
http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT5/14_TRI/PROG_A/03_CLASSIFICACAO/triangulos_Classificacao
http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT5/14_TRI/PROG_A/N3_Q1_TRI_CLAS/n3_q1_triang_clas=cm.asp

propostas, refletir e estabelecer conexões. Na figura 108 apresentam-se telas do material de estudo que ilustram a presença dos indicadores deste componente.

Figura 108 - Atividades que contemplam o componente regras: triângulos



Fonte: a pesquisa[51].

No que se refere ao componente **argumentos**, considera-se ter se alcançado uma idoneidade alta no material, pois foram encaminhadas atividades, nas quais os estudantes deveriam observar, analisar, mobilizar significados, propriedades, procedimentos e produzir argumentos a fim de responder o que estava sendo questionado, como no caso da problematização da veracidade da recíproca de "Todo o triângulo equilátero é também isósceles" (figura 109), por exemplo, ou ainda nas atividades sobre a soma dos ângulos internos e externos de um triângulo, já ilustradas na figura 104.

51 http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT5/14_TRI/PROG_A/N3_Q1_TRI_CLAS/n3_q1_triang_clas=cm.asp http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT5/14_TRI/PROG_A/04_ANGULOS/angulos_de_triangulos_n3=cm.ashttp://www.ajudaalunos.com/Quiz_mat/triang_html/triang_nocoes.htm

Figura 109 - Situações de argumentação: triângulos

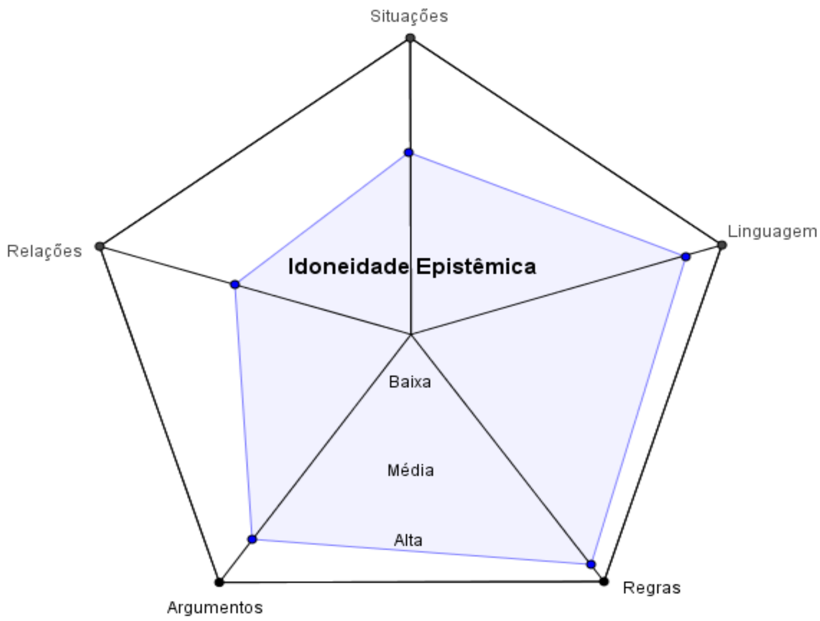
Fonte: a pesquisa.

O componente **relações** foi contemplado no material, porém considera-se que se tenha alcançado uma idoneidade média, pois foi possível estabelecer relações somente entre o objeto de estudo, no caso triângulos, por meio de suas propriedades e características, principalmente no que se refere a relacionar a soma dos ângulos internos e externos do triângulo e entre as definições de triângulos isósceles e equilátero, aspectos já destacados no componente argumentos. Com as referidas atividades (figura 104 e 109) foi possível fomentar que os estudantes estabelecessem as relações e, a partir delas, conjecturar e argumentar a fim de responder aos questionamentos ou concluir sobre a veracidade de uma informação.

Entende-se que será possível alcançar uma alta idoneidade no componente relações no que se refere aos triângulos, quando o estudo estiver focado na semelhança e congruência de triângulos, aplicações do teorema de Tales e Pitágoras, pois as definições, propriedades e procedimentos estudados neste material, serão retomadas e relacionadas a fim de compreender e se apropriar de novos conceitos a serem desenvolvidos em torno destas temáticas.

A análise epistêmica produzida e discutida nesta seção, possibilitou um olhar para o material referente ao estudo de Triângulos, destacando a forma que o mesmo foi estruturado, quais aspectos são privilegiados e quais estão fragilizados. Assim, foi possível perceber que o está sendo contemplado no material atende ao que é proposto pelo EOS, mesmo que não em sua totalidade, mas obtendo uma alta idoneidade na maior parte dos componentes epistêmicos, sendo eles Linguagens, Regras e Argumentos. Apresenta-se na figura 110 a representação do grau de idoneidade alcançado no material de estudo no que se refere a dimensão epistêmica.

Figura 110 - Representação do grau de Idoneidade Epistêmica alcançado no material Triângulos



Fonte: a pesquisa.

A análise epistêmica aqui apresentada e discutida evidenciou a estrutura e a forma como o estudo sobre Triângulos foi conduzido. No que segue, será lançado um olhar para os recursos utilizados e as articulações estabelecidas como os mesmos.

8.3.2 Triângulos: uma análise mediacional

A análise mediacional do material de estudos sobre Triângulos considera os componentes e indicadores da FAM sendo eles: recursos e tempo didático, visando identificar as potencialidades e fragilidades do material e o grau de idoneidade alcançado no que se refere aos recursos disponibilizados aos estudantes. No quadro da figura 111 apresenta-se a análise produzida.

Figura 111– Análise mediacional: Triângulos

Componentes	Indicadores	Análise	Grau de Idoneidade
Recursos Didáticos	a) evidencia-se a presença de materiais adequados ao desenvolvimento do processo de ensino e adaptados ao nível educativo a que se dirigem. b) há uma diversificação de recursos para auxiliar no processo de ensino,	- Considera-se que o material de estudo proposto está adequado ao nível educativo dos estudantes, pois utiliza linguagem acessível mantendo, porém, aspectos formais quando pertinentes. - No que se refere aos recursos utilizados, destaca-se fortemente a presença das tecnologias digitais, por meio da estrutura do próprio material, utilização de imagens, vídeos, animações, atividades *online*,	**Alta**

	tais como: audiovisuais, material concreto, livros, entre outros. c)propõe-se a organização e experimentação de situações práticas.	aplicações e construções no *software* Geogebra e objetos de aprendizagem, os quais privilegiam a manipulação dos objetos de forma interativa. - As animações foram utilizadas com objetivo de mostrar aos estudantes como construir triângulos conhecendo algumas medidas (figura 112). - Visando oportunizar aos estudantes verificarem de forma interativa o que havia sido estudado com as atividades práticas de classificação de triângulos quanto aos lados e aos ângulos, disponibilizou-se uma aplicação no Geobebra, na qual possibilita a manipulação do triângulo e a partir do triângulo formado é apresentada a classificação do objeto (figura 113). - No material de estudos foram utilizadas atividades *online* a fim de possibilitar aos estudantes praticar por meio de situações e exercícios o que estava sendo estudado (figura 114). - Utilizou-se, no material de estudo, um objeto de aprendizagem visando que os estudantes exercitassem as propriedades estudadas sobre triângulos. Com este recurso é possível manipular o objeto apresentado, a fim de construir o triângulo solicitado na questão. (figura 115). - Os vídeos foram utilizados com a finalidade de orientar e apresentar como realizar as construções de triângulos, como também, na verificação de propriedades e explicações complementares (figura 116) - Destaca-se, também, as atividades de construções de triângulos propostas no material, sendo realizadas tanto com régua e compasso como no *software* Geogebra. Considera-se necessário e importante para o estudante a experiência tanto de uma manipulação concreta destes instrumentos de desenho como a habilidade de construir com uso das tecnologias, sendo que, nas duas formas de contruções são utilizadas as definições, procedimentos e proposições estudadas (figura 117). - Ressalta-se, também, a presença de atividades concretas que encaminharam o estudo para a classificação dos triângulos quanto aos lados e aos ângulos, estas já destacadas na figura 117.	
Tempo didático	a) apresentam-se situações de ensino que contemplam diversas modalidades (estudo pessoal, cooperativo, tutorial, presencial). b) evidencia-se organização do tempo	- A proposta de estudo se caracteriza por um estudo presencial, que privilegia o trabalho individual, porém conforme já destacado, a interação entre os estudantes, assim como, com a pesquisadora se faz presente no processo de estudo. - Considera-se que o material possibilita desenvolver a autonomia nos estudantes, uma vez que os mesmos se tornam	**Alta**

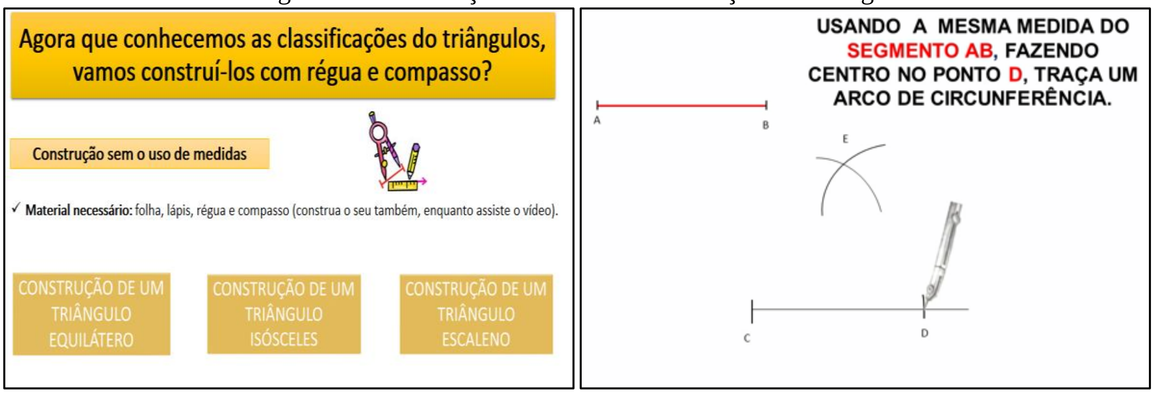
	para intervenção docente, trabalho autônomo dos estudantes e momentos de discussão. c) dedica-se um tempo maior para o desenvolvimento dos conhecimentos, caso os estudantes apresentem dificuldade de compreensão.	responsável pelo seu estudo, estabelecendo seu ritmo de estudo e aprendizagem. - Considera-se que o material de estudo oportuniza os estudantes a discutirem a temática em estudo, principalmente nas situações que apresenta esta possibilidade como uma indicação, o que pode ser exemplificado pela proposta de discussão “se todo o triângulo equilátero é também isósceles” (figura 109) - No que se refere às dificuldades encontradas pelos estudantes, as mesmas foram sendo discutidas a medida que eram destacadas pelos estudantes ou a partir da observação da pesquisadora.	

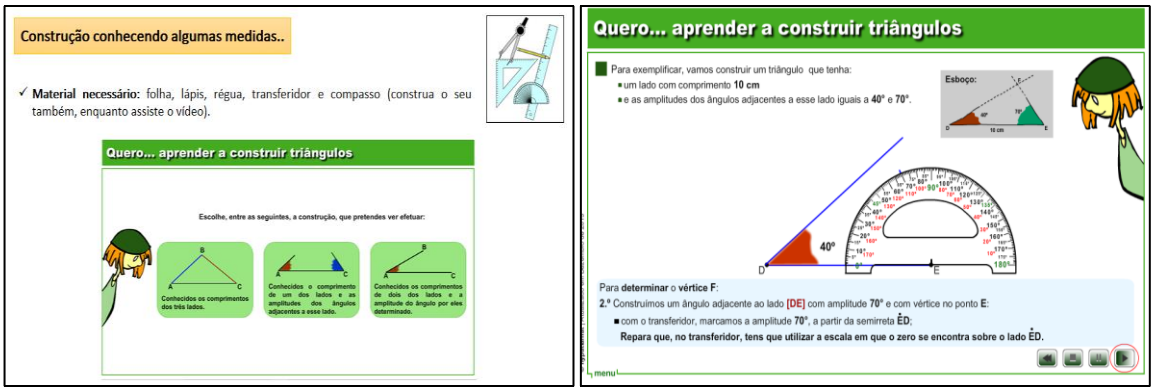
Fonte: a pesquisa.

A partir da análise apresentada no quadro da figura 111 é possível perceber que os componentes e indicadores estão representados de forma significativa no material, alcançando assim, uma alta idoneidade nos dois componentes. No que se refere aos recursos, buscou-se apoio tanto nas tecnologias digitais, recorrendo a recursos como imagens, animações, atividades *online*, objetos de aprendizagens, vídeos, aplicações e construções no Geogebra, como em atividades concretas de manipulação e de construção com régua e compasso, contemplando assim diversas atividades em diversos formatos.

Utilizou-se os recursos de vídeo e animações para ilustrar e orientar os estudantes na construção de triângulos. Inicialmente foi proposto, por meio de vídeos, as construções de triângulos equilátero, isósceles e escaleno, sem utilizar medidas. Em seguida, apresentou-se uma animação, abordando a construção de triângulos conhecendo algumas medidas, ou seja, obtendo os comprimentos dos lados ou de dois ângulos e um dos lados ou ainda o comprimento de dois lados e a amplitude de um ângulo. Nessa atividade, estimulou-se os estudantes a construírem os triângulos em conjunto com os vídeos e animações. Na figura 112 ilustra-se telas do material de estudo explorando os recursos destacados.

Figura 112 - Animações e vídeos de construções de triângulos

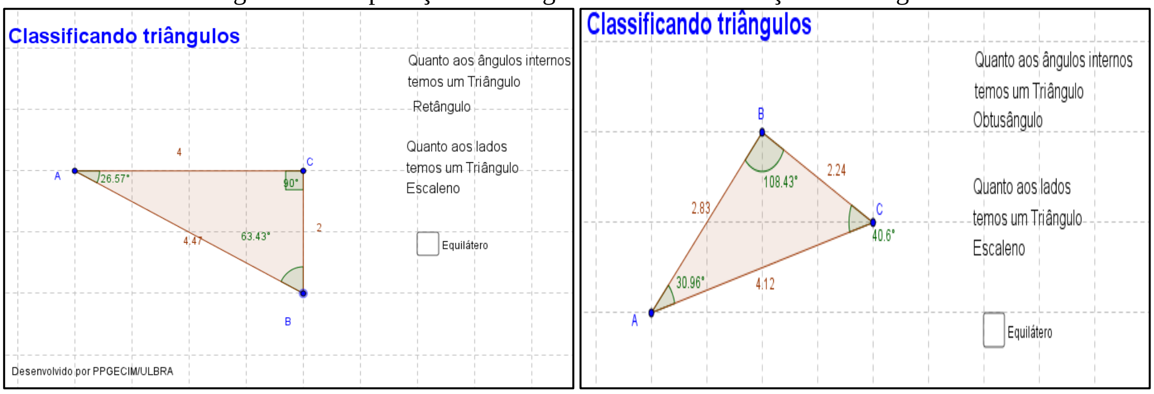




Fonte: a pesquisa.

Outro recurso a ser destacado refere-se à utilização de uma atividade desenvolvida no Geogebra sobre a classificação de triângulos. Nesta, é proposto que os estudantes manipulem um triângulo construído e, a partir das modificações realizadas, o *software* apresenta a nova classificação, conforme ilustrado na figura 113.

Figura 113 - Aplicação do Geogebra sobre classificação de triângulos



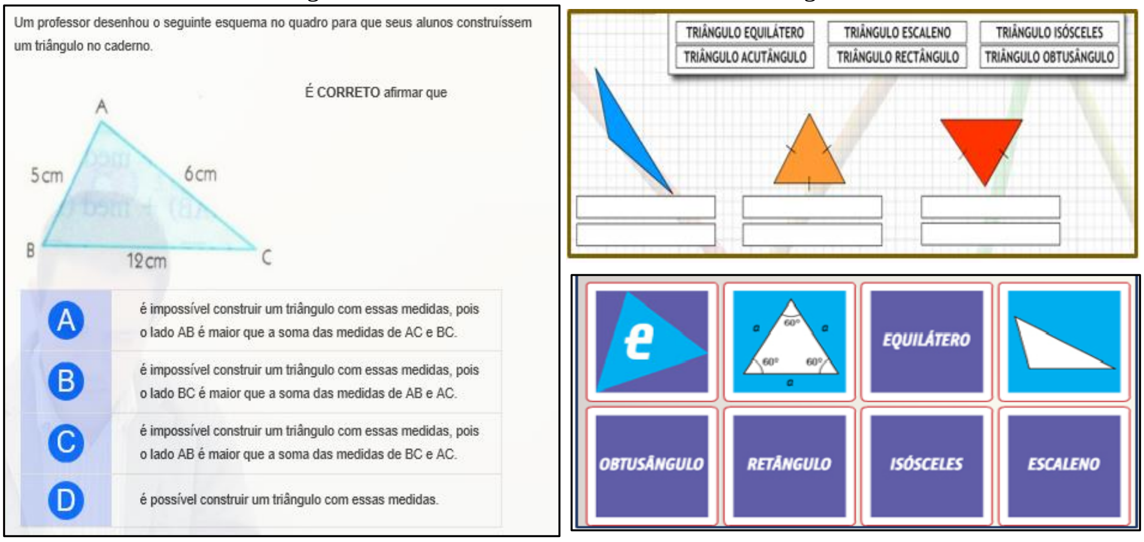
Fonte: a pesquisa[52].

A aplicação no Geogebra destacada na figura 113 foi utilizada no material, após a sistematização e discussão da classificação dos triângulos, com a intenção de reforçar o que foi discutido nas atividades concretas anteriores. Porém, neste momento, foi privilegiada a manipulação e experimentação de forma interativa, o que se considera de grande relevância no estudo da Geometria.

Já as atividades online (figura 114) foram utilizadas com o objetivo de que os estudantes exercitassem o que estava sendo estudado, a partir da realização de um conjunto de atividades contemplando situações de múltipla escolha, associações, jogo da memória, palavra-cruzada, entre outras.

[52] http://ppgecim.ulbra/laboratorio.

Figura 114 - Atividades *online* do material Triângulos

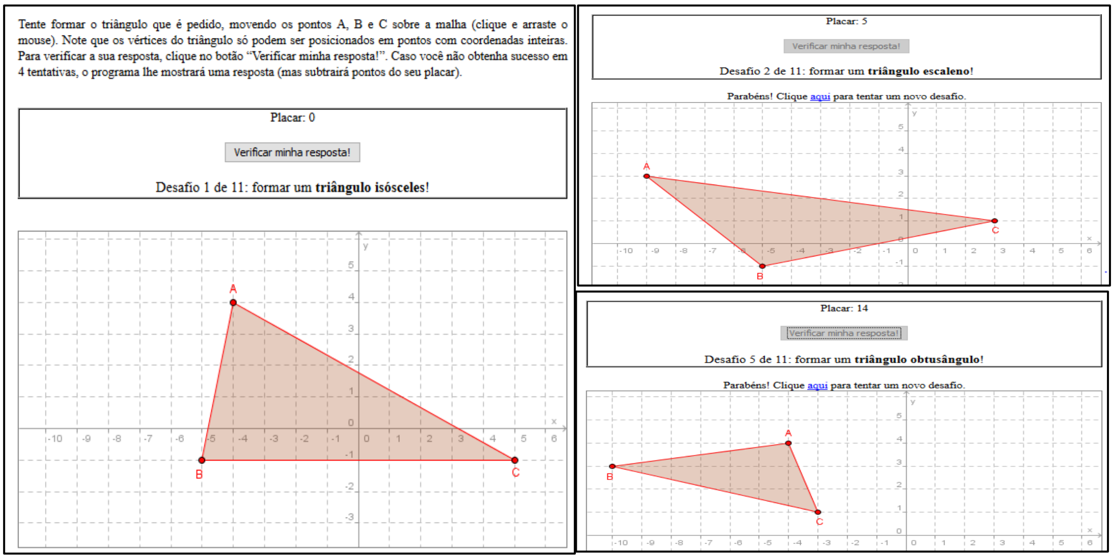


Fonte: a pesquisa.

Entende-se que estas diferentes formas de abordagem das atividades (situações/exercícios) sobre triângulos, possibilita ao estudante se apropriar, mobilizar e aplicar seus conhecimentos em torno do objeto matemático em estudo, suas propriedades, classificações e relações em diferentes contextos.

No que se refere a objetos de aprendizagem, utilizou-se um que possibilita, assim como na atividade do Geogebra, a manipulação do objeto. Seu diferencial é que, na atividade, é solicitado a criação de um tipo específico de triângulo a cada rodada, quando, então, o estudante deve mobilizar conhecimentos colocando-os em uma perspectiva mais ampla, de uma classe de objetos. Na figura 115 apresenta-se telas deste objeto de aprendizagem.

Figura 115 - Objeto de aprendizagem para classificação de triângulo

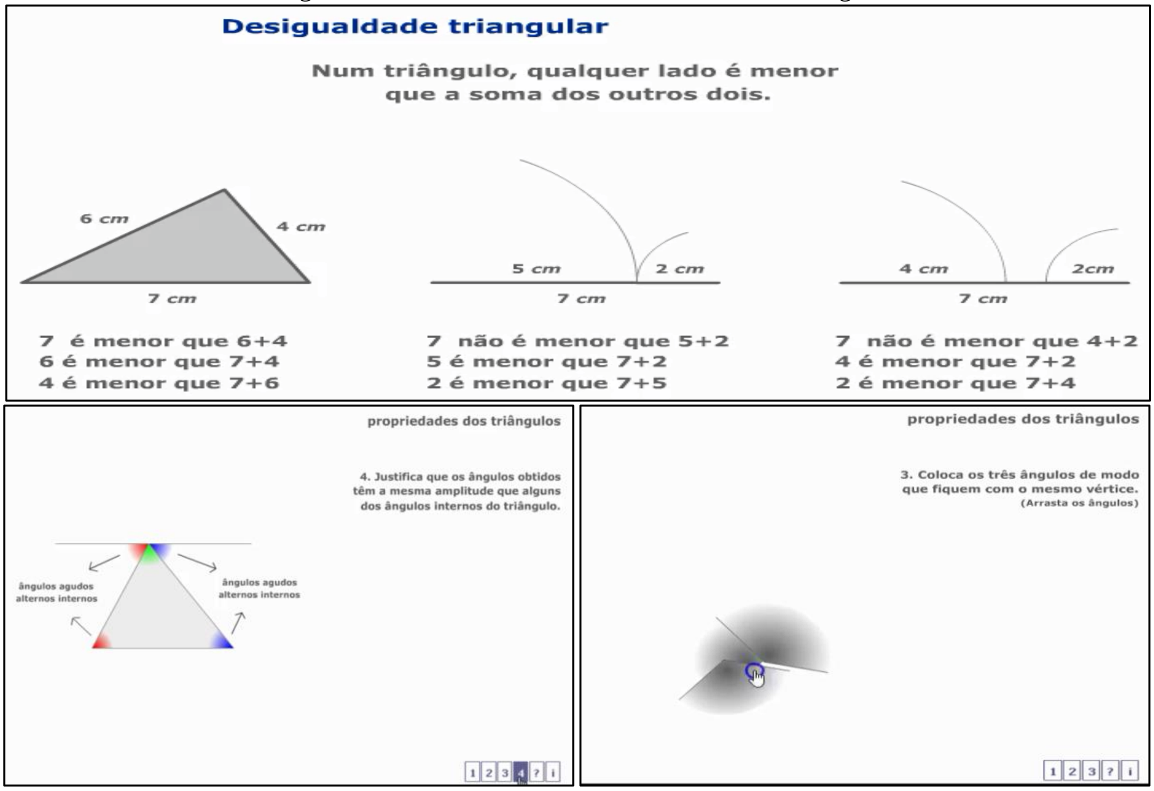


Fonte: a pesquisa[53].

53 http://www.uff.br/cdme/jct/jct-html/jct-br.html

O recurso de vídeo foi utilizado em várias etapas do material, na introdução, para retomar a definição e elementos de um triângulo, para orientar na construção dos triângulos, conforme já destacado na figura 112, bem como para verificação da desigualdade triangular, soma dos ângulos internos e externos, conforme apresentado na figura 116.

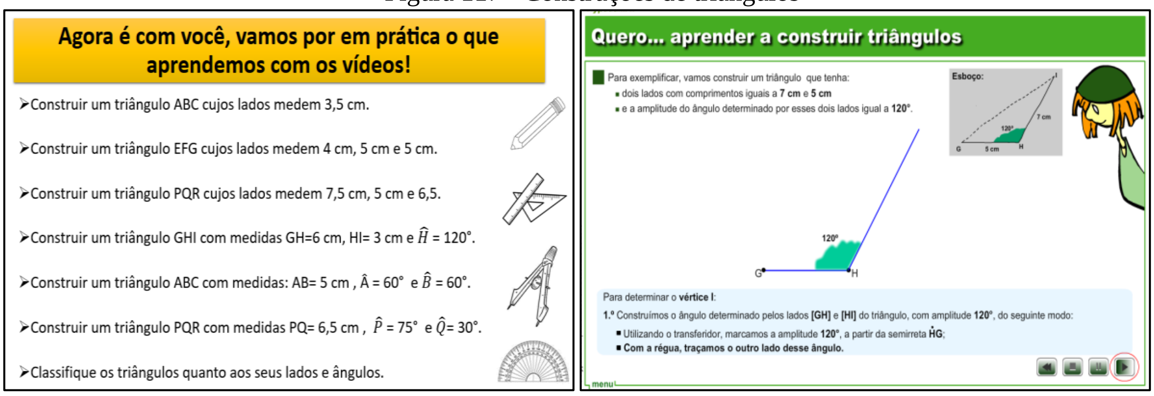
Figura 116 - Vídeos como recurso no estudo de triângulos

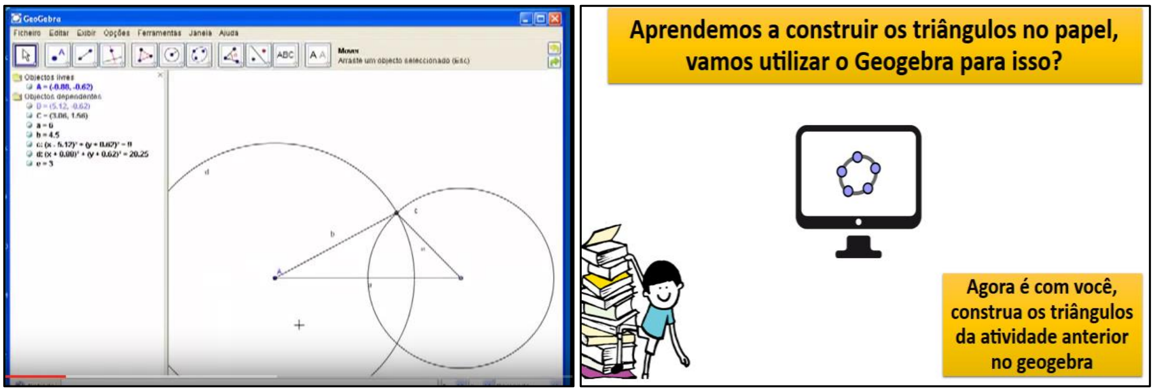


Fonte: a pesquisa.

Já as atividades referente a construção de triângulos, foram propostas tanto por meio da utilização de régua e compasso como do Geogebra, conforme ilustrado na figura 117.

Figura 117 - Construções de triângulos





Fonte: a pesquisa.

Entende-se importante, no estudo de Geometria, oportunizar aos estudantes experiências de construção tanto com os tradicionais régua e compasso, quanto com os recursos proporcionados pelas tecnologias digitais, no caso o Geogebra, contemplando o estudo de construções do objeto geométrico triângulo, sem a indicação de medidas, como também considerando a atribuição de medidas para esse objeto.

Considera-se que a análise produzida permitiu refletir sobre a pertinência dos recursos utilizados no material de estudos Triângulos. Entende-se que os mesmos foram bem trabalhados e articulados com o estudo, visando explorar ao máximo suas potencialidades e diversidade, a fim de desenvolver os conceitos, definições, propriedades, construções e estabelecer as relações existentes entre eles, privilegiando a visualização, observação, manipulação e precisão dos objetos em estudo.

A partir do que foi discutido sobre o material proposto, no que segue, será lançado um olhar para os significados produzidos pelos estudantes frente aos significados pretendidos com o material de estudo, visando analisar e identificar as potencialidades e os conflitos semióticos apresentados, assim como as relações entre o que se pretendia e o que de fato foi alcançado junto aos estudantes.

8.3.3 Triângulos: uma análise cognitiva

No quadro da figura 118 apresenta-se a análise cognitiva produzida referente ao material de estudos sobre Triângulos. Estão sendo considerados os componentes cognitivos estabelecidos pela FAC, raciocínio lógico, leitura/interpretação e análise/síntese, como também, os componentes epistêmicos, já discutidos na análise apresentada anteriormente, porém neste momento o foco está na produção de significado por parte do estudante frente ao que é proposto no material.

Considerando os objetivos estabelecidos nos documentos oficiais para o estudo de triângulo (BRASIL, 1998; 2017; SÃO LEOPOLDO, 2013) e os referenciais que embasam a investigação, traçou-se os significados pretendidos para a temática, ou seja, o que se espera que os estudantes sejam capazes de fazer/compreender/significar, a partir do conjunto de atividades e situações propostas no material de estudo. Visando identificar a presença destes significados tomados como referência, buscou-se analisar a produção dos estudantes, a fim de identificar os significados declarados por eles, considerando aqui toda e qualquer manifestação, seja escrita ou falada, correta ou não, na busca de estabelecer o grau de idoneidade alcançado em relação ao que se pretendia e o que foi produzido pelos estudantes.

Figura 118- Análise cognitiva: significados pretendidos x declarados para Triângulos

Componentes Epistêmicos-cognitivos	**Significados Pretendidos**	**Significados Declarados**	**Grau de idoneidade**
Situações- problemas	-Identificar os elementos de um triângulo a partir de situações-problemas. -Resolver situações-problemas propostas, utilizando os conceitos, procedimentos e argumentos necessários.	- Os estudantes não apresentaram dificuldades em reconhecer e identificar triângulos a partir de situações-problemas, representações ou pela indicação de características e propriedades. - Conseguiram resolver as situações propostas no material corretamente, conforme destacado na figura 119.	**Alta**
Linguagens	- Reconhecer as representações de um triângulo. - Classificar triângulos a partir de sua representação gráfica ou figural. - Classificar triângulos a partir de situações apresentadas em linguagem natural. - Utilizar linguagem matemática adequada na solução das situações propostas.	- Os estudantes apresentaram um bom desempenho no trabalho com diferentes tipos de linguagens. Conseguiram classificar triângulos a partir de representações e também quando era indicado um conjunto de características ou propriedades (figura 120). - Quanto à linguagem matemática, os estudantes não apresentaram dificuldades, utilizando, em suas respostas, os termos corretamente, por exemplo para indicar a medida de 180º de um ângulo se referiam a ângulo raso. Ao se referirem aos triângulos, os nomearam corretamente, como equilátero e acutângulo, por exemplo. Apresentaram suas respostas, na maioria das situações, em língua natural e, quando solicitados por meio de representações.	**Alta**
	- Reconhecer os elementos de um triângulo. - Verificar a condição de existência de triângulos. - Classificar os triângulos em relação às	- Os estudantes tiveram facilidade em reconhecer os elementos de um triângulo, assim como com as atividades que abordavam a condição de existência do mesmo, conforme destacado na figura 121.	

Regras (definições, proposições, procedimentos)	medidas dos lados e dos ângulos. - Construir triângulos, usando régua e compasso. - Construir triângulos utilizando *software*. - Identificar características e propriedades dos triângulos. - Calcular medidas desconhecidas de ângulos internos e externos de triângulos. - Resolver corretamente as atividades propostas utilizando as definições e procedimentos estudados.	- No que se refere à classificação dos triângulos, na atividade envolvendo material concreto a maioria dos estudantes classificou corretamente, porém alguns necessitaram utilizar a régua e o transferidor para verificar as medidas e assim poder inferir sobre a classificação. Já outros conseguiram classificar a partir da representação sem a medição (figura 122). - As construções dos triângulos foram realizadas adequadamente, porém, mesmo utilizando os instrumentos de desenho, alguns estudantes apresentaram representações pouco precisas, destacando assim, a precisão da construção no *software* (figura 123). - Quanto a identificação de características e propriedades os estudantes resolveram, em sua maioria, corretamente as atividades propostas, apresentando mais facilidade quando as representações indicavam as medidas (figura 124). - A atividade referente ao cálculo de medidas desconhecidas dos ângulos internos e externos, foi resolvida com facilidade no que se refere aos ângulos internos, apresentando maiores dificuldades com os ângulos externos (figura 126).	**Alta**
Argumentos	- Justificar a condição de existência de um triângulo. - Verificar e justificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º. - Verificar e justificar que a soma dos ângulos externos de um triângulo é 360º. - Conjecturar e argumentar em torno da veracidade de situações apresentadas.	- Conforme, já destacado os estudantes apresentaram facilidades nas situações que questionavam sobre a condição de existência de um triângulo e, quando solicitados a apresentar justificativas, o fizeram com argumentos corretos (figura 127). - No que se refere a produção de argumentos e justificativas os estudantes apresentaram um ótimo desempenho em relação a soma dos ângulos internos, porém para os ângulos externos não se identificou nenhum registro. - A respeito de conjecturar e argumentar em torno da veracidade de situações apresentadas, foi possível identificar que para o questionamento sobre todo o triângulo isósceles ser também	**Média**

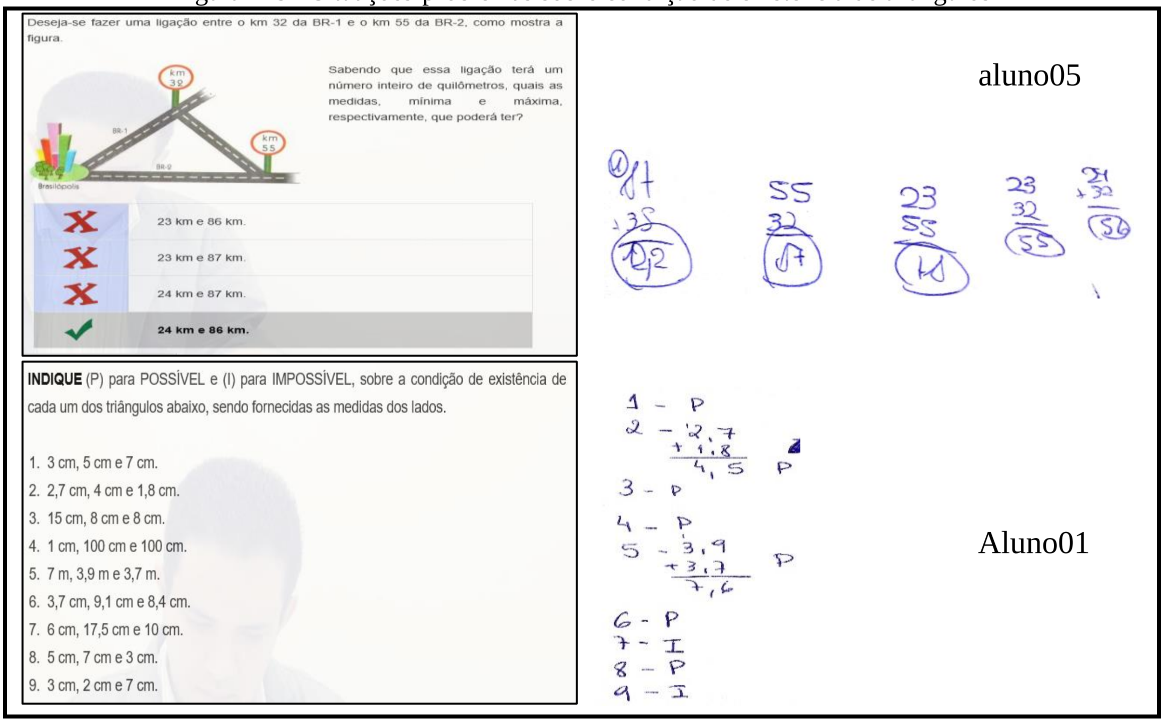
		equilátero, somente um estudante apresentou resposta para a questão.	
Relações	-Compreender as relações entre a medida dos ângulos internos e externos de um triângulo. - Compreender as relações, semelhanças e diferenças entre um triângulo equilátero e um isósceles.	- Foi possível perceber que os estudantes compreenderam satisfatoriamente as relações entre os ângulos internos, calculando corretamente quando uma medida era desconhecida. Já quando tinha que relacionar com alguma medida de ângulo externo já apresentaram dificuldades (figura 128). - Considera-se que os estudantes tenham conseguido relacionar as semelhanças e diferenças dos triângulos e suas classificações. Porém em relação a inclusão de classes, como todo o triângulo equilátero ser também isósceles sendo a recíproca não verdadeira, não estabeleceram relações satisfatoriamente, somente dois estudantes apresentaram uma argumentação em torno da situação.	**Média**
Raciocínio Lógico	- Relacionar representações de triângulos sem apresentação de medidas com as classificações corretas quanto aos lados e ângulos. - Associar corretamente propriedades de triângulos á representações genéricas. - Estabelecer estratégias para realizar as situações propostas.	- Considera-se que o conjunto de atividades *online* propostas no material, estimularam os estudantes a trabalhar com estimativas e estabelecer estratégias para a solução das atividades apresentando desempenho satisfatório neste sentido (figura 129). - No que se refere as atividades *online* que não apresentavam as medidas dos ângulos e dos lados, os estudantes deveriam estimar, associar, relacionar e classificar a partir de uma representação, os mesmos tiveram um ótimo desempenho, já na atividade impressa com esta característica, muitos deles recorreram aos instrumentos de medição para classificar.	**Alta**
Leitura/Interpretação	- Conseguir ler e interpretar adequadamente as informações e situações propostas no material. - Identificar, analisar e compreender as definições e propriedades de triângulos.	- Entende-se que os estudantes leram com atenção o que estava proposto no material e, na maioria das vezes, interpretaram corretamente o que deveria ser realizado. Quando tinham dúvidas perguntavam a pesquisadora (figura 131). - Considera-se que os estudantes conseguiram interpretar e compreender satisfatoriamente as propriedades dos triângulos,	**Média**

		principalmente referente a sua classificação. -Destaca-se, como uma fragilidade dos estudantes, não responderem ou argumentarem a questionamentos que foram sendo apresentados ao longo do estudo, não interagindo adequadamente com o material.	
Análise/Síntese	- Realizar síntese durante e ao final do estudo, conseguindo identificar e expressar o que foi aprendido;	- Este componente se apresentou como um dos mais difíceis para os estudantes, uma vez que não estão habituados a ter que produzir uma análise do estudo realizado ou produzir uma síntese. Seus melhores desempenhos se referem a questões onde tenham que responder a questionamento diretos. Assim, foram propostos questionamentos, ao final do material buscando que os estudantes explocitassem o que tinham compreendido sobre triângulos (figura 132).	**Média**

Fonte: a pesquisa.

Considera-se que se alcançou uma alta idoneidade no componente **situações-problemas**, pois os estudantes conseguiram mobilizar satisfatoriamente as definições, propriedades e procedimentos estudados em torno dos Triângulos para resolver as situações propostas no material. Na figura 119 destaca-se a resolução de duas situações *online* resolvidas corretamente pelos alunos 05 e 01.

Figura 119 - Situações-problemas sobre condição de existência de triângulos

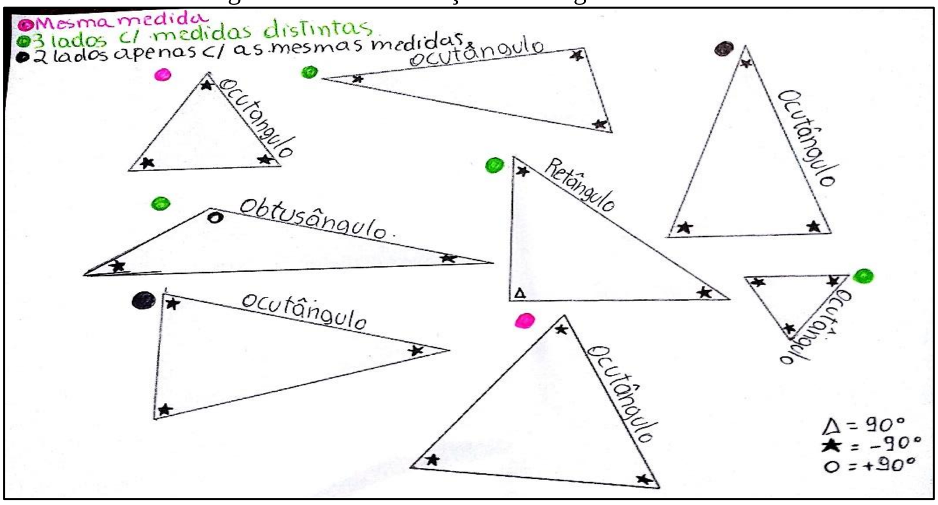


Fonte: a pesquisa.

Conforme pode ser visto na figura 119, os alunos mobilizaram a propriedade sobre a condição de existência de triângulos para resolver corretamente a situação. Apresentou-se estas soluções a fim de ilustrar o bom desempenho que os estudantes tiveram na resolução de questões envolvendo esta temática.

No componente **linguagens**, também se considerou ter alcançado uma alta idoneidade, pois os estudantes conseguiram trabalhar satisfatoriamente com as representações de triângulos, tanto em situações apresentadas em linguagem natural como quando apresentadas as figuras, conseguindo associar as definições e propriedades, em ambas as situações. Destaca-se na figura 120, a atividade de classificação de triângulos realizada pelo aluno13.

Figura 120 - Classificação de triângulos: aluno13

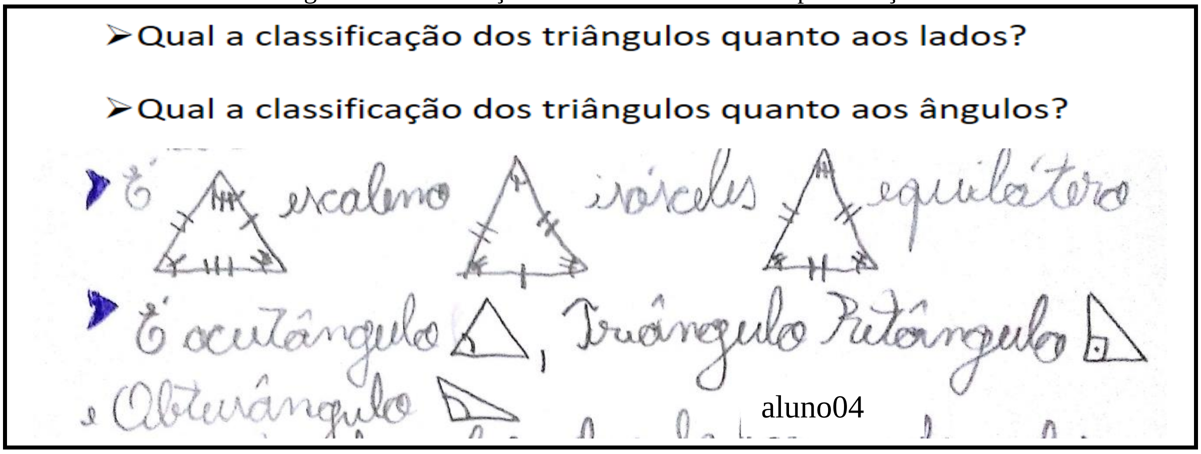


Fonte: a pesquisa.

Conforme pode ser observado na figura 120, o aluno13 além de classificar corretamente os triângulos quanto aos lados e aos ângulos, embora tenha utilizado o termo "ocutângulo", adotou uma linguagem simbólica para apresentar a classificação realizada. Assim, para identificar a classificação quanto aos lados utilizou um código de cores, apresentando, também, a nomenclatura formal (equilátero, isósceles ou escaleno). Já quanto aos ângulos criou uma simbologia a partir de uma relação com o ângulo reto. Cabe destacar, ainda, que para indicar medida maior ou menor que 90°, fez uma associação ao sinal de – ou +, apresentando, também, a nomenclatura usual.

Destaca-se, também, a forma que o aluno04 respondeu as questões sobre classificação de triângulos quanto aos lados e ângulos (figura 121), quando buscou esboçar representações de cada um dos tipos de triângulos relacionando de forma genérica os lados e ângulos.

Figura 121 - Resolução do aluno04 utilizando representações

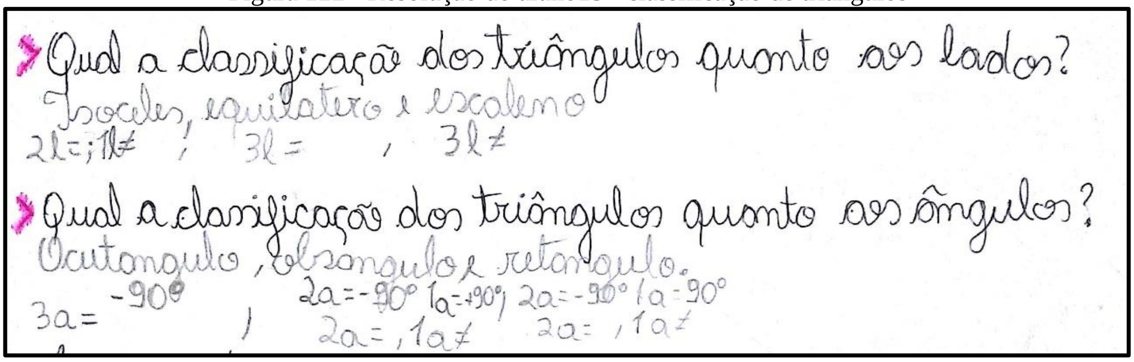


Fonte: a pesquisa.

Diferente dos demais estudantes, o aluno04 buscou responder aos questionamentos apresentando representações, é possível perceber que as mesmas se tratam de esboços feitos a mão livre (figura 121), mas representam corretamente as definições (considerando as marcas indicativas, não propriamente a representação). Destaca-se a utilização de marcações genéricas para identificar e diferenciar as medidas tanto dos lados como dos ângulos, o que foi realizado com correção. Na primeira questão o estudante relacionou que um triângulo com todos os lados distintos, também tem todos os ângulos diferentes, assim como no isósceles os ângulos da base são congruentes e no caso do equilátero, todos os lados e ângulos congruentes. Esta resolução evidencia a apropriação do estudante no que se refere a classificação dos triângulos, tendo em vista que o mesmo já consegue em relacionar as classificações quanto aos lados, com os ângulos.

Ressalta-se que todos os outros estudantes responderam corretamente esta questão, mas em língua natural indicando a nomenclatura (equilátero, isósceles, escaleno, acutângulo, retângulo e obtusângulo) ou relacionando-os com as definições (3 lados com mesma medida, 2 lados com mesma medida, 1 ângulo reto...). Ressalta-se, novamente, a resolução apresentada pelo aluno13 (figura 122).

Figura 122 - Resolução do aluno13 - classificação de triângulos

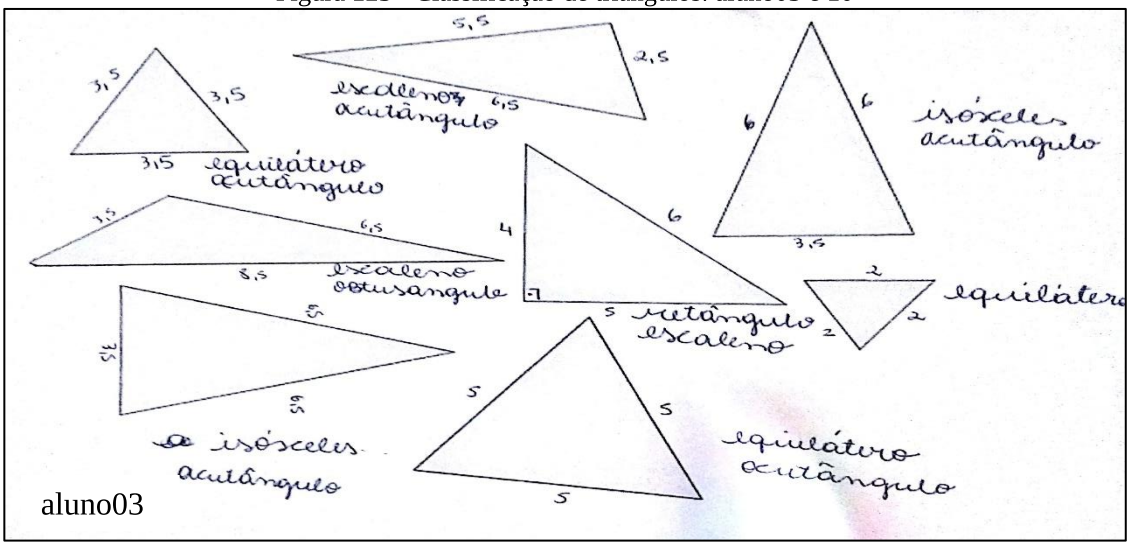


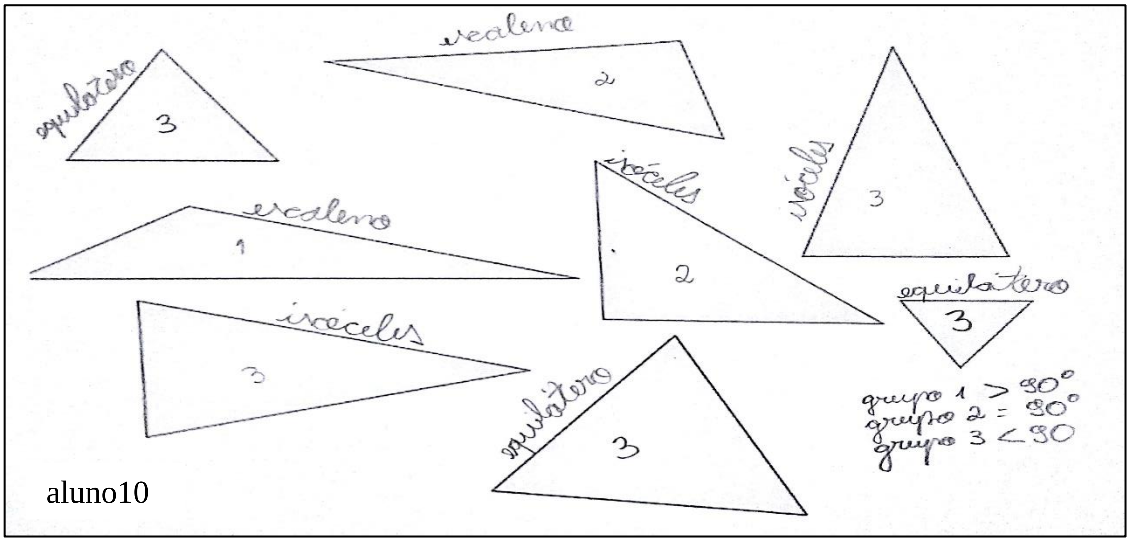
Fonte: a pesquisa.

Conforme apresentado na figura 122 é possível verificar que o estudante apesenta corretamente a classificação dos triângulos quanto aos lados e aos ângulos, no que diz respeito a nomenclatura, porém busca apresentar uma relação geral destacando que, referente aos lados, os isósceles tem 2l =; 1l ≠, que o equilátero tem 3l = e o escaleno 3l ≠, relações, que se entende, estabelecidas corretamente. Porém, quando vai utilizar critério similar para os ângulos apresenta conflitos semióticos cognitivos, quando destaca os triângulos acutângulos com 3a = (três ângulos iguais), indicando, que desta forma seriam todos triângulos equiláteros, o que não é verdade, pois existem triângulos acutângulos que não sejam equiláteros. O mesmo ocorre, quando apresenta que para os obtusângulos e retângulos se teria dois ângulos iguais e um diferente, sendo que a relação entre serem dois menores que 90º e um maior que 90º (obtusângulos) e igual a 90º para os retângulos são destacados corretamente. Conjectura-se que o aluno13 apresentou estes conflitos semióticos cognitivos, pois quis estabelecer a mesma relação destacada para os lados, para os ângulos, o que não se aplica. Para os lados a classificação se relaciona à medida dos mesmos, já para os ângulos a classificação se relaciona a uma comparação ao ângulo reto, ou seja, menor, maior ou igual. Assim, um triângulo pode ser acutângulo e escaleno a mesmo tempo, por exemplo, terá três medidas distintas para seus ângulos e para seus lados.

No que diz respeito ao componente regras, entendeu-se ter alcançado uma alta idoneidade, pois observou-se uma boa compreensão dos estudantes no estudo dos Triângulos, assim mobilizaram corretamente as definições, propriedades e procedimentos a fim de resolver as questões propostas. Destaca-se na figura 123 a resolução dos alunos 03 e 10 na atividade de classificação de triângulos.

Figura 123 - Classificação de triângulos: aluno03 e 10





Fonte: a pesquisa.

Destacou-se as resoluções apresentadas na figura 123, pois as mesmas representam de forma geral, as estratégias adotadas pelos estudantes para classificarem os triângulos dados. O aluno03 sentiu a necessidade de medir os lados dos triângulos, para inferir sobre sua classificação, já quanto aos lados o mesmo não apresentou as medidas, conjectura-se que o mesmo realizou a classificação considerando as aberturas dos ângulos internos.

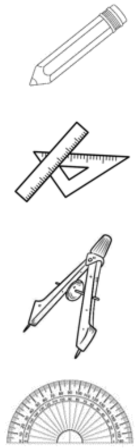
Já o aluno10 não apresentou as medidas nem dos lados nem dos ângulos, conjectura-se que o mesmo tenha classificado considerando a forma da figura. Destaca-se, também, que o mesmo criou uma legenda para classificar os triângulos quanto aos ângulos, não apresentando a nomenclatura formal, mas utilizando corretamente a definição.

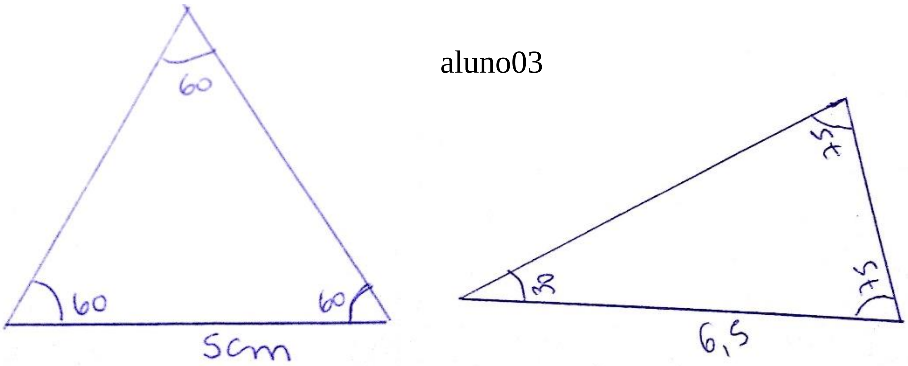
Nas atividades que previam a construção de triângulos, entende-se que os estudantes apresentaram um bom desempenho, considerando que grande parte deles, nunca tinham construído triângulos, utilizando instrumentos de desenho. Especificamente, nas construções com régua, compasso e transferidor, é possível perceber que os instrumentos foram utilizados corretamente, porém em algumas representações apresentaram pequenas distorções, conforme ilustrado na figura 124.

Figura 124 - Construções de triângulos com régua e compasso

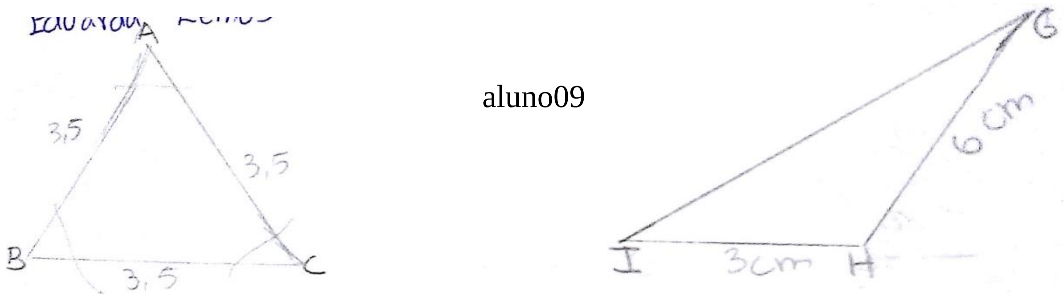
Agora é com você, vamos por em prática o que aprendemos com os vídeos!

- Construir um triângulo ABC cujos lados medem 3,5 cm.
- Construir um triângulo EFG cujos lados medem 4 cm, 5 cm e 5 cm.
- Construir um triângulo PQR cujos lados medem 7,5 cm, 5 cm e 6,5.
- Construir um triângulo GHI com medidas GH=6 cm, HI= 3 cm e $\hat{H}$ = 120°.
- Construir um triângulo ABC com medidas: AB= 5 cm , Â = 60° e $\hat{B}$ = 60°.
- Construir um triângulo PQR com medidas PQ= 6,5 cm , $\hat{P}$ = 75° e $\hat{Q}$= 30°.
- Classifique os triângulos quanto aos seus lados e ângulos.

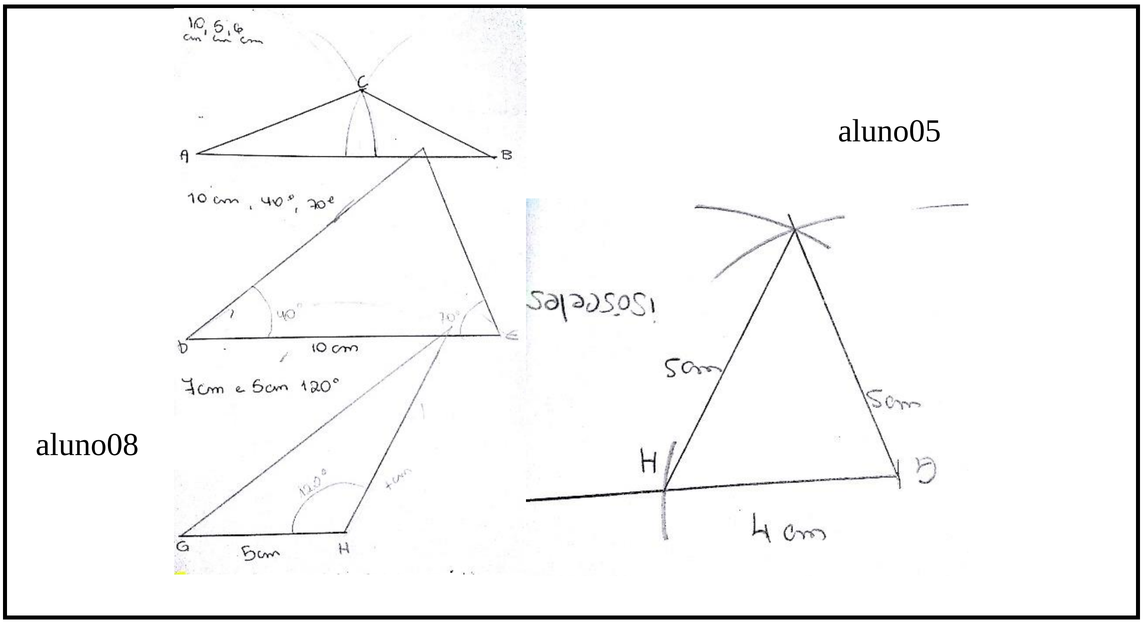




aluno03



aluno09

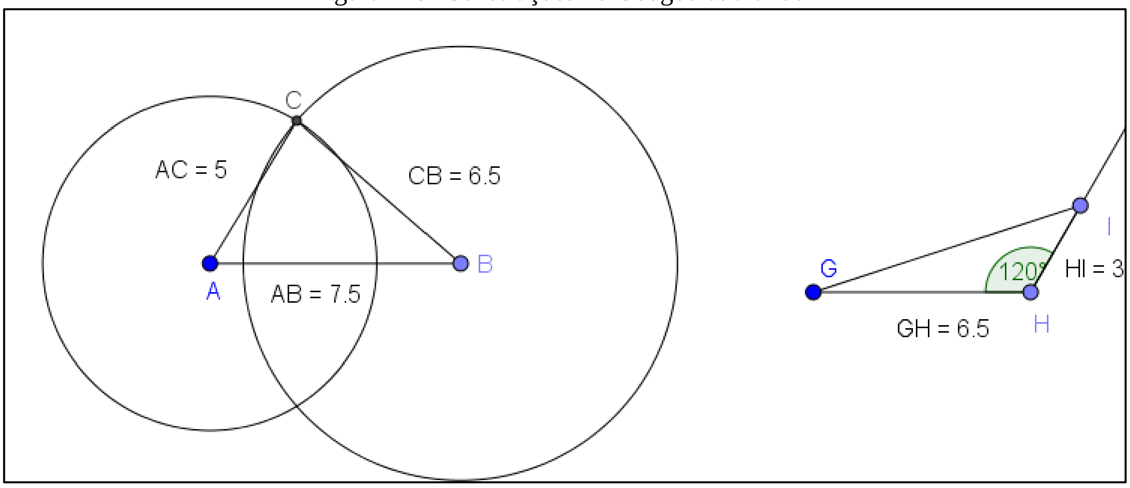


Fonte: a pesquisa.

As construções dos alunos 03, 05 e 08 foram realizadas corretamente. Já o aluno09 construiu corretamente, o primeiro, porém no segundo, indicou equivocadamente o segmento HG = 6cm, pelo triângulo construído o segmento HG= 4cm e o GI = 6cm, mas a questão solicitava construir um triângulo GHI com medidas GH=6cm, HI=3cm e $\widehat{H}$=120º o que não foi realizado pelo aluno.

Na figura 125 apresenta-se a construção realizada pelo aluno01 utilizando o Geogebra.

Figura 125- Construções no Geogebra: aluno01

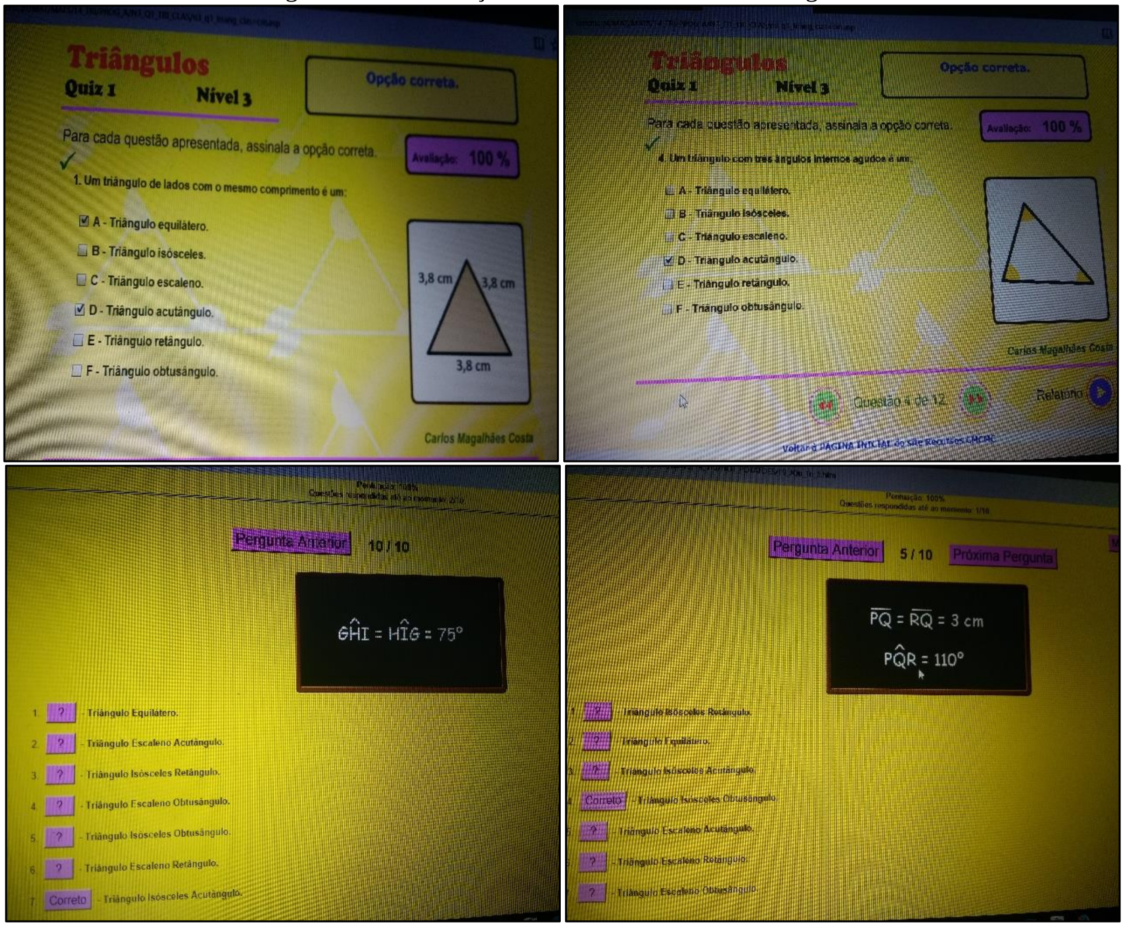


Fonte: a pesquisa.

Destaca-se a produção do aluno01 (figura 125) considerando que a mesma foi construída baseada nas indicações realizadas no vídeo explicativo do material de estudos, utilizando-se as ferramentas adequadas e apresentando as medidas.

Apresenta-se, na figura 126, registros das telas dos computadores quando os estudantes estavam trabalhando nas atividades *online.*

Figura 126 - Resoluções de atividades online: triângulos



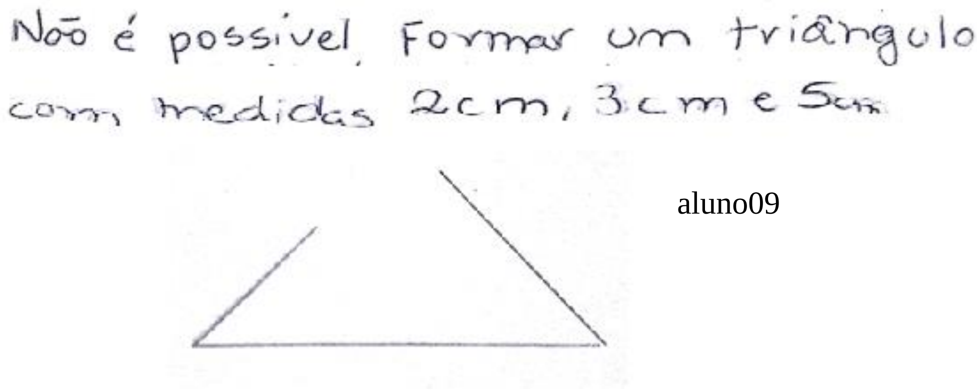
Fonte: a pesquisa.

A figura 126 põe evidência solução de quatro questões propostas em atividade *online* do material, todas respondidas corretamente pelo aluno07. Ressalta-se o desempenho do estudante, pois o mesmo conseguiu mobilizar as definições e propriedades estudadas, a fim de resolver situações em que são apresentadas as representações das figuras, com medidas ou não, como também, quando é apenas destacada suas medidas em linguagem simbólica.

As atividades *online* propostas neste material, tinham como maior foco trabalhar as definições, classificações e propriedades dos triângulos, assim os estudantes resolviam diretamente no computador não sendo necessário realizar nenhum registro na folha, o que ocasionou poucas evidencias das mesmas.

No que se refere ao componente **argumentos**, entende-se que se alcançou uma média idoneidade, pois os significados pretendidos foram contemplados em parte, nos declarados. Sobre a produção de argumentos e justificativas em torno da condição de existência de triângulos os estudantes apresentaram um ótimo resultado (figura 127), assim como sobre a soma dos ângulos internos de um triângulo (figura 128). Já para a soma dos ângulos externos de um triângulo e a discussão em torno do questionamento sobre se todo o triângulo isósceles é também equilátero, observou-se poucos registros dos estudantes.

Figura 127 - Registro dos argumentos apresentados pelo aluno09



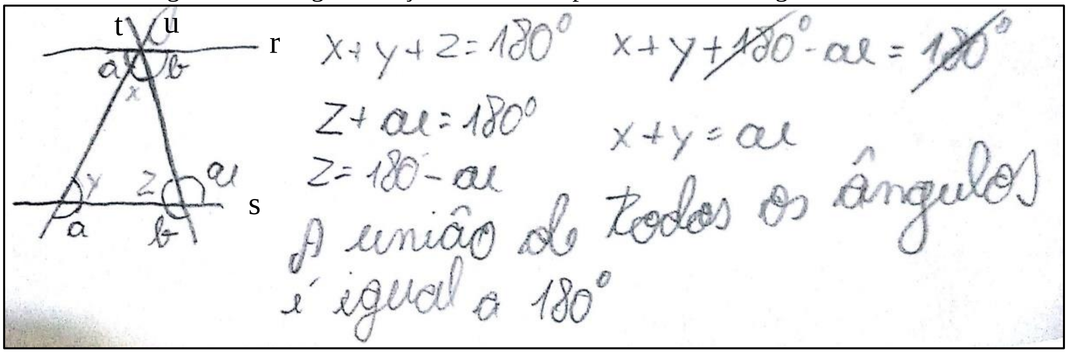
Fonte: a pesquisa.

Na figura 127 destacou-se a produção do aluno09 em relação a discussão sobre a possibilidade de formar um triângulo com as medidas dos lados sendo a 2cm, 3cm e 5cm, pois o mesmo foi o único a apresentar a justificativa, por meio de uma representação. Os demais estudantes argumentaram em língua natural, sendo algumas delas: *"não, porque a medida do maior lado é igual a soma dos outros dois*" aluno04, "*não porque a medida dos dois lados é igual a da base*" aluno11, "*não forma um triângulo, pois a soma de 2 e 3 daria 5, que é o mesmo valor do outro lado e tem que ser maior*" aluno15. A partir da apresentação das argumentações e justificativas é possível perceber que os estudantes se apropriaram da condição de existência para triângulos, tendo em vista que suas argumentações estão coerentes e utilizando uma linguagem matemática adequada. Apenas o aluno 08 indicou que seria possível formar um triângulo " *sim, pois as medidas 2cm e 3cm são iguais a 5c que é a outra medida".*

As argumentações em torno da justificativa da soma dos ângulos internos ser 180º também foram muito bem apresentadas pelos estudantes, pois todos, de alguma forma, indicaram que a união dos três ângulos, lado a lado, forma um ângulo raso. O aluno14 indicou "*é 180º pq juntando um do lado do outro forma um ângulo raso", o* aluno13 disse *"deslocando os ângulos internos e colocando um ao lado do outro forma um ângulo de 180º",* o aluno07 ressaltou que *"a soma dos ângulos internos de um triângulo formam 180º, pq se juntarmos os três ângulo, temos um ângulo raso".* Considera-se que esta apresentação de argumentos consistente e corretos, são resultados da atividade de construção que os estudantes realizaram e puderam verificar, de forma prática, e construída por eles a validade do teorema.

Ressalta-se a produção do aluno04, que buscou justificar que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º por meio de uma argumentação algébrica.

Figura 128 - Argumentação do aluno04 para a soma dos ângulos internos



Fonte: a pesquisa.

Considera-se que o encaminhamento dado pelo estudante, assim como a representação apresentada estão corretos, porém a manipulação algébrica produzida não foi suficiente para ele já garantir que a união de todos os ângulos é igual a 180º, mas destaca-se o fato da organização e desenvolvimento do pensamento matemático do estudante que o levou a resultados interessantes, embora o estudante, provavelmente, não os tenha percebido. Primeiro a representação que, de fato pode encaminhar a demonstração. Considerando, por exemplo, a reta *t*, transversal com respeito as retas *r* e *s*, paralelas, temos que os ângulos *a* e *z* são congruentes pois são alternos, o mesmo acontecendo com os ângulos *b* e *y* com respeito a transversal *u*, o que encaminha uma demonstração para a soma dos ângulos internos. Embora não tenha conseguido apresentar uma argumentação registrada em linguagem algébrica a representação figural é bastante significativa. Ainda, as relações estabelecidas pelo estudante o levaram a validar um dos corolários do teorema da soma dos ângulos internos de um triangulo, de que, em um triângulo, um ângulo externo tem medida igual a soma das medidas dos dois ângulos internos a ele não adjacentes. Considera-se este resultado muito significativo, pois evidencia, como cognitivamente, os estudantes podem ir muito além do pretendido ou esperado, o que configura uma situação adidática (BROUSSEAU, 2008).

Sobre a soma dos ângulos externos de um triângulo, não se encontrou nenhum registro dos estudantes, entende-se que isto pode ter ocorrido pelo fato de, no material não ter nenhum questionamento específico sobre a questão e sua discussão ter sido fomentada a ser realizada com os colegas e posteriormente disponibilizado um vídeo com a demonstração.

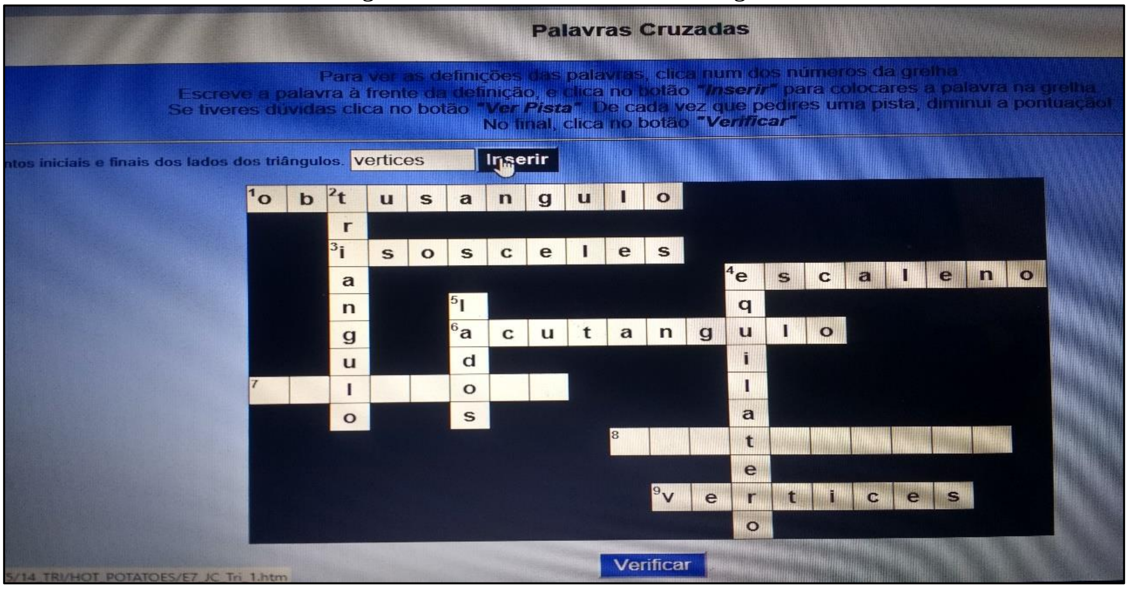
No que se refere ao questionamento se “todo o triângulo isósceles é também equilátero”, que foi abordado após a discussão de que todo o equilátero é isósceles, somente dois estudantes indicaram uma resposta, sendo que o aluno02 apresentou uma argumentação correta “*não, pois para ser equilátero precisa ter todos os lados iguais*” e o aluno05 somente afirmou que *“ nem todo o isósceles é equilátero, mas todo equilátero é isósceles”* relacionando com a proposição trabalhada anteriormente.

As conjecturas apresentadas em torno da argumentação e o estabelecimento de possíveis relações entre os ângulos internos e externos de um triângulo, bem como a fragilidade ou inexistência de argumentação ao relacionar propriedades e proposições, conforme apresentado, levou ao entendimento do alcance de uma idoneidade média no componente relações.

O componente **raciocínio lógico** foi considerado com uma alta idoneidade a partir do desempenho dos estudantes nas atividades online que estimulavam o desenvolvimento desta habilidade, sendo elas as palavras-cruzadas e o jogo da classificação.

Na atividade com as palavras-cruzadas os estudantes apresentaram um ótimo desempenho e se interessaram muito pela atividade, o que se entende que ocorreu, por se tratar de uma atividade com formatação já conhecida considerando, também, que as “charadas” apresentadas eram de nível básico no que se refere ao estudo de triângulo. Na figura 129 destaca-se a resolução da atividade do aluno06.

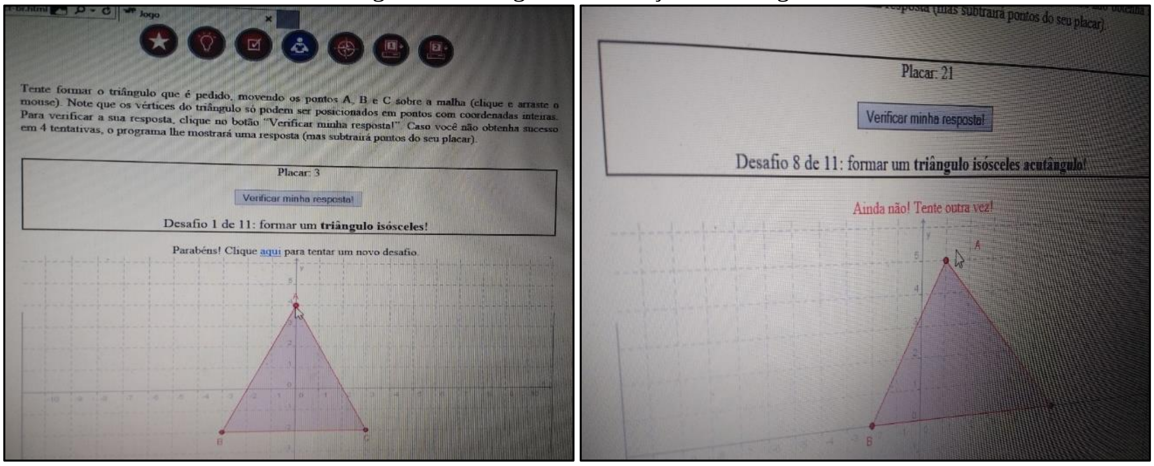
Figura 129 - Palavras-cruzadas: triângulos



Fonte: a pesquisa.

Outra atividade que possibilitou alcançar os significados pretendidos em relação ao componente raciocínio logico, se refere ao Jogo da Classificação de Triângulos, o qual apresenta, em sua interface, uma aplicação do Geogebra com a representação de um triângulo qualquer a partir do qual, e pela movimentação de seus vértices, objetiva-se construir um novo triângulo indicado pelo jogo.Na figura 130, destaca-se telas do jogo.

Figura 130 - Jogo: classificação de triângulos

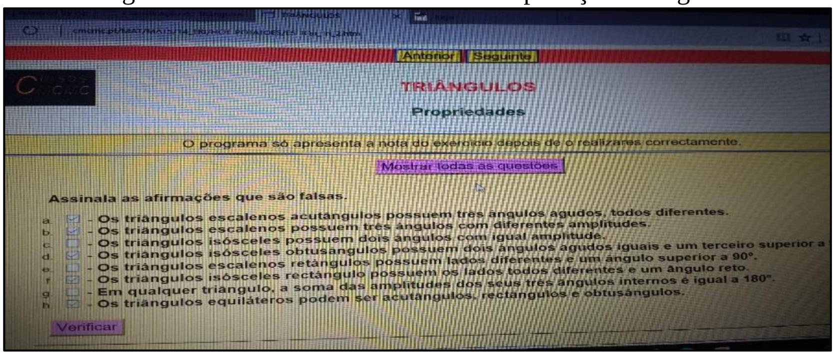


Fonte: a pesquisa.

Entende-se que esta atividade (figura 130) estimula o raciocínio logico no que se refere ao estudo dos triângulos, pois possibilita que os estudantes manipulem a figura dada, a fim de transformá-la em outra, para conseguirem realizar a transformação devem estabelecer estratégias e utilizar as definições e propriedades.

No que se refere ao componente **leitura e interpretação** entende-se que se alcançou boa parte dos significados pretendidos, porém não em sua totalidade, justificando a idoneidade média estabelecida. Considera-se que os estudantes tiveram facilidade na leitura e interpretação do material de estudo, tendo em vista que o mesmo apresenta uma linguagem adequada ao nível de ensino dos mesmos. As atividades trabalhadas foram apresentadas de forma clara, facilitando a interpretação. Ressalta-se que, quando os estudantes apresentavam alguma dificuldade de compreensão sempre solicitavam o auxílio da pesquisadora e, em uma destas interações, foi possível identificar um entrave no que se refere a leitura e atenção na resolução da atividade (figura 131).

Figura 131 - Atividade de leitura e interpretação: triângulos

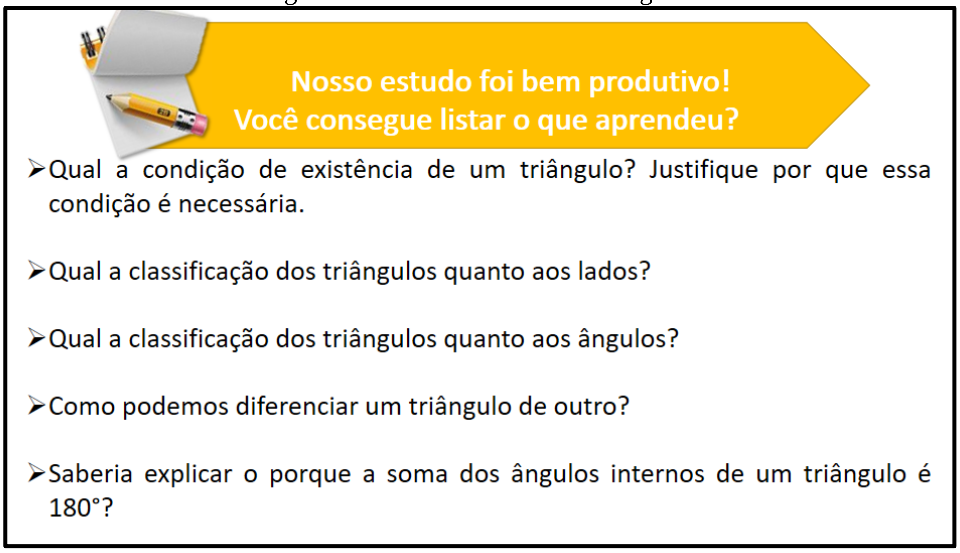


Fonte: a pesquisa.

A resolução destacada na figura 131 apresenta a resolução do aluno12, que verificou, a partir da resposta dada pelo sistema, que suas alternativas estavam incorretas recorreu a pesquisadora para sanar dúvidas. Ao analisar a questão a pesquisadora observou que, ao invés de marcar as afirmações falsas, o estudante tinha indicado as verdadeiras. A pesquisadora questionou o estudante e o mesmo relatou não ter lido o enunciado, passando direto a marcar as afirmações verdadeiras. Se por um lado, esse comportamento caracteriza falta de atenção na realização da atividade, por outro, põe em destaque uma situação recorrente nos materiais se ensino, o fato de que as atividades e exercícios propostos são repetitivos e encaminhados dentro de uma mesma lógica, que faz com que os estudantes criem hábitos, façam associações e passem a operar a partir dos mesmos.

No que diz respeito ao componente **análise e síntese**, conforme já destacado nos tópicos até aqui analisados, é o que se apresenta mais fragilizado. Neste material considerou-se sua idoneidade média, pois a síntese final foi proposta por meio de questões (figura 132), assim os estudantes apresentaram respostas, as quais em sua maioria já foram destacadas na análise dos demais componentes. Ressalta-se, novamente, a postura dos estudantes em apenas responder o que está sendo posto na forma de questão, o questionamento incial sobre se conseguiriam listar o que aprenderam não foi realizado por nenhum estudante.

Figura 132 - Síntese e análise: triângulos

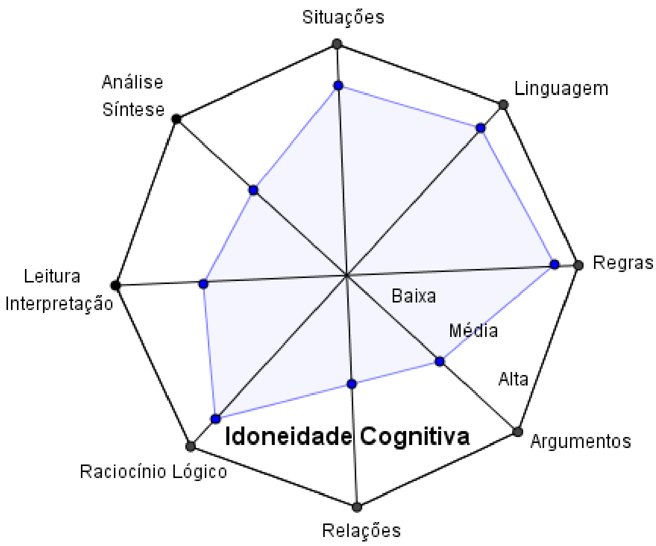


Fonte: a pesquisa.

Considera-se que a análise produzida e discutida permitiu lançar um olhar para os significados pretendidos com o material de estudos sobre Triângulos frente aos significados declarados pelos estudantes, possibilitando evidenciar fragilidades e potencialidades tanto do material como dos significados apresentados pelos estudantes, assim como, identificando possíveis tensões/relações e conflitos semióticos nos significados atribuídos pelos estudantes. Assim, entende-se que os significados pretendidos foram em parte alcançados, não conseguindo alcançar em sua plenitude uma idoneidade alta, mas se fazendo presente de maneira satisfatória nos componentes epistêmicos e cognitivos.

Assim, buscando sintetizar e ilustrar a análise produzida, apresenta-se na figura 133 uma representação octogonal, onde os vértices são os componentes e o polígono inscrito refere-se ao grau de idoneidade alcançado frente aos significados pretendidos e os declarados pelos estudantes.

Figura 133 - Representação do grau de Idoneidade Cognitiva alcançado no material Triângulos



Fonte: a pesquisa.

8.3.4 Triângulos: síntese das análises

As análises produzidas e discutidas sobre o material de estudos Triângulos permitiram refletir sobre a forma que o estudo foi conduzido, os recursos utilizados, os significados pretendidos com o material e os declarados pelos estudantes.

Considera-se que os componentes propostos pelas ferramentas de análise epistêmica, mediacional e cognitiva tiveram uma ótima representatividade não obtendo idoneidade baixa em nenhum componente. Destaca-se a dimensão mediacional que apresentou alta idoneidade nos dois componentes, considerando a diversidade dos recursos utilizados e das atividades propostas. No que se refere a dimensão epistêmica, destaca-se os componentes Linguagens, Regras e Argumentos com uma alta idoneidade, sendo que os dois primeiros também alcançaram uma alta idoneidade na dimensão cognitiva, o que se considera um aspecto positivo.

Na dimensão cognitiva os componentes Situações-problema e Raciocínio lógico também apresentaram uma idoneidade alta, sendo os demais média.

Neste contexto, entende-se que os resultados alcançados com o material de estudos sobre Triângulos foram positivos, pois os estudantes conseguiram atingir grande parte dos significados pretendidos, destacando seus desempenhos na construção e classificação dos triângulos, como também, na mobilização e articulação das definições e propriedades para resolver as situações propostas.

Apresenta-se a seguir as análises produzidas referente ao tópico Quadriláteros.

8.4 QUADRILÁTEROS

O material de estudo desenvolvido para o trabalho com a temática Quadriláteros foi planejado visando atender aos objetivos, competências e habilidades estabelecidas nos documentos oficiais (BRASIL, 1998, 2017; SÃO LEOPOLDO, 2013). Assim, pretende-se com este material que os estudantes sejam capazes de:

- identificar características e propriedades dos quadriláteros;
- classificar quadriláteros em relação a suas propriedades;
- reconhecer a inclusão e a intersecção das classes de quadriláteros;
- construir quadriláteros utilizando o uso das tecnologias digitais.
- resolver situações-problemas envolvendo quadriláteros.

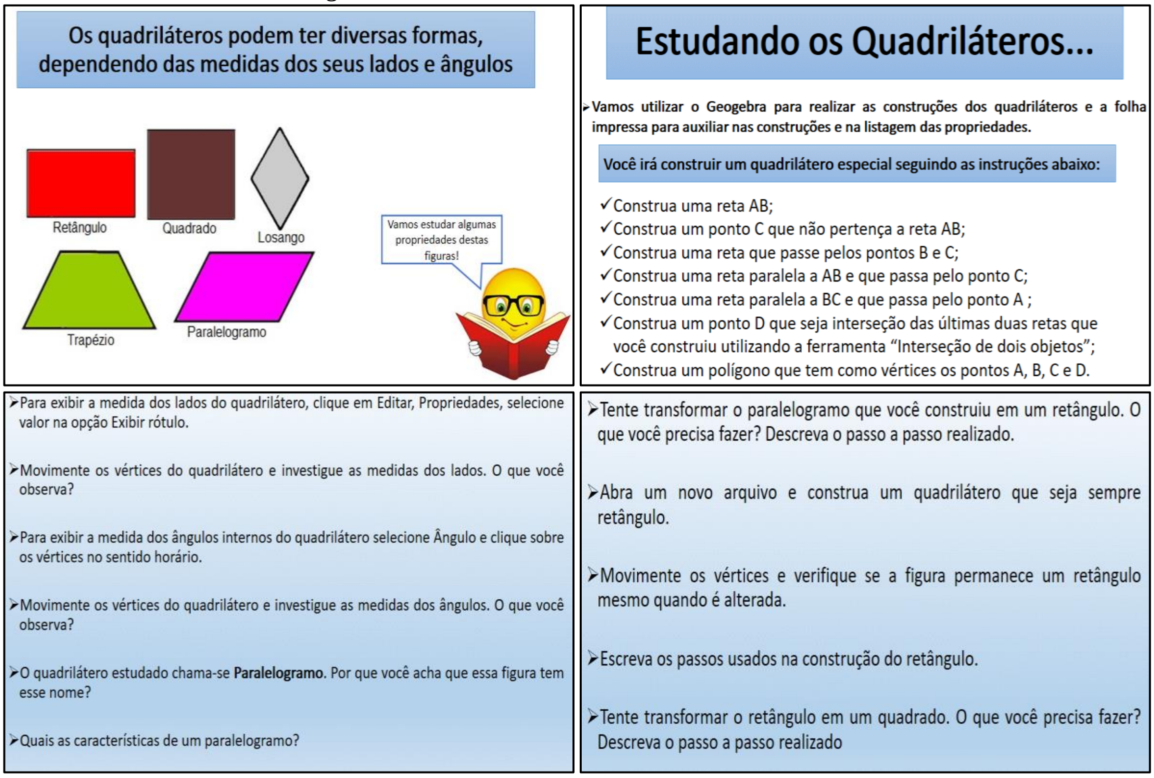
Objetivou-se, também, com este material, buscar estratégias para superar as dificuldades destacadas pelas pesquisas com esta temática (SILVA, 2008; INOUE, 2004; PROENÇA; PIROLA, 2009), as quais ressaltam que, em geral, os estudantes apresentam dificuldades em diferenciar os quadriláteros quanto à sua classificação e propriedades, reconhecer as figuras em diferentes posições ou, ainda, os indicam todos como quadrado.

Diante desta problemática, Boas e Santana (2013) ponderam que,

> [...] ao ensinar sobre os tipos de quadriláteros é necessário dar oportunidade aos alunos de além de conhecer cada um deles (o quadrado, o losango, o retângulo, o trapézio, o paralelogramo e outros irregulares), compará-los. É preciso formular conjecturas e associar às propriedades a partir da exploração dos elementos dos quadriláteros (lado, ângulos, entre outros), identificar erros e corrigi-los, processos que podem levar à formação desses conceitos. Para isso, além de usar lápis e papel é possível em aulas de geometria que aborde sobre os tipos de quadriláteros fazer uso de softwares, materiais manipuláveis, entre outros materiais didáticos (BOAS; SANTANA, 2013, p.5).

Neste contexto, o estudo dos Quadriláteros foi iniciado retomando a ideia que os mesmos possuem distintas formas, dependentes das medidas de seus lados e ângulos. Para desenvolver o estudo em torno das propriedades e classificação dos quadriláteros, encaminhou-se uma sequência de atividades de construção, observação e manipulação no Geogebra, objetivando que os estudantes chegassem ao estabelecimento de propriedades mínimas, a partir das observações e análises das características das figuras construídas. Ainda, era objetivo, que fossem estabelecidas relações as quais possibilitassem, por fim, chegar a inclusão de classes dos quadriláteros, conforme ilustrado nas telas do material apresentadas na figura 134.

Figura 134 - Introduzindo o estudo dos Quadriláteros

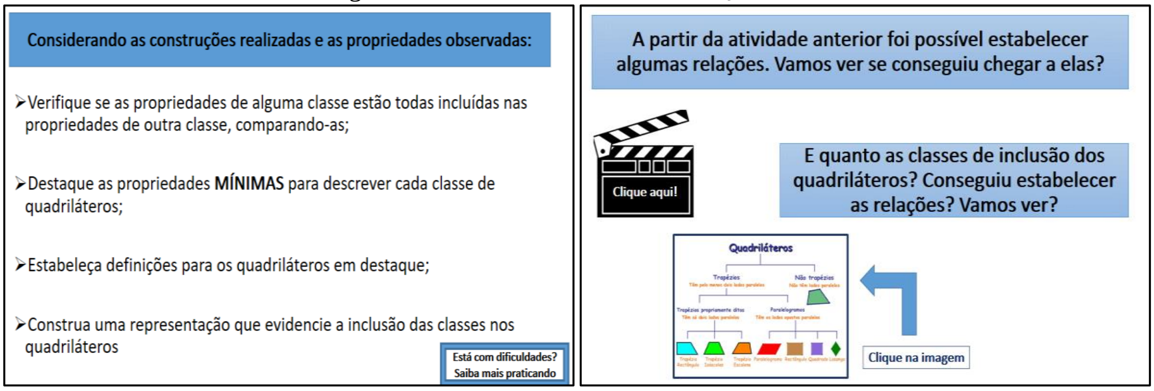


Fonte: a pesquisa.

Na figura 134 apresentou-se o encaminhamento para a construção de um paralelogramo no Geogebra e a realização do estudo a partir da manipulação e observação desta representação. Destaca-se que este procedimento de construções das figuras a partir de instruções foi desenvolvido também no estudo dos losangos e trapézios, visando que os estudantes conseguissem estabelecer propriedades mínimas de cada quadrilátero e chegassem a relação de inclusão de algumas delas.

A partir desse conjunto de atividades de construção, estimulou-se os estudantes a conjecturarem e refletirem sobre as conclusões estabelecidas e, por fim, foi apresentado um esquema destacado as classes de inclusão de quadriláteros, conforme destacado na figura 135.

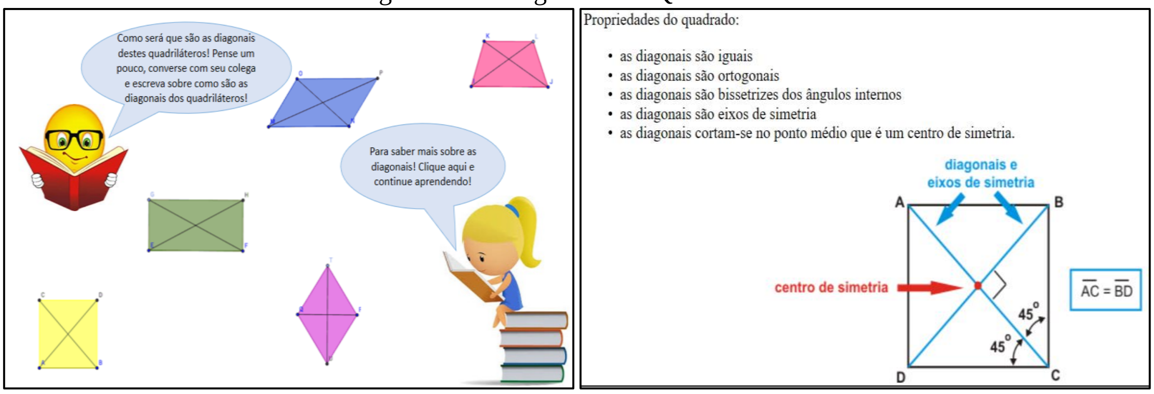
Figura 135 - Classe de inclusão dos Quadriláteros



Fonte: a pesquisa.

No material foi abordado, também, aspectos sobre as diagonais dos quadriláteros, iniciando por uma reflexão sobre diagonais nos quadriláteros, para que os estudantes espontaneamente discutissem sobre o assunto. Em seguida, apresentando imagens de quadriláteros e suas diagonais, encaminhou-se o estudo para um *link* externo, no qual a questão era discutida, considerando possíveis características que levassem ao estabelecimento ou entendimento de propriedades (figura 136).

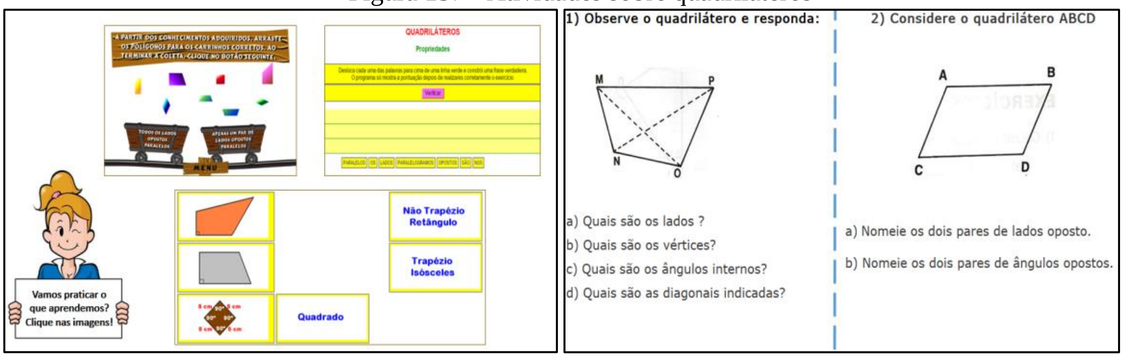
Figura 136 - Diagonais dos Quadriláteros



Fonte: a pesquisa.

Posteriormente, trabalhou-se com atividades *online* e situações-problemas a fim de exercitar e aplicar os conhecimentos que estavam sendo estudados. Na figura 137 apresenta-se exemplos de atividades contempladas no material.

Figura 137 - Atividades sobre quadriláteros



Fonte: a pesquisa.

O destaque dado às telas apresentadas objetivaram ilustrar de forma geral como o estudo sobre Quadriláteros foi conduzido, porém, destaca-se, que a íntegra do mesmo se encontra no Apêndice G. No que segue, discute-se a análise deste material, sob a perspectiva da Idoneidade Didática e suas dimensões (epistêmica, cognitiva e mediacional).

8.4.1 Quadriláteros: uma análise epistêmica

Apresenta-se no quadro da figura 138 a análise epistêmica produzida a partir dos componentes e indicadores da FAE sobre o material de estudos Quadriláteros.

Figura 138 - Análise epistêmica: Triângulos

Componentes	Indicadores	Análise	Grau de Idoneidade
Situações-problema	a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações. b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).	- Considera-se que o material de estudo apresenta um conjunto de situações pertinentes ao estudo dos quadriláteros, caracterizadas, predominante, por tarefas em formato de exercícios, nas quais os estudantes tenham que relacionar os conceitos e propriedades estudadas (figura 139). - No que se refere a situações de generalização, entende-se que as mesmas se fazem fortemente presentes no material, por meio das atividades de construções no Geogebra as quais possibilitam que os estudantes construam as figuras, observem suas características, propriedades buscando uma generalização (figura 140).	**Média**
Linguagem	a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas. b) nível de linguagem adequado aos estudantes. c) propor situações de expressão matemática e interpretação.	- No material buscou-se desenvolver o estudo dos quadriláteros utilizando linguagem acessível e de acordo com o nível dos estudantes. - Considera-se que no material foi contemplado as diferentes formas de expressão matemática, verbal, gráfica e simbólica, tanto nas discussões teóricas do material como nas atividades a serem resolvidas pelos estudantes (figura 141).	**Alta**
Regras (definições, proposições, procedimentos)	a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem. b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado. c) propõem-se situações onde os estudantes tenham que	- O estudo das definições, proposições, propriedades e procedimentos em torno dos Quadriláteros foi encaminhado de acordo com o nível educativo dos estudantes e realizado por meio das atividades de construções no Geogebra, as quais possibilitam aos estudantes construir, manipular, observar, conjecturar e concluir, a partir destas ações, identificando regularidades, particularidades e chegando a generalizações envolvendo quadriláteros (figura 142).	**Alta**

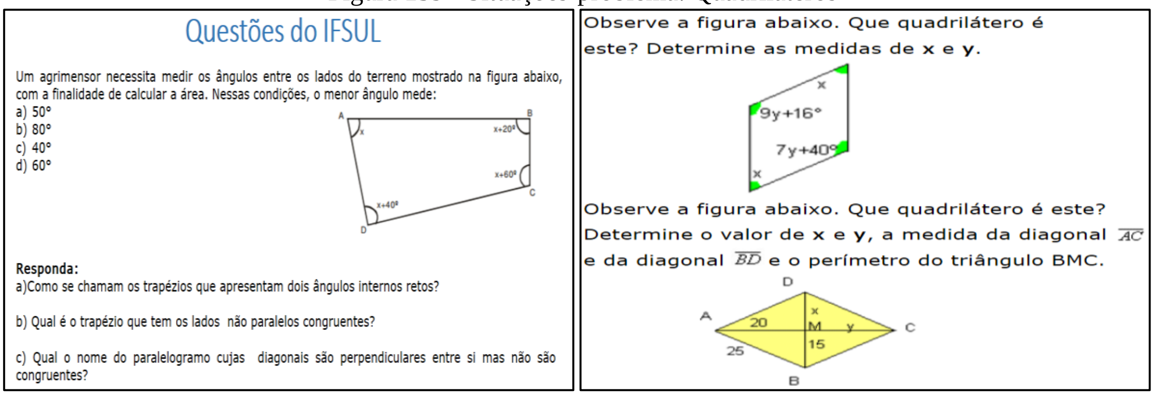
	generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.		
Argumentos	a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem. b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que argumentar.	- Este material foi estruturado a partir de atividades de construções de quadriláteros no Geogebra, as quais foram planejadas com a intenção de privilegiar a observação e a argumentação, aspectos fortemente contemplados no material (figura 143).	**Alta**
Relações	a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si.	- Conforme já destacado, o material privilegiou a produção da argumentação nas atividades e, a partir dessas, encaminhou-se para a observação das relações existentes entre os quadriláteros a fim de que os estudantes conseguissem perceber a existência de um relação de inclusão entre os quadriláteros (figura 144).	**Alta**

Fonte: a pesquisa.

A partir da análise produzida e apresentada no quadro da figura 138, é possível perceber que os componentes epistêmicos se fazem presente fortemente no material de estudos sobre Quadriláteros, não alcançando uma alta idoneidade somente no componente situações-problemas.

Considerou-se o componente **situações-problemas** com uma idoneidade média, pois no material a maior parte das atividades apresentadas, se caracterizam por exercícios, as situações de contextualização dos conceitos e procedimentos trabalhados são contempladas, mas em menor representatividade. Na figura 139 apresentam-se exemplos de situações trabalhadas no material.

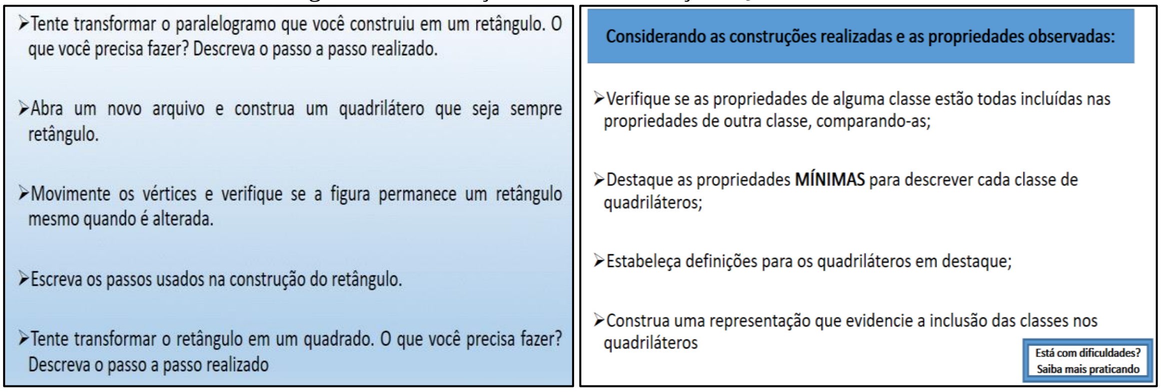
Figura 139 - Situações-problema: Quadriláteros



Fonte: a pesquisa.

Já no que se refere as situações de generalização entende-se que as mesmas se fazem presente no material de maneira significativa, contempladas por meio das atividades de construções dos quadriláteros, conforme destacado na figura 140.

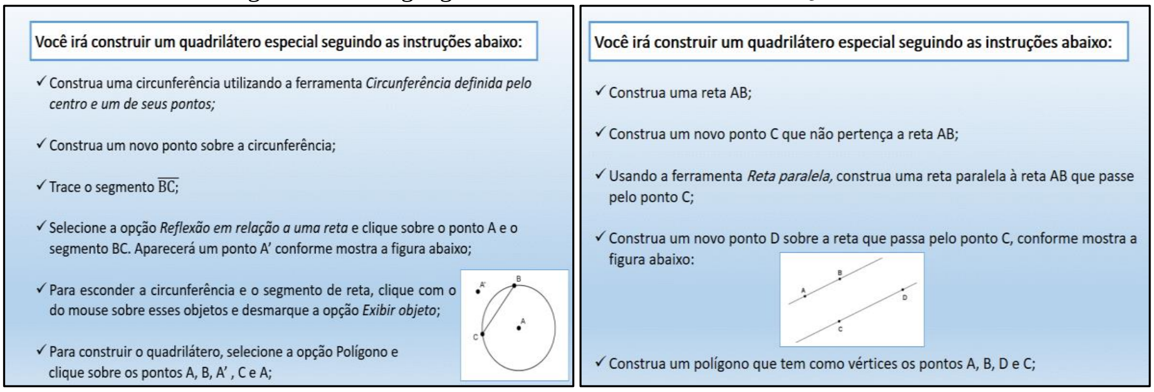
Figura 140 - Situações de Generalização: Quadriláteros



Fonte: a pesquisa.

No componente **Linguagens** considerou-se ter alcançado uma alta idoneidade no material, pois trabalhou-se com diferentes linguagens, contemplando nas situações a natural, gráfica e simbólica, conforme destacado na figura 141.

Figura 141 - Linguagens no material de estudo sobre Quadrilátero

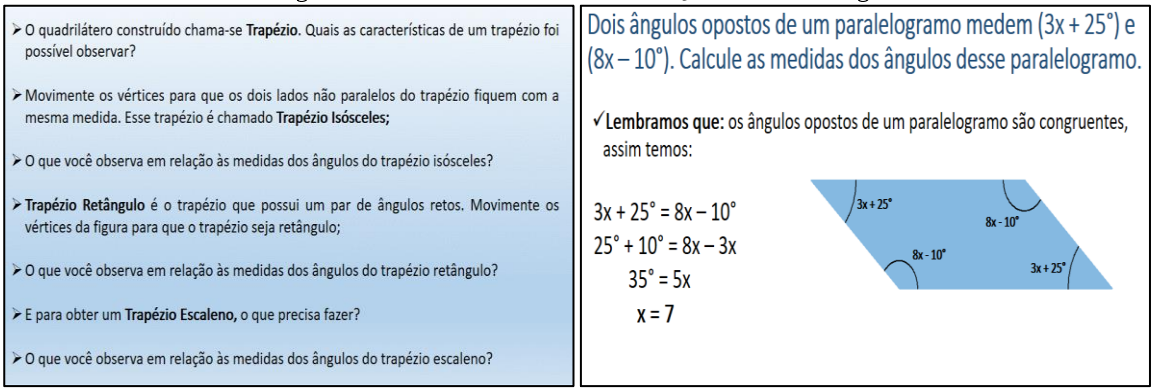


Fonte: a pesquisa.

Considera-se importante o trabalho com diferentes linguagens, pois os estudantes devem se apropriar do conhecimento como um todo, a partir de suas diversas abordagens e representações, possibilitando assim que os mesmos sejam capazes de mobilizar estas diferentes linguagens a fim de resolver as situações propostas.

O componente **Regras** também foi considerado com uma alta idoneidade, tendo em vista que as definições, proposições, propriedades e procedimentos foram trabalhados de acordo com o nível educativo dos estudantes e desencadeadas por meio de atividades de construções no Geogebra, as quais possibilitam aos estudantes construir, manipular, observar, conjecturar e concluir a partir destas ações as regularidades, particularidades e generalizações dos quadriláteros. Na figura 142 destaca-se telas do material que exemplificam como foram desenvolvidas estas atividades.

Figura 142 - Telas do material sobre Quadriláteros: Regras

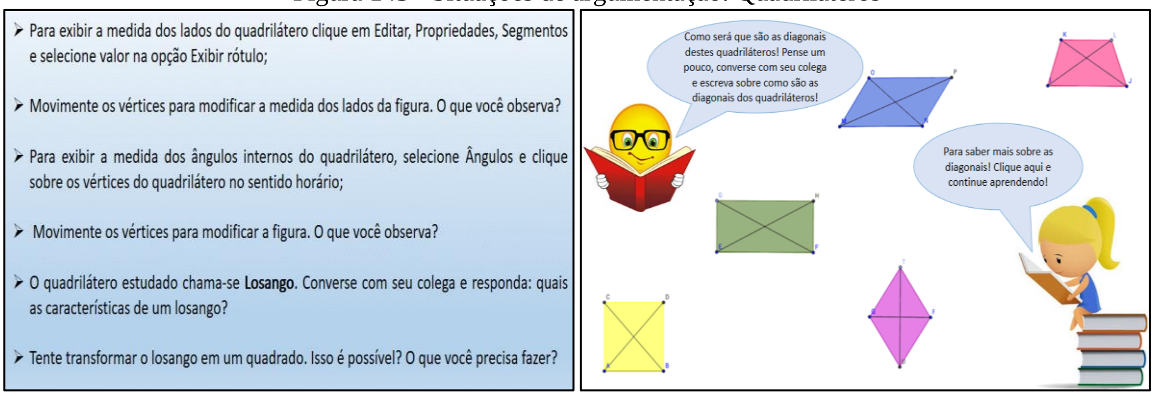


Fonte: a pesquisa.

O material em destaque na figura 142 ilutra como foram trabalhadas as definições e procedimentos em torno dos quadriláteros. Na primeira tela aborda-se uma atividade de construção do trapézio e, a partir da mesma, são realizadas manipulações a fim de identificar as características, propriedades dos tipos de trapézios, encaminhando assim para uma compreensão das propriedades da figura. Já na segunda tela, apresenta-se um exemplo, e o mesmo é resolvido retomando as propriedades estudadas.

Considera-se que o componente **Argumentos** seja um dos mais privilegiados neste material, assim sua idoneidade foi tomada como alta, pois o estudo é encaminhado por meio de situações que estimulam os estudantes a observar, refletir e produzir justificativas e argumentos em torno dos questionamentos realizados. A figura 143 ilustra situações que fomentam estes aspectos.

Figura 143 - Situações de argumentação: Quadriláteros

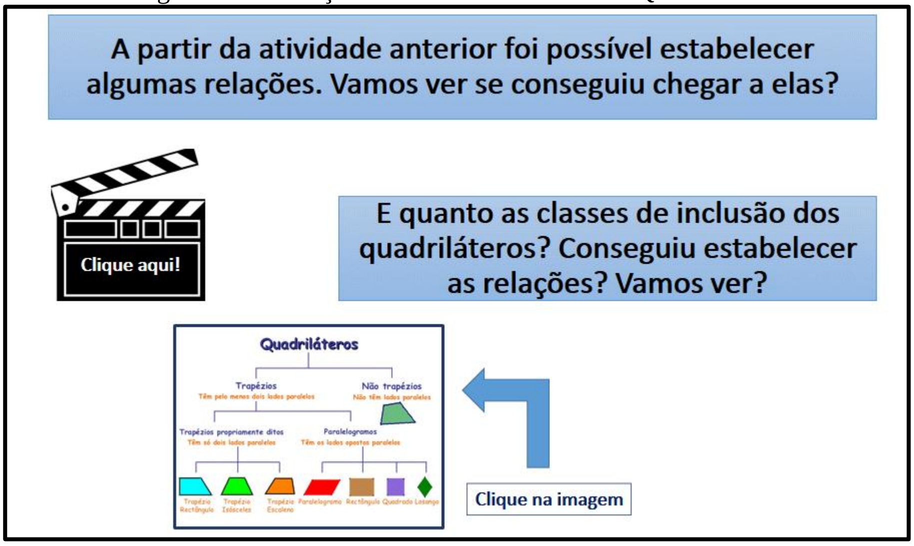


Fonte: a pesquisa.

Entende-se que o trabalho com situações que estimulem a argumentação dos estudantes, possibilitam refletirem sobre o objeto em estudo, neste caso, os quadriláteros, não apenas recebendo informações, mas sim produzindo conhecimento a partir do trabalho com as mesmas. Assim, é possível argumentar sobre o que está sendo discutido e solicitado, bem como, mobilizar conceitos, procedimentos e propriedades a fim de resolver situações que envolvam a temática.

No que se refere ao componente **Relações**, considera-se que seus indicadores foram contemplados, alcançando uma alta idoneidade. As atividades e situações trabalhadas ao longo do material, e já destacadas nos demais componentes encaminham para que os estudantes sejam capazes de estabelecer as relações existentes entre os quadriláteros, visando que os mesmos consigam perceber as semelhanças e diferenças a fim de conjecturar em torno de uma possível classe de inclusão destes. Na figura 144 ilustra-se como estas relações foram propostas no material.

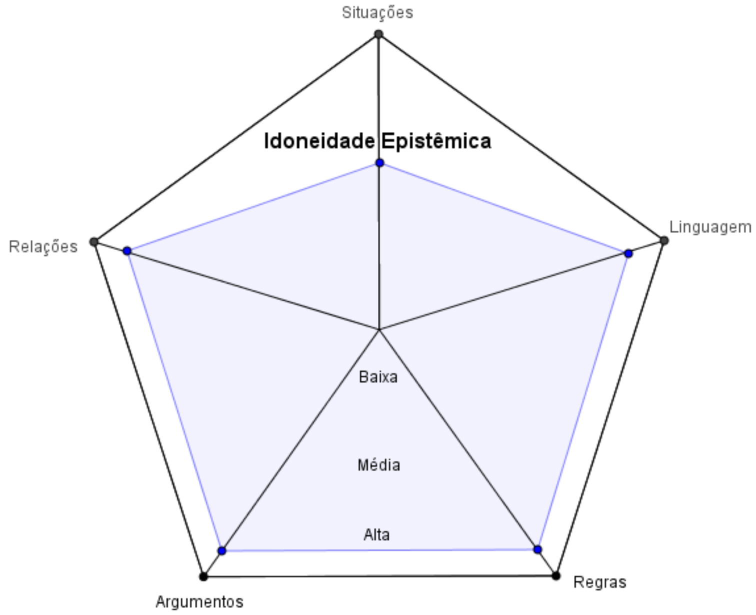
Figura 144 - Relações: classes de inclusão dos Quadriláteros



Fonte: a pesquisa.

Conforme já destacado, a análise epistêmica produzida permitiu perceber que os componentes epistêmicos estão fortemente presentes. O material de estudo foi estruturado a partir de situações que estimulam os estudantes a argumentarem e produzirem suas próprias considerações e justificativas paras as ações realizadas nas construções, a fim de que consigam estabelecer suas definições e perceber as relações existentes entre as figuras estudadas. Assim, apresenta-se na figura 145 a representação do grau de idoneidade alcançado no material de estudo no que se refere a dimensão epistêmica.

Figura 145 - Representação do grau de Idoneidade Epistêmica alcançado com o material Quadriláteros



Fonte: a pesquisa.

No que segue será lançado um olhar para os recursos utilizados e as articulações estabelecidas como os mesmos, destacando suas potencialidades e fragilidades no material produzido.

8.4.2 Quadriláteros: uma análise mediacional

Visando refletir sobre os recursos utilizados no material para o desenvolvimento do estudo dos Quadriláteros, apresenta-se no quadro da figura 146 a análise produzida considerando os componentes e indicadores da FAM, recursos e tempo didático.

Figura 146 - Análise mediacional: Quadriláteros

Componentes	Indicadores	Análise	Grau de Idoneidade
Recursos Didáticos	a) evidencia-se a presença de materiais adequados ao desenvolvimento do processo de ensino e adaptados ao nível educativo a que se dirigem. b) há uma diversificação de recursos para auxiliar no processo de ensino, tais como: audiovisuais, material concreto, livros, entre outros. c) propõe-se a organização e experimentação de situações práticas.	- Considera-se que o material de estudo proposto está adequado ao nível educativo dos estudantes, pois utiliza linguagem acessível mantendo, porém, aspectos formais quando pertinentes. - No que se refere aos recursos, optou-se por concentrar a maior parte das atividades a partir da utilização do *software* Geogebra, por meio da construção das figuras e da manipulação das mesmas nas aplicações, as quais buscavam possibilitar aos estudantes vivenciarem situações de experimentação (figura 148). - Foram utilizados, ainda, vídeos, atividades *online* e objetos de aprendizagem a fim de oportunizar os	**Alta**

		estudantes retomarem e exercitarem o que estava sendo estudado (figura 149).	
Tempo didático	a) apresentam-se situações de ensino que contemplam diversas modalidades (estudo pessoal, cooperativo, tutorial, presencial). b) evidencia-se organização do tempo para intervenção docente, trabalho autônomo dos estudantes e momentos de discussão. c) dedica-se um tempo maior para o desenvolvimento dos conhecimentos, caso os estudantes apresentem dificuldade de compreensão.	- A proposta de estudo se caracteriza por um estudo presencial, que privilegia o trabalho individual, porém conforme já destacado, a interação entre os estudantes, assim como, com a pesquisadora se faz presente no processo de estudo. - Considera-se que o material possibilita desenvolver a autonomia nos estudantes, uma vez que os mesmos se tornam responsável pelo seu estudo, estabelecendo seu ritmo de estudo e aprendizagem. - No material são propostas situações que estimulem os estudantes a discutirem sobre as características, propriedades e definições dos quadriláteros, visando que os mesmos reflitam e negociem os significados estabelecidos.	**Alta**

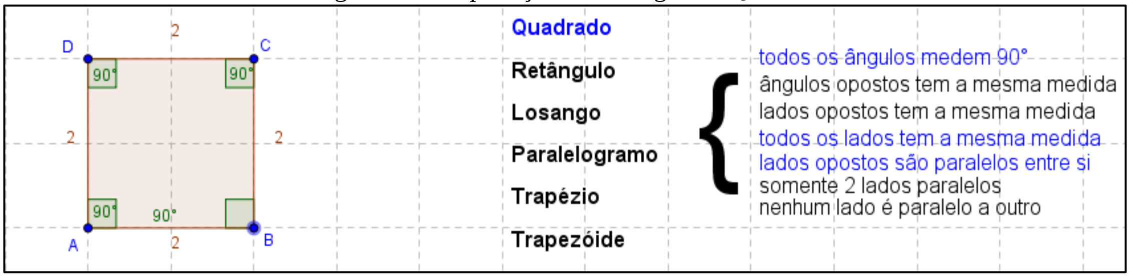
Fonte: a pesquisa.

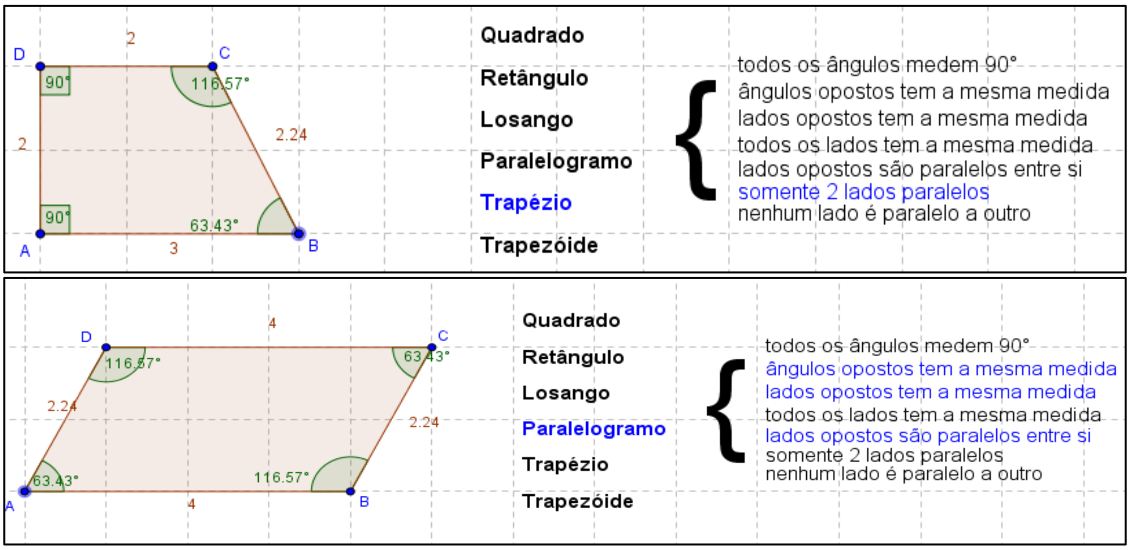
A partir da análise apresentada no quadro da figura 146 é possível perceber que os componentes e indicadores mediacionais estão representados no material. No que se refere a recursos, considerou-se uma alta idoneidade, pois privilegiou-se o uso das tecnologias digitais, propondo situações de construção utilizando o *software* Geogebra, porém, não contemplando atividades com régua e compasso, como realizado em outros tópicos, o que não se considera uma fragilidade do material, mas sim uma opção metodológica para o estudo dos Quadriláteros.

As atividades de construção no Geogebra foram encaminhadas apresentando as instruções no material de estudo para que os estudantes realizassem no *software* as experimentações e registrassem as considerações, conforme já ilustrado.

As aplicações do Geogebra foram utilizadas como mais um recurso para auxiliar os estudantes nas observações das propriedades dos quadriláteros, visando que os mesmos verificassem quais estão presentes em mais de uma figura, quais são específicas de alguma delas, afim de que conseguissem estabelecer as propriedades mínimas de cada um, relacionando-os, conforme destacado na figura 147.

Figura 147 - Aplicações do Geogebra: Quadriláteros



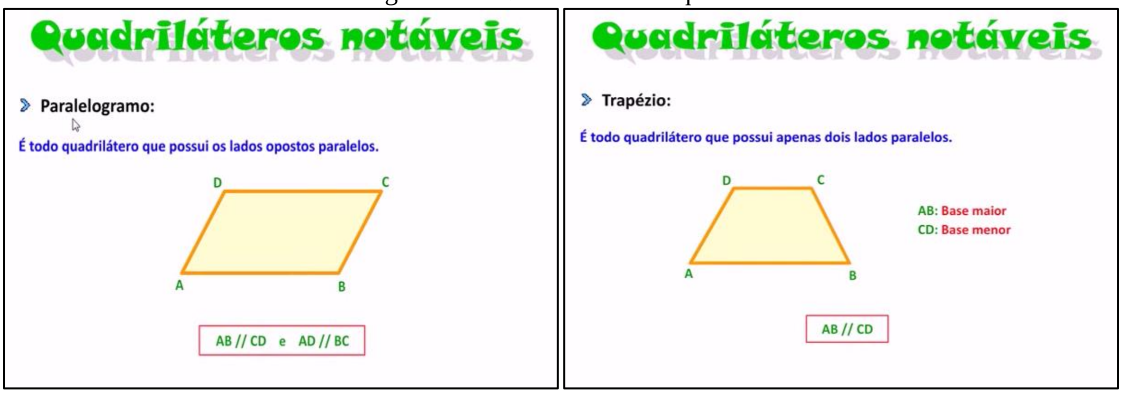


Fonte: a pesquisa[54].

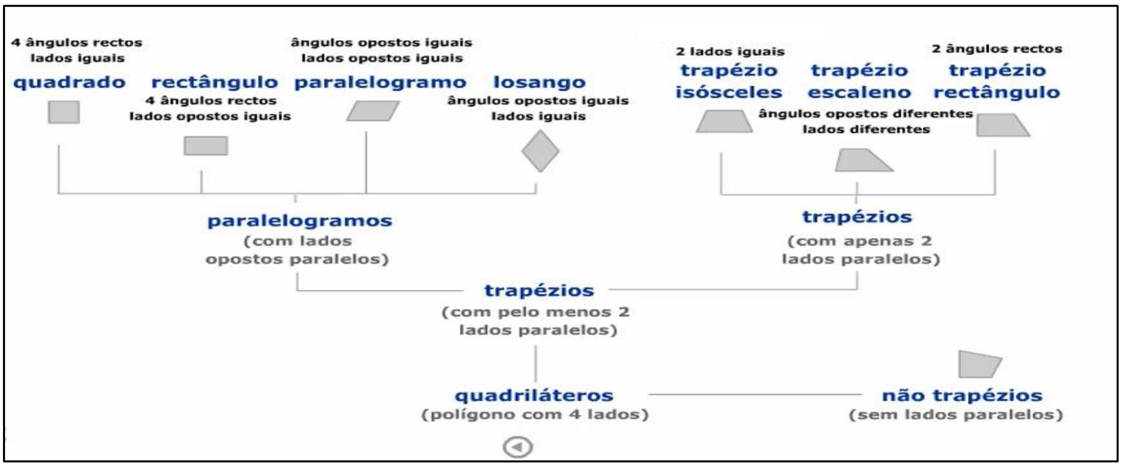
Na representação dos quadriláteros no Geogebra, é possível observar que à medida em que se os vértices das figuras são movimentados, as mesmas vão sofrendo transformações e são destacadas, em azul, as propriedades pertinentes ao novo quadrilátero. Este objeto foi disponibilizado visando complementar as observações e conclusões realizadas pelos estudantes nas construções dos quadriláteros.

Outro recurso utilizado no material foram dois vídeos apresentados com o objetivo de que fosse possível aos estudantes confrontar as relações que tinham estabelecido como pertinentes aos distintos quadriláteros, buscando sempre identificar propriedades comuns e não comuns, visando o estabelecimento de classes de inclusão. Na figura 148 são destacados partes dos mencionados vídeos.

Figura 148 - Vídeos sobre os quadriláteros



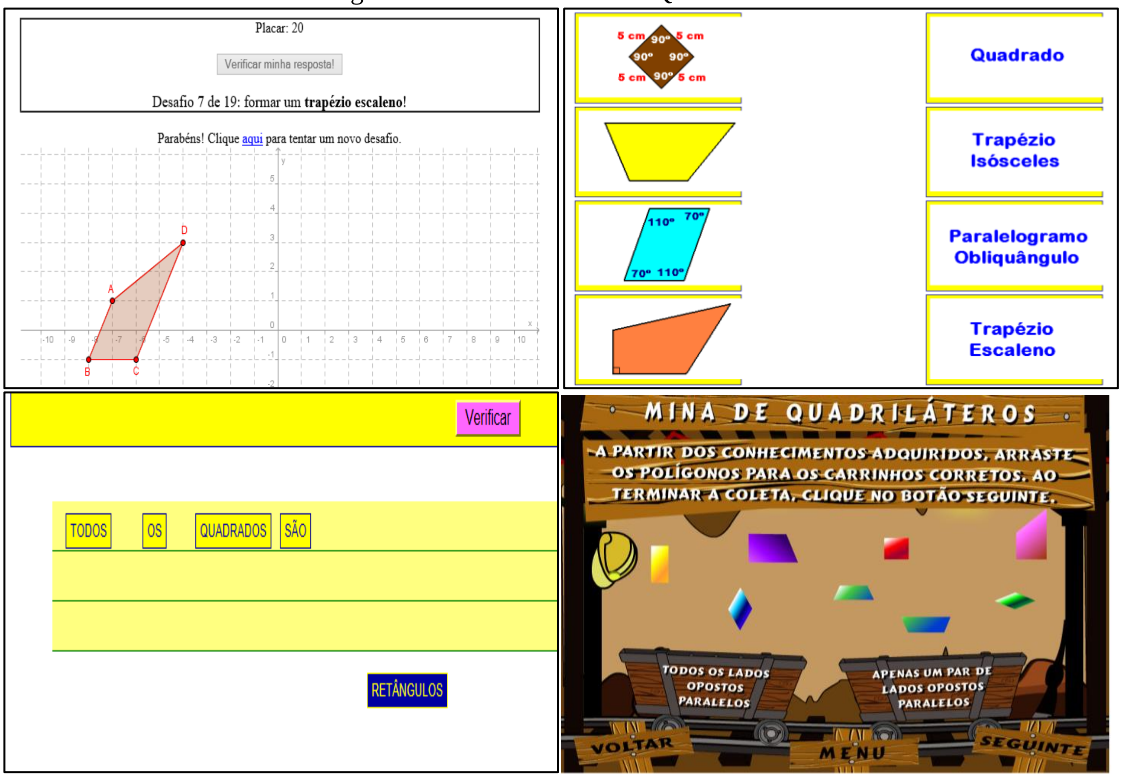
54 http://ppgecim.ulbra.br/laboratorio/index.php/atividades-didaticas/ensino-fundamental-2/



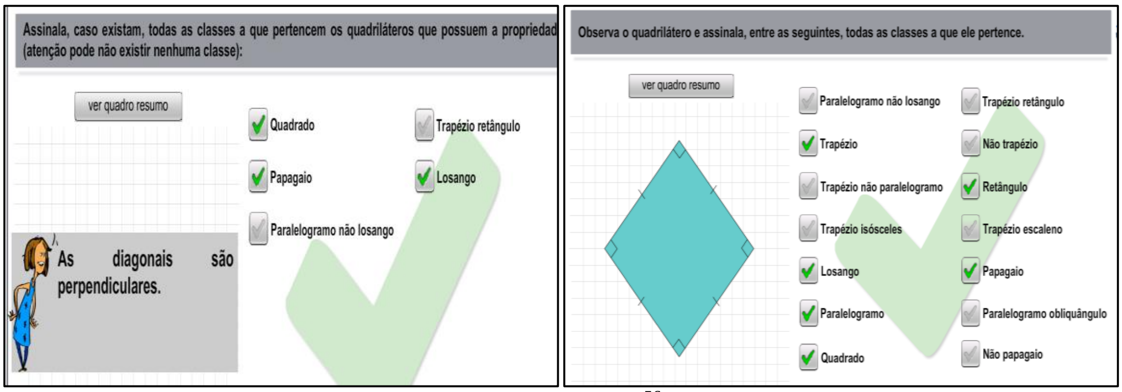
Fonte: a pesquisa[55].

Visando possibilitar aos estudantes exercitarem o que foi estudado e conjecturado em torno dos Quadriláteros, disponibilizou-se um conjunto de atividades *online* e objetos de aprendizagem, os quais destacam-se na figura 149.

Figura 149 - Atividades sobre Quadriláteros



55 https://www.youtube.com/watch?v=Houc6owpWtw;https://www.3ponto14.net/intro



Fonte: a pesquisa[56].

Destacam-se, nas atividades, as diferentes maneiras dos quadriláteros e suas propriedades serem discutidas, contemplando manipulações de figuras, associações de representações à sua classificação, identificação de características e propriedades.

No que se refere ao componente **Tempo Didático**, considera-se que a idoneidade alcançada foi alta, pois além das características comuns a todos os materiais desenvolvidos, os quais possibilitam aos estudantes exercitarem a autonomia, respeita o ritmo de estudo e aprendizagem de cada um. Neste material privilegiou-se, também, a discussão sobre a temática em estudo, propondo situações que estimulem os estudantes a discutirem sobre as características, propriedades e definições dos quadriláteros, visando que os mesmos reflitam, negociem os significados estabelecidos e produzam argumentos, conforme já destacado.

Considera-se que a análise produzida permitiu refletir sobre as potencialidades dos recursos utilizados neste material, o que possibilitou estabelecer uma alta idoneidade nos dois componentes, pois buscou-se trabalhar a temática dos quadriláteros de forma diferenciada, promovendo que os estudantes construíssem, manipulassem e conjecturassem, buscando estabelecer condições para a produção de argumentos e relações sobre as definições e propriedades, que não são identificadas a priori.

No que segue será lançado um olhar para os significados produzidos pelos estudantes frente aos significados pretendidos com este material de estudo, visando analisar e identificar as potencialidades e os conflitos semióticos apresentados, assim como as relações entre o que se pretendia e o que de fato foi alcançado junto aos estudantes.

[56]http://www.uff.br/cdme/jcq/jcq-html/jcq-br.html; http://www.cmcmc.pt/MAT/MAT5/QUAD/HOT_POTATOES/E9_JMi_Quad_4.htm; http://www.neteducacao.com.br/multimidia/aulas-animadas/aulaquadrilateros; http://www.hypatiamat.com/Class_quadrilateros.php

8.4.3 Quadriláteros: uma análise cognitiva

Visando lançar um olhar para a aprendizagem dos estudantes, assim como as dificuldades e conflitos apresentados ao longo do estudo sobre Quadriláteros apresenta-se no quadro da figura 150 uma análise, considerando os significados pretendidos para a temática em relação aos componentes epistêmicos e cognitivos.

Figura 150 - Análise cognitiva: significados pretendidos x declarados para os Quadriláteros

Componentes Epistêmicos-cognitivos	**Significados Pretendidos**	**Significados Declarados**	**Grau de idoneidade**
Situações- problemas	-Generalizar características e propriedades dos quadriláteros. -Resolver as situações propostas, utilizando os conceitos, procedimentos e argumentos necessários.	- Considera-se que os estudantes conseguiram compreender as propriedades dos quadriláteros, porém quando precisaram mobilizar as mesmas em situações que exigiam generalizações, apresentaram dificuldades. - No que se refere a utilizar as propriedades, conceitos e procedimentos a fim de resolver uma situação problema os estudantes tiveram bons desempenhos (figura 151).	**Média**
Linguagens	- Compreender as propriedades apresentadas nas diferentes linguagens (verbal e gráfica). - Associar características e propriedades a suas representações. -Associar a classificação do quadrilátero a sua representação. -Criar uma representação para a inclusão de classe. - Utilizar linguagem matemática adequada na solução das situações.	- Considera-se que os estudantes apresentaram um bom desempenho no trabalho com as diferentes linguagens, conseguindo produzir uma escrita matemática adequada e esboçar representações associadas a características (figura 152). -Nas atividades de associação os estudantes apresentaram um ótimo desempenho. - Somente dois estudantes (aluno06 e 07) produziram uma representação para indicar as propriedades mínimas dos quadriláteros, porém, não contemplaram todos. - Nenhum estudante criou uma representação própria para ilustrar as classes de inclusão dos quadriláteros, todos reproduziram a apresentada no material.	**Média**
Regras (definições, proposições, procedimentos)	-Identificar os quadriláteros a partir de seus elementos, características e propriedades; -Construir os quadriláteros no *software* Geogebra. -Reconhecer as propriedades dos quadriláteros a partir das	- No que se refere a identificação dos elementos, características e propriedades, assim como, na construção dos quadriláteros, os estudantes apresentaram um ótimo desempenho e souberam articular estes conhecimentos a fim de resolver as situações propostas no material (figura 153).	**Alta**

	construções e aplicações. -Aplicar os conhecimentos estudados sobre quadriláteros para resolver as situações propostas.		
Argumentos	-Caracterizar e argumentar sobre os quadriláteros. -Diferenciar paralelogramos de trapézios. - Produzir argumentos em torno da inclusão de classes dos quadriláteros. - Produzir argumentos em torno da construção dos quadriláteros. - Escrever definições e estabelecer as propriedades mínimas de cada quadrilátero.	- Considera-se que os estudantes conseguiram produzir argumentos no estudo dos quadriláteros, porém não da forma esperada. Para a construção das figuras no Geogebra, indicava-se o conjunto de ações a serem realizadas, como também, eram encaminhados questionamentos, visando que os estudantes observassem e refletissem sobre as características e propriedades da figura construída e registrassem suas conclusões, o que não ocorreu. Os estudantes apenas construíram as figuras, sendo que foi possível perceber que refletiram e discutiram sobre os questionamentos, mas não registraram, ou seja, não produziram a argumentação esperada para a atividade. - Quanto aos questionamentos, os quais solicitavam que os estudantes justificassem suas respostas, os mesmos apresentaram um ótimo desempenho, argumentando utilizando as propriedades e definições corretamente (figura 154)	**Baixa**
Relações	-Compreender a relação entre os quadriláteros. - Relacionar quadrados e retângulos; - Relacionar losangos e quadrados. -Relacionar paralelogramo e retângulo. -Relacionar as propriedades mínimas de cada quadrilátero.	- A partir do desempenho apresentado nas situações propostas no material, considera-se que os estudantes compreenderam as relações e diferenças essenciais entre os quadriláteros, que encaminham para a inclusão de classes, porém não registraram estas relações e descrições.	**Baixa**
Raciocínio Lógico	- Observar as medidas dos lados e ângulos dos quadriláteros construídos a fim de identificar propriedades e apresentar as definições.	- Entende-se que os estudantes observaram e compreenderam as propriedades mínimas a partir das suas construções, porém não registraram e descreveram estas observações e as relações estabelecidas.	**Média**

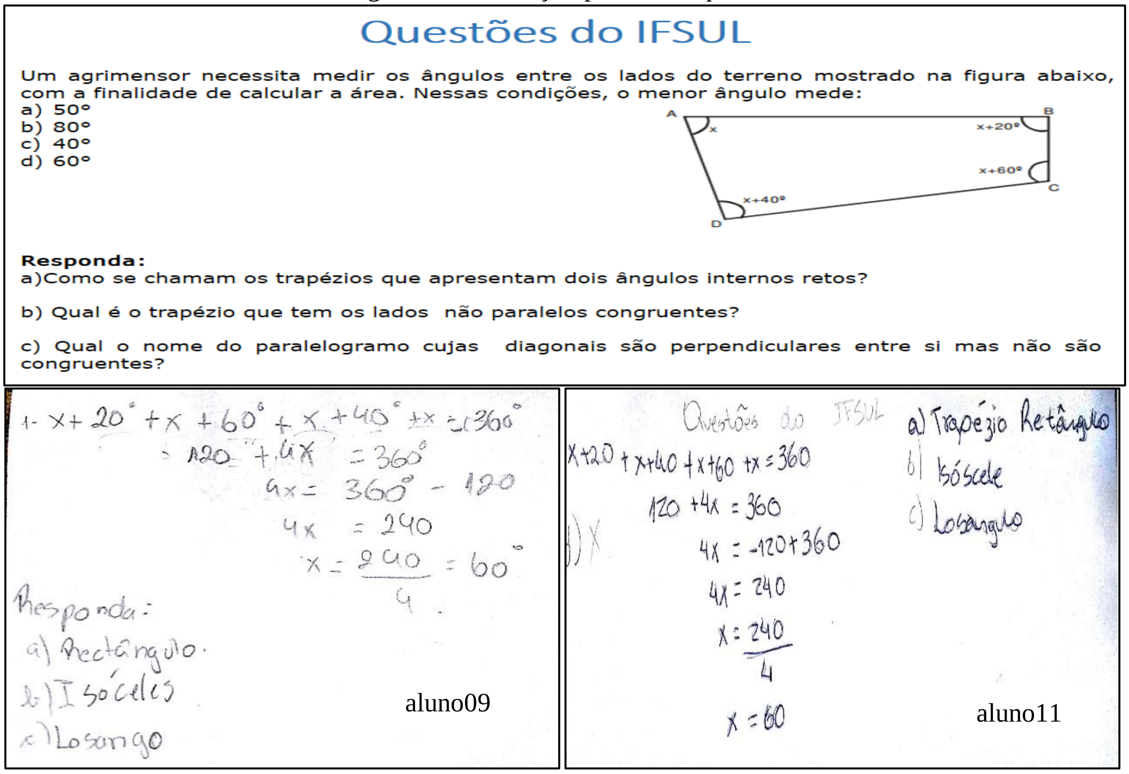
	- Estabelecer estratégias para transformar um quadrilátero em outro.		
Leitura/Interpretação	- Conseguir ler e interpretar adequadamente as informações e situações propostas no material. - Compreender as instruções para a construção dos quadriláteros no Geogebra.	- Os estudantes não apresentaram dificuldades de leitura e interpretação das situações postas no material, já que apresentaram um bom desempenho nas resoluções, como também, em seguir as indicações das construções. Porém, não responderam aos questionamentos apresentados junto as construções.	**Média**
Análise/Síntese	- Realizar síntese durante e ao final do estudo, conseguindo identificar e expressar o que foi aprendido.	- Conforme já destacado nos componentes anteriores os estudantes não conseguiram ou não registraram as análises propostas nas atividades de construção. - No que se refere a síntese final apresentaram um bom desempenho nos questionamentos, mas não apresentaram nenhum outro argumento além do que foi proposto no formato de questões, a última que tinha uma característica mais aberta os mesmos não responderam (figura 156).	**Baixa**

Fonte: a pesquisa.

Com base no que foi apresentado no quadro de análise (figura 150) é possível perceber que os significados declarados pelos estudantes não se aproximaram dos pretendidos no caso do estudo de quadriláteros, alcançando uma alta idoneidade somente no componente Regras. Considera-se que o fato dos estudantes não terem registrado suas observações e considerações durante as construções, conforme indicado no material, acabou afetando diretamente o que se esperava com este material, que era a construção das definições, propriedades mínimas e classes de inclusão dos quadriláteros a partir da argumentação e descrição dos próprios estudantes. Ressalta-se que a pesquisadora acompanhou os processos de construção no Geogebra e incentivou que os estudantes registrassem o que estavam observando e discutindo de forma sistemática, o que não ocorreu, prejudicando o estabelecimento de relações as quais permitiriam chegar a conclusões. Ocorreram pequenos registros, realizados de forma isolada.

Os estudantes apresentaram um ótimo desempenho nas situações-problemas propostas no material, conforme ilustrado pela figura 151.

Figura 151 - Situação-problema: quadriláteros



Fonte: a pesquisa.

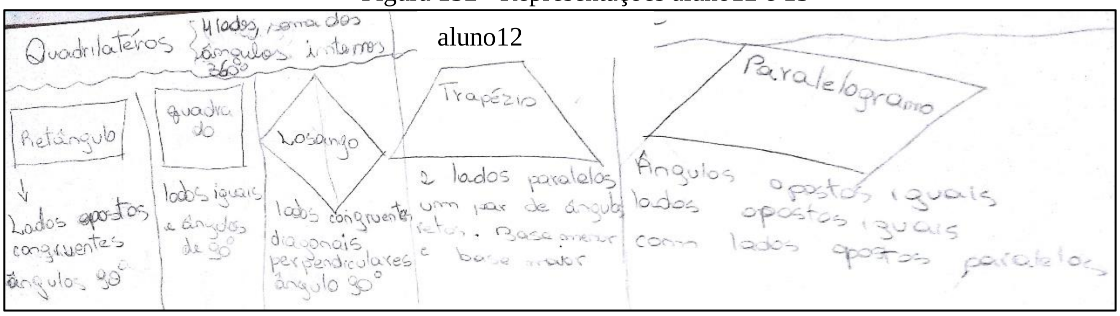
Na figura 151 apresentou-se uma situações-problema que todos os estudantes acertaram, destacando-se as resoluções dos aluno09 e 11 a fim de ilustrar as estratégias estabelecidas. Aponta-se, ainda, que os estudantes espontaneamente mobilizaram, para resolver a situação, conhecimentos sobre a soma dos ângulos internos de um quadrilátero, temática estudada no material sobre polígonos. Logo após, indicaram corretamente os quadriláteros com as referidas características, evidenciando assim que conseguiram relacionar características que diferenciam um quadrilátero de outro.

Já no que se refere às atividades de generalização, entende-se que os estudantes compreendem, em parte, aspectos de inclusão e particularização das propriedades mínimas, pois quando questionados se “um quadrado pode ser considerado um retângulo” todos responderam que sim, porém, as justificativas desta inclusão não foram adequadas. O aluno05 respondeu da seguinte forma “*pode ser sim, pois um quadrado está ‘dentro’ do retângulo*”. Conjectura-se que a justificativa apresentada pelo estudante seja reflexo de uma significação atribuída no sentido de, se o quadrado atende a todas as propriedades do retângulo, logo está inserido “dentro” dele. Já o aluno07 indica que “*sim, porque as características coincidem*” sendo que a justificativa não está correta, pois de fato todas as *características* não coincidem. Ao utilizar a palavra característica o aluno pode não ter, necessariamente, se referido a propriedades, mas sim a forma global das figuras, o que, de todo modo, não procede. O aluno14 ressaltou que "*o quadrado pode ser considerado um retângulo, pois a característica principal do retângulo é lados opostos congruentes e 4 ângulos retos e o quadrado também tem elas*", argumentação essa considerada correta e com uma linguagem matemática adequada, pois a referência a característica principal, pode ser entendida como as propriedades mínimas estudadas em relação ao quadrado. A resposta dada, além de evidenciar domínio sobre aspectos da inclusão de classes dos quadriláteros, destacou a utilização da linguagem geométrica adequada. A utilização do termo congruente, evidenciou a relação entre objetos geométricos o que é altamente significativo.

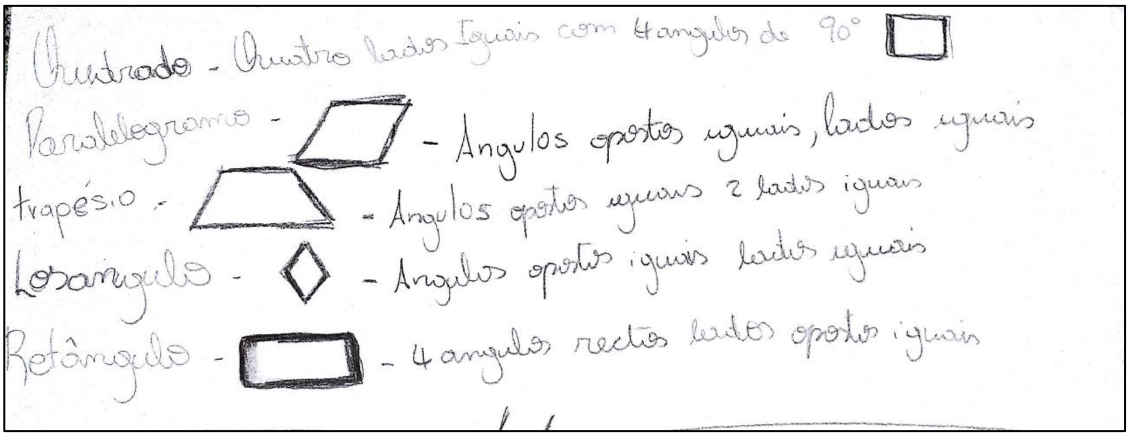
Neste contexto, se entendeu ter alcançado uma idoneidade média para o componente Situações-problema, pois apesar do bom desempenho nas situações de resolução, quando foi necessário apresentar uma justificativa a fim de generalizar ou particularizar, os estudantes tiveram dificuldades.

No que se refere ao componente **Linguagens**, também considerou-se com uma idoneidade média, pois apesar dos estudantes utilizarem uma linguagem matemática adequada, realizarem associações entre diferentes representações, somente dois estudantes (alunos 12 e 15) produziram uma representação (esquema) para indicar as propriedades mínimas dos quadriláteros, porém não contemplando todas as figuras. Ainda, nenhum estudante criou uma representação figural própria para ilustrar as classes de inclusão dos quadriláteros, reproduzindo a apresentada no material. Considerando-se estes dois aspectos, os quais foram tomados como os mais importantes em termos de significados pretendidos para este componente, os resultados apresentados justificam a atribuição de grau médio de idoneidade para este componente. Na figura 152 destaca-se as representações criadas pelos aluno12 e 15.

Figura 152 - Representações aluno12 e 15



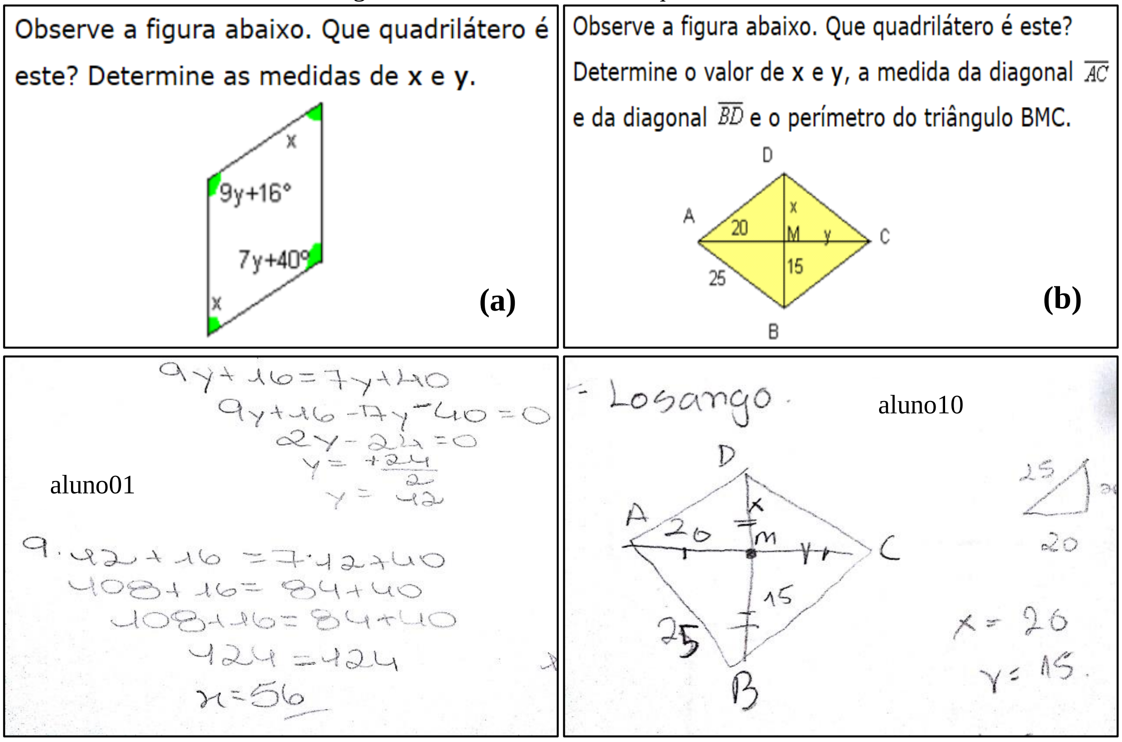
aluno15

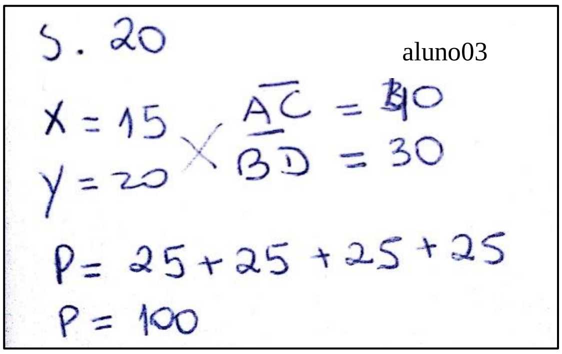

Quadrado - Quatro lados Iguais com 4 angulos de 90°
Paralelogramo - - Angulos opostos iguais, lados iguais
trapésio - - Angulos opostos iguais 2 lados iguais
Losangulo - - Angulos opostos iguais lados iguais
Retângulo - - 4 angulos rectos lados opostos iguais

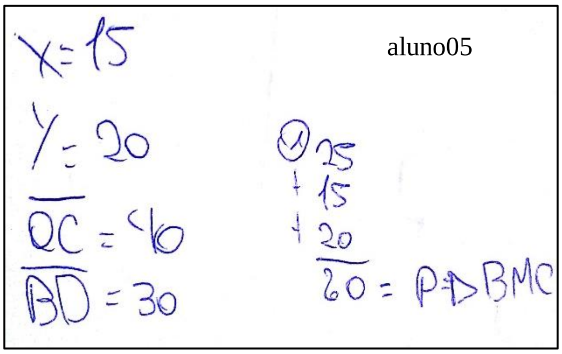
Fonte: a pesquisa.

No que se refere ao componente **Regras**, o grau de idoneidade alcançado foi considerado alto, uma vez que os significados pretendidos foram evidenciados nos declarados pelos estudantes. Na figura 153 discute-se a resolução de situações propostas no material as quais denotam o bom desempenho dos estudantes, como também, os entraves encontrados pelos mesmos.

Figura 153 - Exercícios sobre quadriláteros







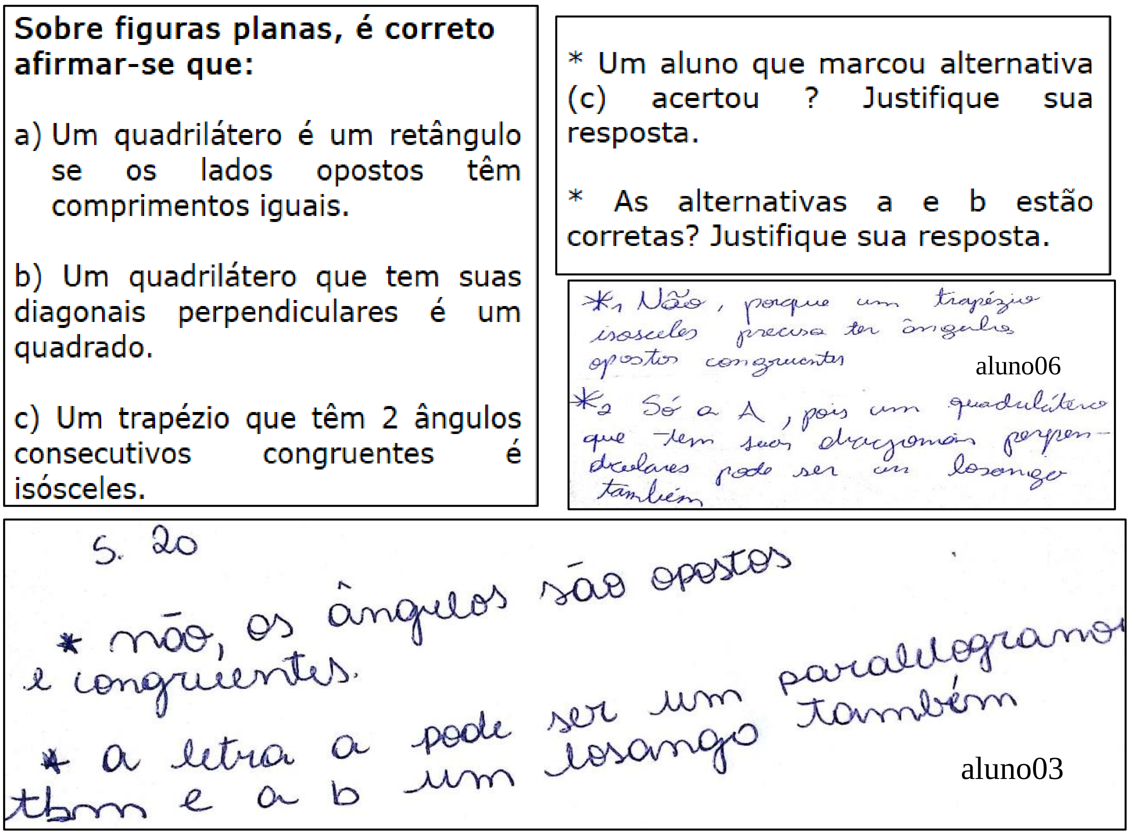
Fonte: a pesquisa.

Destacou-se o registro do aluno01 para a primeira situação (figura 153a), pois ilustra, de modo geral, a forma como os estudantes apresentaram suas resoluções. Todos acertaram a questão, o que se considera muito positivo, tendo em vista que relacionaram corretamente que os ângulos opostos em um paralelogramo são congruentes, logo as expressões algébricas poderiam ser igualadas, ou seja, mobilizaram propriedades já estudadas a fim de resolver a questão, e, novamente utilizaram os conhecimentos sobre a soma dos ângulos internos para encontrar o valor dos demais ângulos.

A segunda questão (figura 152b), no que se trata do estudo dos quadriláteros, todos acertaram, porém no caso do aluno10, o mesmo não respondeu os demais questionamentos, somente determinou o valor de x e y. Ressalta-se, porém, o esboço do losango apresentado, a partir do qual apontou os valores, considerando as marcações realizadas nas diagonais, indicando a congruência. Já o aluno03 realizou os cálculos referindo-se ao losango e não ao triângulo conforme era solicitado. Cabe destacar que a análise das produções dos estudantes evidenciou um ótimo desempenho nas referidas questões.

No que se refere ao componente **Argumentos** considerou-se a idoneidade baixa, pois esperava-se que os estudantes produzissem uma argumentação em torno das construções, o que não ocorreu. Porém nas demais atividades, as quais solicitavam justificativas, os estudantes, em geral, conseguiram apresentar uma argumentação coerente, conforme destacado na figura 154.

Figura 154 - Situações de argumentação: Quadriláteros


Sobre figuras planas, é correto afirmar-se que:

a) Um quadrilátero é um retângulo se os lados opostos têm comprimentos iguais.

b) Um quadrilátero que tem suas diagonais perpendiculares é um quadrado.

c) Um trapézio que têm 2 ângulos consecutivos congruentes é isósceles.

* Um aluno que marcou alternativa (c) acertou ? Justifique sua resposta.

* As alternativas a e b estão corretas? Justifique sua resposta.

*1 Não, porque um trapézio isósceles precisa ter ângulos opostos congruentes

aluno06

*2 Só a A, pois um quadrilátero que tem suas diagonais perpendiculares pode ser um losango também

S. 20

* não, os ângulos são opostos e congruentes.

* a letra a pode ser um paralelogramo também tbm e a b um losango

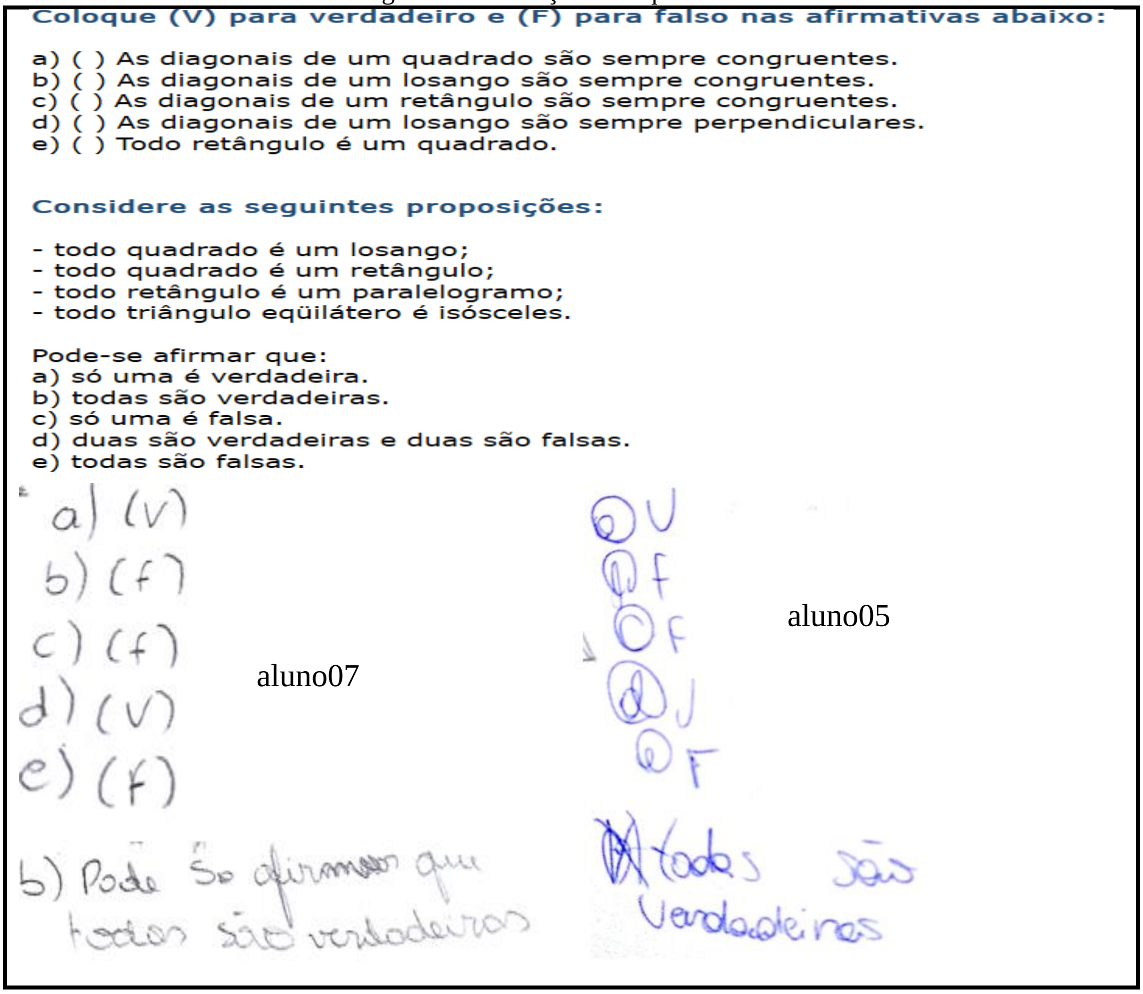
aluno03

Fonte: a pesquisa.

Destacaram-se as argumentações produzidas pelos alunos 06 e 03, sendo que ambos identificaram equivocadamente que um trapézio isósceles tem dois ângulos opostos congruentes, mas justificaram corretamente que as diagonais perpendiculares são características dos quadrados e losangos, mas só o aluno03 identificou a possibilidade da alternativa a corresponder também a um paralelogramo. Ressalta-se que apesar dos dois estudantes terem apresentado um conflito semiótico em relação ao trapézio isósceles, o que conjectura-se que pode ter ocorrido pelo fato que na maioria das outras figuras se estabelecer as diferenças ou semelhanças fazendo referência aos lados ou ângulos opostos, nas outras duas situações produziram uma boa argumentação, observando as propriedades pertinentes.

No que diz respeito as **Relações** estabelecidas entre os quadriláteros considerou-se que os estudantes as compreenderam, pois em situações conforme a apresentada na figura 155 apresentaram um bom desempenho. Porém, nas demais atividades, que solicitavam estabelecer relações em torno das propriedades e das classes de inclusão dos quadriláteros realizaram poucos registros e argumentações, conforme já destacado, o que levou a atribuir um grau de baixa idoneidade.

Figura 155 - Relações nos quadriláteros



Coloque (V) para verdadeiro e (F) para falso nas afirmativas abaixo:

a) ( ) As diagonais de um quadrado são sempre congruentes.
b) ( ) As diagonais de um losango são sempre congruentes.
c) ( ) As diagonais de um retângulo são sempre congruentes.
d) ( ) As diagonais de um losango são sempre perpendiculares.
e) ( ) Todo retângulo é um quadrado.

Considere as seguintes proposições:

- todo quadrado é um losango;
- todo quadrado é um retângulo;
- todo retângulo é um paralelogramo;
- todo triângulo eqüilátero é isósceles.

Pode-se afirmar que:
a) só uma é verdadeira.
b) todas são verdadeiras.
c) só uma é falsa.
d) duas são verdadeiras e duas são falsas.
e) todas são falsas.

a) (V)
b) (f)
c) (f)
d) (V)
e) (f)

aluno07

b) Pode So afirmar que todos são verdadeiros

a V
b F
c F
d V
e F

aluno05

b todos são verdadeiros

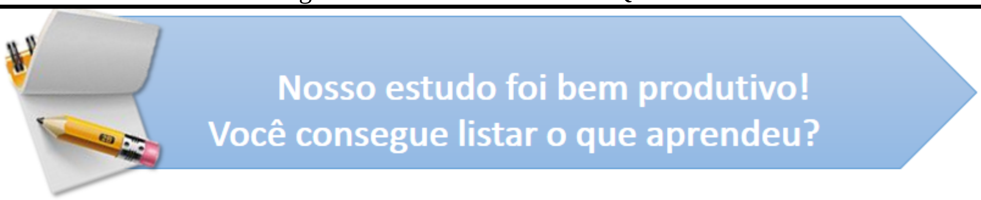
Fonte: a pesquisa.

Entende-se que o componente **Raciocínio Lógico**, se fez presente nos demais componentes, por meio das estratégias estabelecidas pelos estudantes na construção dos quadriláteros e nas resoluções das atividades. Especificamente, para os significados pretendidos que contemplavam a observação e a tomada de decisão a partir das mesmas ficou fragilizado pela falta de registros realizados pelos estudantes, assim considerou-se ter alcançado uma idoneidade média neste componente.

No que tange a **Interpretação e Leitura**, os estudantes não apresentaram dificuldades em relação as situações postas no material, já que apresentaram um bom desempenho nas resoluções, como também, com as indicações das construções. O que não realizaram foi responder aos questionamentos apresentados junto as construções, fato este que pode ser interpretado como uma falha de interpretação do que estava sendo trabalhado ou que os estudantes não foram capazes de produzir os argumentos solicitados, assim considerou-se a idoneidade média.

O componente **Análise e Síntese** foi considerado com uma idoneidade baixa, tendo em vista os apontamentos já realizados sobre a falta de registros e argumentação dos estudantes ao longo das atividades de construção. No que se refere a síntese final apresentaram um bom desempenho nos questionamentos, mas não apresentaram nenhum outro argumento além do que foi proposto. Na figura 156 destaca-se o fechamento proposto para o estudo.

Figura 156 - Análise e Síntese: Quadriláteros



- A partir do estudo da inclusão de classes dos quadriláteros, qual os dois grandes grupos que eles podem ser divididos ______________________ e ________________________.
- Um quadrado pode ser considerado um retângulo? Justifique sua resposta.
- Qual propriedade mínima para caracterizar os paralelogramos?
- Qual propriedade mínima para caracterizar os trapézios?
- O que caracteriza um figura não ser um trapézio?

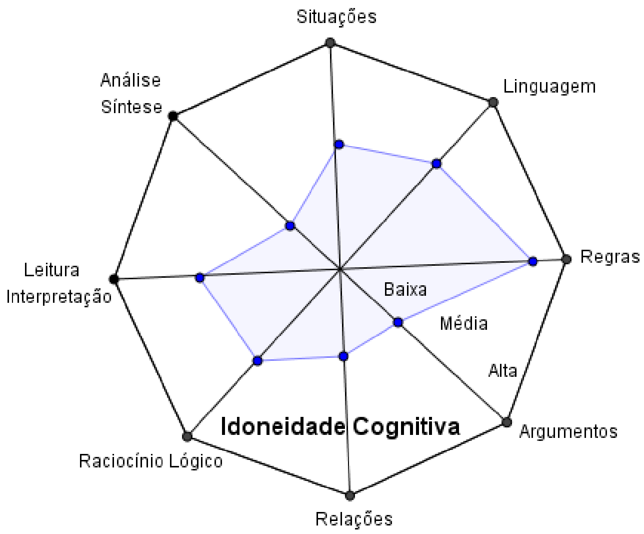
Fonte: a pesquisa.

O primeiro questionamento foi respondido corretamente por todos os estudantes. A segunda questão já discuta no componente situações-problema, todos responderam que um quadrado pode ser considerado um retângulo, porém, nem todas as justificativas apresentadas foram adequadas. Sobre as propriedades mínimas ponderaram que para o paralelogramo são lados opostos paralelos e para os trapézios a figura deve ter apenas dois lados paralelos. Já para caracterizar um não trapézio, parte dos alunos, indicaram não ter lados paralelos e outra parte mais de dois lados paralelos.

A partir do que foi apresentado e discutido, considera-se que os estudantes alcançaram em determinados aspectos uma idoneidade satisfatória em relação aos quadriláteros, principalmente em compreender, identificar e mobilizar as propriedades visando resolver uma situação, porém no que se refere a inclusão de classes e a produção de argumentos a partir da observação das características e propriedades nas construções atingiu-se pouco. Assim, considera-se que a estratégia adotada não foi bem sucedida, sendo um aspecto a ser repensado no material, apesar de acreditar que seja um caminho muito fértil para a produção do conhecimento nesta temática.

Assim, buscando sintetizar e ilustrar a análise produzida, apresenta-se na figura 157 uma representação octogonal, onde os vértices são os componentes e o polígono inscrito refere-se ao grau de idoneidade alcançado frente aos significados pretendidos e os declarados pelos estudantes.

Figura 157 - Representação do grau de Idoneidade Cognitiva alcançado com o material sobre Quadriláteros



Fonte: a pesquisa.

8.4.4 Quadriláteros: síntese das análises

As análises produzidas e discutidas sobre o material de estudos Quadriláteros permitiram refletir sobre a forma que o estudo foi conduzido, os recursos utilizados, analisando-se, também, as aproximações entre significados pretendidos e declarados.

Considera-se que os componentes propostos pelas ferramentas de análise epistêmica, mediacional e cognitiva, se fizeram presentes no material de maneira satisfatória. No que se refere a dimensão epistêmica, destaca-se que somente o componente Situações-problema foi considerado com uma idoneidade média, os demais indicados como alta. Porém, esta potencialidade não se confirmou na dimensão cognitiva, quando somente o componente Regras foi considerado com uma idoneidade alta, os Argumentos, Relações e Análise e Síntese como baixa. Neste contexto, considera-se que os significados pretendidos para o estudo com os quadriláteros foram em parte alcançados, tendo em vista que o material prevê um estudo baseado na observação e na produção de argumentação e a mesma não foi realizada de maneira satisfatória pelos estudantes. Em contrapartida as situações-problema propostas no material foram resolvidas corretamente, destacando-se novamente o fato dos estudantes estarem habituados a realização de atividades mais de caráter procedimental.

Apresenta-se, a seguir, as análises produzidas referente ao tópico Teorema de Tales.

8.5 TEOREMA DE TALES

O estudo em torno do Teorema de Tales, em geral, realizado no 9º ano do Ensino Fundamental, é considerado muito relevante, pois é uma temática que retoma e abrange conhecimentos importantes de serem consolidados no final desta etapa de ensino, como proporcionalidade e semelhança. Neste sentido Leite e Oliveira (2016) ressaltam que os conhecimentos envolvidos no estudo do Teorema de Tales são bastante utilizados na resolução de problemas, principalmente, nos que envolvam paralelismo, proporcionalidade, como também, na semelhança de triângulos e relações métricas no triângulo retângulo. Os autores destacam ainda que,

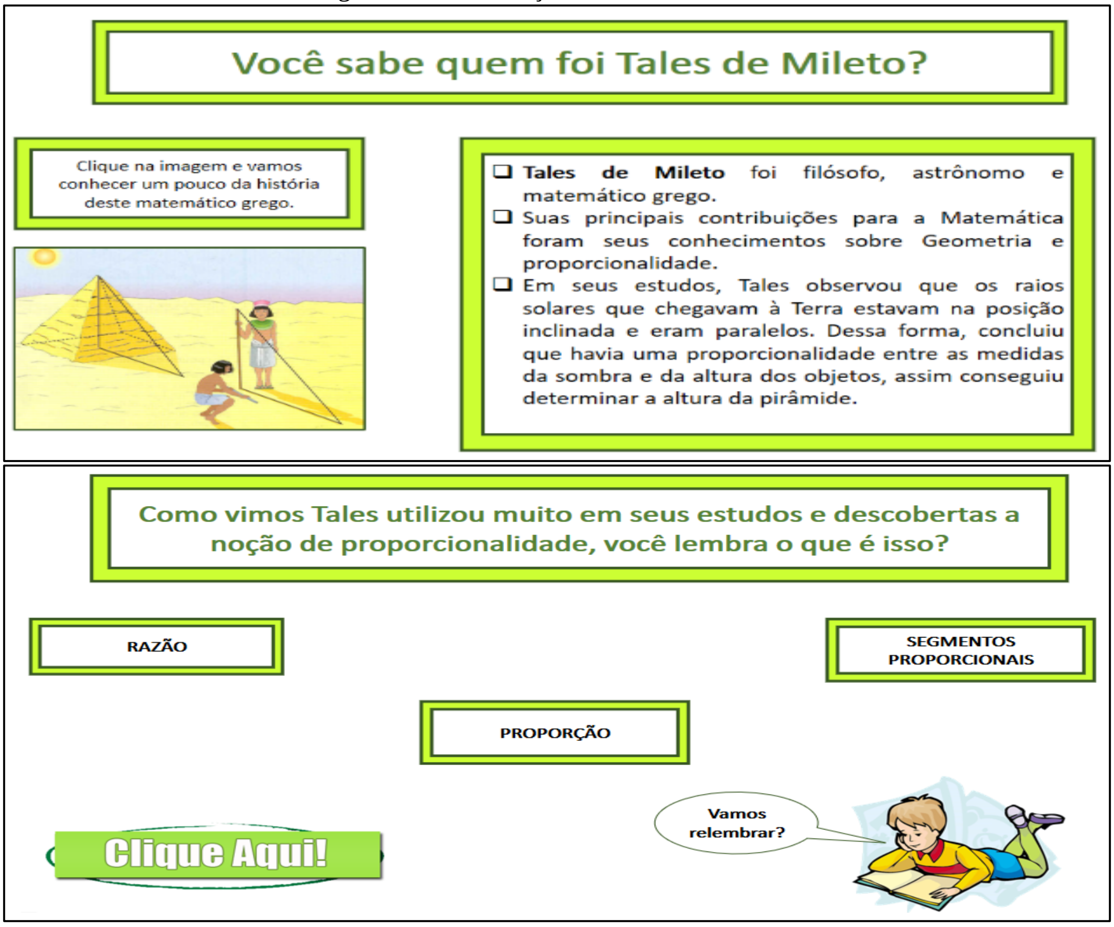
> No caso de figuras geométricas construídas em um plano e projetadas em outro, o teorema de Tales pode ser empregado para o estudo das propriedades dessas figuras, do ponto de vista da conservação do ponto médio, da conservação do baricentro, da conservação do alinhamento, da conservação das razões das distâncias entre pontos alinhados, entre outros elementos. Já no campo da física, alinham uma série de usos possíveis, relacionados, por exemplo, ao estudo dos vetores e à óptica. Assim, este tema está inserido em diversas áreas do conhecimento, com várias aplicabilidades (LEITE; OLIVEIRA, 2016, p.4).

Sobre os objetivos estabelecidos para o ensino e aprendizagem do Teorema de Tales, nos documentos oficiais (BRASIL, 1998; 2017; SÃO LEOPOLDO, 2013) identificou-se somente dois, e ambos destacando a experimentação e a resolução de problemas:

- verificar experimentos e aplicar o teorema de Tales;
- resolver problemas de aplicação das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por transversal.

Considerando os aspectos destacados e visando possibilitar que os estudantes sejam capazes de atender aos objetivos estabelecidos, desenvolveu-se o estudo do Teorema de Tales priorizando o trabalho com as situações-problema. Assim, iniciou-se o estudo com uma abordagem histórica, destacando quem foi Tales de Mileto e suas principais contribuições para o desenvolvimento da Matemática. Em seguida, discutiu-se e retomou-se os conceitos de razão, proporção e segmentos proporcionais, tendo em vista que estes são essenciais para a compreensão do Teorema de Tales. Na figura 158 destacam-se telas do material ilustrando esta introdução ao estudo.

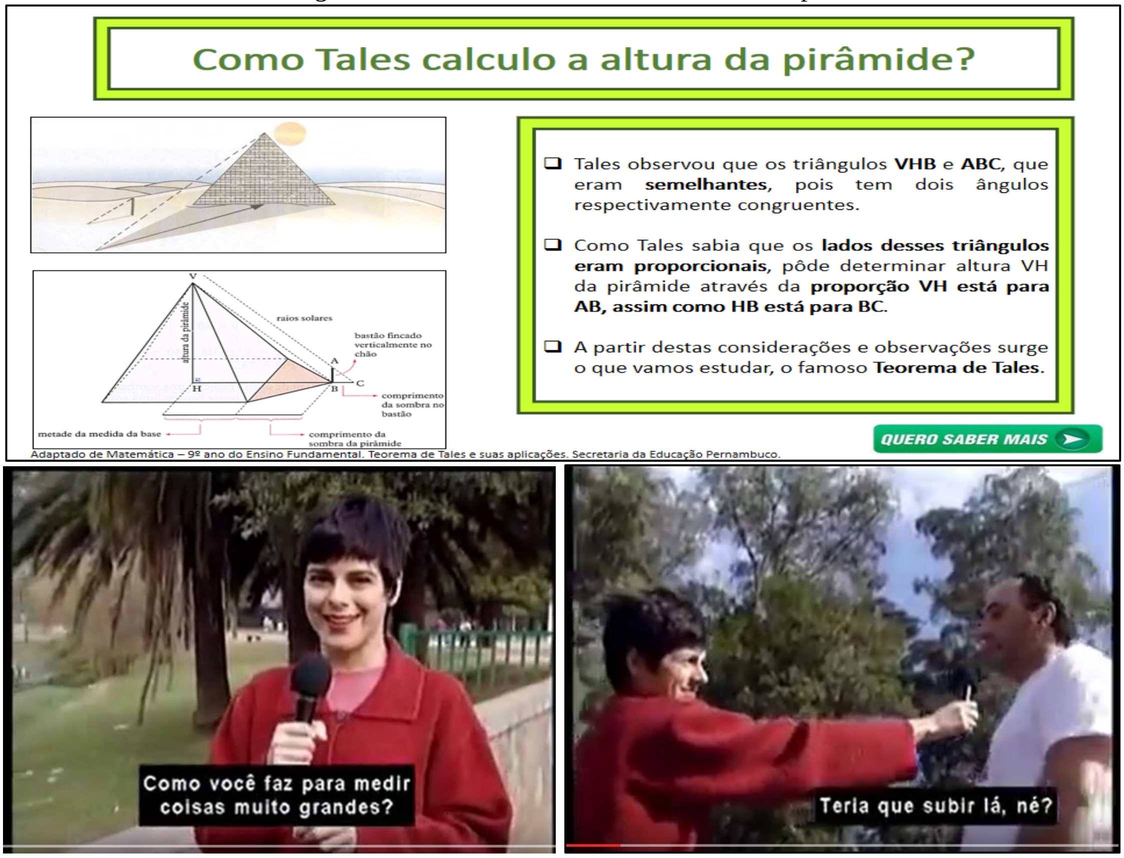
Figura 158 - Introdução ao Teorema de Tales



Fonte: a pesquisa.

A partir desta introdução, já se encaminhou o estudo para a problematização em torno de como Tales teria conseguido calcular a altura de uma pirâmide. Discutiu-se sobre a semelhança e proporcionalidade dos triângulos pela sombra projetada da pirâmide, disponibilizando um vídeo, no qual são entrevistadas pessoas, questionando como elas mediriam objetos muito grandes, como a altura de uma árvore e de um edifício. Em seguida é abordado no vídeo a história de Tales de Mileto e a medição da pirâmide de Quéops, demonstrando e ilustrando as estratégias utilizados pelo grego para conseguir realizar este feito histórico e marcante na Matemática (figura 159).

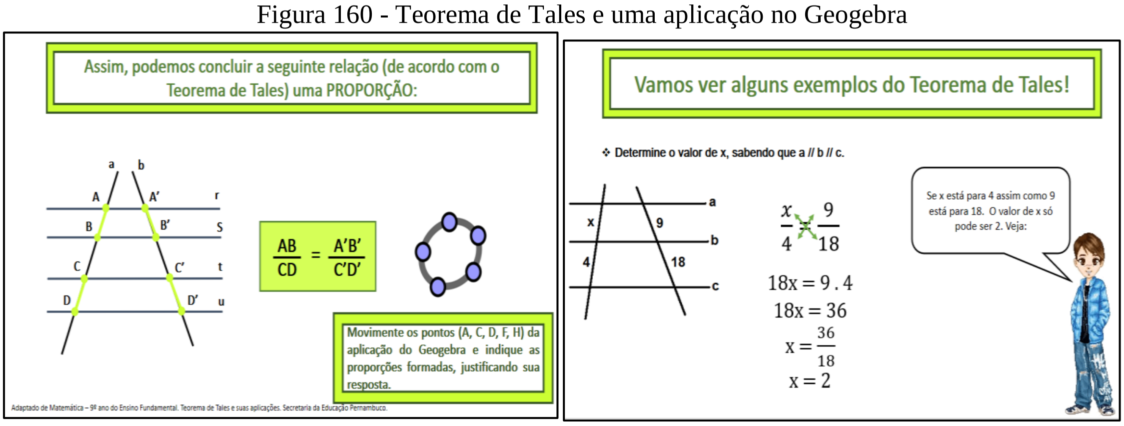
Figura 159 - Tales e o cálculo da altura de uma pirâmide

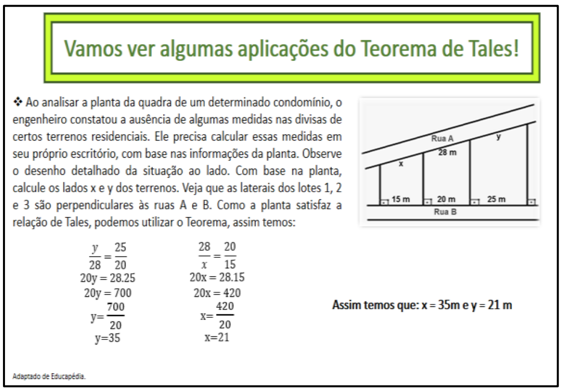


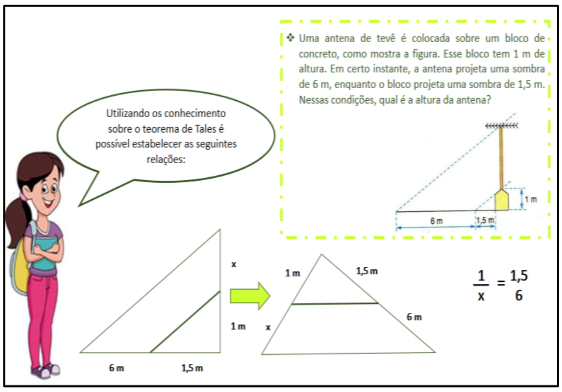
Fonte: a pesquisa.

Após esta discussão (figura 159) apresentou-se a formalização do Teorema de Tales, por meio de uma representação do feixe de retas e as proporções formadas. Disponibilizou-se, também, uma aplicação no Geogebra para os estudantes realizarem experimentações a fim de verificarem as relações estabelecidas entre as proporções formadas. No material foram apresentados, também, exemplos e aplicações do Teorema de Tales, conforme ilustrado na figura 160.

Figura 160 - Teorema de Tales e uma aplicação no Geogebra







Fonte: a pesquisa.

Buscou-se ilustrar, a partir das telas apresentadas, uma visão geral de como o material de estudo sobre Teorema de Tales foi estruturado. A seguir, discute-se a análise deste material, sob a perspectiva da Idoneidade Didática e suas dimensões (epistêmica, cognitiva e mediacional).

8.5.1 Teorema de Tales: uma análise epistêmica

Apresenta-se no quadro da figura 160 a análise epistêmica produzida a partir dos componentes e indicadores da FAE sobre o material de estudos sobre o Teorema de Tales.

Figura 161 - Análise epistêmica: Teorema de Tales

Componentes	Indicadores	Análise	Grau de Idoneidade
Situações-problema	a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações. b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).	- Considera-se que o material de estudo apresenta um conjunto articulado de situações-problema pertinentes ao estudo do Teorema de Tales, visando que os estudantes compreendam e apliquem os conceitos envolvidos (figura 162). - No que se refere a problematização, são utilizadas situações para introduzir o estudo do Teorema explorando aspectos de como estas podem ser aplicadas em situações cotidianas.	**Alta**
Linguagem	a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas. b) nível de linguagem adequado aos estudantes. c) propor situações de expressão matemática e interpretação.	- No material buscou-se desenvolver o estudo em torno do Teorema de Tales, por meio de uma linguagem acessível e de acordo com o nível dos estudantes. - Considera-se que trabalhou-se com diferentes formas de expressão matemática, predominando a gráfica e simbólica, a partir das representações e resoluções das atividades propostas (figura 163).	**Alta**
Regras (definições,	a) as definições e procedimentos são claros e corretos e	- Considera-se que no material as definições, proposições e procedimentos são trabalhados	

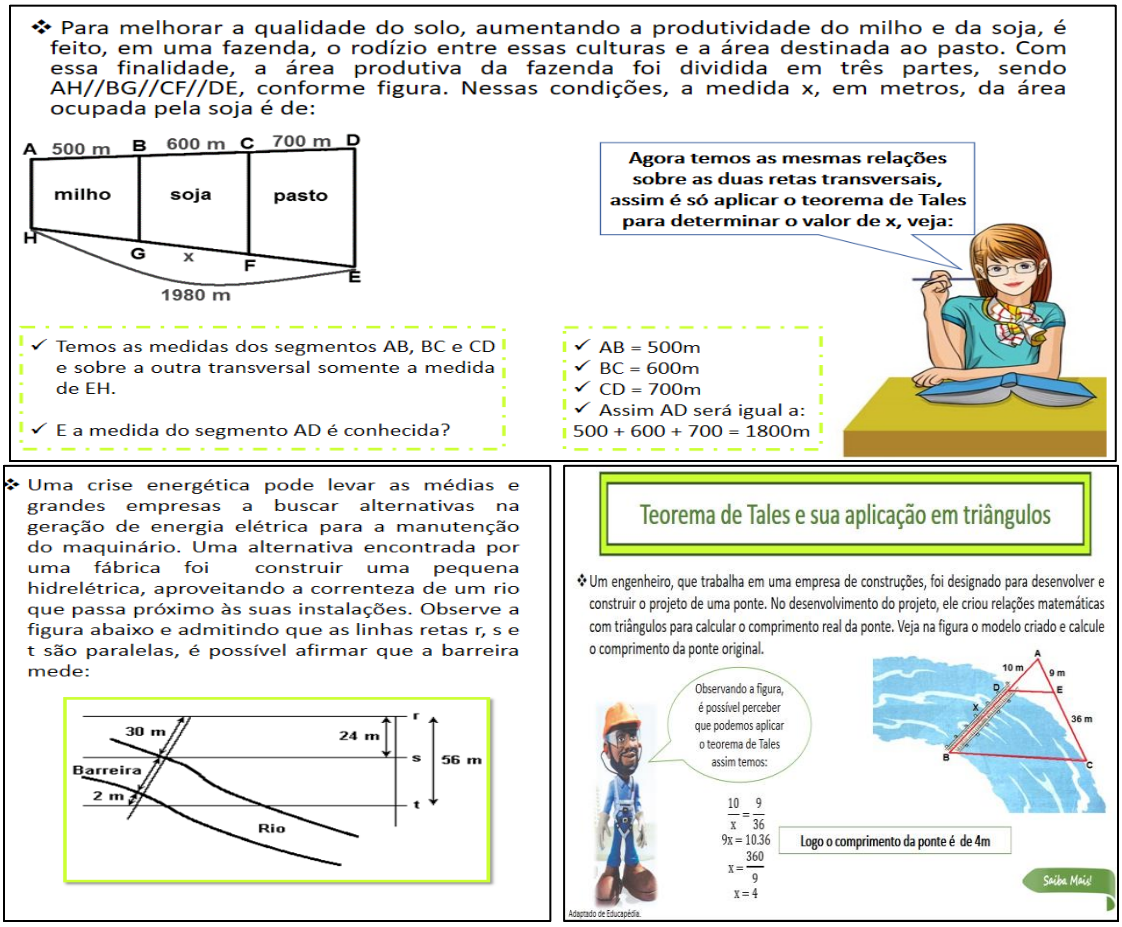
proposições, procedimentos)	estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem. b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado. c) propõem-se situações onde os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.	de forma clara e de acordo com o nível educativo dos estudantes. - Buscou-se desenvolver o estudo em torno do teorema a partir da apresentação das estratégias utilizadas por Tales, para medir a pirâmide e, a partir delas, realizada a formalização do Teorema. - O material contempla situações-problemas e exercícios que os estudantes tenham que mobilizar as definições e procedimentos a fim de resolvê-las (figura 164).	**Alta**
Argumentos	a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem. b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que argumentar.	- No que se refere a produção de argumentos, entende-se que o material explora pouco este aspecto, tendo em vista que foi estruturado visando explorar mais os aspectos de aplicação e resolução de situações utilizando o Teorema de Tales. Considera-se que a atividade de manipulação dos vértices das proporções formadas no Geogebra, e a questão final sobre qual a principal relação estabelecida pelo Teorema de Tales são as únicas atividades que fomentam os estudantes a justificar e argumentar(figura 165).	**Baixa**
Relações	a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si.	- Sobre as relações a serem estabelecidas, considera-se que as mesmas se fazem presentes no material, principalmente no que se refere as relações a serem estabelecidas com o próprio objeto matemático em estudo, no caso, as proporções formadas em um conjunto de retas paralelas cortadas por retas transversais, assim como as aplicações do mesmo em situações práticas (figura 166).	**Média**

Fonte: a pesquisa.

A partir da análise apresentada no quadro da figura 161, é possível perceber que o material de estudos sobre o Teorema de Tales privilegia o trabalho com situações-problemas, interpretando suas representações, a fim de resolvê-las a partir da aplicação das definições e procedimentos estudados, utilizando a linguagem matemática adequada. Nesse sentido, entende-se que os componentes com alta idoneidade são Situações-problema, Linguagens e Regras.

Considerou-se o componente **Situações-problemas** com uma alta idoneidade, tendo em vista que ao longo de todo o material são propostas situações, seja na forma de exemplo, para discutir e desenvolver os conceitos e definições em estudo, como também, para os estudantes exercitarem os conhecimentos trabalhados no material, conforme ilustrado na figura 162.

Figura 162 - Situações-problema no material sobre Teorema de Tales

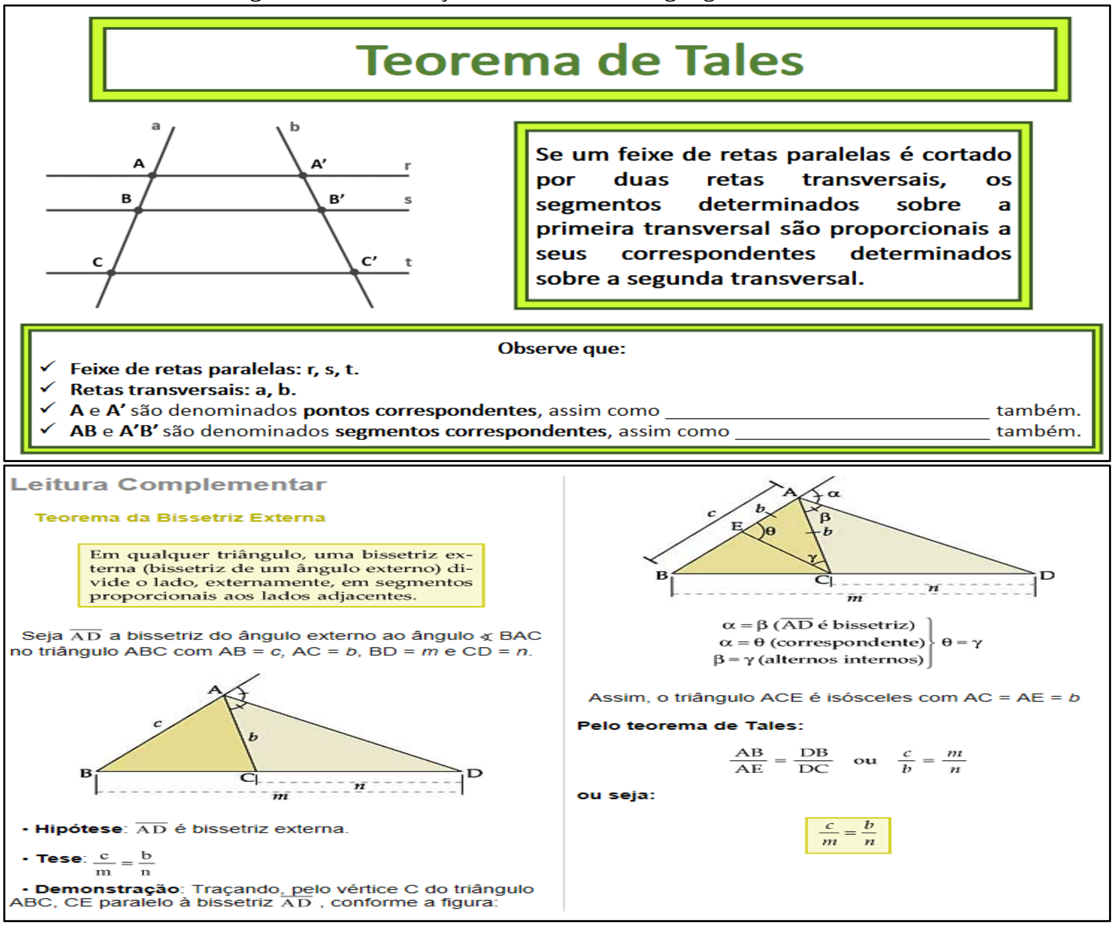


Fonte: a pesquisa.

Conforme ilustrado na figura 162, o material de estudo conta com um conjunto de situações-problema de contextualização e aplicações articuladas para desenvolver e exercitar os conceitos e procedimentos em torno do Teorema de Tales.

No que se refere ao componentes **Linguagens**, o mesmo foi considerado, também, com uma alta idoneidade, pois no material as situações são trabalhadas com os diferentes tipos de linguagem, tendo predomínio da gráfica, por meio das representações, e da simbólica matemática, utilizadas na resolução das atividades propostas, conforme ilustrado na figura 163.

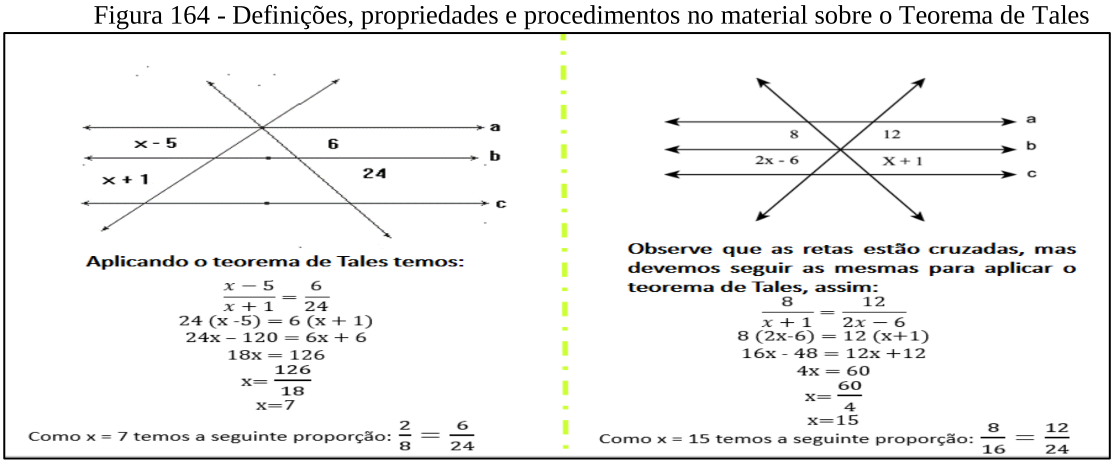
Figura 163 - Utilização das diferentes linguagens: Teorema de Tales

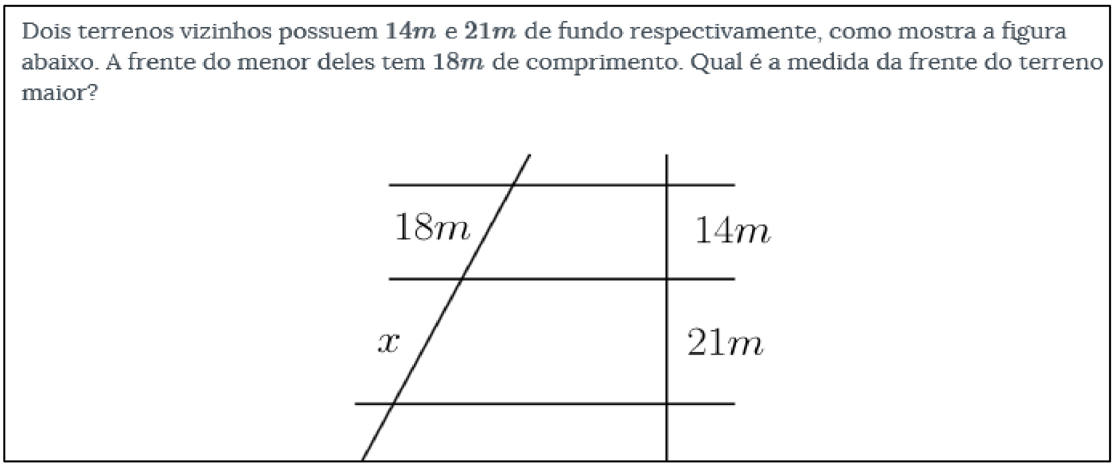


Fonte: a pesquisa.

O componente **Regras** foi também considerado com uma alta idoneidade, pois a discussão em torno das definições, propriedades e procedimentos foi encaminhada de acordo com o nível educativo dos estudantes, realizando a demonstração do Teorema de Tales por meio da representação das proporções formadas. No que se refere as atividades, organizou-se um conjunto de situações em que os estudantes tiveram que mobilizar as definições, propriedades e procedimentos estudados, conforme ilustrado na figura 164.

Figura 164 - Definições, propriedades e procedimentos no material sobre o Teorema de Tales

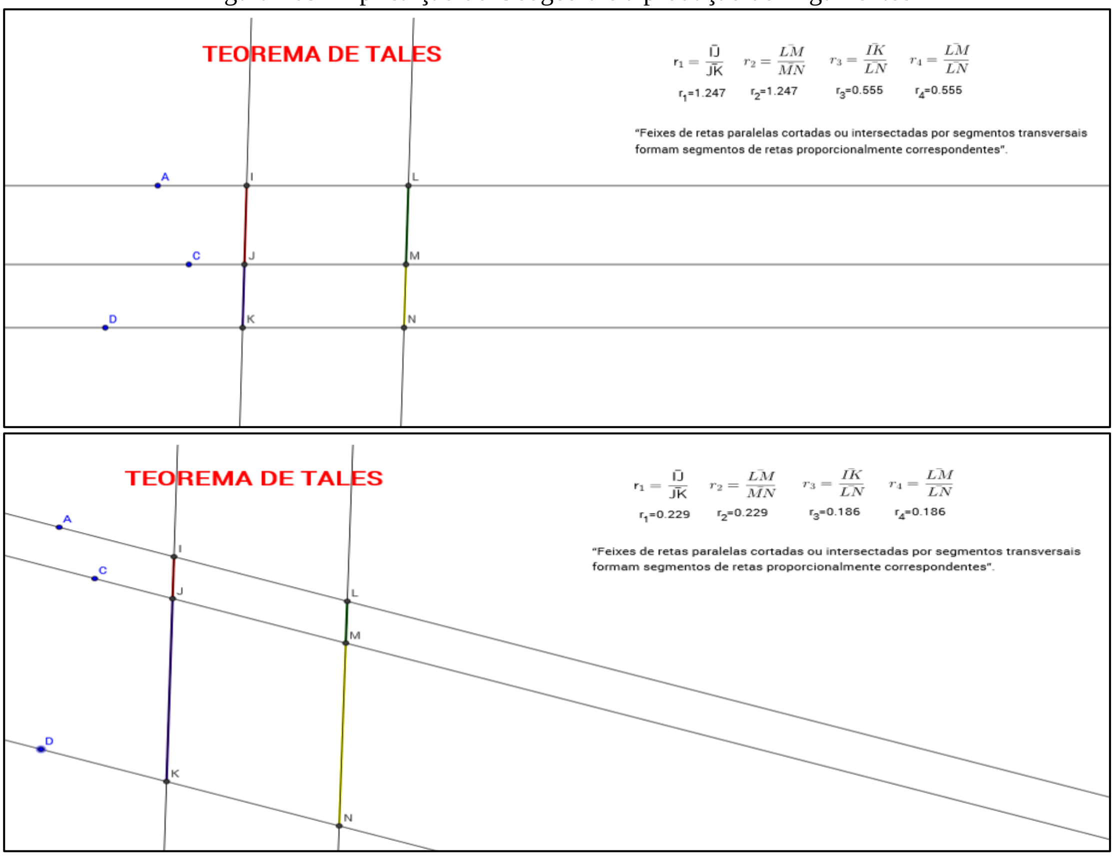




Fonte: a pesquisa.

No que se refere ao componente **Argumentos**, considerou-se ter alcançado uma idoneidade baixa, tendo em vista que as atividades contempladas no material, em geral, estão mais focadas nos processos de interpretação e resolução das situações, do que na produção de argumentos sobre elas. Destaca-se na figura 165 uma atividade com a utilização do Geogebra, a qual fomenta os estudantes a justificar e argumentar a partir da manipulação das proporções formadas.

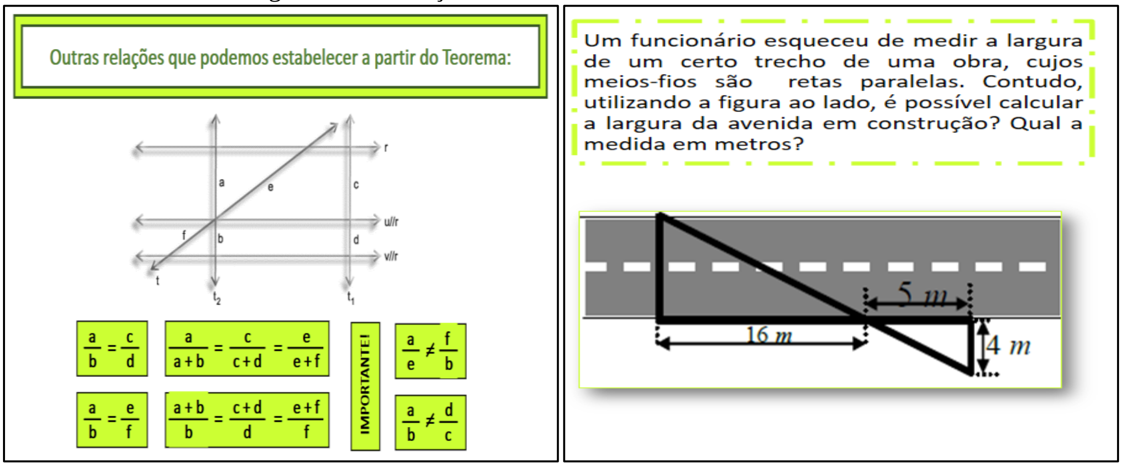
Figura 165 - Aplicalção do Geogebra e a produção de Argumentos



Fonte: a pesquisa.

No que diz respeito as **Relações**, entendeu-se ter alcançado uma idoneidade média, considerando que os indicadores são contemplados no material de estudo, principalmente no que se refere as relações a serem estabelecidas com o próprio objeto matemático em estudo, no caso, as proporções formadas em um conjunto de retas paralelas cortadas por retas transversais, assim como as aplicações do mesmo em situações práticas conforme destacado na figura 166.

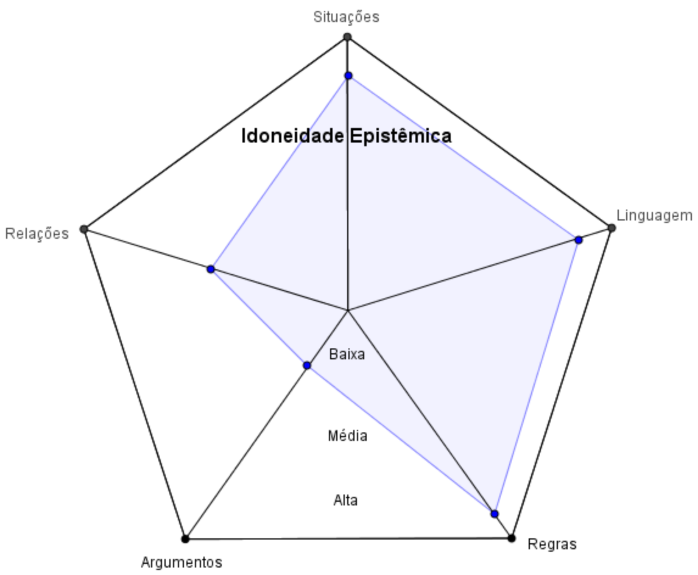
Figura 166 - Relações existentes no estudo do Teorema de Tales



Fonte: a pesquisa.

A análise epistêmica aqui apresentada e discutida evidenciou a estrutura e a forma como o estudo sobre as Teorema de Tales foi conduzido, o que permitiu perceber que os componentes epistêmicos estão presentes, mais fortemente as Situações-Problemas, Linguagens e Regras,. Visando sintetizar a análise, apresenta-se na figura 167, a representação do grau de idoneidade alcançado no material de estudo no que se refere a dimensão epistêmica.

Figura 167 - Representação do grau de Idoneidade Epistêmica alcançado com o material sobre Teorema de Tale



Fonte: a pesquisa.

No que segue será lançado um olhar para os recursos utilizados e as articulações estabelecidas como os mesmos, destacando suas potencialidades e fragilidades no material produzido.

8.5.2 Teorema de Tales: uma análise mediacional

Visando avaliar os recursos mobilizados e articulados no material de estudo sobre Teorema de Tales, produziu-se a análise apresentada no quadro da figura 168, considerando os componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Mediacional, Recursos e Tempo Didático.

Figura 168 - Análise mediacional: Teorema de Tales

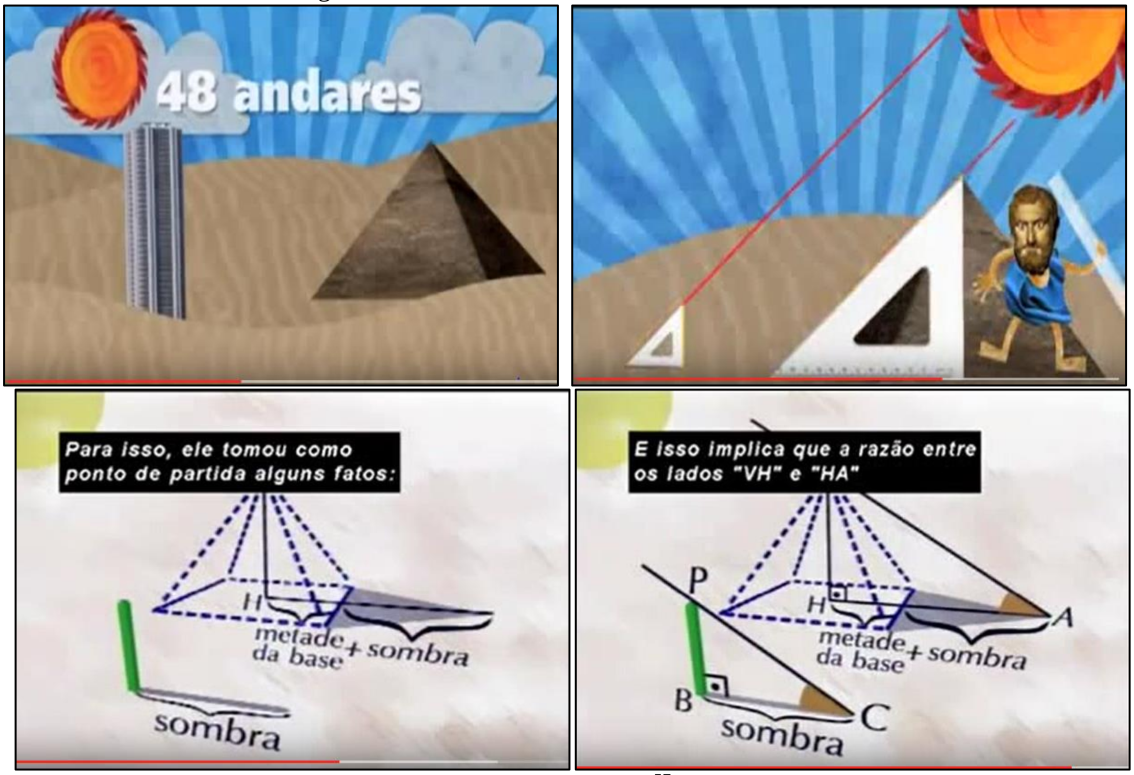
Componentes	**Indicadores**	**Análise**	**Grau de Idoneidade**
Recursos Didáticos	a) evidencia-se a presença de materiais adequados ao desenvolvimento do processo de ensino e adaptados ao nível educativo a que se dirigem. b) há uma diversificação de recursos para auxiliar no processo de ensino, tais como: audiovisuais, material concreto, livros, entre outros. c) propõe-se a organização e experimentação de situações práticas.	- Considera-se que o material de estudo proposto está adequado ao nível educativo dos estudantes, pois utiliza linguagem acessível mantendo, porém, aspectos formais quando pertinentes. - No que se refere aos recursos, foram utilizados vídeos, aplicação no Geogebra e links externos, atividades *online* e situações-problema proposta no próprio material, todos articulados visando oportunizar aos estudantes a retomarem, compreenderem e exercitarem o estudado (figura 169, 170 e 171).	**Alta**
Tempo didático	a) apresentam-se situações de ensino que contemplam diversas modalidades (estudo pessoal, cooperativo, tutorial, presencial). b) evidencia-se organização do tempo para intervenção docente, trabalho autônomo dos estudantes e momentos de discussão. c) dedica-se um tempo maior para o desenvolvimento dos conhecimentos, caso os estudantes apresentem dificuldade de compreensão.	- O material de estudos não apresenta nenhuma atividade que fomente a discussão entre os estudantes sobre o que está sendo estudado. Esta proposta se caracteriza por um estudo que privilegia o trabalho individual, porém conforme já destacado, a interação entre os estudantes, assim como, com a pesquisadora se faz presente no processo de estudo. - Considera-se que o material possibilita desenvolver a autonomia nos estudantes, uma vez que os mesmos se tornam responsável pelo seu estudo, estabelecendo seu ritmo de estudo e aprendizagem.	**Média**

Fonte: a pesquisa.

A partir da análise apresentada no quadro da figura 168 é possível perceber que os componentes e indicadores mediacionais estão representados no material. Assim, no que se trata dos recursos, considerou-se uma alta idoneidade, pois no material são contemplados diversos recursos, como vídeos, aplicação no Geogebra, *links* externos, atividades *online* e situações-problema. Já sobre o tempo didático, entendeu-se ter alcançado uma idoneidade média, pois no material não estão previstas atividades que estimulem a discussão entre os estudantes.

Os vídeos foram utilizados no material, visando introduzir os estudantes na discussão sobre como Tales de Mileto teria conseguido medir uma pirâmide, por meio de uma abordagem mais dinâmica, utilizando representações, assim como, por uma reportagem que indagavam as pessoas sobre como mediriam objetos grandes. Os vídeos destacam, também, os conceitos matemáticos envolvidos no teorema (figura 169), o que já encaminha para a formalização do mesmo, a ser realizado posteriormente.

Figura 169 - Vídeos no estudo do Teorema de Tales



Fonte: a pesquisa[57].

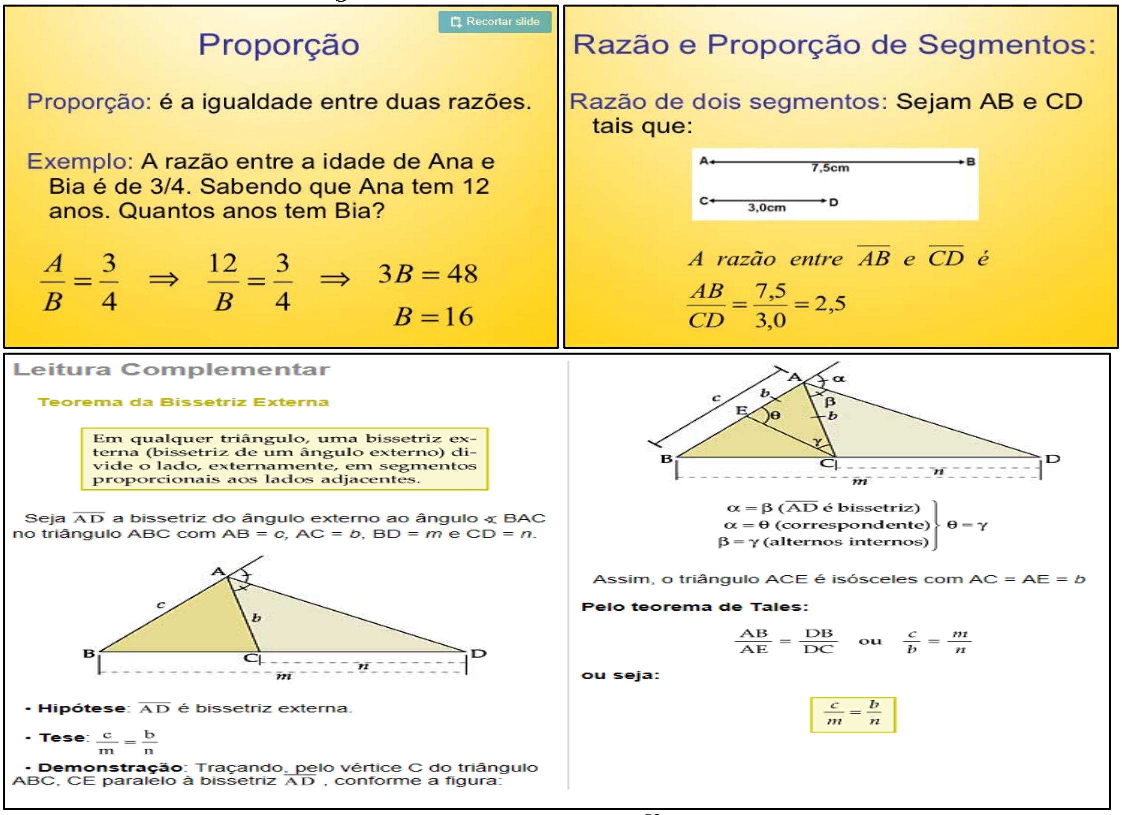
A aplicação do Geogebra, já destacada na análise epistêmica (figura 165), foi utilizada como uma atividade de experimentação e verificação das proporções formadas em um feixe de retas paralelas cortadas por transversal, que justificam e demonstram o Teorema de Tales.

O material contou com dois *links* externos, utilizados com a intenção de disponibilizar aos estudantes um estudo complementar. O primeiro retomou os conceitos em torno de razão,

57 https://www.youtube.com/watch?v=cWkU6fGoYA8. https://www.youtube.com/watch?v=JuJ7l4gidoI

proporção e segmentos proporcionais, que são essenciais para a compreensão e estudo do teorema. O segundo *link* discute sobre os teoremas das bissetrizes internas e externas de um triângulo, utilizando os conceitos do Teorema de Tales. Na figura 170, apresenta-se telas dos links utilizados.

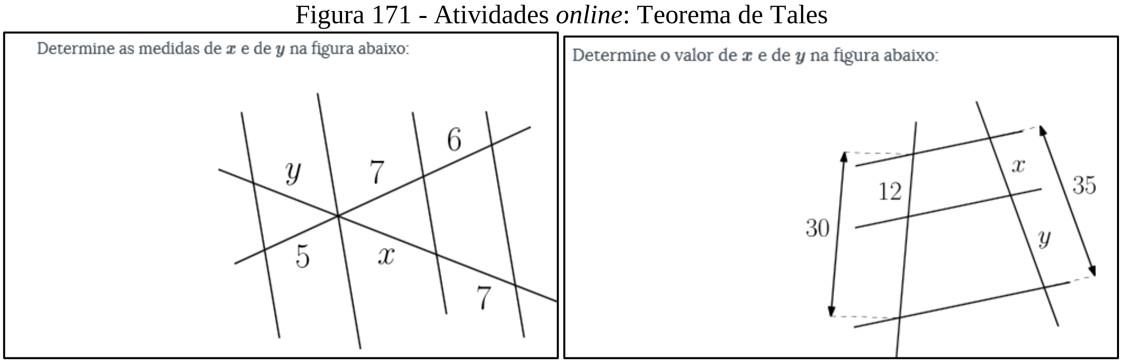
Figura 170 - Links externos: Teorema de Tales



Fonte: a pesquisa[58].

No material foi proposto uma atividade *online*, visando explorar as definições, propriedades e procedimentos estudados em torno do teorema de Tales, conforme ilustrado na figura 171.

Figura 171 - Atividades *online*: Teorema de Tales



Fonte: a pesquisa[59].

[58] https://pt.slideshare.net/AdrianoCapilupe/aula-9-ano-razo-e-propor o.
http://interna.coceducacao.com.br/ebook/pages/1378.htm
[59] http://www.matika.com.br/teorema-de-tales/exercicios.

Considera-se que a análise mediacional produzida permitiu refletir sobre os recursos utilizados neste material. Entende-se que se trabalhou com uma diversidade de recursos, dentro da limitação de disponibilidade em relação a temática, o que se buscou compensar explorando ao máximo os recursos apresentados, visando que os estudantes desenvolvessem um estudo de forma diferenciada.

As atividades, as quais visassem a promoção da discussão e argumentação, percebeu-se como uma fragilidade no material, já que o mesmo não contempla este tipo de situações. Assim, entende-se que estes aspectos devem ser repensados no material a fim de incorpora-los, tendo em vista, que são importantes neste nível de ensino.

A partir desta análise sobre o material proposto, no que segue será lançado um olhar para os significados produzidos pelos estudantes frente aos significados pretendidos com este material de estudo, visando analisar e identificar as potencialidades e os conflitos semióticos apresentados, assim como as relações entre o que se pretendia e o que de fato foi alcançado junto aos estudantes.

8.5.3 Teorema de Tales: uma análise cognitiva

Visando lançar um olhar para a aprendizagem dos estudantes, assim como as dificuldades e conflitos apresentados ao longo do estudo sobre o Teorema de Tales apresenta-se, no quadro da figura 172, uma análise considerando os significados pretendidos para a temática em relação aos componentes epistêmicos e cognitivos e os significados manifestados pelos estudantes.

Figura 172 - Análise cognitiva: significados pretendidos x declarados para o Teorema de Tales

Componentes Epistêmicos-cognitivos	Significados Pretendidos	Significados Declarados	Grau de idoneidade
Situações- problemas	-Resolver as situações propostas, utilizando os conceitos, procedimentos e relações pertinentes.	- Considera-se que os estudantes apresentaram um ótimo desempenho nas situações propostas, quando as resoluções exigiam apenas aplicação direta do Teorema de Tales. Já nas situações que exigiam estabelecer relações diferente das usuais apresentaram entraves.	**Média**
	- Compreender a proporção formada em um feixe de retas paralelas cortada por transversais em	- Considera-se que os estudantes utilizaram adequadamente a linguagem matemática para resolver as situações propostas.	

Linguagens	diferentes linguagens (verbal e gráfica). - Associar segmentos proporcionais em diferentes representações. -Compreender o Teorema de Tales apresentado em diferentes linguagens (verbal e gráfica). - Utilizar linguagem matemática adequada na solução das situações.	-Associaram os segmentos proporcionais apresentados nas representações para formar a proporção e calcular os termos desconhecidos, compreendendo assim o Teorema de Tales.	**Média**
Regras (definições, proposições, procedimentos)	- Identificar vértices, proporções e segmentos proporcionais. -Reconhecer as propriedades de razão e proporção. -Identificar retas paralelas e transversais. -Compreender a definição do Teorema de Tales. -Aplicar os conhecimentos estudados sobre Teorema de Tales para resolver as situações propostas.	- No que se refere a identificação dos vértices, segmentos e proporções formadas em um feixe de retas paralelas cortadas por transversais os estudantes não apresentaram dificuldades. - Quando as retas paralelas e transversais estavam em representações usualmente utilizadas e também os triângulos, os estudantes não apresentaram dificuldades, porém quando as mesmas não estavam nestas condições, apresentaram entraves no estabelecimento dos segmentos proporcionais correspondentes.	**Média**
Argumentos	- Produzir argumentos em torno das razões e proporções formadas em um feixe de retas paralelas cortadas por transversais.	- Os estudantes realizaram a atividade de experimentação com a aplicação do Geogebra em relação as razões e proporções formadas em um feixe de retas paralelas cortadas por transversais, porém não registraram seus entendimente e conclusões, conforme era indicado.	**Baixa**
Relações	-Compreender as relações existentes entre os segmentos proporcionais formados em um feixe de retas paralelas cortadas por transversais. - Relacionar segmentos proporcionais para resolver problemas. - Relacionar o teorema de Tales com triângulos.	- Os estudantes conseguiram compreender as relações existentes entre os segmentos proporcionais, assim como, as aplicações do Teorema de Tales nos triângulos, porém apresentaram dificuldades quando as transversais não cortavam o feixe de retas paralelas em suas representações usuais.	**Média**
Raciocínio Lógico	- Observar os segmentos proporcionais formados em um feixe de retas paralelas cortadas por transversais. - Estabelecer estratégias para resolver problemas	- Em geral os estudantes observaram os segmentos proporcionais formados em um feixe de retas paralelas cortadas por transversais na atividade com a aplicação do Geogebra.	

	utilizando o teorema de Tales.	- As estratégias estabelecidas pelos estudantes para resolver as situações propostas nos materiais, em sua maioria, foram bem planejadas e executadas, porém conforme já destacado nos outros componentes anteriores, apresentaram dificuldades quando a situação não era apresenta em uma formatação padrão.	**Média**
Leitura/Interpretação	- Conseguir ler e interpretar adequadamente as informações e situações propostas no material. - Compreender a definição do Teorema de Tales e suas aplicações por meio dos exemplos e atividades.	- Os estudantes não apresentaram dificuldades de leitura e interpretação das situações postas no material, já que apresentaram um bom desempenho nas resoluções, como também, com as indicações das construções. Porém, novamente não responderam aos questionamentos apresentados junto às construções.	**Média**
Análise/Síntese	- Realizar síntese durante e ao final do estudo, conseguindo identificar e expressar o que foi aprendido;	- Ao longo do material os estudantes não apresentaram elementos de síntese, análise ou argumentação, nem quando solicitado, no caso da atividade do Geogebra. - No que se refere a síntese final todos buscaram responder ao questionamento sobre qual a principal relação estabelecida pelo Teorema de Tales, sendo indicado pela maioria, apenas o enunciado do Teorema de Tales.	**Baixa**

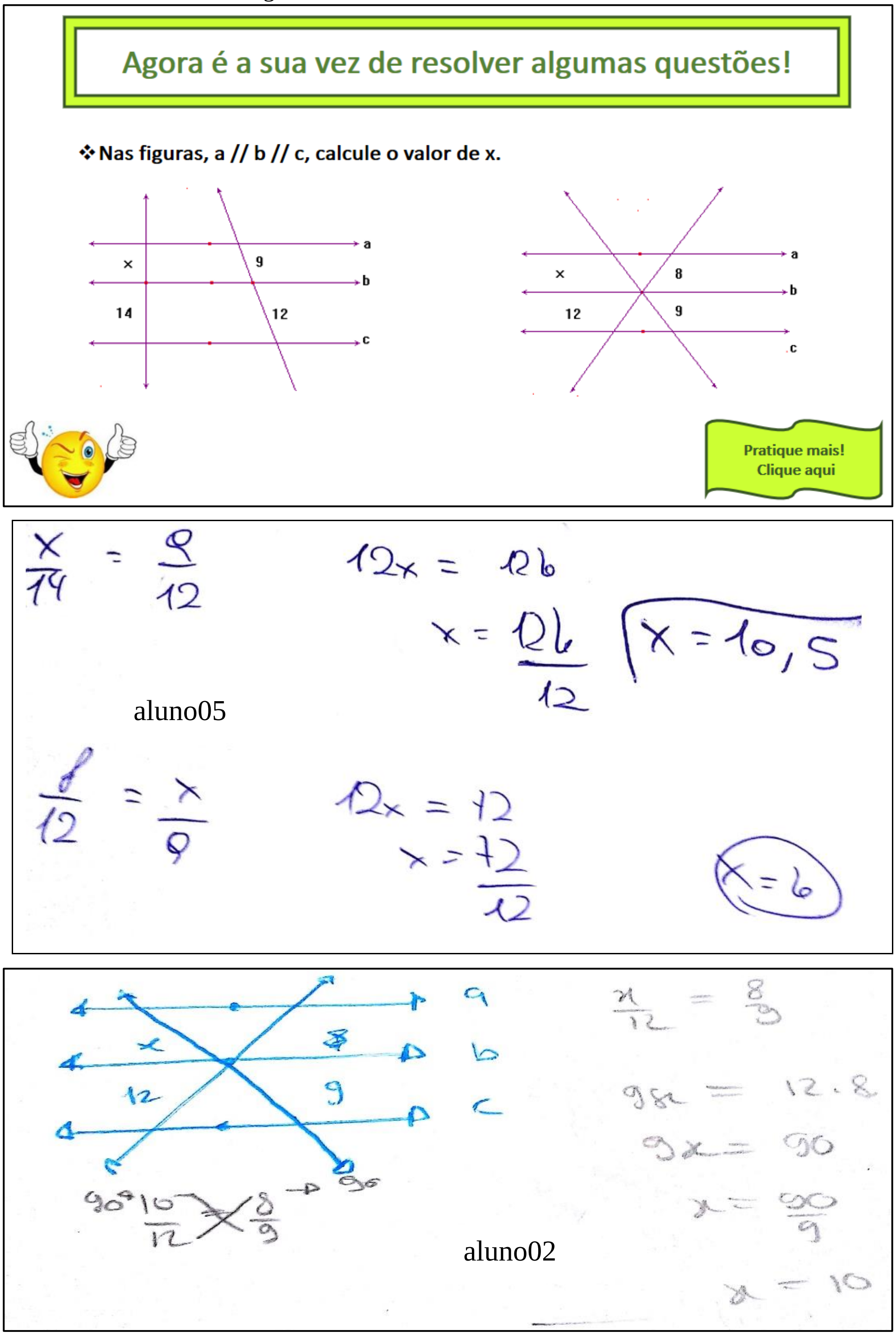
Fonte: a pesquisa.

A partir da análise apresentada no quadro da figura 171 é possível perceber que os significados pretendidos se fizeram presentes, em parte, nos declarados pelos estudantes, o que levou a se considerar que uma idoneidade alta não foi alcançada em nenhum componente. Cabe ressaltar que os estudantes apresentaram um bom desempenho nas atividades de resolução imediata, porém, em alguns casos, em que o feixe de retas não se encontrava em posições, as quais via de regra são apresentados, os estudantes tiveram dificuldades em relacionar corretamente os segmentos proporcionais correspondentes. Assim, entende-se pertinente atribuir uma idoneidade média aos componentes Situações-problemas, Linguagem, Regras, Relações, Leitura e Interpretação e Raciocínio Lógico.

No que segue serão apresentadas resoluções referentes as atividades propostas, destacando-se as que os estudantes tiveram um bom desempenho, bem como os entraves encontrados. Ressalta-se que esta discussão não será desenvolvida considerando os componentes, pois como este material é menor as atividades contemplam, praticamente, todos os componentes apontados acima.

Inicialmente destaca-se duas atividades (figura 172) nas quais os estudantes deveriam mobilizar seus conhecimentos em torno de uma aplicação direta do Teorema de Tales, no caso da primeira e, na segunda, considerar que as retas transversais se cruzam, assim deveriam retomar que a proporção se forma no sentido da reta transversal, então neste caso, a proporção não será formada pelos termos que se localizam um abaixo do outro.

Figura 173 - Exercícios: Teorema de Tales



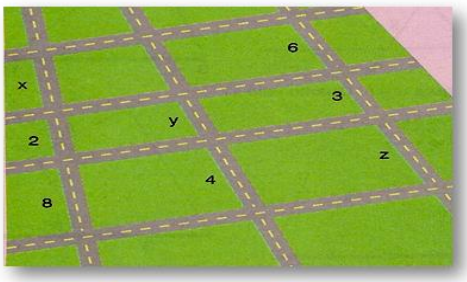
Fonte: a pesquisa.

Destacaram-se as resoluções dos aluno02 e 05, pois as mesmas ilustram, de modo geral, como os estudantes resolveram as situações. A primeira atividade, que envolvia a aplicação direta do Teorema, foi resolvida corretamente por todos os estudantes, o que corrobora o entendimento já evidenciado de que, quando se trata da aplicação direta os estudantes apresentam um ótimo desempenho. Já em relação a segunda atividade, parte dos estudantes (a maioria) resolveu corretamente, com procedimentos análogos ao do aluno05, parte resolveu de modo análogo ao aluno02, desconsiderando o fato de que as retas transversais se cruzam, o que se apresenta como um erro bem comum de ser realizado pelos estudantes. Porém, tendo em vista que situações similares foram propostas nos exemplos dos materiais e discutidas, esperava-se que a presença de erros fosse bastante baixa. Percebe-se, a presença de um conflito na interpretação dos estudantes, não percebendo a variação da situação apresentada em relação a primeira, ou ainda, uma possível generalização equivocada da aplicação do teorema, considerando que a proporção formada será sempre montada a partir dos termos que aparecem um sobre o outro.

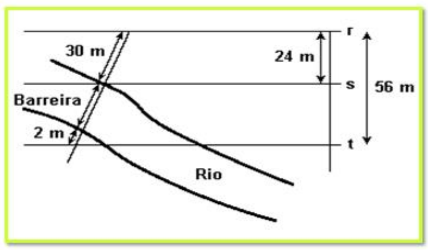
No que se refere as situações-problema de contextualização destacam-se, na figura 173, duas questões e suas respectivas resoluções.

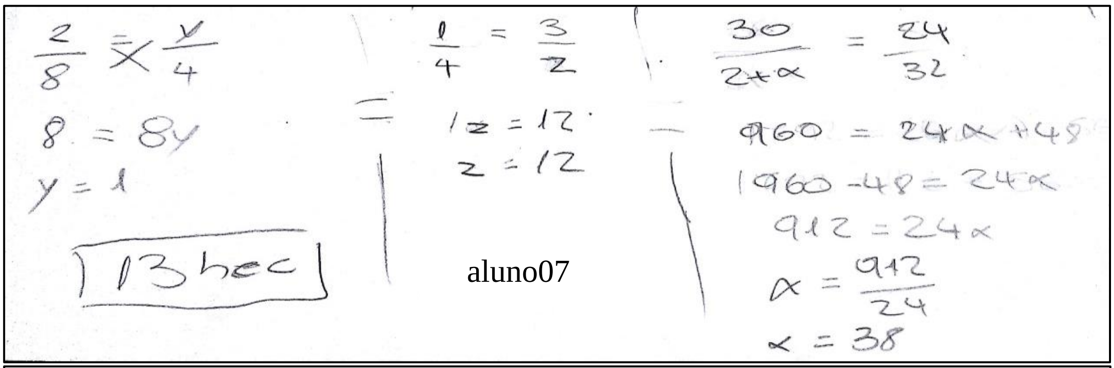
Figura 174 - Situações-problema de contextualizações: Teorema de Tales

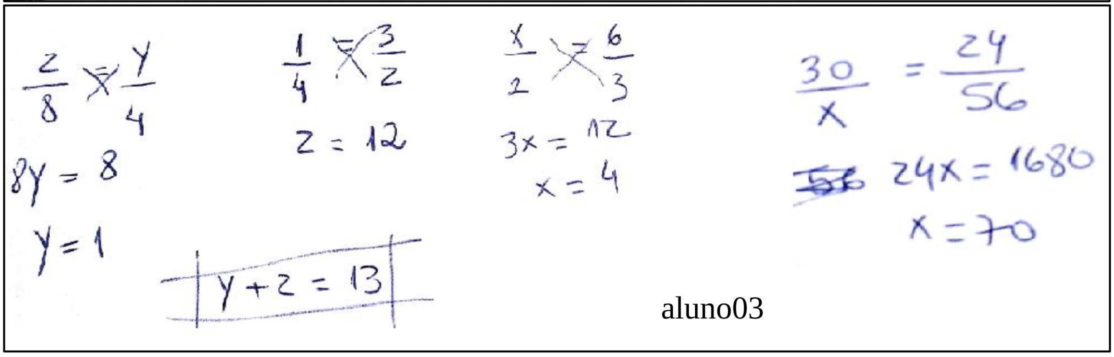
- Uma nova cidade planejada está sendo criada, por uma empreiteira, na zona oeste do Amazonas. Mas alguns quarteirões estão sem suas medidas em hectômetros. Veja o mapa e calcule a soma das dimensões y e z dos quarteirões, sabendo que as quatro ruas deitadas são paralelas cortadas por três ruas transversais.



- Uma crise energética pode levar as médias e grandes empresas a buscar alternativas na geração de energia elétrica para a manutenção do maquinário. Uma alternativa encontrada por uma fábrica foi construir uma pequena hidrelétrica, aproveitando a correnteza de um rio que passa próximo às suas instalações. Observe a figura abaixo e admitindo que as linhas retas r, s e t são paralelas, é possível afirmar que a barreira mede:





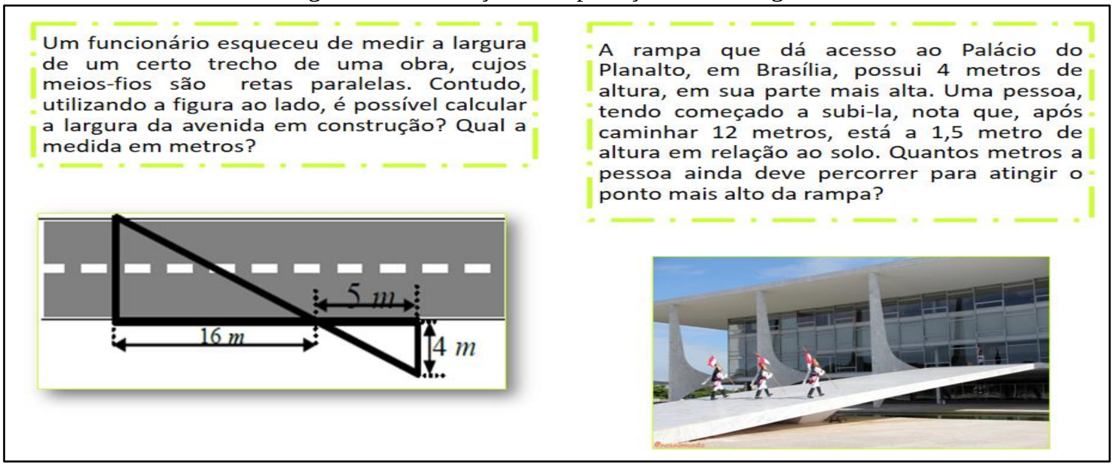


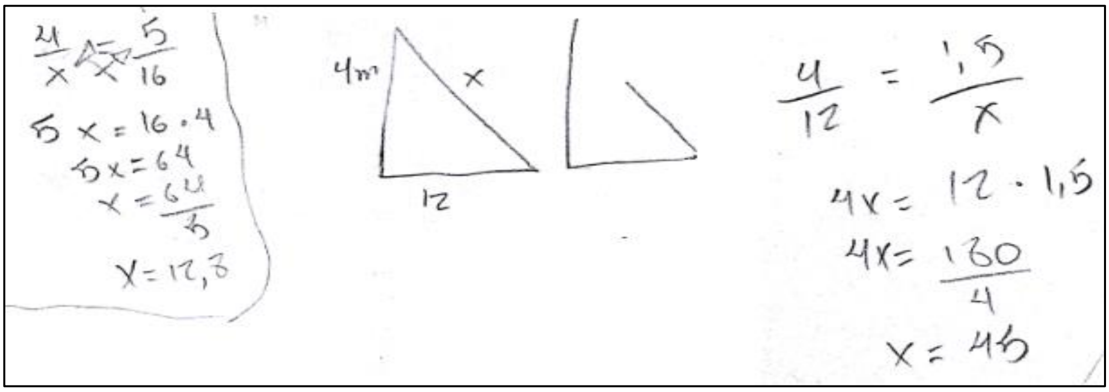
Fonte: a pesquisa.

A primeira situação foi respondida corretamente por todos os estudantes, associando os segmentos correspondentes de forma adequada, conforme ilustrado nas resoluções dos aluno03 e 07. Já na segunda atividade os estudantes apresentaram bastante dificuldade, em geral, resolvendo da mesma forma que o aluno03, desconsiderando as relações entre os segmentos correspondentes e a soma dos segmentos. Destaca-se que somente os alunos01, 04, 06, 07 e 14 acertaram esta questão.

No que se refere as situações-problema de aplicações do Teorema de Tales em triângulos destaca-se na figura 175 duas questões e suas respectivas resoluções do aluno11.

Figura 175 - Situações de aplicações em triângulos





Fonte: a pesquisa.

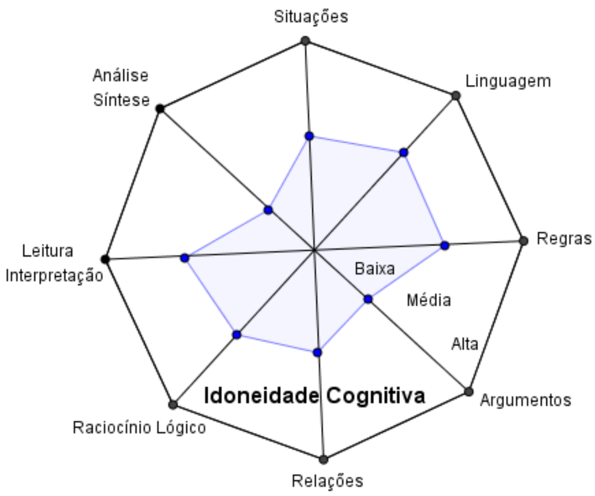
As soluções das duas questões postas em destaque, apresentaram desempenhos opostos, conforme pode ser ilustrado pela resolução do aluno11. A primeira, foi resolvida corretamente por todos os estudantes enquanto a segunda nenhum deles acertou. Conjectura-se que este fato pode ter ocorrido, em função da questão não apresentar uma representação gráfica da situação, sendo necessário que as proporções fossem organizadas a partir da interpretação da mesma. É possível observar que o estudante tentou representar a situação lançando mão de representações dos triângulos, desenhando um triângulo, similar a um retângulo, dispondo parte dos dados do problema 12 e 4 m (de modo equivocado). Chama a atenção a tentativa de representar, em outro triângulo, a parte do caminho de fato percorrido, que não foi quantificada, mas representada por um lado incompleto do triângulo, agora sim de modo adequado pois a rampa a ser subida corresponde a hipotenusa de um triângulo retângulo que venha representar a situação do problema.

Discutiu-se aqui de maneira geral as situações e resoluções que contemplam os significados pretendidos *versus* os declarados pelos estudantes referente aos componentes Situações-problemas, Linguagem, Regras, Relações, Leitura e Interpretação e Raciocínio Lógico, considerando que os mesmos foram atingidos em parte, assim ficando com uma idoneidade média nestes componentes.

Já no que se refere aos componentes Argumentos, Síntese e Análise se considerou ter atingido o mínimo possível em relação aos significados pretendidos, ou seja, os estudantes não produziram argumentações e justificativas frente a atividade de experimentação na aplicação do Geogebra, e na questão proposta como síntese final que indagou os estudantes sobre a principal relação estabelecida pelo Teorema de Tales, a maioria enunciou o Teorema de Tales, conforme apresentado no material. Esperava-se que os estudantes tivessem apresentado um melhor desempenho nas atividades referente ao Teorema de Tales, pois o mesmo estava sendo estudado por eles em suas aulas regulares de Matemática.

Assim, buscando sintetizar e ilustrar a análise produzida, apresenta-se na figura 176 uma representação octogonal, onde os vértices são os componentes e o polígono inscrito refere-se ao grau de idoneidade alcançado frente aos significados pretendidos e os declarados pelos estudantes.

Figura 176- Representação do grau de Idoneidade Cognitiva alcançado no material sobre Teorema de Tales



Fonte: a pesquisa.

8.5.4 Teorema de Tales: síntese das análises

As análises produzidas e discutidas sobre o material de estudos Teorema de Tales permitiram refletir sobre a forma que o estudo foi conduzido, os recursos utilizados, os significados pretendidos com o material e os declarados pelos estudantes no estudo do Teorema de Tales.

Considera-se que os componentes propostos pelas ferramentas de análise epistêmica, mediacional e cognitiva, se fizeram presente no material de maneira satisfatória, com exceção dos argumentos que apresentaram uma baixa idoneidade tanto na dimensão epistêmica e, consequentemente, na cognitiva. No que se refere a dimensão epistêmica, destaca-se os componentes Situações-problema, Linguagens e Regras com uma alta idoneidade, porém nenhum destes alcançou uma alta idoneidade na dimensão cognitiva, que teve predomínio da idoneidade média, considerando que os estudantes conseguiram compreender o Teorema e suas aplicações, mas no memento que as situações propostas não estavam apresentadas no formato usualmente adotado, exigindo uma transposição de dados para a composição denotasse a possível aplicação do problema, os estudantes apresentaram entraves, principalmente na associação incorreta dos segmentos proporcionais.

Apresenta-se, a seguir, as análises produzidas referente ao tópico Teorema de Pitágoras.

8.6 TEOREMA DE PITÁGORAS

O ensino e a aprendizagem do Teorema de Pitágoras é uma temática muito importante de ser desenvolvida e compreendida ao final do ensino fundamental, pois além de se constituir em uma ferramenta necessária na resolução de diversos problemas, por meio da identificação do triângulo retângulo e a utilização de suas relações, as noções e conceitos deste teorema são essenciais na continuação dos estudos, no Ensino Médio. Bastian (2000) destaca algumas aplicações do teorema de Pitágoras,

> No Ensino Fundamental:
> • cálculo de diagonal – quadrado, retângulo, losango, trapézio (dependendo dos dados); altura de triângulo equilátero, isósceles, trapézio; comprimento de segmentos de tangente, cordas; relações entre lado, apótema e raio para polígonos inscritos e circunscritos; construção com régua e compasso de segmentos de medidas 2, 3, 5 etc.; distância entre dois pontos no plano cartesiano; equação de uma circunferência estabelecimento da relação $sen^2 x + cos^2 x = 1$; problemas práticos como, por exemplo, determinação do comprimento de correia.
> No Ensino Médio:
> • elementos de circunferências tangentes; diagonal de cubo, paralelepípedo, prismas em geral; relação entre altura, apótema da base e apótema de pirâmides regulares; relação entre altura, raio do círculo circunscrito à base e aresta lateral em pirâmides regulares; relação entre altura, geratriz e raio da base num cone reto; distância de um plano secante, ao centro de uma esfera, em relação ao raio da esfera e ao raio da secção; módulo de um número complexo $z = (x, y)$; numa elipse de eixo maior medindo 2a, eixo menor 2b e distancia focal 2c; numa hipérbole, $c^2= a^2 + b^2$ quando: 2a = medida do eixo real 2b = medida do eixo imaginário 2c = distância focal (BASTIAN, 2000, p.61 – 62).

A partir da apresentação dos diversos conteúdos e noções matemáticas que utilizam o Teorema de Pitágoras em seus estudos (BASTIAN, 2000), considera-se que este tema deva ser desenvolvido de forma significativa, buscando que os estudantes compreendam sua construção e as relações estabelecidas com o mesmo, e seu ensino privilegie a compreensão do mesmo, não somente sua aplicação mecânica.

Neste contexto estruturou-se o material de estudos sobre o Teorema de Pitágoras visando atender aos aspectos destacados, assim como os objetivos estabelecidos nos documentos oficiais (BRASIL, 1998, 2017; SÃO LEOPOLDO, 2013) para esta temática, sendo eles:

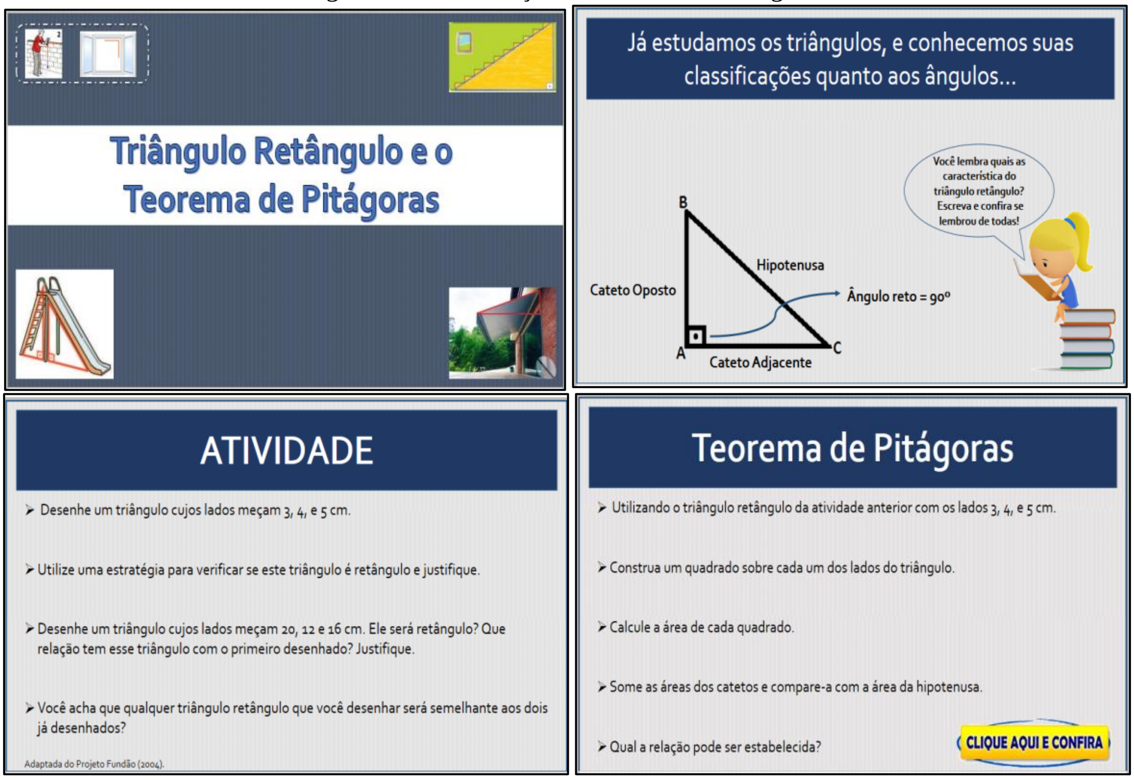
- verificar experimentos, aplicar e demonstrar o teorema de Pitágoras;
- ampliar os conhecimentos sobre ângulos e relacionar com o Teorema de Pitágoras;
- demonstrar o teorema de Pitágoras, utilizando, inclusive, a semelhança de triângulos.

- estabelecer relação entre a medida da diagonal, a medida do lado de um quadrado e a do perímetro;
- resolver problemas de aplicação do teorema de Pitágoras.

No que segue apresenta-se como o estudo sobre o Teorema de Pitágoras foi encaminhado no material proposto.

Iniciou-se o estudo, retomando a definição de um triângulo retângulo e seus elementos, e em seguida já se apresentou uma atividade de construção e comparação de triângulos retângulos, afim que os estudantes observassem as características dos mesmos e estabelecessem as relações, conforme destacado na figura 177.

Figura 177 - Introdução ao Teorema de Pitágoras



Fonte: a pesquisa.

Em seguida, foi disponibilizado aos estudantes animações que problematizam, demonstram e enfatizam aspectos do desenvolvimento histórico do Teorema de Pitágoras, encaminhando-se, assim, para a apresentação de situações-problemas a partir de exemplos e atividades, conforme ilustrado na figura 178.

Figura 178 - Desenvolvimento do Teorema de Pitágoras

Fonte: a pesquisa.

Apresentou-se, aqui, uma visão geral de como o material de estudo Teorema de Pitágoras foi estruturado. A seguir, discute-se a análise deste material, sob a perspectiva da Idoneidade Didática e suas dimensões (epistêmica, mediacional e cognitiva).

8.6.1 Teorema de Pitágoras: uma análise epistêmica

Apresenta-se no quadro da figura 179 a análise epistêmica produzida a partir dos componentes e indicadores da FAE sobre o material de estudos sobre o Teorema de Pitágoras.

Figura 179 - Análise epistêmica: Teorema de Tales

Componentes	Indicadores	Análise	Grau de Idoneidade
Situações-problema	a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações. b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).	- Considera-se que o material de estudo apresenta um conjunto de situações-problema pertinentes ao estudo do Teorema de Pitágoras, visando que os estudantes compreendam e apliquem os conceitos envolvido em torno desta temática, considerando situações de contextualização, exercícios e relacionadas a outros objetos matemáticos (figura180). - No que se refere às situações de generalização, entende-se que as mesmas são contempladas no material nas atividades introdutórias que encaminham para	**Alta**

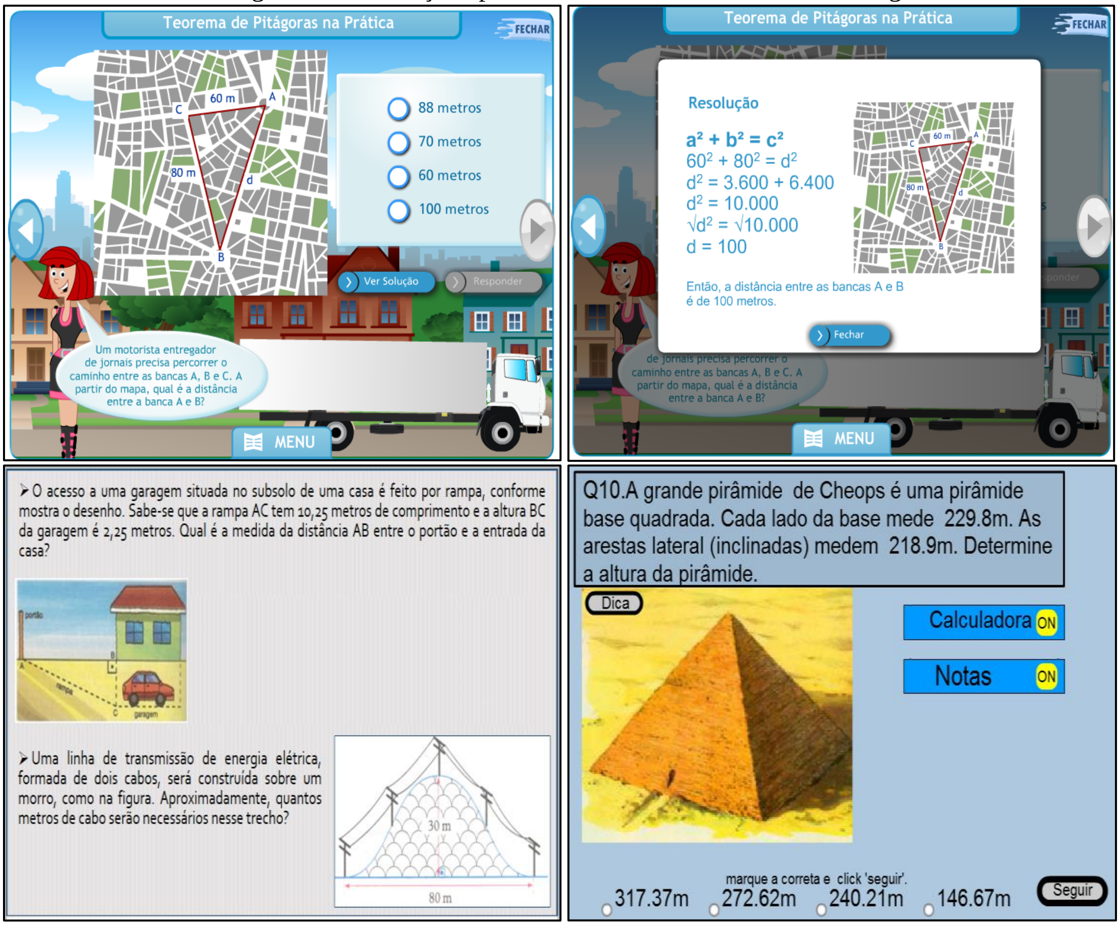
		compreensão e generalização do Teorema de Pitágoras.	
Linguagem	a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas. b) nível de linguagem adequado aos estudantes. c) propor situações de expressão matemática e interpretação.	- No material buscou-se desenvolver o estudo em torno do Teorema de Pitágoras, por meio de uma linguagem acessível e de acordo com o nível dos estudantes, considerando o uso de diferentes formas de expressão matemática, por meio das representações e resoluções das atividades propostas.	**Alta**
Regras (definições, proposições, procedimentos)	a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem. b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado. c) propõem-se situações onde os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.	- Considera-se que no material as definições, proposições e procedimentos são trabalhados de forma clara e de acordo com o nível educativo dos estudantes. - Entende-se que o material contempla situações-problemas e exercícios nos quais os estudantes tenham que mobilizar as definições e procedimentos estudados a fim de resolvê-las, principalmente no que se refere a intepretação das situações, identificando a possibilidade de utilização do teorema de Pitágoras e os dados apresentados (figura 181).	**Alta**
Argumentos	a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem. b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que argumentar.	- No que se refere a produção de argumentos, entende-se que o material explora este aspecto nas atividades introdutórias, nas quais os estudantes devem construir triângulos retângulos e argumentar sobre as relações entre seus elementos e as áreas dos quadrados construídas sobre eles (figura 177). - Considera-se que as demais atividades do material estão focadas na interpretação e aplicação do teorema de Pitágoras destacadas nos demais componentes.	**Média**
Relações	a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si.	- Considera–se que ao longo do material são apresentadas e discutidas situações que permitem os estudantes estabelecer relações entre os elementos do triângulo retângulo e o teorema de Pitágoras, como também, relacionando, este teorema com o cálculo da diagonal de um quadrado e altura de um triângulo, assim como aplicações em situações cotidianas (figura 182).	**Alta**

Fonte: a pesquisa.

A partir da análise apresentada no quadro da figura 179 é possível perceber que os componentes e indicadores epistêmicos estão fortemente presentes no material de estudos, com exceção dos argumentos, que obteve uma idoneidade média, os demais foram considerados com uma alta idoneidade.

As **situações-problema** são abordadas, no material, tanto com uma proposta de apresentar exemplos e contextualizar a temática em estudo, como por meio de atividades que os estudantes deveriam resolver, conforme ilustrado na figura 180.

Figura 180 - Situações-problema do material Teorema de Pitágoras



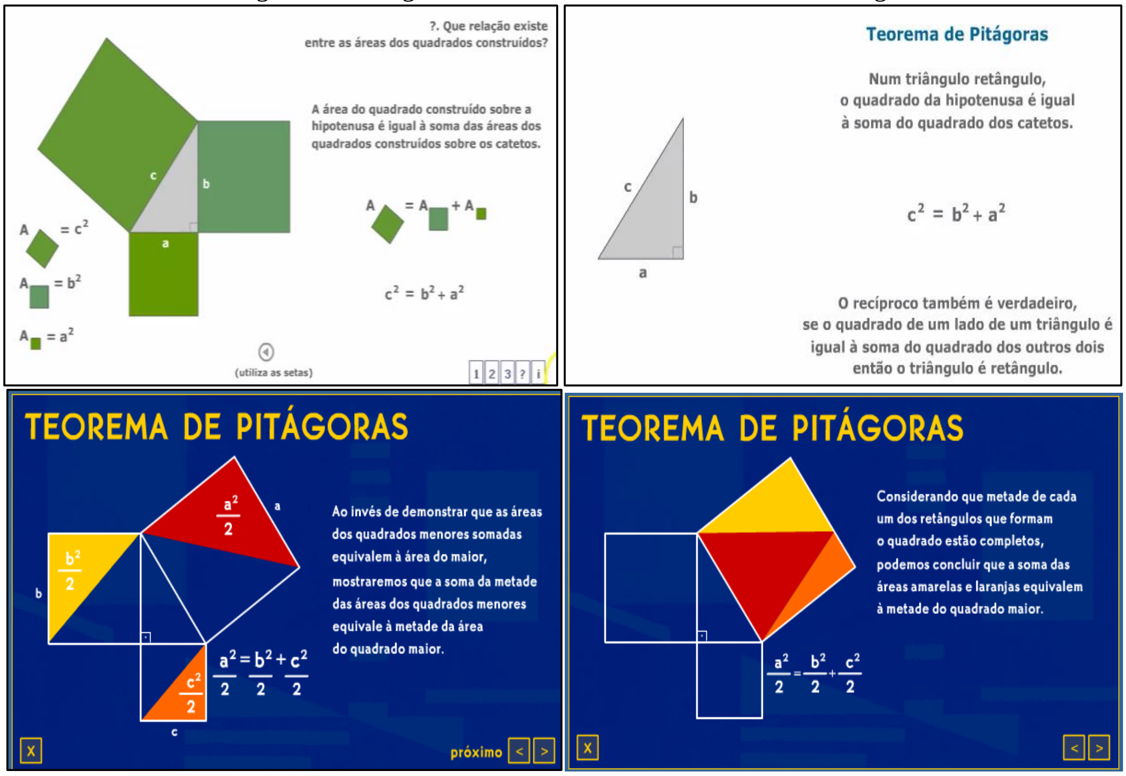
Fonte: a pesquisa.

Conforme destacada na figura 180, as situações-problema se fizeram presente no material em diferentes contextos, buscando apresentar exemplos por meio de situações de contextualização as quais podem ser resolvidas aplicando-se o Teorema de Pitágoras.

No que se refere ao componentes **Linguagens** considerou-se ter alcançado uma alta idoneidade, pois conforme é possível verificar nas figuras 177 e178, buscou-se trabalhar com uma linguagem acessível ao nível educativo dos estudantes. As situações propostas no material são, em geral, expressas em língua natural, apresentando também, na maioria das vezes, uma ilustração para representar a situação. Para a solução das atividades os estudantes devem utilizar a linguagem matemática adequada.

O componente **Regras** e seus indicadores, também considerado com uma idoneidade alta, foi contemplado no material por meio do trabalho com a definição, procedimentos e demonstração do Teorema de Pitágoras. Este trabalho com o teorema foi realizado por meio de atividades de construção de diferentes triângulos retângulos, as quais permitem a comparação entre eles para observar a permanência das propriedades e as relações estabelecidas para o Teorema de Pitágoras. A demonstração do Teorema foi realizada por meio da apresentação de um vídeo formalizando os aspectos discutidos nas atividades introdutórias mencionadas. Na figura 181 destaca-se telas do material de estudo que ilustram como estas ações foram conduzidas.

Figura 181 - Regras no material de estudos Teorema de Pitágoras

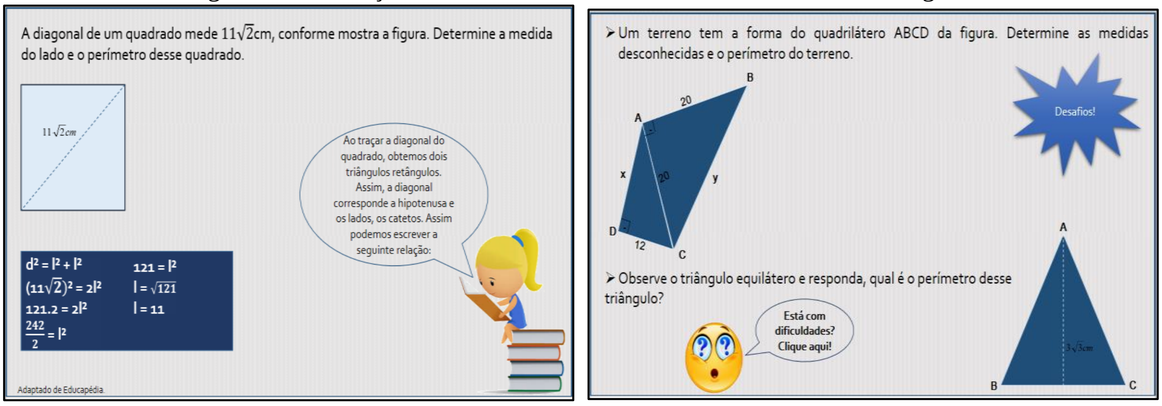


Fonte: a pesquisa.

Já no que se refere ao componente **Argumentos**, considerou-se ter alcançado uma idoneidade média, pois as atividades com esta característica foram contempladas somente para introduzir o conteúdo (figura 177) e, ao final, visando que os estudantes produzissem uma síntese do estudo em torno do Teorema de Pitágoras.

O componente **Relações** foi considerado com uma idoneidade alta, pois o material de estudos aborda o Teorema de Pitágoras e as relações possíveis de serem estabelecidas com o mesmo em situações de aplicação e contextualização, assim como, na resolução de atividades envolvendo outros conceitos matemáticos, como descobrir o a diagonal de um quadrado e altura de um triângulo, conforme ilustrado na figura 182.

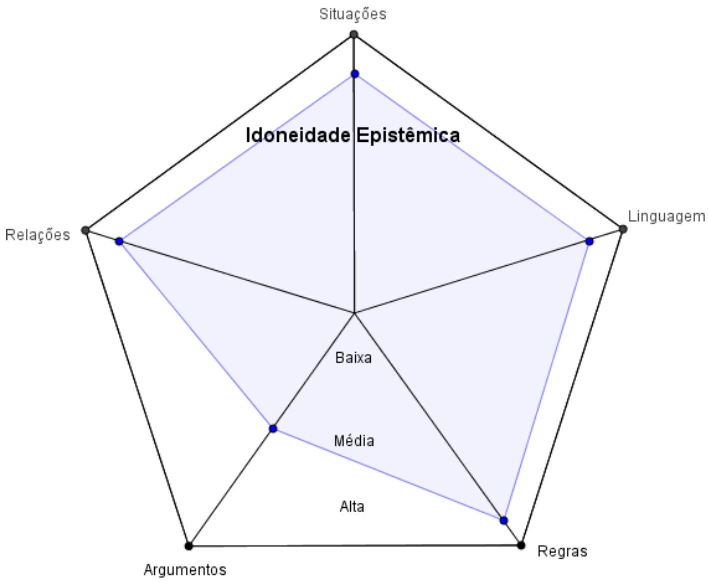
Figura 182 - Relações no material de estudo sobre o Teorema de Pitágoras



Fonte: a pesquisa.

A análise epistêmica aqui apresentada e discutida evidenciou a forma que o estudo em torno do Teorema de Pitágoras foi conduzido, permitindo perceber que os componentes epistêmicos estão sendo fortemente contemplados neste material, na figura 183 destaca-se a representação do grau de idoneidade alcançado no material.

Figura 183 - Representação do grau de Idoneidade Epistêmica alcançado com o material sobre Teorema de Pitágoras



Fonte: a pesquisa.

No que segue será lançado um olhar para os recursos utilizados e as articulações estabelecidas como os mesmos, destacando suas potencialidades e fragilidades no material produzido.

8.5.2 Teorema de Pitágoras: uma análise mediacional

Visando avaliar os recursos mobilizados e articulados no material de estudo sobre Teorema de Pitágoras, produziu-se a análise apresentada no quadro da figura 184, considerando os componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Mediacional, Recursos e Tempo Didático.

Figura 184- - Análise mediacional: Teorema de Pitágoras

Componentes	Indicadores	Análise	Grau de Idoneidade
Recursos Didáticos	a) evidencia-se a presença de materiais adequados ao desenvolvimento do processo de ensino e adaptados ao nível educativo a que se dirigem. b) há uma diversificação de recursos para auxiliar no processo de ensino, tais como: audiovisuais, material concreto, livros, entre outros. c) propõe-se a organização e experimentação de situações práticas.	- Considera-se que o material de estudo proposto está adequado ao nível educativo dos estudantes, pois utiliza linguagem acessível mantendo, porém, aspectos formais quando pertinentes. - No que se refere aos recursos, foram utilizodos vídeos, animações, *links* externos, atividades *online* e situações-problema propostas no próprio material. Todos estes recursos foram articulados visando oportunizar os estudantes retomarem, compreenderem e exercitarem o Teorema de Pitágoras, suas relações e aplicações (figura 185, 186 e 187).	**Alta**
Tempo didático	a) apresentam-se situações de ensino que contemplam diversas modalidades (estudo pessoal, cooperativo, tutorial, presencial). b) evidencia-se organização do tempo para intervenção docente, trabalho autônomo dos estudantes e momentos de discussão. c) dedica-se um tempo maior para o desenvolvimento dos conhecimentos, caso os estudantes apresentem dificuldade de compreensão.	- O material de estudos não apresenta atividades que fomentem a discussão entre os estudantes sobre o que está sendo estudado. Esta proposta se caracteriza por um estudo que privilegia o trabalho individual, porém conforme já destacado, a interação entre os estudantes, assim como, com a pesquisadora se faz presente no processo de estudo. - Considera-se que o material possibilita aos estudantes desenvolverem autonomia, uma vez que os mesmos se tornam responsáveis pelo seu estudo, estabelecendo seu ritmo de estudo e aprendizagem.	**Média**

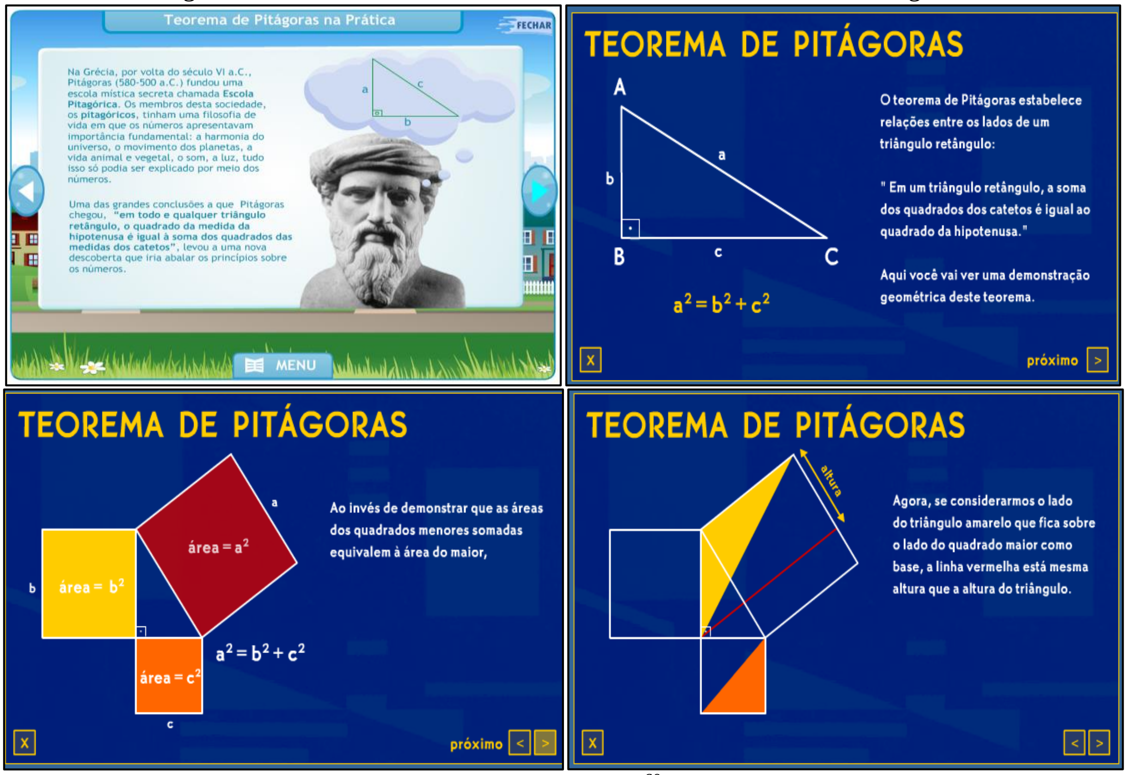
Fonte: a pesquisa.

A partir da análise apresentada no quadro da figura 183 considera-se que os componentes Recursos e Tempo Didático estão sendo contemplados de maneira satisfatória no material, sendo representado, de forma mais significativa, por meio dos Recursos. Assim, considerando a diversidade e potencialidade dos recursos utilizados entendeu-se ter alcançado uma alta idoneidade neste aspecto.

Ainda, no que se refere aos Recursos, utilizou-se no vídeos, animações, *links* externos, atividades *online* e situações-problema propostas no próprio material.

As animações e vídeos foram utilizados como um recurso para apresentar o contexto histórico no qual o Teorema de Pitágoras foi desenvolvido, as discussões em torno da demonstração do teorema, como também, como uma possibilidade dos estudantes verificarem se encaminharam as resoluções das atividades de construção corretamente, conforme destacado na figura 185.

Figura 185 - Recursos no material de estudos sobre o Teorema de Pitágoras

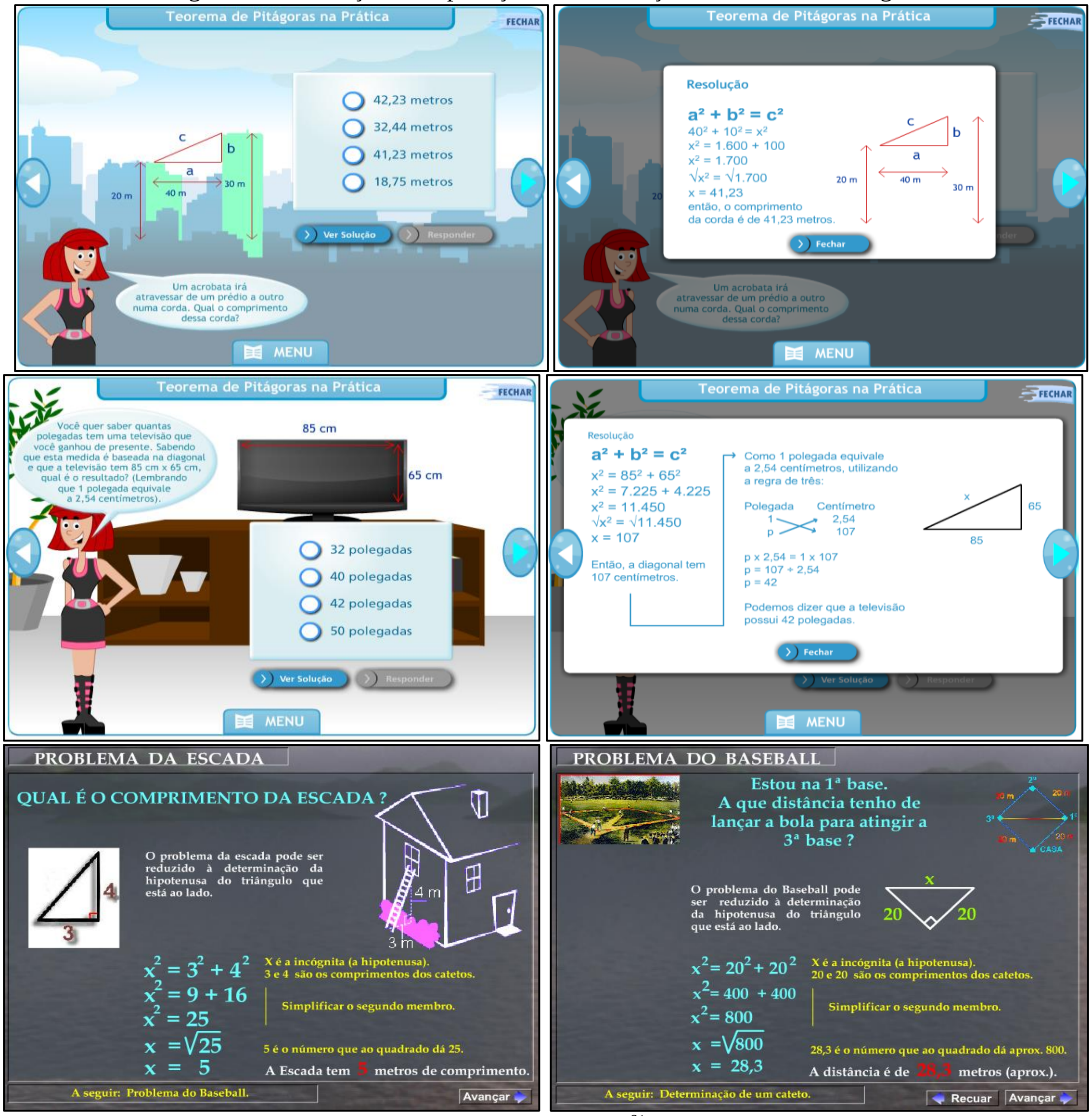


Fonte: a pesquisa[60].

Outro aspecto abordado pelas animações utilizadas no material se refere as situações de aplicação e contextualização do Teorema de Pitágoras, as quais são apresentadas como uma proposta a ser resolvida, mas também, contemplam a sua resolução detalhada, a qual pode ser conferida pelo estudante, conforme ilustrado na figura 186.

[60] http://www.neteducacao.com.br/multimidia/aulas-animadas/trigonometria. http://www.atividadeseducativas.com.br/index.php?id=915

Figura 186 - Situações de aplicações nas animações: Teorema de Pitágoras



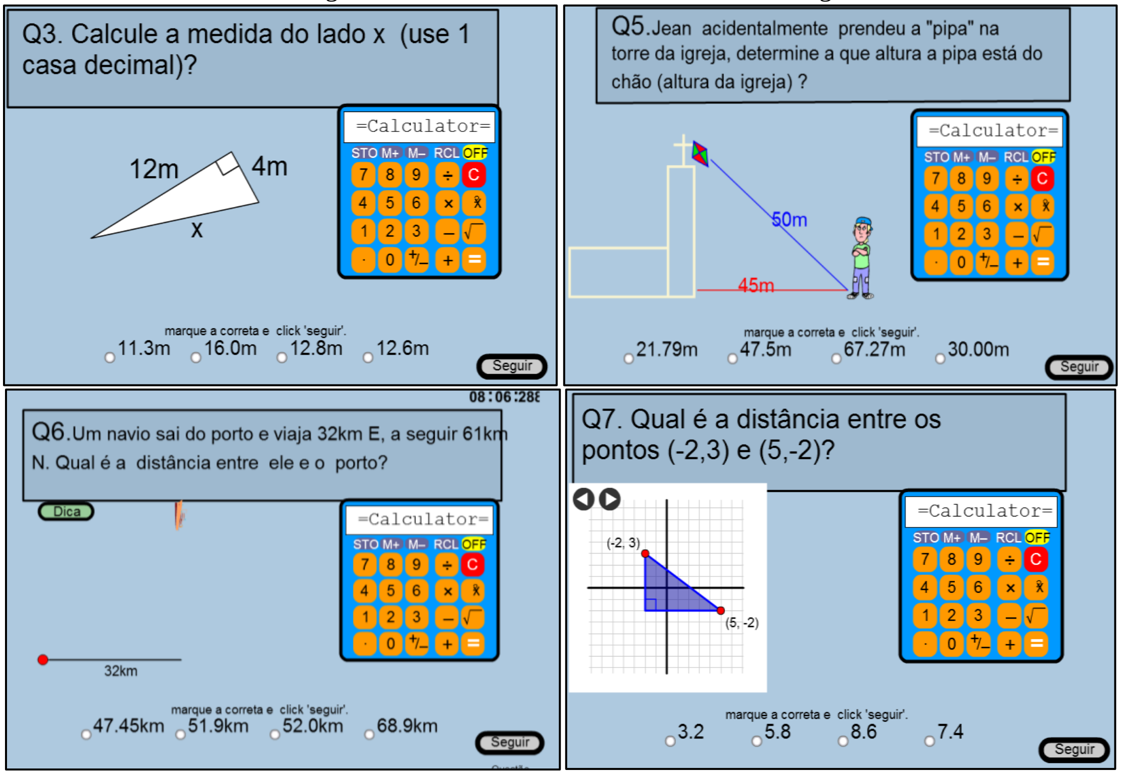
Fonte: a pesquisa[61].

Ressalta-se a qualidade dos vídeos e animações destacados nas figuras 185 e 186, no que se refere as ilustrações, representações e a forma de condução do estudo, apresentando e justificando tanto aspectos mais teóricos, como da demonstração, como na resolução das situações-problemas apresentadas.

As situações- problema propostas no material, já destacadas na análise epistêmica, como também as atividades *online*, foram articuladas no material de estudos visando que os estudantes exercitassem e aplicassem o que estava sendo estudado em torno do Teorema de Pitágoras. Destaca-se na figura 187 exemplos das atividades *online* utilizadas.

[61] http://www.neteducacao.com.br/multimidia/aulas-animadas/trigonometria.
http://nautilus.fis.uc.pt/mn/pitagoras/aulas.html

Figura 187 - Atividades online: Teorema de Pitágoras



Fonte: a pesquisa[62].

Ressaltam-se as atividades *online* apresentadas na figura 186, pois considera-se que as mesmas apresentam diferenciais muito interessantes, como a disponibilidade de uma calculadora virtual para auxiliar os estudantes nos cálculos e também um ícone de Dica, que consta nas situações que estão expressas somente em língua natural e a dica apresenta uma representação da situação, a fim de proporcionar aos estudantes uma outra forma de interpretação do problema, caso esteja com dificuldades.

No contexto do que foi aqui destacado, e também já discutido na dimensão epistêmica, considera-se que o material de estudos conta com uma diversidade de recursos pertinentes e importantes no desenvolvimento do estudo do Teorema de Pitágoras, o que o qualificou para atingir uma alta idoneidade. Cabe ressaltar que se atribuiu uma idoneidade média para o componente Tempo Didático, pois no material não foi prevista nenhuma atividade que encaminhasse os estudantes a realizarem uma discussão entre eles, o que se considera que pode ser melhor avaliado e contemplado no material.

A partir da apresentação das análises epistêmica e mediacional destacando a estrutura, os recursos e a forma que o estudo sobre o Teorema de Pitágoras foi conduzido. No que segue, será lançado um olhar para os significados produzidos pelos estudantes frente aos significados

[62] http://objetoseducacionais2.mec.gov.br/bitstream/handle/mec/10479/PIT%C3%81GORAS.swf?sequence=1

pretendidos com este material de estudo, visando analisar e identificar as potencialidades e os conflitos semióticos apresentados, assim como as relações entre o que se pretendia e o que de fato foi alcançado junto aos estudantes.

8.6.3 Teorema de Pitágoras: uma análise cognitiva

Visando lançar um olhar para a aprendizagem dos estudantes, assim como as dificuldades e conflitos que emergiram ao longo do estudo sobre o Teorema de Pitágoras, apresenta-se, no quadro da figura 188, uma análise, considerando os significados pretendidos para a temática em relação aos componentes epistêmicos e cognitivos.

Figura 188 - Análise cognitiva: significados pretendidos x declarados para o Teorema de Pitágoras

Componentes Epistêmicos-cognitivos	**Significados Pretendidos**	**Significados Declarados**	**Grau de idoneidade**
Situações- problemas	-Resolver as situações propostas, utilizando os conceitos, procedimentos e relações pertinentes.	- Considera-se que os apresentaram um desempenho satisfatório em relação às situações propostas no material, se destacando quando eram de aplicação direta. Já nas situações que exigiam estabelecer relações diferente das usuais, assim como a representação do triângulo retângulo fora da sua representação usual apresentaram alguns entraves.	**Média**
Linguagens	- Reconhecer um triângulo retângulo a partir de seus elementos e propriedades em diferentes linguagens (verbal e gráfica). - Associar o Teorema de Pitágoras em diferentes representações. - Compreender o Teorema de Pitágoras apresentado em diferentes linguagens e demonstrações (verbal, gráfica e simbólica). - Utilizar linguagem matemática adequada na solução das situações.	- Considera-se que os estudantes utilizaram adequadamente a linguagem matemática para resolver as situações propostas. - Associaram corretamente os elementos dos triângulos retângulos apresentados, tanto em língua natural como por meio das representações. - Entende-se que os estudantes conseguiram compreender as demonstrações do Teorema de Pitágoras, tendo em vista que souberam identificar os elementos corretamente, associar e relacionar as medidas apresentadas, assim como utilizar o recurso das representações para resolver problemas.	**Média**
	- Identificar os elementos de um triângulo retângulo corretamente. - Verificar se um triângulo é retângulo utilizando	- Os estudantes não apresentaram dificuldades em identificar os elementos dos triângulos retângulos, verificar a condição para ser um, como também em determinar medidas desconhecidas .	

Regras (definições, proposições, procedimentos)	procedimentos adequados. - Calcular o valor de termos desconhecidos utilizando o Teorema de Pitágoras. - Compreender a definição e demonstração do Teorema de Pitágoras. -Aplicar os conhecimentos estudados sobre Teorema de Pitágoras para resolver as situações propostas.	- Considera-se que os estudantes mobilizaram adequadamente as definições, propriedades e procedimentos estudados em torno do Teorema de Pitágoras a fim de resolver as situações propostas, apresentando maiores entraves quando a situação envolvia, também, outros conteúdos.	**Alta**
Argumentos	- Produzir argumentos e justificativas em torno de um triângulo ser retângulo. - Argumentar sobre as relações estabelecidas entre as áreas dos catetos e a hipotenusa.	- Considera-se que os estudantes apresentaram um bom desempenho na produção de argumentos em torno das justificativas sobre um triângulo ser retângulo e a relação estabelecida entre a área formada pelo quadrado da hipotenusa e a área formada pelo quadrado dos catetos.	**Média**
Relações	- Relacionar as medidas dos catetos com a hipotenusa. -Compreender as relações entre as áreas dos catetos e a hipotenusa. - Relacionar o teorema de Pitágoras e o cálculo da diagonal de um quadrado e a altura de um triângulo equilátero. - Relacionar o Teorema de Pitágoras a representações em situações cotidianas e de aplicações.	- Considera-se que os estudantes conseguiram estabelecer as relações pertinentes entre as medidas dos catetos e a hipotenusa, associados também, a noção de área trabalhada nas atividades. - No que diz respeitos as relações com outros objetos matemáticos, como a diagonal de um quadrado e a altura de um triângulo equilátero, considera-se que, referente a diagonal os estudantes apresentaram um melhor desempenho do que relacionando com a altura do triângulo. - Entende-se que os estudantes compreenderam a relação do Teorema de Pitágoras com as situações e aplicações propostas, pois sempre buscavam identificar o triângulo retângulo na situação dada e, a partir, dele resolver a situação.	**Alta**
Raciocínio Lógico	- Observar a relação de semelhança entre os triângulos retângulos. - Estabelecer estratégias para resolver problemas utilizando o Teorema de Pitágoras.	- No que se refere à observação em torno da semelhança entre triângulos retângulos os estudantes apresentaram um ótimo desempenho nas atividades iniciais, compreendendo as possíveis relações a serem estabelecidas. - As estratégias que os estudantes utilizaram para resolver as	**Média**

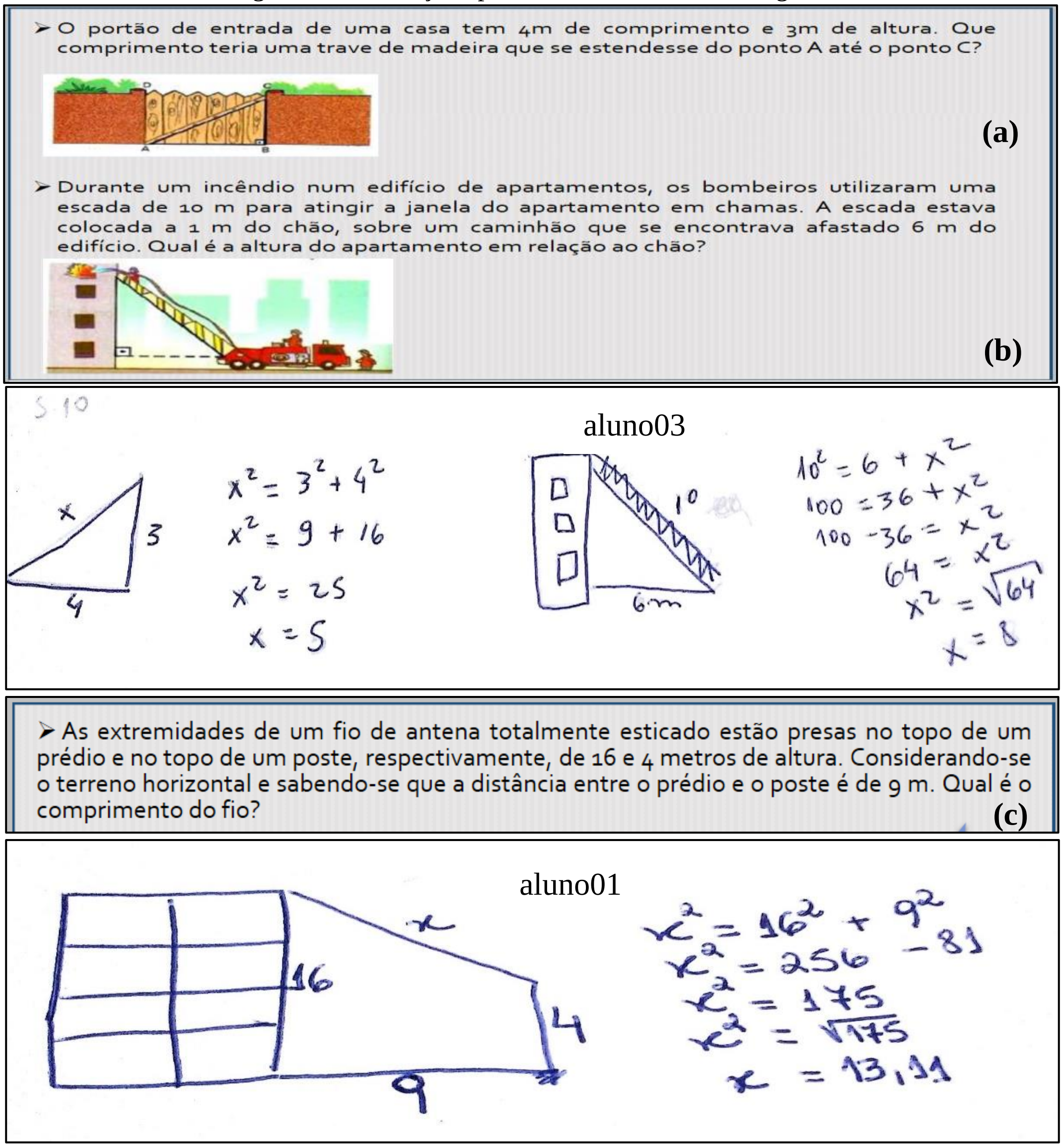
		situações propostas nos materiais, em sua maioria foram bem planejadas e executadas corretamente. Grande parte delas iniciava pela interpretação da representação, e caso não estivesse presente, os mesmos produziam uma para ilustrar a situação a fim de conseguir identificar melhor os elementos do triângulo retângulo.	
Leitura/Interpretação	- Conseguir ler e interpretar adequadamente as informações e situações propostas no material. - Compreender a definição e demonstração do Teorema de Pitágoras e suas aplicações por meio dos exemplos e atividades. -Reconhecer a possibilidade de aplicar o Teorema de Pitágoras em uma situação-problema;	- Considera-se que os estudantes não apresentaram dificuldades de leitura e interpretação das situações postas no material, já que apresentaram um bom desempenho nas resoluções das situações propostas. Cabe destacar que os estudantes sempre procuravam colocar o triângulo retângulo em sua posição padrão, para identificar os seus elementos. - Outro aspecto que merece destaque se refere ao fato que os estudantes, em geral, apenas resolviam o problema proposto, ou seja apresentavam os procedimentos, mas não elaboravam uma resposta final para o que estava sendo questionado.	**Média**
Análise/Síntese	- Realizar síntese durante e ao final do estudo, conseguindo identificar e expressar o que foi aprendido.	- Nenhum estudante apresentou uma resposta para questão final do material, que solicitava que os mesmos listassem o que conseguiram aprender no estudo. Ressalta-se que o aluno 03 registrou apenas “ $a^2 = b^2 + c^2$” fazendo referência ao Teorema de Pitágoras.	**Baixa**

Fonte: a pesquisa.

A partir da análise apresentada no quadro da figura 188, considera-se que se alcançou um resultado satisfatório em parte dos significados pretendidos, o que fez com que se atribuísse uma idoneidade média para os componentes Situações-problema, Linguagens, Argumentos, Raciocínio Lógico e Leitura e Interpretação. Um aspecto que foi observado e contempla estes componentes se refere ao entrave encontrado pelos estudantes quando o triângulo retângulo não era apresentado na posição que usualmente é adotada em materiais didáticos e mesmo pelos professores, sendo que os mesmos acabavam o desenhando novamente e colocando na posição “padrão”.

Considerando que os significados pretendidos para os componentes Situações-problemas, Linguagens, Raciocínio Lógico, Leitura e Interpretação se referem a aspectos similares e que se complementam, como para todos estes foi atribuído uma idoneidade média, será apresentada uma discussão conjunta para estes componentes. Na figura 189 apresentam-se três situações-problemas, e respectivas resoluções, que contemplam ou não os significados pretendidos para estes componentes.

Figura 189 - Situações-problemas: Teorema de Pitágoras



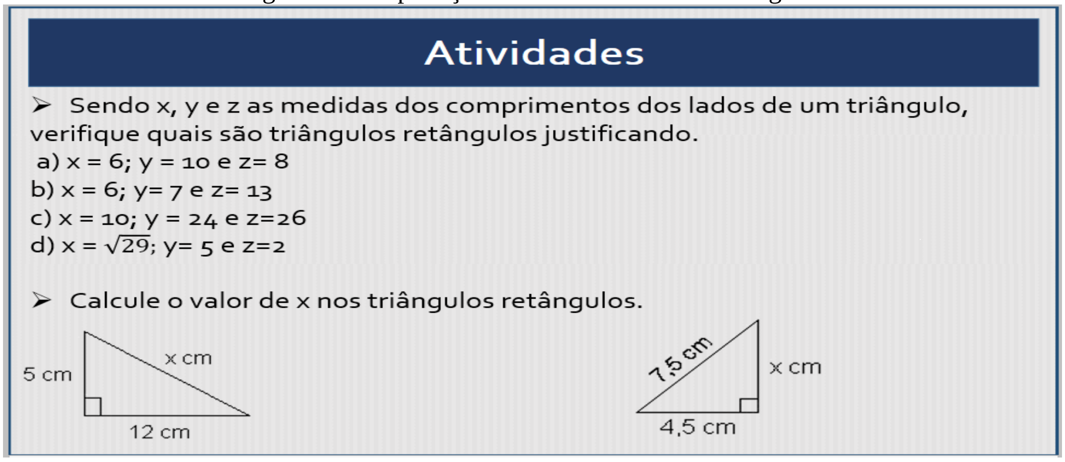
Fonte: a pesquisa.

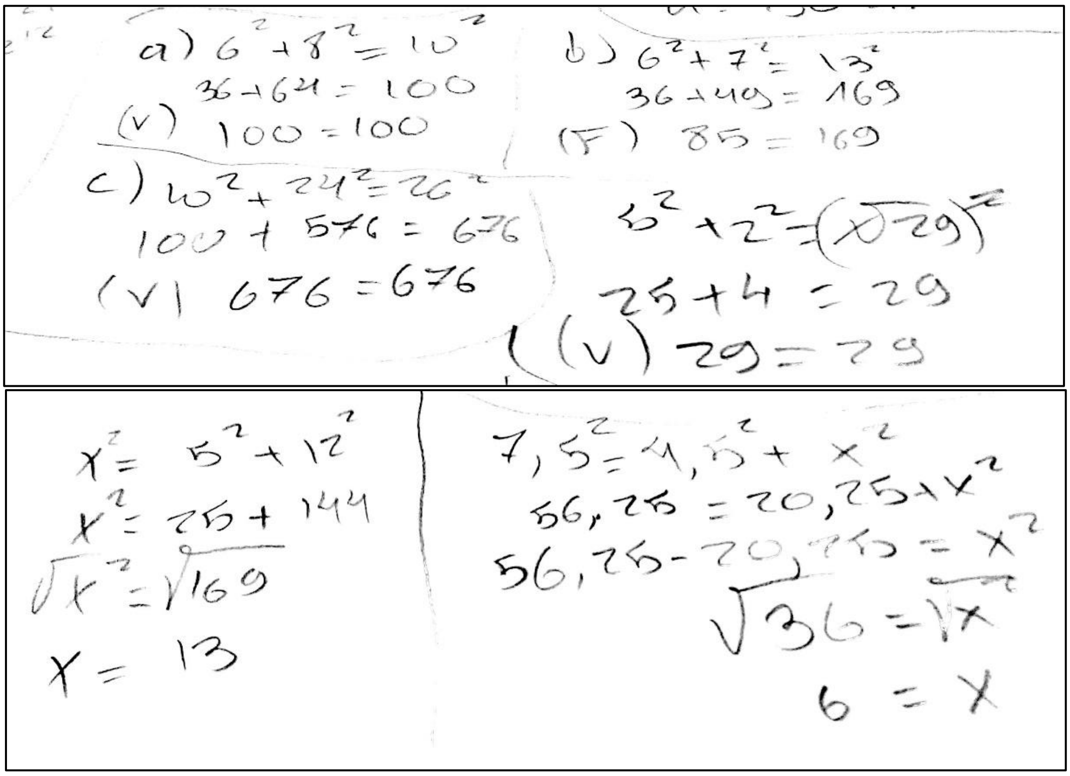
Destacaram-se estas três situações, pois foram bem marcantes, considerando que as duas primeiras (figura 189 a e b) todos os estudantes resolveram corretamente, identificando os catetos e a hipotenusa e realizando as operações necessárias. Porém, não foram respondidas as questões, apenas os cálculos foram apresentados, aspecto este que ocorreu em todas as situações problemas, justificando mais um elemento para não se ter alcançado uma alta idoneidade nestes componentes. Para a situação (figura 189a) ser resolvida por completo os estudantes deveriam ter indicado que o comprimento da trave era 5m, que é a resposta imediata encontrada nos cálculos, o que já não é o caso da segunda questão (figura 189 b). Nesta, a aplicação do teorema permite calcular a medida do cateto, porém, o que é solicitado é a altura desde o chão, tendo-se, assim, que se acrescentar 1m para se chegar a resposta final solicitada. Ressalta-se que esta situação de não concluir a resolução de um problema apresentando a resposta, é um procedimento muito comum de ser realizado pelos estudantes. Assim, entende-se necessário a realização de um trabalho que estimule a leitura, interpretação e o uso correto das linguagens, buscando um afastamento de procedimentos padrão, de aplicação direta, onde se pode chegar a uma resposta correta sem, necessariamente, ter-se conhecimento do que se está calculando.

Diferente das questões anteriores, a terceira questão (figura 189 c) não foi acertada por nenhum estudante, muitos não a resolveram, deixando em branco e, os que a realizaram, produziram soluções semelhantes ao processo do aluno01. Este interpretou corretamente a situação, o que pode ser percebido a partir da representação figural adequada, porém, no momento de identificar os catetos e a hipotenusa, considerou toda a altura do prédio, sendo que o fio esta esticado a partir do seu topo, encontrando o topo do poste, que está a 4m do chão, ou seja, a altura do poste deveria ser subtraída da altura do prédio, criando-se, assim, um triângulo retângulo de catetos 12 e 9m, o qual permitiria resolver o problema.

Por outro lado, no que se refere ao componente **Regras**, entendeu-se que os significados declarados pelos estudantes se aproximaram satisfatoriamente em relação aos pretendidos. No que se refere a aplicação direta de procedimentos e definições os estudantes não apresentaram nenhuma dificuldade, conforme ilustrado na figura 190 pela resolução do aluno11.

Figura 190 - Aplicação direta do Teorema de Pitágoras





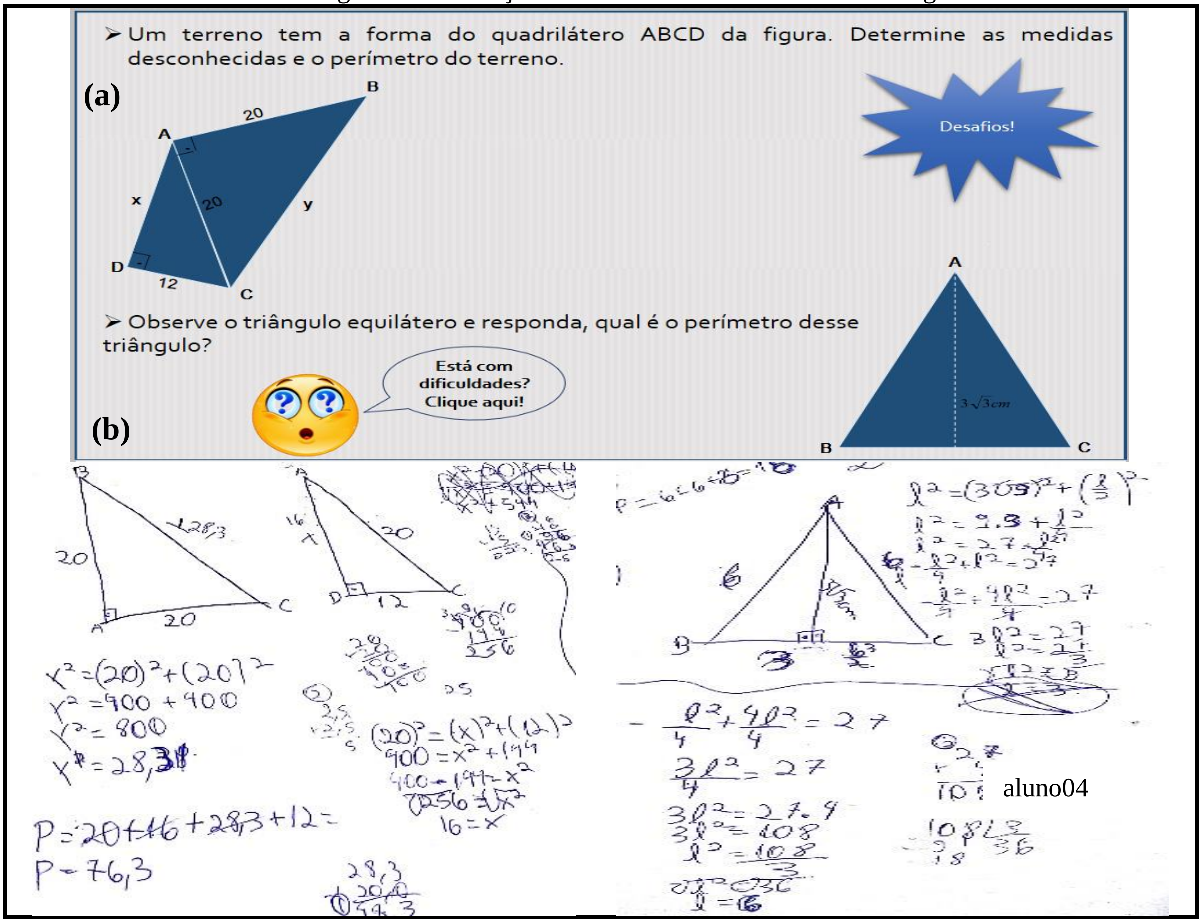
Fonte: a pesquisa.

Estas atividades tinham como objetivo exercitar a aplicação direta do teorema para descobrir valores desconhecidos, como também, se os estudantes conseguiam verificar se se um triângulo é retângulo sem fazer referência ao ângulo reto, argumento este muito utilizado por eles na atividade introdutória.

Conjectura-se que o excelente desempenho dos estudantes nas referidas questões (figura 190) pode ter ocorrido pelo fato de estarem estudando em sala de aula regular esta temática e, segundo eles, até aquele momento só tinham trabalhado buscando encontrar medidas desconhecidas.

Outro componente que se considerou com uma alta idoneidade foi o de **Relações**, pois entendeu-se que os estudantes conseguiram compreender a aplicação do teorema em outros contextos, principalmente relacionado as situações que envolviam medidas desconhecidas em outras figuras geométricas, as quais deveriam ser decompostas em triângulos retângulos para posterior aplicação do Teorema de Pitágoras, conforme destacado na figura 191.

Figura 191 - Relações no material sobre Teorema de Pitágoras

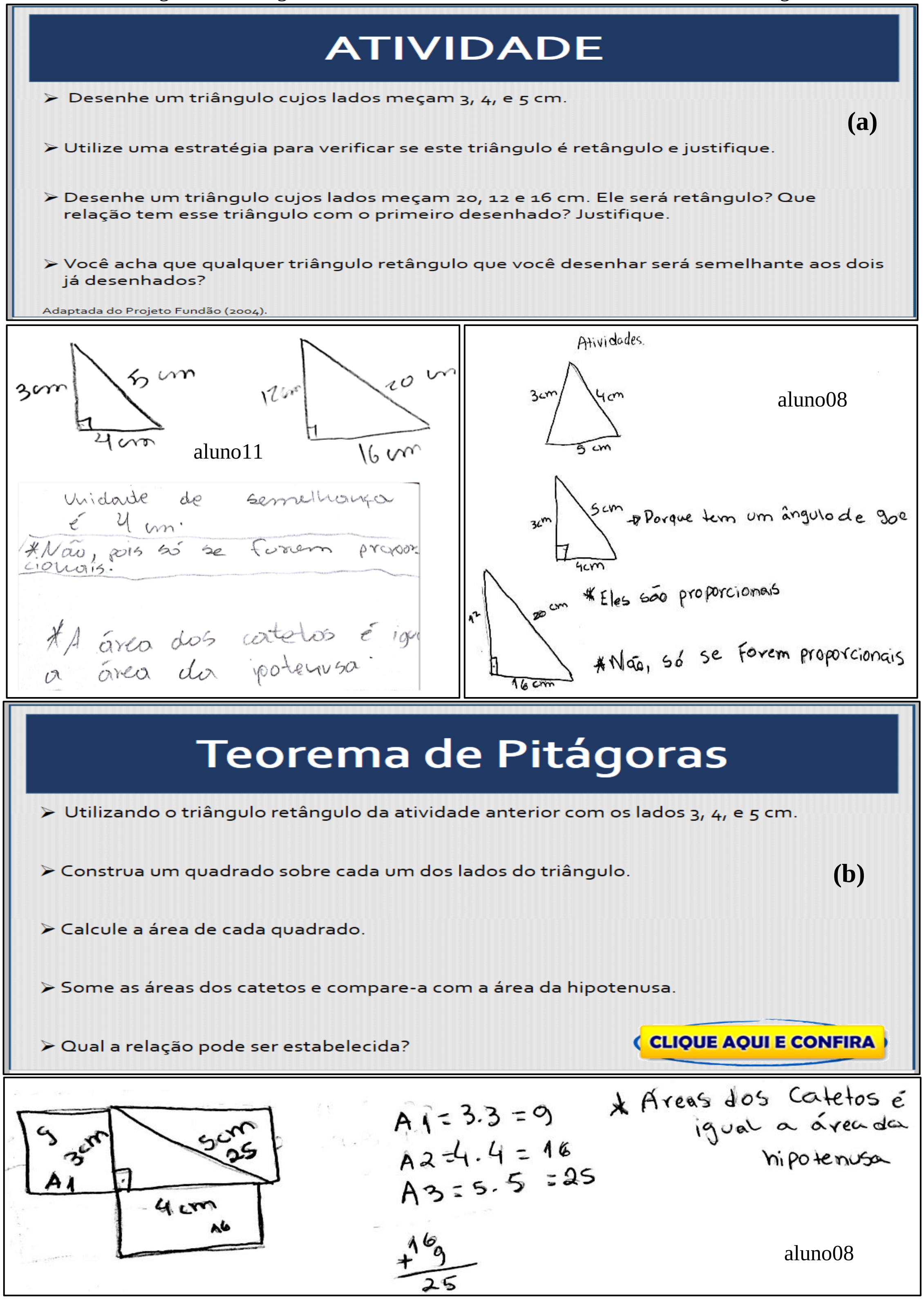


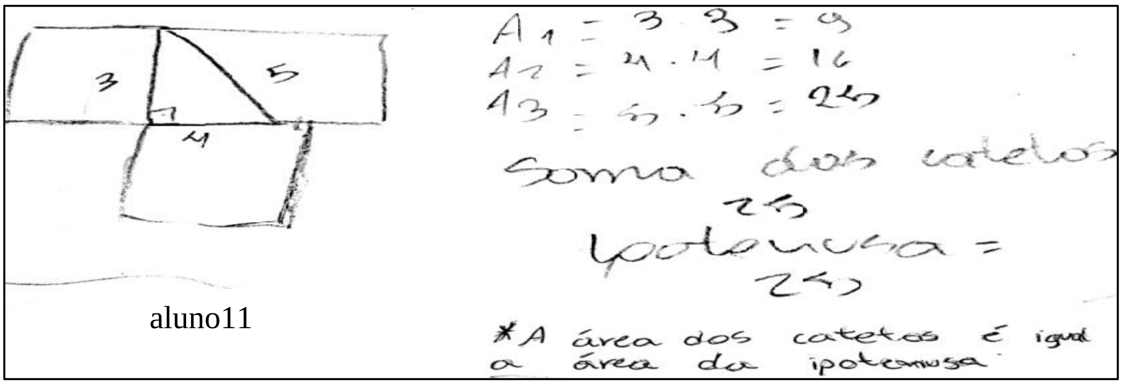
Fonte: a pesquisa.

A resolução do aluno04 é apresentada a fim de ilustrar como os estudantes mobilizaram e relacionaram as definições e procedimentos estudados, buscando resolver as situações propostas. Na primeira (figura 191a) questão ressalta-se a representação realizada pelo aluno, dividindo o quadrilátero em dois triângulos retângulos e colocando-os na posição “padrão”, para identificar os catetos e a hipotenusa para aplicar no teorema de Pitágoras, resolvendo corretamente e em seguida apresentando perímetro. A segunda questão (figura 190b) o estudante relacionou corretamente os elementos, identificando os lados do triângulo equilátero como *l* e como a altura encontra o lado oposto em seu ponto médio, identificou um cateto como $\frac{l}{2}$. Cabe ressaltar que o estudante cometeu um erro na resolução do Teorema, no que se refere aos procedimentos aritméticos relacionados ao mínimo múltiplo comum, porém conjectura-se que o mesmo tenha percebido, assim desconsiderou o que tinha feito e resolveu corretamente ao lado.

No que se refere ao componente **Argumentos**, considerou-se ter alcançado uma média idoneidade, pois os estudantes só apresentaram conjecturas e justificativas nas atividades introdutórias, porém estas foram bem significativas, em geral atendendo ao que se esperava para as atividades. Na figura 192 destaca-se as atividades e respectivas resoluções dos aluno08 e 11.

Figura 192 - Argumentos no material de estudos sobre o Teorema de Pitágoras





Fonte: a pesquisa.

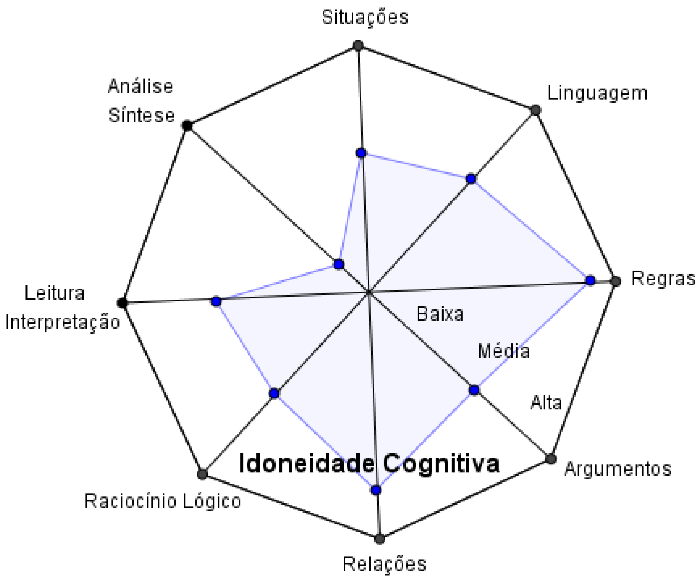
A argumentação dos estudantes para as atividades apresentadas na figura 191, são representadas pelas resoluções dos aluno08 e 11. Na atividade 1 (figura 192a) todos os estudantes apresentaram uma representação adequada para os triângulos solicitados e, para justificar se os triângulos construídos eram retângulos, os estudantes argumentaram principalmente que “ *é retângulo pq tem um ângulo reto*” aluno02, “ *a principal característica é que tem um ângulo reto de 90º”* aluno07, “*é triângulo retângulo, pq tem catetos, hipotenusa e ângulo reto”* aluno10. Quanto à relação entre os triângulos construídos, os estudantes conseguiram observar que os mesmos são proporcionais e, o aluno08, inclusive destacou a “unidade” de semelhança entre eles que é 4, utilizando o termo unidade de semelhança, mas se referindo a razão de semelhança, o que se julgou significativo.

Em relação a segunda atividade (figura 192b), os estudantes representaram adequadamente (embora sem muita precisão) quadrados construídos a partir das medidas dos catetos e da hipotenusa do triângulo e relacionaram as áreas obtidas a partir dos catetos com a área obtida a partir da hipotenusa. Ressalta-se, porém, que grande parte dos estudantes indicou que a relação estabelecida *“ a área dos catetos é igual a área da hipotenusa”* aluno11, “*os quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa*” aluno04. Conjectura-se que os estudantes conseguiram estabelecer a relação correta, porém no momento de expressar não mencionaram que é a soma das áreas obtidas a partir dos catetos que é igual a área obtida a partir da hipotenusa ou, de modo mais simples, a soma dos quadrados dos catetos é igual ao quadrado da hipotenusa. Entende-se, porém, que o conceito de soma ficou implícito na argumentação dos mesmos.

O único componente que foi considerado com uma baixa idoneidade foi **Análise e Síntese**, pois nenhum estudante respondeu ao questionamento final do material, que estimulava que os mesmos argumentassem em torno do que foi estudado, de maneira espontânea, já que não havia questão a ser respondida. Assim, como a tarefa era livre os estudantes optaram por não realiza-la.

Por fim, buscando sintetizar e ilustrar a análise produzida apresenta-se, na figura 192, uma representação octogonal onde os vértices são os componentes e o polígono inscrito refere-se ao grau de idoneidade alcançado frente aos significados pretendidos e os declarados pelos estudante (idoneidade cognitiva).

Figura 193- Representação do grau de Idoneidade Cognitiva alcançado no maerial sobre o Teorema de Pitágoras



Fonte: a pesquisa.

8.6.4 Teorema de Pitágoras: síntese das Análises

As análises produzidas e discutidas sobre o material de estudos Teorema de Pitágoras permitiram refletir sobre a estrutura e conteúdo do material, os recursos utilizados, os significados pretendidos e os declarados pelos estudantes.

Considera-se que os componentes propostos pelas ferramentas de análise epistêmica, mediacional e cognitiva, se fizeram presentes no material de maneira satisfatória. No que se refere a dimensão epistêmica somente o componente Argumentos não foi identificado com uma alta idoneidade, sendo que as Regras e as Relações também alcançaram uma alta idoneidade na dimensão cognitiva, o que se considera um aspecto relevante, pois nestes apresentou-se o que se julgou ser mais adequado para os estudantes e os mesmos compreenderam e corresponderam atingindo os significados pretendidos. O único componente que apresentou uma baixa idoneidade foi Análise e Síntese, os demais componentes das dimensões foram considerados com uma média idoneidade.

Neste contexto, entende-se que os resultados alcançados com o material de estudos sobre o Teorema de Pitágoras foram positivos, pois os estudantes conseguiram atingir grande parte dos significados pretendidos, destacando seus desempenhos na identificação dos elementos do triângulo retângulo e na articulação dos conhecimentos estudados para resolver as situações-problema propostas. Um comportamento manifestado pelos estudantes que chamou a atenção refere-se as representações dos triângulos retângulos. Quando o triângulo é apresentado no formato identificado como "padrão", ou seja, apoiado em um dos catetos, o mesmo é reconhecido como retângulo, porém, em outras posições os estudantes, por vezes, não o identificavam como retângulo. Mesmo quando identificado como retângulo, para resolver as questões postas, os estudantes tinham a necessidade de representa-los nessa posição "padrão" para, só então, passar a resolvê-las. Tal comportamento reforça a necessidade de uma mesma situação ser apresentada aos alunos de diferentes maneiras, perspectivas, linguagens, o que se buscou muito fortemente nos materiais propostos

Apresentou-se e discutiu-se, até aqui, análises referentes às dimensões Epistêmica, Mediacional e Cognitiva dos materiais de estudos Figuras Geométricas, Ângulos, Triângulos, Quadriláteros, Teorema de Tales e Pitágoras, os quais são objeto de análise nesta tese. Entende-se que estas dimensões têm aspectos específicos a serem ressaltados e analisados individualmente em cada um destes tópicos, o que levou a análise ser estruturada a partir das temáticas e, em cada uma delas, considerando as referidas dimensões. Já no que se refere as dimensões Interacional, Emocional e Ecológica optou-se por discuti-las separadamente, e a partir de cada uma delas, porém com um olhar para a proposta como um todo, tendo em vista, que os resultados evidenciados nestas dimensões, tem características similares em todos os materiais. Assim, no que segue, apresentam-se as análises referentes às dimensões Interacional, Emocional e Ecológica, com o que, se completa a análise sob perspectiva de todas as dimensões da Idoneidade Didática do EOS.

8.7 PROPOSTA DE ESTUDOS DE RECUPERAÇÃO DE GEOMETRIA: UMA ANÁLISE INTERACIONAL

Buscando identificar e analisar as interações ocorridas entre os estudantes, a pesquisadora e o material, a partir dos registros capturados em áudio e vídeo e das observações da pesquisadora, registrados em diário, propõem-se, aqui, utilizar os componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Interacional - FAI, sendo eles: diálogo/comunicação, interação e autonomia, objetivando refletir sobre o grau de idoneidade das interações produzidas ao longo dos estudos. No quadro da figura 194 apresenta-se a análise produzida.

Figura 194 – Análise Interacional da Proposta de Estudos de Recuperação

Componentes	Indicadores	Análise	Grau de Idoneidade
Diálogo Comunicação	a) propõem-se momentos de discussão coletiva. b) há espaço para intervenção docente e discente. c) promove-se oportunidades de discussão/superação dos conflitos semióticos através da argumentação.	- Em grande parte dos materiais de estudos, são propostas situações as quais os estudantes tenham que discutir em grupo. Além destes momentos previstos, pode-se observar que a comunicação e o diálogo entre os estudantes se faz presente, assim como com a pesquisadora, quando se deparavam com alguma situação que apresentassem dúvidas.	**Média**
Interação	a) propõem-se situações que ampliam as relações de comunicação com outros alunos, com o professor, com o material de ensino. b) organizam-se situações para identificação e resolução de conflitos semióticos mediante interpretação de significados.	- A interação entre os sujeitos se fez presente durante todo o estudo. Os estudantes interagiram com a pesquisadora, não só quando apresentavam dificuldades em relação ao objeto de estudo, mas também, para orientações de como deveriam proceder com as atividades. - Quanto à interação com o material, os estudantes se adaptaram bem à proposta de trabalho. Realizavam a leitura do material, registrando anotações que consideravam importantes e resolviam as atividades, algumas delas na folha de registro ou diretamente *online*. - No que se refere aos conflitos semióticos, estes foram sendo identificados pela pesquisadora por meio da observação durante o estudo ou quando expressado pelos próprios estudantes diretamente para a pesquisadora.	**Alta**
Autonomia	a) propõem-se momentos em que os discentes assumam a responsabilidade do estudo; b) apresentam-se situações que possibilitem o estudante raciocinar, fazer conexões, resolver problemas e comunicá-los.	- Entende-se que este componente se faz fortemente presente na estrutura da proposta de estudo, uma vez que a mesma proporciona aos estudantes espaços para o desenvolvimento da autonomia para o estudo, já que os materiais são individuais, o que permite que sigam o seu ritmo de aprendizagem.	**Alta**

Fonte: a pesquisa

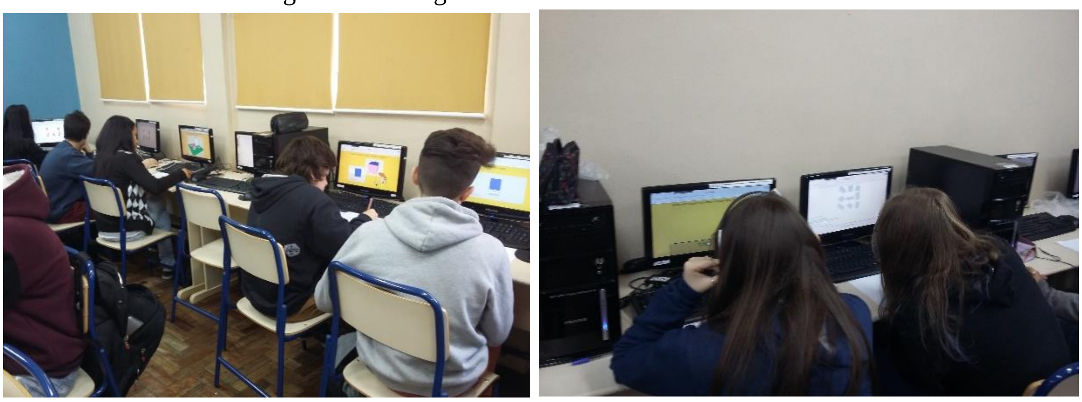
Considera-se que os componentes e indicadores propostos pela FAI estão contemplados na implementação da proposta de estudos, tendo maior destaque para Interação e Autonomia, entendidas como idoneidades altas. Na figura 195 apresentam-se registros de momentos de interações entre os sujeitos da pesquisa.

Figura 195– Registros de interação entre a pesquisadora e os estudantes

Fonte: a pesquisa.

Ressalta-se o componente Autonomia como um ponto forte, pois como pode ser observado no registro apresentado na figura 196, os estudantes estão no mesmo material de estudo, porém em atividades distintas, ou seja, cada um está realizando as atividades de acordo com o seu ritmo de aprendizagem.

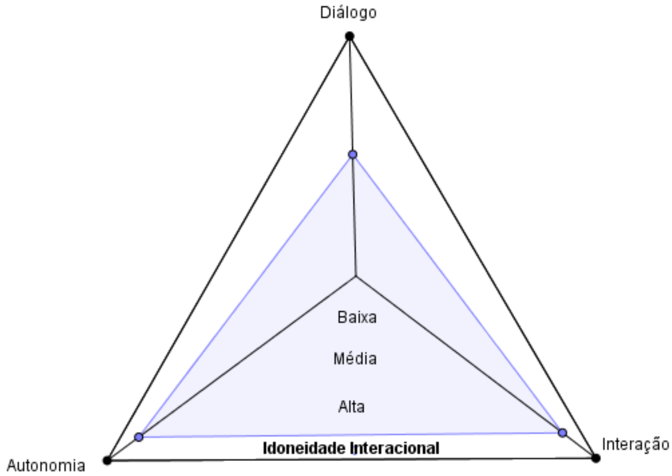
Figura 196 – Registro dos estudantes em seus estudos



Fonte: a pesquisa

No que se refere ao componente Diálogo e Comunicação considerou-se a idoneidade média, pois não são todos os materiais de estudos que preveem atividade que estimule uma discussão entre os estudantes, o que se identificou como uma fragilidade da proposta, com indicativo de futuras intervenções no sentido de aprimorá-la. Buscando sintetizar e ilustrar a análise interacional produzida, criou-se uma representação triangular (figura 197), onde os vértices são os componentes e o polígono inscrito refere-se ao grau de idoneidade alcançado no material de estudo.

Figura 197– Representação do grau de Idoneidade Interacional alcançado



Fonte: a pesquisa

8.8 PROPOSTA DE ESTUDOS DE RECUPERAÇÃO DE GEOMETRIA: UMA ANÁLISE EMOCIONAL

No que se refere as questões atitudinais dos estudantes frente ao trabalho desenvolvido, lança-se um olhar para a dimensão emocional e propõem-se uma análise destes aspectos tomando como referência os componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Emocional – FAEMO, sendo eles: motivação/interesse, envolvimento e crenças/atitudes, buscou-se as evidências desta análise nos registros em áudio e vídeo, mas principalmente nas observações da pesquisadora durante os encontros. No que segue apresenta-se na Figura 198 a análise produzida.

Figura 198– Análise emocional da Proposta de Estudos de Recuperação

Componentes	Indicadores	Análise	Grau de Idoneidade
Motivação/Interesse	a) incentiva-se o trabalho cooperativo. b) propõem-se situações adaptadas ao nível educativo dos alunos, levando em consideração seus interesses. c) as situações apresentadas estimularam o interesse dos estudantes.	- O trabalho cooperativo não está explicitado em todos os materiais, mas como já destacado as interações ocorreram ao longo do estudo. -Considera-se que as atividades propostas despertaram o interesse dos estudantes, principalmente, as animações, atividades online e objetos de aprendizagem.	**Média**
Envolvimento	a) apresentam-se configurações didáticas que proporcionam o envolvimento dos estudantes.	- Foi possível perceber o envolvimento dos estudantes no processo de estudo. Foram se adaptando rapidamente à	**Alta**

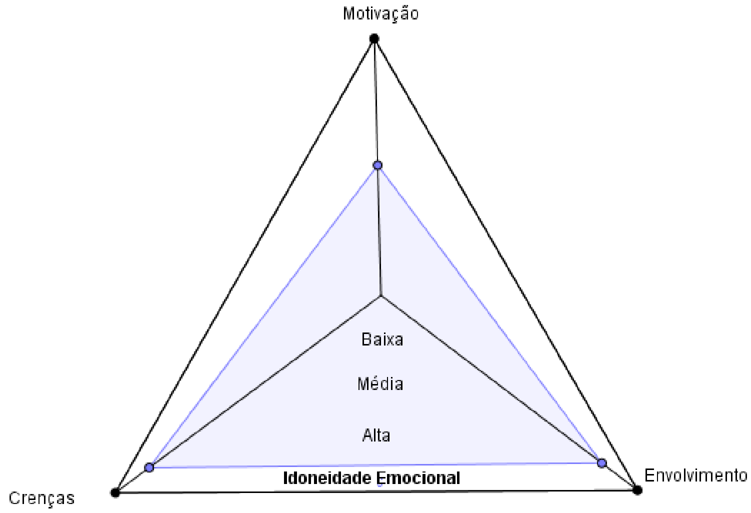
	b) estimulam-se as relações entre professor-aluno, aluno-aluno, professor-professor para qualificar o processo de ensino e aprendizagem.	proposta de estudo, lendo com atenção o material e realizando as atividades.	
Crenças/Atitudes	a) promove-se um trabalho que supere a visão da Matemática como algo difícil e acessível a poucos.	- Nos materiais produzidos buscou-se trabalhar com os conceitos, propriedades e procedimentos de forma acessível aos estudantes e, sempre que possível, relacionado com situações de contextualização e problematização do mundo que os cerca.	**Alta**

Fonte: a pesquisa

A partir da análise produzida e apresentada no quadro da figura 198 considera-se que os componentes e indicadores da FAEMO se fizeram presente nos materiais de estudo tendo uma alta idoneidade no que se refere ao envolvimento e crenças/atitudes, evidenciados por meio da efetiva participação dos estudantes nas atividades, as quais realizaram com dedicação e atenção, demonstrando interesse na temática, assim como em solucionar as situações propostas. Cabe ressaltar, também, a facilidade dos estudantes no trabalho com as tecnologias digitais, demonstrando assim um maior envolvimento nas atividades online e objetos de aprendizagem.

No que se refere ao componente Motivação/Interesse considerou-se como uma média idoneidade, pelo indicador sobre o incentivo do trabalho cooperativo, que não está previsto explicitamente em todos os materiais, já identificados nas análises anteriores como uma fragilidade. Por outro lado, a motivação dos participantes relacionada ao interesse em aprender e se preparar para provas de seleção foi elemento que colaborou fortemente para o desenvolvimento do trabalho. Buscando sintetizar e ilustrar a análise interacional produzida, criou-se uma representação triangular (figura 199), onde os vértices são os componentes e o polígono inscrito refere-se ao grau de idoneidade alcançado no material de estudo.

Figura 199– Representação do grau de Idoneidade Emocional alcançado



Fonte: a pesquisa

Considera-se que as opiniões dos estudantes sobre o trabalho desenvolvido estão contempladas dentro desta dimensão emocional, pois suas respostas estão baseadas em suas motivações, envolvimento e comprometimento com a proposta de estudos, assim apresentam-se, a seguir, as respostas dos estudantes frente ao Questionário 2 (Apêndice E) aplicado no último encontro.

Quando solicitados a se manifestar sobre o trabalho desenvolvido, todas as respostas foram positivas, ressaltando a importância para suas aprendizagens, conforme pode-se perceber nas respostas dos alunos 05, 06 e 13.

> *" Trabalho de qualidade e de fácil entendimento" aluno05.*
> *"Gostei muito, foi um ótimo trabalho para estimular o conhecimento de matérias que aprendemos, mas esquecemos e novas também"* aluno06.
> *"Achei muito útil. Esperava que tivesse mais tempo, mas a experiência foi boa" aluno13.*

Questionou-se os estudantes, também, sobre o que mais tinham gostado nos materiais de estudo, sendo os mais destacados jogos, atividades *online* e no Geogebra. Ressalta-se as respostas dos aluno 07 e 13:

> *"gostei bastante do geogebra, pq eu não conhecia e achei tri construir as coisas"aluno07.*
> *"gostei de tudo. Acho que comecei a gostar mais de matemática estudando assim"aluno13.*

Buscou-se indagar os estudantes sobre as dificuldades encontradas por eles no trabalho desenvolvido, sendo que, grande parte respondeu não ter tido dificuldades em nada. Destaca-se as respostas dos aluno 03 e 09:

> *"tive dificuldades em alguns exercícios, mas daí eu lia de novo a matéria ou pedia ajuda para a sora e daí conseguia"aluno03.*
> *"Tive dúvidas em quase todas as atividades, mas consegui tirá-las com ajuda da professora ou das gurias" aluno09.*

O questionário é finalizado com a solicitação de que os estudantes indicassem sugestões para melhorar o trabalho. Novamente a maioria voltou a elogiar os materiais, dizendo que não precisava mudar nada, porém, destacam-se as sugestões dos alunos 04, 05 e 08:

> *"Apenas ao introduzir uma nova matéria a explicação inicial ser feita por vídeo ao invés de conteúdo escrito" aluno04.*
> *"Levar as folhinhas dos cálculos e resumos para casa no final da aula, para poder ver depois" aluno05.*
> *"Ter as respostas de todos os exercícios para verificação se acertamos" aluno08.*

A partir das respostas dos estudantes, é possível perceber que a proposta de estudos se constituiu em algo positivo. Os mesmos indicaram a importância em sua aprendizagem, assim como uma superação da visão negativa em relação a Matemática, aspectos estes que contribuíram para considerar-se a idoneidade alta para os indicadores crenças e envolvimento.

Quanto às sugestões dos estudantes todas foram consideradas pertinentes e, se possível, serão incorporadas futuramente no material. Especificamente quanto a fala do aluno05, ressalta-se que no último encontro foi entregue aos estudantes cópias de todas as suas produções realizadas durante os encontros, assim como, foi oportunizado que os mesmos copiassem os materiais, para estudos posteriores. Estas ações foram pensadas, pois conforme já destacado, grande parte destes estudantes tem interesse em realizar provas de seleção para o Ensino Médio.

No que segue discute-se a análise produzida em relação a dimensão ecológica.

8.9 PROPOSTA DE ESTUDOS DE RECUPERAÇÃO DE GEOMETRIA: UMA ANÁLISE ECOLÓGICA

Buscando refletir e analisar sobre o grau de adequação do material de estudos frente aos significados institucionais de referência, ou seja, o que está posto nos documentos oficiais e também o que é preconizado na escola, propõem-se esta análise considerando os componentes e indicadores da Ferramenta de Análise Ecológica – FAECO, sendo eles: currículo, escola e sociedade. No que segue, apresenta-se, na Figura 200, a análise produzida.

Figura 200– Análise ecológica da Proposta de Estudos de Recuperação

Componentes	**Indicadores**	**Análise**	**Grau de Idoneidade**
Escola	a) espaço de desenvolvimento e aprendizagem envolvendo experiências contempladas nesse processo (aspectos culturais, cognitivos, afetivos, sociais e históricos); b) constitui-se em espaço que possibilita o uso de metodologias,	- Considera-se que a proposta contempla a utilização de metodologias e recursos diversos, principalmente no que se refere ao uso das tecnologias digitais, por meio das animações, atividades *online* e objetos de aprendizagem, assim	**Média**

	recursos diversificados e tecnologia; c) ambiente que incentiva a formação de valores e pensamento crítico.	como aplicações no *software* Geogebra. - Quanto à formação de valores e pensamento crítico, entende-se que as atividades propostas não tiveram esta característica.	
Currículo	a) o ensino está adaptado as orientações da escola, aos documentos oficiais. b) apresentam-se situações de problematização e contextualização, realizando conexões com outros conteúdos. c) valoriza-se a pluralidade cultural dos alunos. d) os conteúdos e a avaliação atendem as diretrizes curriculares. e) o ensino é coerente ao nível educativo a que se dirige.	- O material de estudo foi planejado levado em consideração as indicações dos documentos oficiais, assim como os objetivos estabelecidos pela escola para a temática. -Buscou-se trabalhar no material com situações de contextualização, buscando estabelecer conexões e relações dentro do próprio conteúdo. Não se identificou situações que possibilitassem conexão com outros conteúdos. - No que se refere à avaliação, a mesma ocorreu durante todo o processo de estudo. A aprendizagem ou os conflitos semióticos foram sendo evidenciados nas atividades resolvidas pelos estudantes, conforme já discutido na análise cognitiva.	**Alta**
Sociedade	a) percebe-se a valorização de aspectos da vida dos estudantes no ambiente escolar. b) percebe-se a presença da comunidade no processo de escolarização promovida pela escola.	Não se aplica.	

Fonte: a pesquisa.

Conforme já destacado, os materiais de estudos foram planejados considerando os objetivos estabelecidos pelos documentos oficiais, assim o componente currículo se faz fortemente presente e alinhado com o que está estabelecido e o que é proposto no material. Porém, cabe destacar que além destes objetivos já apontados pelos documentos, foram traçados objetivos próprios, apresentados nas análises epistêmicas como os significados institucionais pretendidos, dando mais ênfase a objetivos que encaminhassem para a argumentação e para o estabelecimento de relações, já que os postos nos documentos se referiam mais a aspectos procedimentais, atendendo fortemente ao componente das regras.

No que se refere ao componente Escola considerou-se com uma idoneidade média, pelo fato da proposta de trabalho desenvolvida no material não contemplar aspectos para a formação de valores e pensamento crítico, o que se identificou como uma fragilidade no material que deve ser repensada, visando um aprimoramento do mesmo.

Entende-se que o componente Sociedade não se aplica à proposta aqui discutida, uma vez que estamos analisando o material produzido e a implementação deste com estudantes, ou seja, se consiste em uma ação externa que se inseriu na escola. Mas a partir da convivência semanal no ambiente escolar é possível perceber que a escola estabelece uma relação bem próxima da comunidade escolar e que a mesma busca, por meio de suas ações a valorização dos estudantes e professores, tendo como filosofia de trabalho que:

> - A educação tem como principal tema o auxílio na compreensão do mundo e do outro, a fim de que cada um passe a compreender-se melhor, projetando para si e para os seus pares, a arte, a cultura e o esporte.
> - Temos como princípio sermos uma escola democrática, de qualidade, que busca e discute o mundo moderno. Uma escola que oriente seus alunos na busca de uma sociedade mais justa, com honestidade e equilíbrio.
> - Uma instituição de ensino que desenvolve e procura o resgate dos valores sociais, fundamentados na ética, uma escola inovadora e criativa, com um ambiente prazeroso, alegre e fraterno, de produção de conhecimentos.
> - A escola tem como missão promover o desenvolvimento do educando, valorizando e respeitando suas individualidades, suas diferenças, a fim de que os alunos sejam capazes de utilizar diferentes linguagens: verbal, matemática, gráfica, plástica e corporal.
> - Expressando suas ideias e interpretando as informações culturais, os alunos posicionar-se-ão de maneira crítica, desenvolvendo o raciocínio lógico, agindo de maneira responsável e construtiva no desenvolvimento básico necessário para o exercício da cidadania.
> - A diretriz que norteia a escola é a integração entre escola, família e comunidade.

Assim, considera-se que a dimensão ecológica se fez presente por meio de seus componentes e indicadores de maneira satisfatória, apresentando uma média idoneidade na proposta de estudos tendo em vista que a mesma foi construída levando em consideração o que está estabelecido pelos currículos e nos documentos oficiais, porém não contempla um conjunto de situações que estimulem a formação de valores e pensamento crítico.

8.10 SÍNTESE DAS ANÁLISES PRODUZIDAS

Considera-se que as análises produzidas a partir das seis dimensões da Idoneidade Didática, seus componentes e indicadores, permitem um olhar tanto para o material produzido, para as situações de aprendizagem, adequadas ou não, que o mesmo possibilitou, como também, as demais relações estabelecidas em um processo de ensino e aprendizagem, aqui representadas pelas dimensões da Idoneidade Didática, no âmbito do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática. Assim, ressalta-se que estas análises evidenciaram, corroborando trabalhos como os de Andrade (2014), Godino (2011), Godino; Contreras; Font (2006), Godino; Font; Wilhelmi (2008), entre outros, o potencial dos pressupostos estabelecidos pelo EOS como ferramenta para um olhar ao processo de ensino e aprendizagem como um todo, desde o seu planejamento, passando pela implementação junto aos estudantes chegando a sua avaliação.

Assim, visando apresentar uma síntese geral dos graus das idoneidades alcançadas nas dimensões epistêmica, mediacional e cognitiva, dimensões estas que foram tomadas para análise de cada um dos quinze tópicos do material de estudos de recuperação, organizou- se o quadro da figura 201, o qual destaca o grau de idoneidade estabelecido, nestas dimensões, para os seis tópicos cuja análise foi apresentada e discutida nesta tese.

Figura 201 - Graus parciais das Idoneidades epistêmica, mediacional e cognitiva

Tópicos	**Epistêmica**	**Mediacional**	**Cognitiva**
Figuras Geométricas	Alta	Alta	Média
Ângulos	Alta	Alta	Média
Triângulos	Alta	Alta	Alta
Quadriláteros	Alta	Alta	Média
Teorema de Tales	Média	Alta	Média
Teorema de Pitágoras	Alta	Média	Média
Grau Final	**Alta**	**Alta**	**Média**

Fonte: a pesquisa.

Conforme pode ser observado no quadro da figura 201, atribuiu-se um grau final para as dimensões epistêmica, mediacional e cognitiva baseado nos graus parciais obtidos nas análises produzidas, o que põe em destaque uma tendência que foi ganhando força ao longo das análises. Apesar de, potencialmente, o material ter sido considerado com alta idoneidade não só nas dimensões epistêmica e mediacional, mas também nas dimensões emocional e interacional no que se refere as idoneidades cognitiva e ecológica, chegou-se a um grau médio de idoneidade.

Entende-se necessário discutir essa diferença entre os significados institucionais pretendidos e expressos nos materiais produzidos articulados aos caminhos metodológicos estabelecidos e recursos utilizados (idoneidade mediacional), e os significados produzidos pelos estudantes, traduzidos por seus desempenhos na realização das atividades propostas, suas manifestações expressando entendimentos, aplicações de regras e estabelecimento de relações e argumentações. De fato, no que diz respeito ao estabelecimento de relações e a apresentação de argumentação justificada, sempre que solicitados os estudantes foram pouco produtivos.

Foi possível perceber, sistematicamente, uma diferença, entre o pretendido e o manifestado. Essa diferença esteve, quase em sua totalidade, relacionada aos componentes relações e argumentações. Visão dos objetos geométricos em estudo, apropriação de definições, entendimento de propriedades e aplicação de procedimentos se constituíram em aspectos de domínio dos estudantes, nos quais manifestaram significativo entendimento, quando relacionado ao que estava estabelecido como pretendido, diferentemente do que ocorreu no que se refere a relações e argumentações.

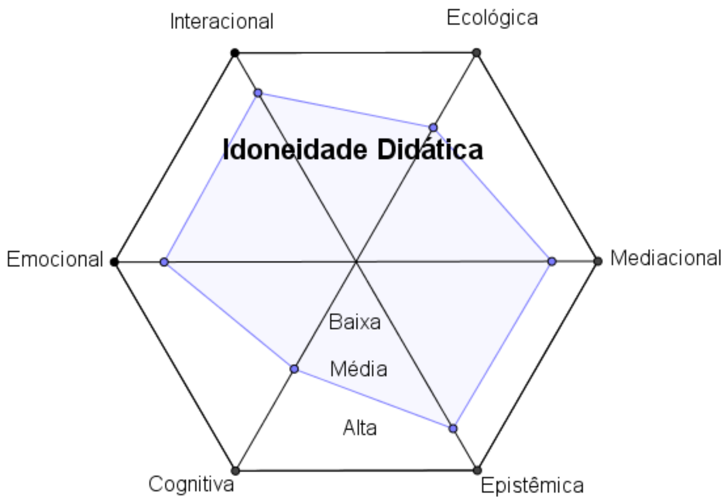
Entende-se que esse resultado, em parte, se justifica pelo fato de que a Matemática escolar está fortemente embasada em definições, regras e procedimentos, encaminhados nem sempre a partir de situações que problematizem o objeto de estudo e considerando uma diversidade de linguagens (natural, algébrica, figural...). Assim, embora potencialmente o material apresentasse situações as quais solicitavam aos estudantes tais manifestações nem sempre as mesmas se concretizavam, possivelmente porque não é habitual ao estudante esse comportamento e o espaço do trabalho com os estudos de recuperação não tiveram força ou tempo suficiente para alterá-lo. Porém, se considera que houve um avanço nesse aspecto, pois embora nem sempre os estudantes tenham produzido relações e apresentado argumentações e justificativas, a disposição e as tentativas de fazê-lo estiveram muito presentes.

Por outro lado, embora o material tenha sido considerado com alta idoneidade epistêmica e interacional (no âmbito de uma proposta de estudos de recuperação), entende-se que viabilizar situações onde o estudante seja chamado a não só realizar tarefas, mas ter a oportunidade de discuti-las com seus pares e com o professor, defendendo e justificando seus pontos de vista, se constitui em campo fértil para que a idoneidade cognitiva seja ampliada.

Ainda, destaca-se que apesar do material referir-se especificamente a Geometria, que se constitui em um tipo de pensamento que se difere, tanto do aritmético como do algébrico e estatístico probabilístico, a análise não teve um olhar particular para esse aspecto, o que se considera pertinente e possível de ser realizado.

Por fim, apresenta-se na figura 202, o comportamento das distintas dimensões na representação hexagonal da Idoneidade Didática, buscando, assim, uma síntese da idoneidade alcançada com o desenvolvimento e implementação da proposta de estudos de recuperação para a Geometria dos anos finais do Ensino Fundamental.

Figura 202– Idoneidade Didática alcançada na proposta de estudos de recuperação



Fonte: a pesquisa.

Para além da análise relacionada aos componentes epistêmico, mediacional e cognitivo, a síntese apresentada pelo diagrama, põe em destaque, o que foi produzido ao longo das análises com relação a todos os componentes da Idoneidade Didática

A análise, ora a partir de um olhar específico, a partir do objeto em estudo, ora a partir de uma visão global do desenvolvimento da proposta de estudo, permitiu sínteses importantes e reveladoras sobre o material produzido, o trabalho dos estudantes e mesmo da pesquisadora, o que evidencia a importância da utilização das ferramentas de análises propostas pelo EOS a fim de identificar e avaliar a proposta de estudo como um todo desde sua concepção, planejamento, desenvolvimento e implementação, possibilitando estabelecer critérios para seu aprimoramento. Neste sentido, tem-se a visão que as análises não se esgotaram nesta que está aqui apresentada, e que o volume de dados obtidos ainda pode ser analisado sob outras perspectivas.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A realização da presente investigação possibilitou investigar e refletir em torno do desenvolvimento de propostas de estudos de recuperação, mais especificamente, no que se refere a Geometria dos Anos Finais do Ensino Fundamental, envolvendo questões epistemológicas, cognitivas, didáticas, metodológicas, interacionais e mediacionais. Considerando um olhar tanto para o conhecimento matemático como para o processo de ensino e aprendizagem, o Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) assumiu o embasamento da investigação, tendo em vista que seus pressupostos foram considerados tanto para o planejamento e constituição da proposta de estudo de recuperação, como suas ferramentas de análise para a avaliação da mesma. Os aportes do EOS foram tomados, ainda, como embasamento metodológico da investigação.

Considera-se e defende-se aqui que a recuperação de aprendizagens de um estudante ocorre quando é oportunizado ao mesmo retomar os conhecimentos até então não compreendidos, buscando trabalhar de uma forma diferenciada da já desenvolvida em sala de aula. Ressalta-se a importância do desenvolvimento de propostas de estudos de recuperação como a desta investigação, pois está se oferecendo ao estudante um estudo complementar e não substitutivo como uma prova de recuperação, cujo o objetivo é recuperar uma nota, que na maioria das vezes não se tem uma preparação diferenciada para a mesma.

Neste sentido, a proposta de estudos de recuperação desenvolvida foi estruturada buscando oportunizar aos estudantes uma retomada de noções, conceitos, definições e procedimentos articulados por meio de recursos das tecnologias digitais, como também, atividades concretas de construções, os quais possibilitassem, também, estabelecimento de relações e produção de argumentação. Entende-se que esta articulação de diferentes recursos e atividades oportunizam aos estudantes um aprofundamento em seus conhecimentos, assim como a superação de dificuldades, se constituindo assim um caminho possível para a recuperação.

A partir das análises realizadas foi possível perceber que a proposta de estudo de recuperação desenvolvida sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico atende ao que se defende e o que está posto na legislação para a recuperação. As ferramentas de análise propostas pelo EOS se constituíram em elementos essenciais para se obter tanto uma visão detalhada da proposta como uma visão mais geral, possibilitando identificar os pontos fortes e frágeis dos materiais. Ressalta-se os componentes **situações-problemas, linguagens, recursos e envolvimento** como pontos fortes e alcançados satisfatoriamente em todos os tópicos da proposta, e os componentes **argumentos e análise/síntese** foram os que os estudantes apresentaram maiores dificuldades.

No que se refere especificamente ao trabalho com a Geometria, considera-se que os tópicos estabelecidos para os materiais de estudos se mostraram pertinentes para uma retomada dos conteúdos dos Anos Finais do Ensino Fundamental. Para o desenvolvimento dos mesmos buscou-se explorar as situações problemas propostas eas atividades contextualizadas visando, sempre que possível, estabelecer relações entre objetos do mundo real e, neste sentido, a utilização dos recursos digitais foram um diferencial, pois com eles foi possível um trabalho com diferentes representações e uma diversidade de atividades a partir de vídeos, objetos de aprendizagens, exercícios e utilização de *softwares*. Mas cabe ressaltar que, pela natureza dos objetos matemáticos trabalhados, e para o desenvolvimento do pensamento geométrico como um todo, também foi contemplado, nos materiais, construções com régua e compasso, em papel e lápis, o que se considera essencial no Ensino Fundamental.

Neste contexto, entende-se que a investigação desenvolvida alcançou seu objetivo de investigar o desenvolvimento e implementação de uma proposta de recuperação para conceitos geométricos dos anos finais do Ensino Fundamental, sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática, destacando este aporte teórico como uma possibilidade de fundamentar tanto o planejamento de um processo de ensino, no que se refere aos conhecimentos matemáticos envolvidos, as estratégias e recursos utilizados, como para a análise das aprendizagens e interações produzidas a partir do mesmo.

Ressalta-se, ainda, que apesar da proposta de estudos de recuperação se voltar para a Geometria dos Anos Finais do Ensino Fundamental, os caminhos metodológicos e os pressupostos teóricos tomados para sua constituição e análise, podem ser adaptados em qualquer conteúdo. O que se defende aqui é que a recuperação seja repensada e acima de tudo planejada para uma retomada de forma diferenciada, não se limitando a uma “nota ou outra prova”. Porém, entende-se que para que isso ocorra deve ser oportunizado aos professores tempo de estudo e preparação, o que leva o desenvolvimento de estudos de recuperação se transformar em compromisso que deve ser assumido não só pelo professor, mas sim, por políticas públicas que oportunizem que as mesmas sejam possíveis, colocando em prática o que está posto na LDB de 1996 como um direito do estudantes. realmente acontecer. Vislumbra-se como um caminho possível, a Educação em turno integral onde o estudante poderá participar de períodos de estudos de recuperação no turno inverso ao que assiste aula, cabendo então ao professor ou um grupo de professores o planejamento das estratégias a serem desenvolvidas nestes encontros.

A investigação realizada e os resultados aqui apresentados, analisados e discutidos abrem caminhos e reflexões para outras investigações e olhares. A temática sobre estudos de recuperação é ainda pouco pesquisada e discutida, principalmente no que se refere a Matemática, o que é preocupante, pois os índices da Educação Básica apontam para grandes dificuldades na disciplina. Assim investigar em torno de processos de aprendizagem que auxiliem os estudantes em Matemática é urgente e necessário. Entende-se, ainda, que o próprio material produzido pode ser analisado sob outras perspectivas, no âmbito do EOS e mesmo fora dele. Outra questão refere-se ao ensino da Geometria, que se discute estar esquecida nesta mesma Educação Básica. Nesse sentido, o material aqui produzido pode servir, também, para auxiliar o professor em suas aulas, como para ser disponibilizado aos estudantes como estudo complementar.

Por fim, pretende-se encontrar uma forma de divulgar esta proposta de estudo, disponibilizando aos professores os materiais já estruturados, a partir de contato direto com a comunidade escolar, visando aproximar as pesquisas desenvolvidas na Universidade com esta mesma comunidade. Busca, assim, um processo de construção conjunta, tanto para a promoção de estudos de recuperação, no âmbito do que a própria lei estabelece, e é defendido nesta tese, como também, para o desenvolvimento do ensino e aprendizagem da Matemática, a partir de propostas produzidas em conjunto com a comunidade escolar.

REFERÊNCIAS

ALBUQUERQUE, L. **O uso do programa Geogebra no Ensino de Geometria Plana de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental das Escolas Públicas Estaduais do Paraná.** Universidade Federal do Paraná. Curitiba, 2008. Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/pde/arquivos/1735-6.pdf. Acesso em: 15 jan, 2015.

ANDRADE, J. A. A. **O ensino de geometria: uma análise das atuais tendências, tomando como referência as publicações nos Anais dos ENEM's.** (Dissertação de Mestrado) - Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação. Universidade de São Francisco, Itatiba, 2004.

ANDRADE, L. S. **Currículos de Matemática no Ensino Médio: um olhar sob s perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e a Instrução Matemática.** Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Luterana do Brasil, Canoas. 2014.

ANDRADE, J. A.; NACARATO, A. M. Tendências Didático-Pedagógicas no Ensino De Geometria: um olhar sobre os trabalhos apresentados nos ENEMs. **Educação Matemática em Revista.** Ano 11, n. 17, p. 61-70, dez. 2004.

ARAÚJO, F. A. A educação e o fracasso escolar: o eterno retorno do problema. **Educação em Foco.** Ano 11, n. 12, p. 133 – 143, dez. 2008. Disponível em http://www.uemg.br/openjournal/index.php/educacaoemfoco/article/viewFile/72/102. Acesso em: 11 ago, 2016.

ARAÚJO, V. R. N.; CARDOSO, E. F. M. Interferências pedagógicas na superação de dificuldades da aprendizagem matemática. **UNIrevista**, Vol. 1, nº 2,p. 1 – 14, abr, 2006. Disponível em: https://proftina.pbworks.com/f/interferencias+pedag%C3%B3gicas+na+supera%C3%A7%C3%A3o+de+dificuldades+de+aprendizagem+matematica.pdf. Acesso em: 20 mar, 2014.

ASSIS, A.; GODINO, J. D.; FRADE, C. As dimensões normativas e metanormativa em um contexto de aulas exploratório-investigativas. **Revista Latinoamerica de Matemática Educativa- RELIME**, v.15, nº2, p.171-198, 2012. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/Assis-Godino-Frade%20RELIME2012.pdf. Acesso em 22 jun, 2016.

BACHA, M. L.; MALUF, M. C.C. **Promoção e Recuperação**. Brasília: Departamento de Documentação e Divulgação, 1974.

BASTIAN, Irma Verri. **O teorema de Pitágoras**. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. PUC/SP, 2000.

BENTO, H. A. **O Desenvolvimento do Pensamento Geométrico com a Construção de Figuras Geométricas Planas utilizando o *Software*: geogebra.** (Dissertação de Mestrado) - Programa de Mestrado de Ensino de Ciências e Matemática. Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2010.

BOAS, J. V; SANTANA, T. S. **O Ensino de quadriláteros e a formação de conceitos: uma proposta de sequência de tarefas didáticas.** In: anais do XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2013, Curitiba – PR. XI Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2013. Disponível em: http://sbem.web1471.kinghost.net/anais/XIENEM/pdf/1415_1136_ID.pdf. Acesso em: 16 jan, 2016.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Investigação qualitativa em educação.** Porto Editora, 1994.

BORTOLOSSI, H. J; REZENDE, W. M; PESCO, D. U. **Instituto GeoGebra no Rio de Janeiro. I**nstituto de Matemática e Estatística da Universidade Federal Fluminense. Disponível em: http://www.geogebra.im-uff.mat.br/. Acesso em 05 nov, 2016.

BRASIL, Senado Federal. **Lei nº 4.024** de 20 de dezembro de 1961. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília, 1961.

______. **Lei nº 5.692**, de 11 de agosto de 1971. Lei de Diretrizes e Bases para o Ensino de 1º e 2º graus. Brasília, 1971.

_______. **Lei nº 9.394**, de 20 de dezembro de 1996. Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional. Brasília, 1996.

_______. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional**. Lei nº 9.394, de 20 de dezembro de 1996. 11ª. ed. – Brasília : Câmara dos Deputados, Edições Câmara, 2014. – (Série legislação; n. 159). Disponível em: http://www2.camara.leg.br/documentos-e-pesquisa/edicoes/paginas-individuais-dos-livros/lei-de-diretrizes-e-bases-da-educacao-nacional. Acessado em 25/04/2016.

BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros Curriculares Nacionais: matemática, terceiro e quarto ciclos.** Brasília: MEC/SEF, 1998. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/seb/arquivos/pdf/matematica.pdf. Acesso em: 11 fev, 2014.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Diretrizes Curriculares Nacionais Gerais da Educação Básica**. – Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2013. Disponível em: http://portal.mec.gov.br/index.php?option=com_docman&view=download&alias=13448-diretrizes-curiculares-nacionais-2013-pdf&Itemid=30192. Acesso em: 20 out, 2016.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Base Nacional Comum Curricular**. Proposta Preliminar. Segunda versão. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2016. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf. Acesso em: 21 out, 2016.

BRASIL, Ministério da Educação. Secretária de Educação Básica. Diretoria de Currículos e Educação Integral. **Base Nacional Comum Curricular**. Terceira versão. Brasília: MEC, SEB, DICEI, 2017. Disponível em: http://basenacionalcomum.mec.gov.br/documentos/bncc-2versao.revista.pdf. Acesso em: 23 abr, 2017.

BREDA, A; FONT, V.; LIMA, V. M. R. A noção de idoneidade didática e seu uso na formação de professores de matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v.8, nº 2, p. 1-41, 2015.

BROUSSEAU, G. **Introdução ao estudo da teoria das situações didáticas: conteúdos e métodos de ensino**. São Paulo: Ática. 2008.

BURIASCO, R. L. C. de. **Avaliação em Matemática**: um estudo das respostas de alunos e professores. 1999. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Estadual Paulista, Marília, 1999.

CALDAS, R. F. L. **Recuperação escolar: discurso oficial e cotidiano educacional: - um estudo a partir da Psicologia Escolar.** Tese (Doutorado em Psicologia) - Programa de Pós-Graduação em Psicologia. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2010. Disponível em: www.teses.usp.br/teses/disponiveis/47/47131/tde-15042010-150817/.../caldas.pdf. Acesso em: 11 set, 2016.

COLL, C. **Psicologia e Currículo**. São Paulo: Ática, 1997

CRESCENTI, E. P. **Os professores de Matemática e a Geometria: opiniões sobre a área e seu ensino.** Tese (Doutorado em Educação) – Programa de Pós-Graduação em Educação.Universidade Federal de São Carlos. São Carlos, 2005. Disponível em: https://repositorio.ufscar.br/bitstream/handle/ufscar/2380/TeseEPC.pdf?sequence=1. Acesso em: 29 out, 2016.

D'AMORE, B.; FONT, V.; GODINO, J. D. La dimensión metadidática en los processos de enseñanza y aprendizaje de la matemática. **Paradigma**, Maracay,Venezuela, v. XXVIII, n. 2, p. 49-77. 2007. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/dimension_metadidactica_11nov07.pdf. Acesso em 03 mar, 2015.

DUTRA, G. **A recuperação paralela no ensino de física: uma proposta em ambiente virtual. (**Dissertação de Mestrado) - Programa de Pósgraduação em Ensino de Ciências e Matemática, Pontifícia Universidade Católica de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2008.

DUTRA, G.; MARTINS, M. A recuperação paralela no ensino de física: o que pensa o professor? **Ensaio (Fundação Cesgranrio Impresso)**. v. 20, p. 135-164, 2012. Disponível em: http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0104. Acesso em: 10 set, 2016.

EDUCAPÉDIA. Prefeitura do Rio do Janeiro. Disponível em: http://www.educopedia.com.br/. Acesso em: 12 mar, 2015.

FAINGUELERNT, E. K. **Educação Matemática: Representação e Construção em Geometria**. Porto Alegre: Artmed, 1999.

FILATRO, A. **Design Instrucional na prática.** São Paulo: Pearson Education do Brasil, 2009.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M,A. Uma reflexão sobre o uso de materiais concretos e jogos no Ensino da Matemática. Boletim da SBEM. SBM: São Paulo, ano 4, n. 7, 1990.

FONT, V.; PLANAS, N.; GODINO, J. D. Modelo para el análisis didáctico en educación matemática. **Infancia y Aprendizaje**, v.33, n.1, 2010. p. 89-105. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/modelo_anadida_25junio09.pdf. Acesso em: 17 fev, 2016.

GIL, A. C. **Métodos e Técnicas de Pesquisa Social.** 6 ed. São Paulo: Atlas 2010.

GODINO, J. D. Un enfoque ontológico y semiótico de la cognición matemática. **Recherches em Didactiques des Mathematiques**,Grenoble, França, v. 22, n. 2/3, p.237-284, 2002.Disponível em: < http://www.ugr.es/local/jgodino>. Acesso em: 13 nov, 2014.

______. Indicadores de la idoneidade didáctica de processos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. In: XIII CIAEM – IACME. **Anais.** Recife, 2011. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/jdgodino_indicadores_idoneidad.pdf. Acesso em: 10 jun, 2014.

______. Marcos teóricos sobre el conocimiento y el aprendizaje matemático. **Departamento de Didáctica de la Matemática.** Universidad de Granada. 2010. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/fundamentos_teoricos/marcos_teoricos_ddm.pdf. Acesso em: 10 jun, 2014.

______. Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. In A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), **Investigación en Educación Matemática XVI**. p. 49 - 68. Jaén: SEIEM, 2012. Diponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/origen_EOS_Baeza_2012.pdf. Acesso em: 11 jun, 2014

______. Indicadores de la idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. **Cuadernos de Investigación y Formación en Educación Matemática**. nº11, p. 111-132, 2013. Disponível em http://revistas.ucr.ac.cr/index.php/cifem/article/viewFile/14720/13965. Acesso em: 19 mar, 2015.

______. Componentes e indicadores de idoneidad de programas de formación de profesores en didáctica de las matemáticas. **REVEMAT: Revista Eletrônica de Educação Matemática**. Florianópolis, v. 08, n.1, p. 46-74, 2013.

GODINO, J. D.; BATANERO, C. Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, Grenoble, França, v. 14, n.3, p.325-355,1994. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/03_SignificadosIP_RDM94.pdf. Acesso em: 12 jan, 2014.

GODINO, J. D.; RUIZ, F. Geometría.In: **Matemática para maestros**. Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidade de Granada. Granada, p. 181 – 285, 2004.

GODINO, J. D., FONT, V.; WILHELMI, M. R.; CASTRO, C. Aproximación a la dimensión normativa en Didáctica de la Matemática desde un enfoque ontosemiótico. **Enseñanza de las Ciencias.** v. 27, nº1, p. 59–76, 2009.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; FONT, V. The onto-semiotic approach to research in Mathematics Education. **The International Journal on Mathematics Education** (ZDM), v.39, n.1-2, 2007. p. 127-135. Disponível em: < http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/ontosemiotic_approach.pdf>. Acesso em: 25 mar, 2015.

GODINO, J. D., BENCOMO, D., FONT, V. Y WILHELMI, M. R. Análisis y valoración de la idoneidad didáctica de procesos de estudio de las matemáticas. **Paradigma**, V.XXVII, nº 2, p. 221-252, 2006. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/idoneidad-didactica.pdf. Acesso em: 26 mar, 2015.

GODINO, Juan Díaz; BATANERO, Carmen; FONT, Vicenç; Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. **Acta Scientiae** - Revista de Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, v. 10, n.2, jul./dez., 2008. p. 07- 37. Disponível em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/62. Acesso em 30 mar, 2014.

GODINO, J. D.; CONTRERAS, A.; FONT, V. Análisis de procesos de instrucción basado en el enfoque ontológico-semiótico de la cognición matemática. **Recherches em Didactiques des Mathematiques**, v. 26, n.1, 2006. p. 39-88. Disponível em:<http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/analisis_procesos_instruccion.pdf>. Acesso em: 15 nov, 2014.

GODINO, J. D.; FONT, V.; WILHELMI, M. R. Análisis didáctico de procesos de estudio matemático basado en el enfoque ontosemiótico. **Publicaciones,** v. 38, 2008. p. 25-49. Disponível em: <http://www.ugr.es/~jgodino/funciones-semioticas/niveles%20analisis%20didactico%204Julio08.pdf>. Acesso em: 14 nov, 2014.

GODINO, J. D; RIVAS, H.; ARTEAGA, P. Inferencia de indicadores de idoneidad didáctica a partir de orientaciones curriculares. **Práxis Educativa**, Ponta Grossa, v. 7, n. 2, jul./dez. p. 331-354. 2012 Disponível em: <http://www.revistas2.uepg.br/index.php/praxiseducativa>. Acesso em: 06 jan, 2015.

GODINO, J. D.; BATANERO, C.; CONTRERAS, A.; ESTEPA, A.; LACASTA, E.; WILHELMI, M. La ingeniería didáctica como investigación basada en el diseño. Versión ampliada en español de la comunicación presentada en el **CERME 8** (Turquía, 2013) con el título, "Didactic engineering as design-based research in mathematics education, 2013. Disponível em: http://www.ugr.es/~jgodino/eos/JDGodino%20et%20al_2013%20Ingenieria%20didactica.pdf . Acesso em: 10 mar, 2017.

GODINO, J. D.; RIVAS, H.; ARTEAGA, P.; LASA, A.; WILHELMI, M. R. Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontológico - semiótico del conocimiento y la instrucción matemáticos. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, 34 (2/3), 167-200, 2014. http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5241_2609_ID.pdf. Acesso em: 22 jan, 2016.

GRANDO, R. C. NACARATO, A. M. GONÇALVES, L. M. G. Compartilhando saberes em geometria: Investigando e aprendendo com nossos alunos. Cad. Cedes, Campinas, vol. 28, n. 74, p. 39-56, jan./abr. 2008. Disponível em: http://www.scielo.br/pdf/ccedes/v28n74/v28n74a04.pdf. Acesso em: 25 jan, 2016.

GROENWALD, C.; MORENO, L. Informática e Recuperação de Conteúdos: uma Experiência em Matemática. **Anais do IV CIEM**. Canoas: ULBRA, 2007.

INOUE, R. K. M. **O processo de formação do conceito de quadriláteros, envolvendo alunos de uma 6ª série do ensino fundamental**. Dissertação de mestrado, Universidade do Vale do Itajaí, Itajaí, SC, Brasil. 2004.

JUSTO, J. C. R. **Aprendizagem Matemática no 4º e 5º ano do Ensino Fundamental: formação continuada de professores em serviço.** Projeto de Pesquisa, 2014.

KAIBER, C. T**. Práticas Escolares no Ensino de Ciências e Matemática**. 1ª ed. Canoas: Ulbra, 2015.

KAIBER, C. T.; ANDRADE, L. S. Orientações Curriculares para a Matemática no Ensino Médio: uma análise sob o Enfoque Ontosemiótico. **Acta Scientiae (ULBRA)**, v. 16, p. 61-83, 2014. Diponivel em: http://www.periodicos.ulbra.br/index.php/acta/article/view/1268. Acesso em 17 março, 2015.

LAKATOS, E. M.; MARCONI, M. A. Fundamentos metodologia científica. 4.ed. São Paulo: Atlas, 2001.

LEITE, R. S; OLIVEIRA, G. P. **Formação de Professores e Geogebra: uma proposta para compreender e ensinar o Teorema de Tales.** In: anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2016, São Paulo – SP. XII Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM, 2016. Disponível em: http://www.sbembrasil.org.br/enem2016/anais/pdf/5241_2609_ID.pdf. Acesso em: 18 fev, 2016.

LEMOS, A. V. **Recuperação de Conteúdos: desenvolvendo uma sequência didática sobre equações de 1º grau disponível no sistema integrado de ensino e aprendizagem (SIENA).** Dissertação (Mestrado Acadêmico) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Luterana do Brasil, Canoas, 2013.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria? **Educação Matemática em revista**,*v.3, nº*4, p. 3-13, 1995.

LÜDKE, M.; ANDRÉ, M. E. D. A. **Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas**. São Paulo: EPU, 1986.

MACHADO, J.L.A. **Recuperação Escolar: Qual a efetividade deste procedimento?** São Paulo, 2010. Disponível em: http://www.planetaeducacao.com.br/portal/artigo.asp?artigo=1352. Acesso em 30 ago, 2014.

MICHAELIS. **Dicionário Brasileiro da Língua Portuguesa.** 2015

NASSER, L.; SANT’ANNA, N. F. P. **Geometria segundo a teoria de Van Hiele**. 2. ed. Rio de Janeiro: IM/UFRJ, 2010.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS**. Estandares curriculares y de evaluation para la educacion matematica.** 2000.

OLIVEIRA, M.C.A.; SILVA, M.C.L.; VALENTE, W.R. **O movimento da Matemática Moderna: história de uma revolução curricular.** Juiz de Fora: Ed. UFJF, 2011.

RIO GRANDE DO SUL, Conselho Estadual de Educação. Parecer 740/99. **Orientações para o Sistema Estadual de Ensino**, 1999.

SÃO PAULO, Conselho Estadual de Educação. Parecer 05/98. **Conceito de recuperação**. 1998.

PARO, V. H. Reprovação escolar: renúncia à educação. São Paulo: Xamã, 2001.

PAVANELLO, Regina Maria. **O abandono do ensino de Geometria: uma visão histórica.** Dissertação (Mestrado em Educação) - Programa de Pós-graduação da Universidade Estadual de Campinas – Faculdade de Educação, Campinas, 1989.

______. **O abandono do ensino da Geometria no Brasil:** causas e consequências. Zetetiké. Campinas, SP. Ano I, n° 1, p.7-17, 1993.

PEREIRA, Maria Regina de Oliveira. **A geometria escolar: uma análise dos estudos sobre o abandono de seu ensino.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Programa de Pós-graduação da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2001.

PETRY, V. A. **Tendências no Ensino da Geometria nas Escolas Públicas Municipais de Esteio/RS.** Dissertação (Mestrado Acadêmico) – Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática. Universidade Luterana do Brasil. Canoas, 2013.

PIRES, C.M.C. **Currículos de Matemática: Da Organização Linear à Idéia de Rede**. São Paulo: FTD, 2000.

PROENÇA, M. C.; PIROLA, N. A. A Representação De Figuras Geométricas E Suas Relações Com A Formação Conceitual. **Anais do IX ENEM**. Belo Horizonte, 2007.

RIO GRANDE DO SUL. Secretaria de Estado da Educação. Departamento Pedagógico. **Referencias Curriculares do Estado do Rio Grande do Sul**: Matemática e suas Tecnologia. 1ª ed. Porto Alegre, 2009.

ROSSINI, M. A. P. **Um estudo sobre o uso de régua, compasso e um software de geometria dinâmica no ensino da geometria hiperbólica**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Instituto Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2010.

SALLUM, W.G.; ALLEVATO, N. S. G.; SCHIMIGUEL, J. Um estudo da diversidade metodológica na recuperação de estudos no ensino médio na disciplina de matemática. **Revemat: Revista Eletrônica de Educação Matemática**, Florianópolis. v. 7, nº 2, p. 223 – 245, 2012. Disponível em: https://periodicos.ufsc.br/index.php/revemat/rt/printerFriendly/1981-1322.2012v7n2p223/www.ufsc.br. Acessado em: 11 nov, 2016.

SÃO LEOPOLDO. Prefeitura Municipal. Secretaria Municipal de Educação. **Orientações Curriculares para a Educação Básica da Rede Municipal de Educação de São Leopoldo.** 2012.

SBITNEVA, L.; MORENO M. N.; VALDEZ, R. . From linear algebra to geometries: didactic proposal based on the ontosemiotic approach. **6th International Conference on Education and New Learning Technologies, EDULEARN14 Proceedings**, p. 496-504. 2014. Disponível em: http://enfoqueontosemiotico.ugr.es/documentos/LSbitneva/PubliEDULEARN14geomalg.pdf. Acessado em: 11 out, 2016.

SENN, S. C. H.; BASTOS, C. C. B. C.. Avaliação e Recuperação de Estudos: como superar as contradições entre o Marco Conceitual e Operacional?. **In: 1º Simpósio Nacional de Educação. Anais.** Cascavel, 2008. Disponível em: http://www.unioeste.br/cursos/cascavel/pedagogia/eventos/2008/1/Artigo%2038.pdf. Acesso em: 15 fev, 2016.

SILVA, F.O. Aplicação de ângulos contida em livros didáticos e a prática em sala de aula com alunos de 7ª série. **Nucleus**, v.9, n.1, abr. p. 189 – 194, 2012. Disponível em: https://dialnet.unirioja.es/descarga/articulo/3988351.pdf. Acesso em: 12 jan, 2016.

SILVA, J. **Diferenciação entre quadriláteros : métodos aplicados a partir do software Régua e Compasso**. In: Encontro Paraibano de Educação Matemática - EPEM, 2008, Campina Grande - PB. V Encontro Paraibano de Educação Matemática, 2008.

SILVA, L.; CANDIDO, C. C. **Modelo de aprendizagem de geometria do casal Van Hiele**. 2014.

VASCONCELLOS, C. S. **Avaliação. Concepção dialética-libertadora do processo de avaliação escolar.** 11ª ed. São Paulo: Libertad, Cadernos Pedagógicos do Libertad, v. 3, 2000.

APÊNDICES

APÊNDICE A – Questionário com os professores do grupo

Idade: **Gênero: ( ) F ( ) M**

1) Formação Profissional
a. Graduação:
b. Pós-graduação:
c. Formações continuadas (últimos três anos):

2) Tempo de atuação em sala de aula:

3) Modalidade de Ensino que já atuou:
( ) EF ( ) EM ( ) EJA ( ) ET ( ) ES

4) No momento do planejamento de suas aulas você leva em consideração as indicações dos PCN, Orientações Curriculares Municipais, Livros Didáticos? Em que aspectos?

5) Você segue alguma recomendação metodológica (resolução de problemas, softwares, calculadoras, história da matemática) para elaborar ou para desenvolver suas aulas?

6) Em sua opinião quais conteúdos de Matemática os estudantes do Ensino Fundamental apresentam maiores dificuldades e por quê?

7) Você procura desenvolver alguma estratégia para a superação das dificuldades dos estudantes?

8) Na sua prática docente, o que você considera Recuperação de Conteúdos? Como desenvolve?

9) Você acredita que o desenvolvimento de uma proposta específica de Recuperação de Conteúdos é um caminho para a superação das dificuldades dos estudantes?

APÊNDICE B – Orientações Curriculares x FAE

Estruturou-se a análise apresentando o objetivo geral estabelecido pelo município para cada um dos anos finais do Ensino Fundamental, e buscou-se identificar nos objetivos específicos de cada ano, os componentes *situações-problemas, linguagem, regras, argumentos e relações* e seus indicadores propostos pela FAE, utilizou-se a legenda numérica para identificar os componentes evidenciados nos objetivos, a seguir apresenta-se esta codificação.

Componentes	Indicadores
Situações-problema 1	a) apresenta-se uma mostra representativa e articulada de situações de contextualização, exercícios e aplicações; b) propõem-se situações de generalização de problemas (problematização).
Linguagem 2	a) uso de diferentes modos de expressão matemática (verbal, gráfica, simbólica), tradução e conversão entre as mesmas; b) nível de linguagem adequado aos estudantes; c) propor situações de expressão matemática e interpretação.
Regras (definições, proposições, procedimentos) 3	a) as definições e procedimentos são claros e corretos e estão adaptados ao nível educativo a que se dirigem; b) apresentam-se enunciados e procedimentos fundamentais do tema para o nível educativo dado; c) propõem-se situações onde os estudantes tenham que generalizar ou negociar definições, proposições ou procedimentos.
Argumentos 4	a) as explicações, comprovações e demonstrações são adequadas ao nível educativo a que se dirigem; b) promovem-se situações onde os estudantes tenham que argumentar.
Relações 5	a) os objetos matemáticos (problemas, definições, proposições) se relacionam e se conectam entre si.

6º ANO

Objetivo Geral: Resolver situações-problema que envolvam números naturais e, a partir delas, ampliar e construir novos significados para as operações básicas. Essas situações-problema devem estar contextualizadas no dia-a-dia e envolver inclusive conhecimentos geométricos básicos.

Componentes/ Indicadores	Objetivos específicos
1, 2	Ampliar e construir novos significados para os números naturais a partir de sua utilização no contexto social e da análise de problemas históricos que motivaram sua construção;
2, 3, 5	Reconhecer o significado dos números naturais em diferentes contextos e estabelecer relações entre os números naturais, tais como: ser múltiplos e divisor;
2, 3	Compreender o sistema de numeração decimal, identificar o conjunto de regras e símbolos que o caracterizam;
2, 3, 5	Identificar, interpretar e utilizar diferentes representações dos números naturais, indicadas por diferentes noções, vinculando-as aos contextos matemáticos e não matemáticos;
1, 2, 3	Selecionar e utilizar procedimentos de cálculo (exato ou aproximado, mental ou escrito) em função da situação-problema proposta;
1	Resolver problemas simples que envolvam figuras geométricas planas;

1, 2, 3, 4, 5	Reconhecer que pode haver diversas formas de resolução para uma mesma situação-problema e identificá-las;
2, 3	Valorizar e usar a linguagem matemática para expressar-se com clareza, precisão e concisão;
Não se aplica	Perceber que o uso de recursos tecnológicos como instrumentos que possam auxiliar na realização de alguns trabalhos, não anula o esforço da atividade compreensiva;
2, 3, 4	Resolver cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) e realizar operações com números naturais por meio de estratégias variadas, com a compreensão dos processos envolvidos, e utilizar a calculadora para verificar e controlar resultados;
1, 2, 3	Compreender a potência com expoente natural como produto reiterado de fatores iguais, identificar e fazer uso das propriedades da potenciação em situações-problema;
3	Realizar cálculos aproximados de raízes quadradas por meio de estimativas e fazer uso de calculadoras;
1, 3	Resolver situações-problema de contagem, que envolvem o princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas;
1, 2, 3, 4, 5	Distinguir, em contextos variados, figuras bidimensionais e tridimensionais, e descrever algumas de suas características, estabelecer relações entre elas e utilizar nomenclatura própria;
1, 3, 4	Obter medidas por meio de estimativas e aproximações e decidir quanto a resultados razoáveis dependendo da situação-problema;
3	Utilizar instrumentos de medida como régua, escalímetro, esquadro, trena, relógio, balanças para fazer medições;
3	Calcular a área e o perímetro das figuras geométricas planas;
1, 2, 3	Resolver situações-problema que envolvam grandezas (capacidade, comprimento, tempo, massa, temperatura) e as respectivas unidades de medida;
1, 2, 3, 4, 5	Desenvolver a capacidade de investigação e da perseverança na busca de resultados; valorizar o uso de estratégias de verificação e controle de resultados;
1, 2, 3, 4, 5	Valorizar o trabalho coletivo, colaborar para a interpretação de situações-problema, na elaboração de estratégias de resolução e na sua validação;
1, 2, 3, 4, 5	Usar os conhecimentos matemáticos como recursos para interpretar, analisar e resolver problemas em contextos diversos;
4	Analisar criticamente informações e opiniões veiculadas pela mídia;
4	Realizar registros pessoais para emitir uma autoavaliação, podendo comparar com os registros dos educadores, de modo que estes se aprimorem.

7º ANO

Objetivo Geral: Contemplar o mundo financeiro e, a partir dos conhecimentos monetários intrínsecos na vida, trabalhar números inteiros, decimais e racionais, com suas operações, estabelecendo comparações entre elas e aplicando à definição razões, proporções e regras de três. A partir da ideia intuitiva, determinar o valor de uma variável e construir mecanismos operacionais para efetuar e resolver situações do dia a dia. Interpretar e traduzir de forma gráfica dos dados coletados.

Componentes/ Indicadores	Objetivos específicos
1, 2, 3	Reconhecer os números inteiros em diferentes contextos cotidianos e históricos, e explorar situações-problema em que indicam falta, diferença, orientação (origem) e deslocamento entre dois pontos;

1, 2, 3	Reconhecer números racionais em diferentes contextos cotidianos e históricos e explorar situações-problema em que indicam relação parte/todo, quociente, razão ou funcionam como operador;
2, 3, 5	Localizar na reta numérica de números racionais e reconhecer que estes podem ser expressos na forma fracionária e decimal e estabelecer relações entre essas representações;
1, 2, 3, 4, 5	Analisar, interpretar, formular e resolver situações-problema, compreendendo diferentes significados das operações, que envolvam números naturais, inteiros e racionais e reconhecer que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e que eventualmente diferentes operações podem resolver um mesmo problema, podendo usar estratégias diversas, como tabelas, gráficos e representação geométrica;
2, 3, 4	Resolver cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) que envolvam operações com números naturais, inteiros e racionais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos nelas envolvidos, utilizar a calculadora como instrumento pedagógico;
2, 3	Construir significado à potência de expoente nulo pela observação de regularidades e pela extensão das potências com expoente positivo;
2, 3	Identificar um número irracional como um número de representação decimal infinita, e não-periódica, e localizar alguns deles na reta numérica, com régua;
1, 2, 3	Resolver situações-problema que envolvem a idéia de proporcionalidade, incluir os cálculos com porcentagens, pelo uso de estratégias não-convencionais;
2, 3	Compreender a noção de variável;
3	Construir procedimentos para calcular o valor numérico de expressões algébricas simples;
1, 2, 3	Resolver situações-problema de contagem, que envolvam o princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas, como construir diagramas, tabelas e esquemas sem a aplicação de fórmulas;
1, 2, 3	Identificar a natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais, resolvendo problemas por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três;
1, 2, 3	Resolver situações-problema que envolvem juros simples (porcentagem, acréscimo e desconto) e construir estratégias variadas, particularmente as que fazem uso de calculadora;
1, 2, 3, 4, 5	Traduzir situações-problema por equações do primeiro, e utilizar as propriedades da igualdade, na construção de procedimentos para resolvê-las, discutir o significado das soluções encontradas em confronto com a situação proposta;
2, 3	Reconhecer as formas geométricas (tridimencionais, planas e contornos);
2, 3	Construir da noção de ângulo associada à idéia de mudança de direção e reconhecer estes elementos em figuras planas;
3	Verificar de que a soma dos ângulos internos de um triângulo é 180º;
2, 3	Identificar de ângulos congruentes, complementares e suplementares em feixes de retas paralelas cortadas por retas transversais;
3	Determinar da soma dos ângulos internos de um polígono convexo qualquer;
2, 3,4	Reconhecer grandezas como comprimento, massa, capacidade, superfície, volume, ângulo, tempo, temperatura, velocidade e identificar unidades adequadas (padronizadas ou não) para medi-las, fazer uso de terminologia própria; Obter medidas por meio de estimativas e aproximações e decidir quanto a resultados razoáveis dependendo da situação problema;
2, 3	Utilizar instrumentos de medida de comprimento, tempo e massa para fazer medidas adequadas a precisão que se refere;

1, 2, 3, 4, 5	Coletar, organizar os dados e utilizar de recursos visuais adequados (fluxogramas, tabelas e gráficos) para sintetizar,comunicar e permitir a elaborar conclusões;
1, 2, 3, 4, 5	Ler , interpretar e analisar dados expressos em tabelas e gráficos;
1, 2, 3, 4, 5	Desenvolver a capacidade de investigar e buscar resultados, valorizar o uso de estratégias de verificação e controle de resultados;
1, 2, 3, 4, 5	Reconhecer que pode haver diversas formas de resolução para uma mesma situação problema e conhecê-las;
1, 2, 3, 4, 5	Vivenciar o trabalho coletivo, para colaborar na interpretação de situações-problema e elaborar estratégias de resolução;
1, 2, 3, 4, 5	Usar os conhecimentos matemáticos como recursos para interpretar, analisar e resolver problemas em contextos diversos;
1, 2, 3, 4, 5	Compreender a importância da análise de alguns dados estatísticos na atividade humana e de que ela pode induzir a erros de julgamento, pela manipulação de dados e pela apresentação incorreta das informações (ausência da freqüência relativa, gráficos com escalas inadequadas);
4	Analisar criticamente informações e opiniões veiculadas pela mídia.

8º ANO

Objetivo Geral: Utilizar os conhecimentos adquiridos sobre os polígonos regulares, relacioná-los com as regras algébricas e desenvolver o raciocínio lógico abstrato e, quando possível, calcular valores e estabelecer relações entre elas. Considerar os aspectos do dia a dia em situações problemas, comparar grandezas e estabelecer relações entre elas.

Componentes/ Indicadores	Objetivos específicos
1, 2, 3, 4, 5	Analisar, interpretar, formular e resolver situações-problema, compreendendo os diferentes significados das operações que envolvem números naturais, inteiros, racionais e irracionais, e reconhecendo que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e que, eventualmente, diferentes operações podem resolver um mesmo problema, através do uso de estratégias diversas, como: tabelas, gráficos e representação geométrica;
1, 2, 4, 5	Resolver situações-problema de contagem, por meio de estratégias variadas, como: construir diagramas, tabelas e esquemas, sem a aplicação de fórmulas;
2, 3	Identificar a natureza da variação de duas grandezas diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais;
1, 3, 4	Resolver problemas que envolvem grandezas diretamente proporcionais ou inversamente proporcionais, por meio de estratégias variadas, incluindo a regra de três;
1,2, 3, 4, 5	Traduzir e resolver situações-problema por equações do primeiro grau, utilizando as propriedades da igualdade na construção de procedimentos para resolvê-las e discutindo o significado das soluções encontradas em confronto com a situação proposta;
2, 3	Realizar cálculos aproximados de raízes quadradas, por meio de estimativas e pelo uso de calculadoras;
3	Construir procedimentos para calcular o valor numérico e para efetuar operações com expressões algébricas, utilizando as propriedades conhecidas;

2, 3	Obter expressões equivalentes a uma expressão algébrica, por meio de fatorações e simplificações;
2, 3	Desenvolver o conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas), identificando as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície);
2, 3	Verificar propriedades e reconhecer os casos de congruência dos triângulos e dos quadriláteros;
2,3	Reconhecer grandezas como comprimento, massa, capacidade, superfície, volume, ângulo, tempo, temperatura, velocidade, identificando as unidades adequadas (padronizadas ou não) para medi-las e fazendo uso de terminologia própria;
2, 3, 4	Deduzir medidas, por meio de estimativas e aproximações, para decidir quanto a resultados razoáveis, conforme a situação problema;
2, 3	Utilizar instrumentos de medida de comprimento, tempo e massa para fazer medidas adequadas à precisão que se refere;
3, 4, 5	Estabelecer relação entre a medida da diagonal, a medida do lado de um quadrado e a do perímetro;
1, 2, 3, 4, 5	Desenvolver a capacidade de investigação, valorizando o uso de estratégias de verificação e de controle de resultados;
1, 4, 5	Reconhecer que pode haver diversas formas de resolução para uma mesma situação problema e conhecê-las;
2	Usar a linguagem matemática para expressar-se com clareza, precisão e concisão;
1, 2, 3, 4, 5	Vivenciar o trabalho coletivo, para elaborar estratégias de resolução e para sua validação;
Não se aplica	Usar recursos tecnológicos, como instrumentos que podem auxiliar na realização de alguns trabalhos;
4	Analisar criticamente informações e opiniões veiculados pela mídia;
4	Realizar registros pessoais para emitir autoavaliação;

9º ANO

Objetivo Geral Aplicar os conhecimentos numéricos e algébricos na resolução de equações, explorando sua aplicação em situações-problemas. Ampliar os conhecimentos sobre ângulos e relacionar com o Teorema de Pitágoras, a fim de resolver problemas trigonométricos.

Componentes/ Indicadores	Objetivos específicos
1,2,3,4,5	Analisar, interpretar, formular e resolver situações-problema, compreender diferentes significados das operações, que envolvam números naturais, inteiros, racionais e irracionais, reconhecer que diferentes situações-problema podem ser resolvidas por uma única operação e que eventualmente diferentes operações podem resolver um mesmo problema, podendo usar estratégias diversas, como tabelas, gráficos e representação geométrica;

2, 3, 4, 5	Atribuir significado à potência de expoente nulo, negativo e fracionário, pela observação de regularidades e pela extensão das propriedades com o expoente positivo;
1, 2, 5	Constatar que existem situações-problema, em particular algumas vinculadas à Geometria e medidas, cujas soluções não são dadas por números racionais (caso do π, 2 , 3 etc.);
1, 2, 3	Resolver situações-problema, de contagem, que envolvem o princípio multiplicativo, por meio de estratégias variadas, como construir diagramas, tabelas e esquemas sem a aplicação de fórmulas;
1, 2, 3, 4	Traduzir e resolver situações-problema por equações do segundo grau, utilizando as propriedades da igualdade, na construção de procedimentos para resolvê-las, e discutindo o significado das soluções encontradas em confronto com a situação proposta;
2, 3	Dividir segmentos em partes proporcionais e construir retas paralelas e retas perpendiculares com régua e compasso;
2, 3	Estabelecer a razão aproximada entre a medida do comprimento de uma circunferência e seu diâmetro;
1, 2, 3	Resolver situações-problema que envolvam a obtenção da bissetriz de um ângulo, de retas paralelas e perpendiculares e de alguns ângulos, fazendo uso de instrumentos como régua, compasso, esquadro e transferidor;
2, 3	Desenvolver o conceito de congruência de figuras planas a partir de transformações (reflexões em retas, translações, rotações e composições destas) e identificar as medidas invariantes (dos lados, dos ângulos, da superfície);
2, 3	Desenvolver a noção de semelhança de figuras e identificar as medidas que não se alteram (ângulos) e as que se modificam (dos lados, da superfície e perímetro), podendo utilizar a ampliações ou reduções;
1, 2, 3	Verificar experimentos e aplicar o teorema de Tales;
1, 2, 3, 4, 5	Verificar experimentos, aplicar e demonstrar o teorema de Pitágoras;
1, 3, 5	Reconhecer as razões trigonométricas como aquelas que podemos estabelecer entre as medidas dos catetos e da hipotenusa;
1, 2, 3, 5	Reconhecer grandezas como comprimento, massa, capacidade, superfície, volume, ângulo, tempo, temperatura, velocidade, identificando unidades adequadas(padronizadas ou não) para medi-las, utilizando a terminologia própria;
2, 3, 4	Obter medidas por meio de estimativas e aproximações e decidir quanto a resultados razoáveis, dependendo da situação problema;
2, 3	Utilizar instrumentos de medida de comprimento, tempo e massa para fazer medidas adequadas a precisão que se refere;
2, 3	Calcular área e perímetro de figuras planas pela decomposição e/ou composição em figuras de áreas conhecidas, ou por meio de estimativas;
1,2, 3, 4	Resolver situações-problema que envolvam grandezas (capacidade, comprimento, tempo, massa, temperatura) e as respectivas unidades de medida, fazendo conversões adequadas para efetuar cálculos e expressar resultados;

2, 3, 5	Estabelecer relação entre a medida da diagonal e a medida do lado de um quadrado, bem como a relação entre as medidas do perímetro e do diâmetro de um círculo;
1, 2, 3, 4, 5	Coletar, organizar dados e utilizar de recursos visuais adequados (fluxogramas, tabelas e gráficos) para sintetizá-los, comunicá-los, permitindo a elaboração de conclusões;
1, 2, 3, 4, 5	Ler, interpretar e analisar dados expressos em tabelas e gráficos;
Não se aplica	Valorizar o uso dos recursos tecnológicos como instrumentos que podem auxiliar na realização de alguns trabalhos, sem anular o esforço da atividade compreensiva;
1, 2, 3 , 4, 5	Usar os conhecimentos matemáticos como recursos para interpretar, analisar e resolver problemas em contextos diversos.
1, 2, 3, 4, 5	Compreender a importância da análise de alguns dados estatísticos na atividade humana e que ela pode induzir a erros de julgamento, pela manipulação de dados e pela apresentação incorreta das informações (ausência da frequência relativa, gráficos com escalas inadequadas);
4	Analisar criticamente informações e opiniões veiculados pela mídia;
4	Realizar registros pessoais para emitir uma avaliação de seu desempenho;
2, 3	Desenvolver noções básicas de Funções.

APÊNDICE C – Entrevista Semiestruturada com a professora titular

Parte I – Antes da implementação da proposta

1) Você considera que a Geometria é pouco trabalhada nas escolas? Por que acha que isso ocorre?

2) Você consegue desenvolver um trabalho com a Geometria no Ensino Fundamental?

3) Em que momento? Ao longo do ano letivo, articulado com os demais conteúdos, tem um trimestre específico?

4) Como você desenvolve suas aulas, mais especificamente, no trabalho com Geometria? Utiliza quais metodologias, recursos, estratégias?

5) Esta forma que você organiza e desenvolve suas aulas está baseado em algum referencial teórico, livro didático, PCN, orientações municipais, experiência...?

6) Você considera que os estudantes apresentam dificuldades em torno da Geometria?

7) No seu entendimento como o aluno se apropria dos conhecimentos geométricos? Entende que é da mesma forma que os demais blocos da Matemática?

8) Quais conteúdos/conceitos você considera essenciais para o desenvolvimento do pensamento geométrico no Ensino Fundamental?

9) Você considera importante o desenvolvimento de uma proposta que visa retomar conceitos e procedimentos geométricos não trabalhados ou não assimilados pelos estudantes?

10) Como você entende que deveria ser esta proposta?

Parte II – Após a implementação da proposta com os estudantes

11) Você considera que a proposta de estudos desenvolvida e implementada com os estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental favoreceu a retomada e o aprofundamento dos conhecimentos geométricos?

12) Você conseguiu identificar algum reflexo do estudo desenvolvido em sua sala de aula?

APÊNDICE D – Questionário sobre o perfil dos estudantes

Idade: **Sexo: (   ) F (   ) M**

1) Com qual frequência você utiliza computador na escola? **( ) nunca ( ) semanalmente ( ) mensalmente ( ) todos os dias**

Se utiliza computador, para quais atividades?

2) Seu professor de Matemática utiliza o Laboratório de Informática? **Sim ( ) Não ( )**

Já realizou alguma atividade de Matemática no Laboratório de Informática? **Sim ( ) Não ( )**, se sim lembra quais?

3) Você já estudou Geometria? **Sim ( ) Não ( )**. Se sim lembra quais conteúdos e se apresentou dificuldades de aprendizagem?

4) O que motivou você a vir participar da proposta de estudos de recuperação de Geometria

5) Quais suas expectativas em relação a esta proposta?

APÊNDICE E – Questionário para os estudantes sobre o trabalho desenvolvido

1)Qual a sua opinião sobre o trabalho desenvolvido nos encontros dos estudos de recuperação de Geometria?

2) O que você mais gostou nos materiais de estudos?

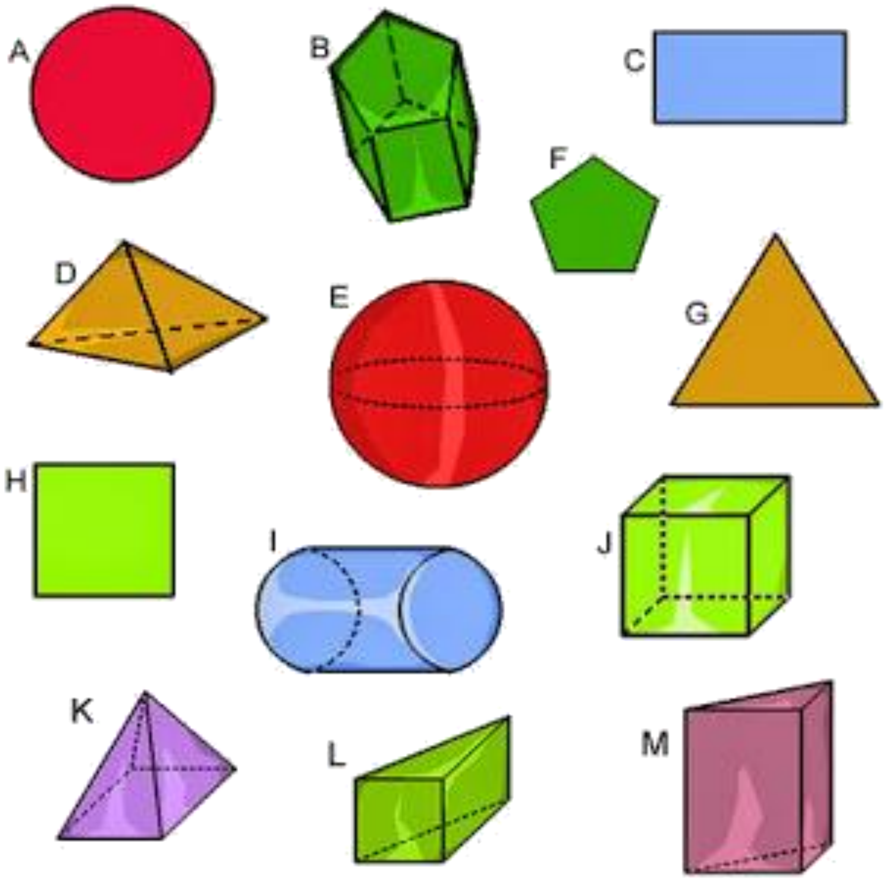
3)Quais as dificuldades que você encontrou, tanto com os conteúdos, como com os materiais de estudos?

4) O que você considera que poderia melhorar (sugestões)?

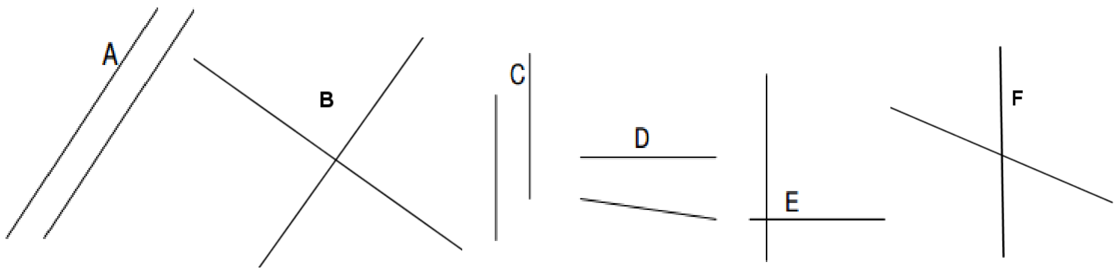
APÊNDICE F – Atividade Inicial sobre os conhecimentos geométricos prévios dos estudantes

Aluno: ____.

1) Identifique quais figuras são planas e quais são espaciais.



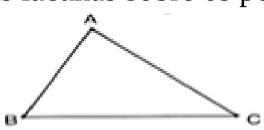
2) Identifique os pares de retas que são paralelas e os que são perpendiculares.

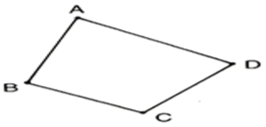


-São paralelas:____________________________________.

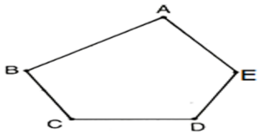
-São perpendiculares:______________________________.

3) Complete as lacunas sobre os polígonos.

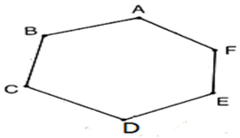
a) O polígono  tem ______ lados. É chamado de ______________.

b) O polígono 

tem ______ lados. É chamado de ______________.

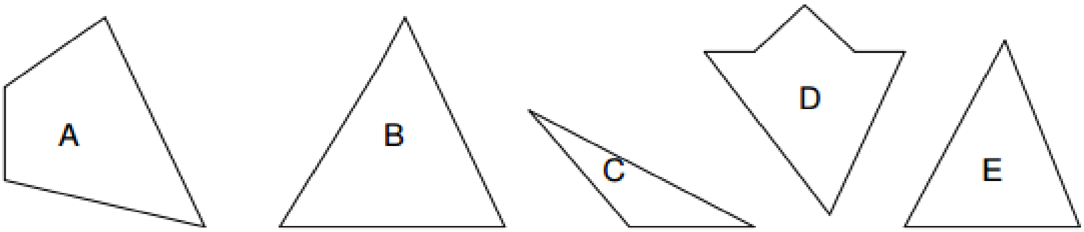
c) O polígono 

tem ______ lados. É chamado de ______________.

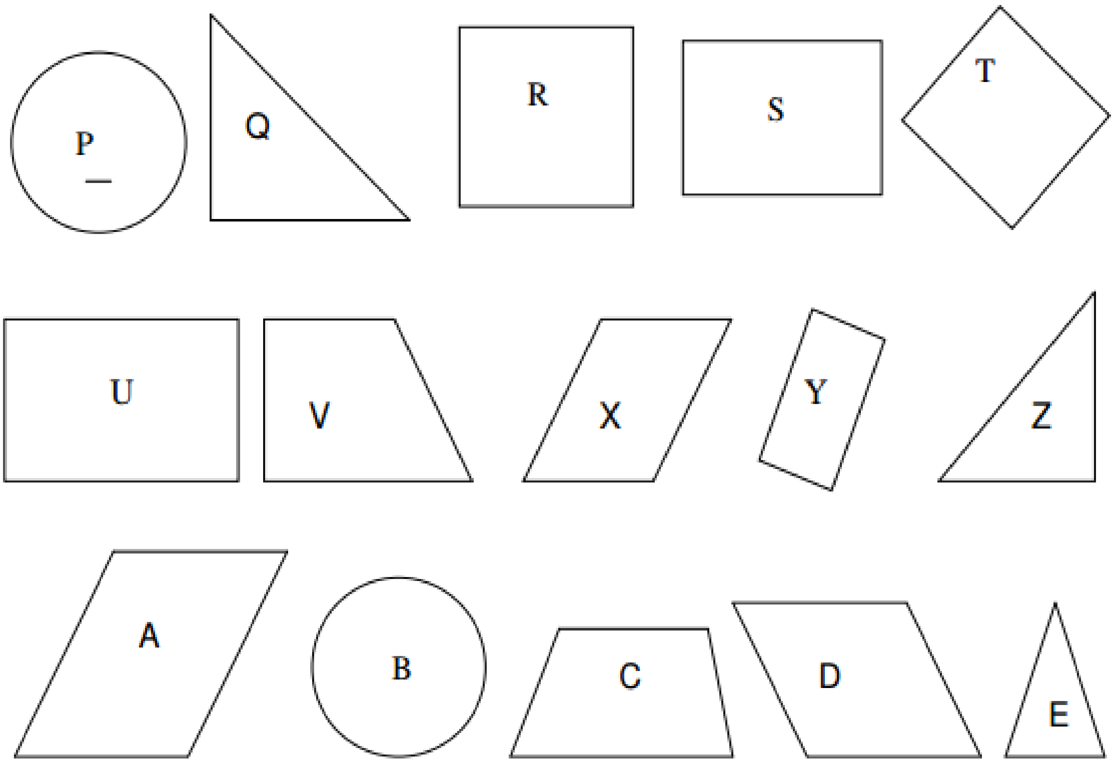
d) O polígono 

tem ______ lados. É chamado de ______________.

4) Marque com um "X" as figuras que são triângulos.



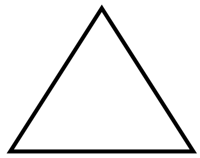
5) Marque com um "X" as figuras que podem ser classificadas como quadriláteros.



Das figuras marcadas identifique, utilizando as letras (A, B, C...) quais são:
5.1 Quadrados: ____.
5.2 Retângulos: ____.
5.3 Paralelogramos: ____________________________________.
5.4 Trapézios: ____.

6) Todo o triângulo equilátero, como representado na figura abaixo, tem seus lados ___________.

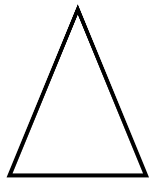
Indique se as alternativas são verdadeiras ou falsas sobre um triângulo equilátero qualquer.



a) Todos os três lados com medidas distintas (   ).
b) Todos os ângulos tem a mesma medida (   ).
c) Todos os ângulos medem 60º (   ).
d) Todas as alturas do triângulo equilátero também é bissetriz e mediana (   )

7) Todo o triângulo isósceles, como representado na figura abaixo, tem dois lados____________.

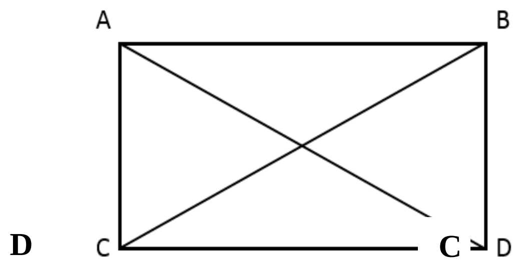
Indique se as alternativas são verdadeiras ou falsas sobre os ângulos do triângulo isósceles.



a) Pelo menos um dos ângulos mede 60º (   ).
b) Um dos ângulos mede 90º (   ).
c) Dois dos ângulos tem a mesma medida (   ).
d) Todos os três ângulos tem a mesma medida (   ).

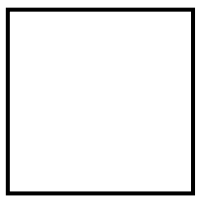
8) O que se pode afirmar sobre a soma das medidas dos ângulos internos de um triângulo qualquer?

9) Observe o retângulo ABCD, as linhas AC e BD são chamadas de _________________. Indique se as alternativas são verdadeiras ou falsas para todos os retângulos.



a) Tem quatro ângulos retos ( ).
b) Tem lados opostos paralelos (   ).
c) Tem diagonais com o mesmo comprimento (   ).
d) Tem os quatro lados com a mesma medida ( ).

10) Escreva três propriedades dos quadrados.



a) ____.
b) ____.
c)____.

11) Os quatro ângulos de um quadrilátero ABCD tem a mesma medida. Pode-se afirmar que ABCD é um quadrado? Por quê?

12) Pode-se afirmar que todo quadrado é também um retângulo? Por quê?

13) Assinale a afirmativa que relaciona corretamente as propriedades dos retângulos e dos quadrados.

a) Qualquer propriedade dos quadrados é também válida para os retângulos.
b) Uma propriedade dos quadrados nunca é propriedade dos retângulos.

c) Qualquer propriedade dos retângulos é, também, válida para os quadrados.
d) Uma propriedade dos retângulos nunca é propriedade dos quadrados.
e) Nenhuma das afirmativas anteriores está correta.

APÊNDICE G – Materiais de estudos sobre a Geometria dos anos finais do Ensino Fundamental