

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA



ALEXANDRE BRANCO MONTEIRO

**ESTUDOS DE RECUPERAÇÃO DO CONTEÚDO DE FRAÇÕES COM O USO DE
TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO**

Canoas
2013

UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA



ALEXANDRE BRANCO MONTEIRO

**ESTUDOS DE RECUPERAÇÃO DO CONTEÚDO DE FRAÇÕES COM O USO DE
TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO**

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Canoas

2013

ALEXANDRE BRANCO MONTEIRO

**ESTUDOS DE RECUPERAÇÃO DO CONTEÚDO DE FRAÇÕES COM O USO DE
TECNOLOGIAS DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO**

Orientadora: Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Banca Examinadora:

Dra. Carmen Teresa Kaiber - ULBRA

Dra. Jutta Cornelia Reuwsaat Justo - ULBRA

Dra. Maria Madalena Dullius - UNIVATES

Abril, 2013

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação – CIP

M775e Monteiro, Alexandre Branco.

Estudos de recuperação do conteúdo de frações
com o uso de tecnologias da
informação e comunicação / Alexandre Branco Monteiro.
– 2013.

218 f. : il.

Dissertação (mestrado) – Universidade Luterana do
Brasil, Programa de Pós-

Bibliotecária responsável – Viviane Saraiva Leite – 10/1324

AGRADECIMENTOS

À minha família pela compreensão e amor sempre dedicado.

À professora Claudia Lisete Oliveira Groenwald, pela orientação, dedicação, paciência, atenção, profissionalismo, e principalmente pelo carinho, amizade e confiança.

À professora Tania Elisa Seibert pela amizade, carinho, e que sem o seu apoio este caminho não teria sido percorrido.

Ao professor Rodrigo Dalla Vecchia pela amizade e incentivo.

À Andrielly Viana Lemos e ao Lucas Gabriel Seibert, amigos de muito tempo, companheiros de graduação e mestrado.

Aos professores e colegas do PPGECIM e do curso de licenciatura de Matemática da Ulbra.

Aos colegas do Observatório Karina Sales Nunes, Rosana Pinheiro Fiuza e Ilisandro Pesente pelo apoio dado neste trabalho.

À direção da Escola Irmão Pedro pelo apoio ao trabalho realizado, em especial a professora Geanice Mineia Christo pela confiança e aos alunos pela participação e dedicação.

Educação não transforma o mundo. Educação muda pessoas. Pessoas transformam o mundo.

Paulo Freire

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se o desenvolvimento, investigação, aplicação e avaliação de uma sequência didática eletrônica para os anos finais do Ensino Fundamental com o tema Frações, direcionada a alunos que necessitam de estudos de recuperação. A sequência didática foi desenvolvida utilizando o Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA), que é um sistema para apoio ao desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem de qualquer conteúdo, desenvolvido pelo convênio de pesquisa entre o Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECEM), da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), Brasil, em convênio com o Grupo de Tecnologias Educativas, da Universidade de La Laguna (ULL), em Tenerife, Espanha. Para o desenvolvimento de uma sequência didática no SIENA são necessárias as seguintes ações: o desenvolvimento de um mapa conceitual com o conteúdo, evoluindo para um grafo de conceitos que serão trabalhados, onde em cada conceito há um teste adaptativo e uma sequência didática. Esta pesquisa foi desenvolvida em duas etapas. A primeira etapa da pesquisa consistiu no levantamento bibliográfico dos aspectos teóricos e didáticos dos conceitos do conteúdo de Frações e sobre as dificuldades de aprendizagem relacionadas a esse tema. E com base na investigação realizada foi desenvolvida uma sequência didática eletrônica do conteúdo de Frações, com materiais de estudo para cada conceito a ser trabalhado com os alunos. A segunda etapa iniciou com a implementação do ambiente de investigação na plataforma SIENA. Onde nessa fase foram disponibilizados na plataforma os materiais de estudo nos recursos tecnológicos pesquisados, em *PowerPoint*, atividades *online* e atividades com o aplicativo *JClic*, assim como o banco de questões para os testes adaptativos. Para a validação da sequência didática construída, foi desenvolvido um experimento, na plataforma SIENA, com um grupo de 19 alunos, de duas turmas do 7º ano, de uma escola pública do município de Canoas participante do projeto Observatório da Educação. A partir dos dados coletados no experimento foi realizada uma análise dos resultados em três perspectivas: análise geral do desempenho dos alunos, análise individual do desempenho dos alunos e a análise da sequência didática eletrônica. Os resultados apontam que os alunos participantes do experimento apresentaram dificuldades com os conceitos iniciais de Frações, além dos conceitos de equivalência, simplificação e comparação. E apresentaram um melhor desempenho com as operações com Frações. Quando os alunos necessitaram de estudos de recuperação a sequência didática apresentou resultados positivos no apoio aos mesmos no avanço da compreensão do conteúdo de Frações.

Palavras-chave: Recuperação de Conteúdos. Sequência Didática Eletrônica. Frações. SIENA.

ABSTRACT

This study presents the investigation, development, application and evaluation of an electronic didactic sequence on Fractions for pupils taking the last years of Elementary School needing to recover contents. The didactic sequence was created using the Teaching and Learning Integrated System (SIENA), a support system in the teaching and learning process of any content, developed in a partnership between Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática (GECEM), Lutheran University of Brazil (ULBRA) and Grupo de Tecnologías Educativas, Universidad de La Laguna (ULL), Tenerife, Spain. A didactic sequence created in SIENA requires the development of a conceptual map showing the content studied that evolves into a conceptual graph containing one adaptive test and one didactic sequence for each concept. This research was developed as two stages. In the first, the literature on theoretical and didactic aspects of concepts of the content Fractions and the learning difficulties surrounding this topic was reviewed. Based on this literature review, an electronic didactic sequence addressing Fractions using the study materials for each concept taught to pupils was developed. In the second, an investigation environment was implemented based on the SIENA platform, when study materials created using the technological resources were made available as PowerPoint files, apart from online activities and tasks developed in the software JClíc and a question bank for the adaptive tests. Validation of the didactic sequence was carried out in the SIENA platform with a group of 19 12th graders attending a public school in the city of Canoas, RS, Brazil, which is part of the project “Observatório da Educação”. The data collected were analyzed from three different perspectives: general performance of pupils, analysis of individual performance of pupils, and the analysis of the electronic didactic sequence. The results indicate that pupils who took part in the experiment exhibited difficulties concerning the first concepts of Fractions and the equivalence, simplification and comparison. However, the pupils performed better in operations with Fractions. When pupils needed recovery studies, the didactic sequence produced positive support with that end, promoting the comprehension of Fractions contents.

Keywords: Content Recovery. Electronic Didactic Sequence. Fractions. SIENA.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - representação de um mural do ano 3.000 a.C., exposto no Museu Metropolitano de Arte, Nova Iorque.	36
Figura 2 - exemplos de notação de Frações utilizadas pelos egípcios.....	37
Figura 3 - representações gráficas da Fração $\frac{5}{16}$	40
Figura 4 - representação gráfica da Fração $\frac{3}{8}$ utilizando retângulo.....	40
Figura 5 - representação gráfica da Fração $\frac{3}{8}$ utilizando retângulo.....	41
Figura 6 - representação gráfica de uma Fração em um segmento.	41
Figura 7 - representação gráfica da Fração $\frac{3}{5}$ através de quantidade discreta.....	42
Figura 8 - representação gráfica de unidades.	42
Figura 9 - representação gráfica da Fração $\frac{3}{5}$ através de quantidade discreta.....	42
Figura 10 - representação gráfica da Fração $\frac{3}{5}$	43
Figura 11 - representação gráfica de uma pirâmide.	43
Figura 12 - representação das Frações $\frac{3}{5}$ e $1\frac{3}{5}$ na reta numérica.	44
Figura 13 - representação de uma reta numérica.....	44
Figura 14 - representação de uma reta numérica.....	45
Figura 15 - representação de uma reta numérica.....	45
Figura 16 - exemplo de um problema de divisão com Frações.	46
Figura 17 - representação dos conjuntos A e B.	47

Figura 18 - representação dos bonecos A e B.	48
Figura 19 - Representação do comparativo de um conjunto de bolas pretas e brancas.	48
Figura 20 - representação de um conjunto de círculos e quadrados.	49
Figura 21 - exemplo de tarefa.	52
Figura 22 - exemplo de tarefa.	52
Figura 23 - exemplo de tarefa.	53
Figura 24 - exemplo de tarefa.	54
Figura 25 - exemplo de erro na simplificação de Frações.	55
Figura 26 - exemplo de erro na adição de Frações.	55
Figura 27 - exemplo de erro na subtração de Frações.	56
Figura 28 - exemplo de erro na multiplicação de Frações.	56
Figura 29 - exemplo de erro na multiplicação de Frações.	57
Figura 30 - exemplo de erro na divisão de Frações.	57
Figura 31 - número de laboratórios Proinfo adquiridos até 2010.	65
Figura 32 - esquema da plataforma SIENA.	73
Figura 33 - exemplo do banco de dados de um teste adaptativo de um nodo.	74
Figura 34 - grafo com o conteúdo de Fração no <i>software Compendium</i>	75
Figura 35 - grafo com o conteúdo de Frações na plataforma SIENA.	76
Figura 36 - lista dos nodos na plataforma SIENA.	76
Figura 37 - exemplos de questões dos três níveis de dificuldade.	78
Figura 38 - exemplos de questões na plataforma SIENA.	79
Figura 39 - página inicial do material de estudo do nodo Conceito de Frações.	84
Figura 40 - apresentação "Um pouco de História...".	85
Figura 41 - apresentação "Frações o que são?".	87
Figura 42 - apresentação "Para que servem as Frações?".	90
Figura 43 - apresentação "Atividades <i>Online</i> ".	92
Figura 44 - atividades no aplicativo JClic.	94
Figura 45 - página inicial do nodo "Tipos de Frações"	95
Figura 46 - apresentação "Tipos de Frações".	96
Figura 47 - apresentação "Atividades <i>Online</i> ".	99
Figura 48 - atividades no aplicativo JClic.	100
Figura 49 - página inicial do nodo Equivalência e Simplificação de Frações.	101
Figura 50 - apresentação "Frações Equivalentes".	102
Figura 51 - apresentação "Simplificação de Frações".	104

Figura 52 - apresentação “Atividades <i>Online</i> Frações Equivalentes”	105
Figura 53 - atividades no aplicativo JClíc.	107
Figura 54 - página inicial do nodo Comparação de Frações.	108
Figura 55 - apresentação “Comparação de Frações”	108
Figura 56 - apresentação “Atividades <i>Online</i> Comparação de Frações”	111
Figura 57 - atividades no aplicativo JClíc.	112
Figura 58 - página inicial nodo Adição e Subtração de Frações.	113
Figura 59 - apresentação “Adição de Frações”.	114
Figura 60 - apresentação “Subtração de Frações”	116
Figura 61 - apresentação “Atividades <i>Online</i> I Adição e Subtração”.	117
Figura 62 - apresentação “Atividades <i>Online</i> II Adição e Subtração”	119
Figura 63 - página inicial do nodo Multiplicação e Divisão de Frações.	121
Figura 64 - apresentação “Multiplicação de Frações”	122
Figura 65 - apresentação “Divisão de Frações”	124
Figura 66 - apresentação “Atividades <i>Online</i> : Multiplicação & Divisão”	126
Figura 67 - página inicial do nodo Resolução de Problemas com Frações.	127
Figura 68 - apresentação “Frações: Resolução de Problemas”.	128
Figura 69 - exemplos de atividades no aplicativo JClíc.	130
Figura 70 - atividade <i>online</i> “Enigma das Frações”	132
Figura 71- gráfico com a idade dos alunos.	134
Figura 72 – gráfico com a quantidade de alunos com ou sem repetência.	135
Figura 73 – gráfico com as quantidades de alunos aprovados em cada teste adaptativo.	136
Figura 74 - exemplo de questão em que o Aluno 101 apresentou dificuldades.	140
Figura 75 - exemplo de questão em que o Aluno 101 apresentou dificuldades.	140
Figura 76 - exemplo de questão de nível fácil de conceito de Frações que o Aluno 101 errou.	141
Figura 77 - exemplos de questões que o Aluno 102 apresentou dificuldades.	142
Figura 78 - exemplos de questões de comparação de Frações em que o Aluno 102 apresentou dificuldades.	143
Figura 79 - anotações realizadas pelo Aluno 102	144
Figura 80 - exemplo de questão do nodo Multiplicação e Divisão de Frações que o aluno 102 apresentou dificuldades.	145
Figura 81 - exemplo de questão de nível médio em que o Aluno 103 apresentou dificuldades.	147

Figura 82 - exemplo de anotações feitas pelo Aluno 103.....	148
Figura 83 - questão em que o Aluno 104 apresentou dificuldade.	150
Figura 84 - exemplos de questões em que o Aluno 105 apresentou dificuldades.....	151
Figura 85 - exemplo de questão com o uso de segmentos de reta que o Aluno 105 apresentou dificuldades.....	152
Figura 86 - exemplo de questão de nível fácil do nodo Comparação de Frações.	153
Figura 87 - exemplo de questão em que o Aluno 106 apresentou dificuldades, envolvendo o significado de Frações como quociente.....	154
Figura 88 - exemplo de questão sobre Tipos de Frações em que o Aluno 106 apresentou dificuldades envolvendo o significado de Frações como quociente.....	155
Figura 89 - representação de Frações na forma contínua feitas pelo Aluno 106.....	156
Figura 90 - exemplo de questão do Nodo Multiplicação e Divisão de Frações em que o Aluno 106 apresentou dificuldades.	156
Figura 91 - exemplo de uma questão que o Aluno 107 inverte a resposta.	158
Figura 92 - exemplo de uma questão que o Aluno 107 inverte a resposta.....	159
Figura 93 - questão sobre tipo de Frações respondido pelo Aluno 108.	160
Figura 94 - exemplo de problema em que o Aluno 109 apresentou dificuldade.....	161
Figura 95 - questão do nodo Tipos de Frações que o Aluno 109 apresentou dificuldades. ...	162
Figura 96 - questões sobre comparação de Frações em que o Aluno 109 apresentou dificuldades.....	163
Figura 97 - questão significado de Fração como divisão.	164
Figura 98 - questão significado de Fração como divisão.	165
Figura 99 - exemplo de questão de Fração significado parte-todo de forma contínua que o Aluno 110 não apresentou dificuldades.....	166
Figura 100 - exemplo de questão de nível difícil de parte-todo de forma contínua em que o Aluno 110 apresentou dificuldades.	166
Figura 101 - exemplo de questão do nodo Tipos de Frações.	167
Figura 102 - exemplo de questão com nomenclatura de tipos de Frações que o Aluno 110 apresentou dificuldades.	167
Figura 103 - exemplo de questão de simplificação de Frações em que o aluno apresentou dificuldades.....	168
Figura 104 - exemplo de questão do nodo Comparação de Frações de resolução de problemas.	169

Figura 105 - exemplo de questão do nodo Comparação de Frações que o Aluno 110 apresentou dificuldades.	169
Figura 106 - questão envolvendo o conceito de comparação de Frações e anotações escrita pelo Aluno 110.	170
Figura 107 - questão envolvendo o conceito de comparação de Frações e anotações escrita pelo Aluno 110.	170
Figura 108 - questão de adição de Frações com o algoritmo da operação.	171
Figura 109 - exemplo de erro cometido pelo Aluno 110.	172
Figura 110 - exemplo de questão de subtração de Frações com resolução de Frações.	172
Figura 111 - questão de divisão de Frações onde o Aluno 110 resolveu como multiplicação de Frações.	173
Figura 112 - questão de nível difícil que o Aluno 108 respondeu errado.	174
Figura 113 - exemplo de anotações do Aluno 113.	175
Figura 114 - exemplo de questão envolvendo a reta numérica que o Aluno 113 apresentou dificuldades.	177
Figura 115 - exemplos de questões envolvendo a reta numérica que o Aluno 113 apresentou dificuldades.	178
Figura 116 - questão em que o Aluno 113 soma numerador e denominador de forma independente.	179
Figura 117 - anotações do Aluno 113 utilizando o MMC.	179
Figura 118 - exemplo de questões envolvendo a reta numérica em que o Aluno 113 apresentou dificuldades.	180
Figura 119 - exemplo de questões de resolução de problema em que o Aluno 113 apresentou dificuldade.	181
Figura 120 - exemplo de questão sobre o conteúdo de simplificação que o Aluno 114 apresentou dificuldades.	182
Figura 121 - exemplo de questão sobre o conteúdo de equivalência de Frações em que o Aluno 114 apresentou dificuldades.	183
Figura 122 - exemplo de questão sobre o conteúdo de comparação de Frações em que o Aluno 114 apresentou dificuldades.	184
Figura 123 - exemplo de questão de nível fácil com adição de Frações em que o Aluno 114 apresentou dificuldades.	184
Figura 124 - exemplo de questão em que o Aluno 116 apresentou dificuldades nos dois primeiros testes adaptativos do nodo Tipos de Frações.	200

Figura 125 - exemplo de questão em que o Aluno 116 apresentou dificuldades de interpretar nos testes adaptativos do nodo Tipos de Frações.	200
Figura 126 - exemplo de questão em que o Aluno 116 apresentou dificuldades de interpretar nos testes adaptativos do nodo Comparação de Frações.	201
Figura 127 - exemplo de questão que Aluno 117 apresentou dificuldades no nodo Resolução de Problemas com Frações.	203
Figura 128 - erro cometido pelo Aluno 121 em algumas questões sobre tipos de Frações....	205
Figura 129 - anotações do Aluno 121 com a escrita de números mistos.....	206
Figura 130 - erro cometido pelo Aluno 121 em uma questão de adição de Frações.....	206
Figura 131 - questão do nodo Conceito de Frações de nível médio.....	208
Figura 132 - exemplo de raciocínio desenvolvido pelo Aluno 122.....	208
Figura 133 - questão sorteada no nodo Conceito de Frações e Resolução de Problemas com Frações.....	212

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - exemplo de Frações como operador.....	49
Tabela 2 - desempenho do Aluno 101 nos testes adaptativos.	139
Tabela 3 - desempenho do Aluno 102 nos testes adaptativos.	141
Tabela 4 - desempenho do Aluno 103 nos testes adaptativos	146
Tabela 5 - desempenho do Aluno 104 nos testes adaptativos.	149
Tabela 6 - desempenho do Aluno 105 nos testes adaptativos.	151
Tabela 7 - desempenho do Aluno 106 nos testes adaptativos.	154
Tabela 8 - desempenho do Aluno 107 nos testes adaptativos	157
Tabela 9 - desempenho do Aluno 108 nos testes adaptativos	159
Tabela 10 - desempenho do Aluno 109 nos testes adaptativos.	160
Tabela 11 - desempenho do Aluno 110 nos testes adaptativos.	164
Tabela 12 - desempenho do Aluno 112 nos testes adaptativos	174
Tabela 13 - desempenho do Aluno 113 nos testes adaptativos	175
Tabela 14 - desempenho do Aluno 114 nos testes adaptativos.	181
Tabela 15 - desempenho do Aluno 115 nos testes adaptativos	185
Tabela 16 - desempenho do Aluno 116 nos testes adaptativos.	185
Tabela 17 - desempenho do Aluno 117 nos testes adaptativos	202
Tabela 18 - desempenho do Aluno 120 nos testes adaptativos	204
Tabela 19 - desempenho do Aluno 121 nos testes adaptativos	204
Tabela 20 - desempenho do Aluno 122 nos testes adaptativos	207

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

1 O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES	21
1.1 O CURRÍCULO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES ..	21
1.2 O papel do professor no processo de ensino e aprendizagem de Frações	31
2 REFLEXÕES METODOLÓGICAS SOBRE O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES	35
2.1 UM POUCO DE HISTÓRIA	35
2.2 PROCESSOS DIDÁTICOS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES...	38
2.2.1 A relação parte-todo e medida	39
2.2.2 As Frações como quociente	45
2.2.3 As Frações como razão.....	47
2.2.4 A Fração como operador	49
3 AS DIFICULDADES NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES	51
3.1 ERROS NA NOÇÃO DE EQUIVALÊNCIA E SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES.....	54
3.2 Erros na adição e subtração de Frações	55
3.3 Erros na multiplicação e divisão de Frações	56
4 RECUPERAÇÃO PARALELA DE CONTEÚDOS	59
5 TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NA EDUCAÇÃO	63
6 PRESSUPOSTOS METODOLÓGICOS	66
6.1 TEMA.....	66
6.2 PROBLEMA DE PESQUISA	66
6.3 OBJETIVOS	66
6.3.1 Objetivo geral.....	67
6.3.2 Objetivos específicos.....	67

6.4 METODOLOGIA DA PESQUISA.....	67
6.4.1 Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA)	72
7 AMBIENTE DE INVESTIGAÇÃO NA PLATAFORMA SIENA	75
7.1 GRAFO.....	75
7.2 TESTE ADAPTATIVO	77
7.3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA ELETRÔNICA	80
7.3.1 Nodo Conceito de Frações.....	83
7.3.2 Nodo Tipos de Frações	95
7.3.3 Nodo Equivalência e Simplificação de Frações.....	101
7.3.4 Nodo Comparação de Frações.....	107
7.3.5 Nodo Adição e Subtração de Frações	113
7.3.6 Nodo Multiplicação e Divisão de Frações.....	120
7.3.7 Nodo Resolução de Problemas com Frações	127
8 ANÁLISE DOS DADOS	134
8.1 ANÁLISE DO DESEMPENHO GERAL DO GRUPO DE ALUNOS PARTICIPANTES	134
8.2 ANÁLISE INDIVIDUAL DO DESEMPENHO DOS ALUNOS	138
8.2.1 Análise do desempenho do Aluno 101.....	138
8.2.2 Análise do desempenho do Aluno 102.....	141
8.2.3 Análise do desempenho do Aluno 103.....	146
8.2.4 Análise do desempenho do Aluno 104.....	149
8.2.5 Análise do desempenho do Aluno 105.....	150
8.2.6 Análise do desempenho do Aluno 106.....	153
8.2.7 Análise do desempenho do Aluno 107.....	157
8.2.8 Análise do desempenho do Aluno 108.....	159
8.2.9 Análise do desempenho do Aluno 109.....	160
8.2.10 Análise do desempenho do Aluno 110.....	163
8.2.11 Análise do desempenho do Aluno 112.....	173
8.2.12 Análise do desempenho do Aluno 113.....	174
8.2.13 Análise do desempenho do Aluno 114.....	181
8.2.14 Análise do desempenho do Aluno 115.....	185
8.2.15 Análise do desempenho do Aluno 116.....	185
8.2.16 Análise do desempenho do Aluno 117.....	201
8.2.17 Análise do desempenho do Aluno 120.....	203

8.2.18	Análise do desempenho do Aluno 121.....	204
8.2.19	Análise do desempenho do Aluno 122.....	207
8.3	ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA ELETRÔNICA DE FRAÇÕES	209
8.3.1	Considerações sobre a sequência didática eletrônica.....	212

CONCLUSÃO

REFERÊNCIAS

ANEXOS

APÊNDICES

INTRODUÇÃO

Cada vez mais, há uma preocupação de diversificar o processo de ensino e aprendizagem, buscando metodologias que possibilitem uma maior participação do aluno na construção do próprio conhecimento. Para tanto, é preciso considerar as diferenças individuais dos alunos e proporcionar meios para que os estudantes que apresentarem eventuais dificuldades não fiquem à margem desse processo.

Deve-se considerar, também, que os alunos não aprendem da mesma maneira e nem no mesmo ritmo, pois isso depende de seu nível de amadurecimento, seus conhecimentos anteriores, seu tipo de inteligência, que pode ser verbal, lógica ou espacial (GROENWALD; MORENO, 2007). Considerando esses fatos, um dos elementos importantes nesse processo de aprendizado é a recuperação de conteúdos, a qual o professor deve proporcionar aos alunos que apresentam dificuldade de acompanhar, de forma satisfatória, o desenvolvimento dos conteúdos. Essa recuperação é um direito do aluno previsto na Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional (LDB) nº 9394, devendo ser direcionada, especificamente, às dificuldades dos alunos. É dever da escola proporcionar aos alunos oportunidades para a recuperação, buscando novas estratégias de ensino.

Os estudos de recuperação têm como objetivo auxiliar o aluno a dirimir as dúvidas e superar as dificuldades surgidas no decorrer do processo de ensino e aprendizagem. Assim, devem fazer parte do cotidiano escolar, oportunizando aos alunos acompanhar esse processo, respeitando as suas individualidades. Particularmente a Matemática tem se mostrado uma das disciplinas nas quais os alunos têm apresentados um baixo desempenho nas avaliações oficiais, o que demonstra a necessidade de se prover meios para superar eventuais lacunas na aprendizagem.

Alguns conteúdos do currículo matemático apresentam uma maior dificuldade de entendimento por parte dos alunos. Pesquisas têm apontado as Frações como um deles. Segundo os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN, BRASIL, 1998), embora o estudo das Frações comece nas séries iniciais, o que se constata é que os alunos chegam aos ciclos finais do Ensino Fundamental sem compreender os diferentes significados associados a esse tipo de número e tampouco os procedimentos de cálculos. Uma explicação para as dificuldades encontradas deve-se, possivelmente, ao fato de que a aprendizagem das Frações supõe rupturas com as ideias construídas para os Números Naturais. Percebe-se, assim, a importância da compreensão das Frações como um conceito mais amplo, tanto por parte do

aluno, quanto por parte do professor no momento de construir o conhecimento em sala de aula.

Assim, esta pesquisa tem como objetivo apresentar, a partir de uma investigação teórica, o desenvolvimento de uma sequência didática eletrônica para os anos finais do Ensino Fundamental com o tema Frações, direcionada a alunos que necessitam de estudos de recuperação desse conteúdo. Nesse sentido, o uso de Tecnologias da Informação e da Comunicação (TIC) pode influenciar benéficamente, quando utilizadas como suporte ao trabalho docente, contribuindo na agilização das tarefas dos mesmos, como fonte de informação do conhecimento real dos alunos, ou na utilização de sistemas inteligentes, que auxiliem o professor a ensinar (GROENWALD; MORENO, 2006). Além disso, a construção de uma sequência didática com uso de tecnologias com o conteúdo de Frações pode estimular o aluno a desenvolver o raciocínio lógico e ampliar o pensamento matemático, elementos básicos para adquirir conhecimento, explorando situações que possibilitam ao estudante testar ideias e formular hipóteses, proporcionando um ambiente de interatividade.

A sequência didática eletrônica foi desenvolvida utilizando atividades *online* e aplicativos informáticos, como materiais de estudo, disponibilizados no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA). O SIENA é um sistema que possibilita ao professor um planejamento de ensino de acordo com a realidade dos alunos. Através de testes adaptativos, é gerado um mapa individualizado dos alunos. Esses testes estão vinculados a sequências didáticas eletrônicas, as quais servem como estudos de recuperação para os alunos que apresentarem dificuldades.

Para o trabalho no SIENA, são necessárias as seguintes ações: o desenvolvimento de um mapa conceitual com o conteúdo, evoluindo para um grafo de conceitos que serão trabalhados, um banco de questões para o teste adaptativo para cada conceito do Grafo e uma sequência didática composta por materiais de estudo, atividades *online* e atividades com o aplicativo *JClic* para cada conceito a ser trabalhado.

Esta pesquisa foi desenvolvida no âmbito do Programa Observatório da Educação - Edital Nº 38/2010/CAPES/INEP, no Projeto Formação Continuada de Professores em Ciências e Matemática, visando ao Desenvolvimento para o Exercício Pleno da Cidadania, que tem por objetivo a formação continuada de professores de Séries Iniciais, Ciências e Matemática do Ensino Fundamental de cinco escolas públicas, nas cidades de Canoas, Sapucaia do Sul e São Leopoldo, integrando a qualificação dos professores e a pesquisa em Ensino de Ciências e Matemática.

O trabalho foi dividido em nove capítulos. No capítulo 1, apresentam-se ideias e reflexões sobre o currículo no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de Frações e como se desenvolve esse processo ao longo do currículo escolar. O segundo capítulo traz a evolução das ideias sobre as Frações ao longo do desenvolvimento da humanidade e reflexões sobre o processo didático para o ensino e aprendizagem das Frações.

As dificuldades no processo de ensino e aprendizagem, assim como os erros típicos que os alunos cometem ao trabalhar com as Frações são abordados no terceiro capítulo. O capítulo 4 trata da importância dos estudos de recuperação como instrumento de inclusão, no processo escolar de alunos com dificuldades de aprendizagem. Esse capítulo traz as indicações legais da recuperação de conteúdo. No quinto capítulo, são abordadas as ideias sobre o uso das Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC) no ambiente escolar.

Os pressupostos metodológicos são apresentados no sexto capítulo, tratando do tema, da problemática, dos objetivos, da metodologia adotada para o desenvolvimento da pesquisa e das ações realizadas para a construção do ambiente de investigação. O capítulo 7 apresenta como foi implementado, na plataforma SIENA, o ambiente de investigação da pesquisa desenvolvida, contendo o grafo construído com o conteúdo de frações, o banco de questões para os testes adaptativos e a sequência didática eletrônica com o tema frações, para alunos que necessitavam estudos de recuperação nesse conteúdo.

O oitavo capítulo descreve o experimento realizado na escola durante a pesquisa. O nono capítulo apresenta análise dos dados sob três perspectivas: análise do desempenho geral da turma de alunos; análise individual dos alunos; análise da sequência didática eletrônica desenvolvida com o conteúdo de Frações.

1 O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES

Neste capítulo, apresentam-se ideias e reflexões sobre o currículo no processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de Frações e como se desenvolve esse processo ao longo do currículo escolar, no Ensino Fundamental, baseado nas orientações de documentos oficiais como os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) (BRASIL, 1997¹; 1998²), nas Lições do Rio Grande³ (RIO GRANDE DO SUL, 2009) e em propostas, questões e reflexões de pesquisadores que atuam nessa área de investigação.

1.1 O CURRÍCULO NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES

No currículo escolar, desde os anos iniciais, estudam-se os Números Naturais, abordando o sistema de numeração decimal e as quatro operações. Depois disso os alunos passam a se familiarizar com o conjunto dos Números Racionais. Conforme os PCN (BRASIL, 1997), a construção da ideia de Número Racional é relacionada à divisão entre dois números inteiros, excluindo-se o caso em que o divisor é zero. Ou seja, desde que um número represente o quociente entre dois inteiros quaisquer (o segundo não nulo), ele é um Número Racional e pode ser representado por Frações e por números decimais. Neste trabalho, os Números Racionais serão abordados na sua representação fracionária, não abrangendo os números decimais.

Os PCN (BRASIL, 1997, p.80) orientam que, no segundo ciclo do Ensino Fundamental, o ensino de Matemática deve levar o aluno a construir o significado do Número Racional e suas representações fracionária e decimal, a partir de seus diferentes usos no contexto social. No primeiro contato, os alunos tentam transpor os conhecimentos já adquiridos sobre os Números Naturais para esse outro universo numérico e cabe à escola proporcionar situações em que fiquem claras as diferenças entre os conjuntos, para que os estudantes confrontem os saberes (NOVA ESCOLA, 2009). Para Broitman (NOVA ESCOLA, 2009), os problemas envolvendo Frações são muito mais complexos para os

¹ Os PCN (BRASIL, 1997) são orientações para o 1º ciclo (1ª e 2ª série/2º e 3º ano) e 2º ciclo (3ª e 4ª série/4º e 5º ano) do Ensino Fundamental.

² Os PCN (BRASIL, 1998) são orientações para o 3º ciclo (5ª e 6ª série/ 6º e 7º ano) e 4º ciclo (7ª e 8ª série/8º e 9º ano) do Ensino Fundamental.

³ Especificamente, este trabalho será embasado no Referencial Curricular de Matemática elaborado pela Secretaria da Educação do Estado do Rio Grande do Sul.

⁴ Os PCN (BRASIL, 1998) não orientam para se pesquisar em realidade o número de frações em um 9º ano) do Ensino Fundamental.

⁵ Especificamente, este trabalho será embasado no Referencial Curricular de Matemática elaborado pela Secretaria da Educação do Estado do Rio Grande do Sul.

estudantes. O aprendizado implica romper com muitas das certezas e dos saberes que os alunos construíram ao longo da vida escolar. Considerar essas rupturas é uma forma eficaz de entender a origem das dificuldades na aprendizagem desse novo campo numérico e, com isso, ajudar todos os alunos a avançar.

Em geral, no Brasil, o trabalho com as Frações inicia-se no 4º ano do Ensino Fundamental, sendo retomado e ampliado nas duas séries subsequentes e, pontualmente, em todas as séries do Ensino Fundamental e Médio (CAMPOS; SILVA; PIETROPAOLO, 2009, p.131). Mas, as primeiras noções sobre Frações podem ser iniciadas entre o 2º e o 3º ano do Ensino Fundamental, de forma mais simples, com questões que envolvam metades e quartos, relacionados a medidas de peso, capacidade e tempo, conforme Broitman (NOVA ESCOLA, 2009, p.73).

Para a revista Nova Escola (2009), é a partir do 4º ano que, efetivamente, um estudo constante das Frações se torna necessário, pois elas começam a aparecer em diversas situações científicas e do dia a dia e necessitam ser compreendidas. As Frações passam a ser utilizadas em situações onde os Números Naturais não dão conta de representar a realidade, como, por exemplo, quando se fazem medições e sobra uma parte que não corresponde a uma unidade de medida inteira ou ao comprar meio quilo de um mantimento. Assim conhecer o funcionamento e as regras dessa classe numérica é fundamental para que o aluno aprofunde os conhecimentos durante a vida escolar. Inicialmente, ele deve reconhecer as Frações e as situações em que seu uso se faz necessário, aprendendo a compará-las e ordená-las (NOVA ESCOLA, 2009, p.73).

Alguns conceitos de Frações são tratados de forma natural, como a ideia de metade, fazendo referência à divisão em partes iguais. Essa divisão, até quando não tratada formalmente, é facilmente assimilada. Porém, outras ideias de Frações, mesmo sendo encontradas com certa regularidade, como, por exemplo, nos jornais, para apresentação de dados, ou ainda em receitas de culinárias, não fazem parte do vocabulário cotidiano, causando até certo estranhamento, ficando o seu uso restrito ao ambiente escolar. Na vida cotidiana, o uso de Frações limita-se a metades, terços, quartos e mais pela via da linguagem oral do que das representações (BRASIL, 1997, p. 103).

A utilização da linguagem das Frações no dia a dia pode estar relacionada a questões culturais e educacionais. Nos países que adotam como medida o “sistema imperial” - ou seja, em polegadas - o uso da linguagem de Frações é mais comum, é possível que as Frações se tornem mais familiares aos alunos, pelo seu uso habitual. Já em nações como no Brasil, que adotam o sistema métrico decimal, a utilização das Frações ordinárias é frequentemente

evitada fora da sala de aula. Assim, em relação ao ensino de Frações, a escola assume o papel fundamental de estimular o uso de representações fracionárias por parte dos alunos, uma vez que as oportunidades desse uso fora da escola podem ser reduzidas (NUNES; CAMPOS; MAGINA; BRYANT, 2009).

Ainda com relação às Frações e à linguagem do cotidiano, Llinares e Sánchez (1988) destacam que,

no caso das Frações, o uso cotidiano se restringe em realidade em muito pouco: um meio, um terço, um quarto e três quartos principalmente; dois terços, um quinto, um oitavo, muito menos. O campo de aplicação de cada uma delas vai se reduzindo consideravelmente, salvo um meio, que tem um uso quase que universal e aparece automaticamente em praticamente todas as situações quantificáveis e incluso como uma primeira estimação a uma quantidade: meia-entrada, a metade do caminho, etc. (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 19). Tradução nossa⁴.

Embora algumas expressões relacionadas às Frações, como “metade”, serem utilizadas espontaneamente pelos alunos de forma rotineira, isso não significa que em expressões como, por exemplo, meio-dia, a criança esteja pensando, necessariamente, na metade de um dia com relação a um dia completo. O mesmo acontece quando se diz: “Me dá à metade do seu pastel”. Seguramente a ênfase do significado não está colocada no fato de que as metades sejam exatamente iguais (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 18).

Ao raciocinar sobre Frações como se fossem naturais, os alunos acabam tendo que enfrentar vários obstáculos, conforme os PCN (BRASIL, 1998, p.101):

- um deles está ligado ao fato de que cada Número Racional pode ser representado por diferentes (e infinitas) escritas fracionárias; por exemplo, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{6}$, $\frac{3}{9}$ e $\frac{4}{12}$ são diferentes representações de um mesmo número;
- outro diz respeito à comparação entre Frações, pois acostumados com a relação $3 > 2$, terão que construir uma escrita que lhes parece contraditória, ou seja, $\frac{1}{3} < \frac{1}{2}$;
- se, ao multiplicar um número natural por outro natural (sendo esse diferente de 0 ou 1), a expectativa era a de encontrar um número maior que ambos, ao multiplicar 10 por $\frac{1}{2}$, ficarão surpresos ao ver que o resultado é menor do que 10;

⁴ En el caso de las fracciones el uso cotidiano se restringe en realidad a muy pocas: un medio, un tercio, un cuarto y tres cuartos principalmente; dos tercios, un quinto, un octavo, mucho menos. El campo de aplicación de cada uno de ellas se va reduciendo considerablemente, salvo un medio, que tiene un uso casi universal y aparece automáticamente en prácticamente todas las situaciones cuantificables, e incluso como una primera estimación a una cantidad: media entrada, a mitad del camino, etc.

- se a sequência dos Números Naturais permite falar em sucessor e antecessor, com Frações isso não faz sentido, uma vez que entre duas Frações quaisquer é sempre possível encontrar uma outra.

A simples “transferência” das propriedades ou características de um tipo de número para outro pode tornar-se um “problema” no processo de aprendizagem das Frações (CAMPOS; SILVA; PIETROPAOLO, 2009). Uma forma de incentivar o aprendizado em relação a esse conteúdo é que essas devem aparecer em contextos variados, que proporcionem aos estudantes a realizar com elas as mesmas atividades que desenvolvem com os Números Naturais, como somar, dividir e ordenar. É importante que os alunos estabeleçam relações entre as Frações e os problemas que elas resolvem utilizando os Números Naturais (NOVA ESCOLA, 2009). O confronto de ideias é essencial. “O debate força os alunos a explicitar suas hipóteses, refletir sobre as dos colegas e reelaborar o pensamento inicial” , segundo Pandovan (NOVA ESCOLA, 2009).

Para Llinares e Sánchez (1988), a constatação do baixo rendimento conceitual e a pouca destreza com Frações leva a questionar o nível apropriado para o seu aprendizado. A esse respeito, Freundenthal (1973 apud LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 26) diz que “as Frações complicadas e as operações com elas são invenções dos professores que só podem entendê-las em um nível superior”.

Indo ao encontro dessa ideia, Lellis e Imenes (1994) fazem uma reflexão sobre o currículo de Matemática na 5ª série (6º ano), exemplificando com uma situação de certa forma corriqueira, no aprendizado de Frações, em relação ao algoritmo da adição com denominadores diferentes:

- a) encontra-se o menor denominador comum das parcelas, calculando-se o mínimo múltiplo comum;
- b) troca-se cada Fração por outra, equivalente à primeira, que tenha o denominador encontrado;
- c) soma-se os numeradores dessas Frações, conservando-se o denominador.

Os autores dizem que o processo pode parecer complicado para uma criança, mas talvez não seja, pois muitas conseguem executar esses passos com sucesso, desde que bem treinadas. Mas será que compreendem o algoritmo? Para os autores, agora a resposta é outra: talvez algumas possam entender o processo, mas não é o caso da maioria. Existe uma grande quantidade de algoritmos, conceitos e regras que compõem o estudo das Frações. Lellis e Imenes (1994) ilustram que, para os alunos, há que extrair inteiros, há de dividir “multiplicando pela inversa da segunda Fração”, há que transformar números mistos em

Frações impróprias e entre outros. Com tantos detalhes, torna-se difícil considerar o conteúdo adequado ou acessível para a faixa etária. As técnicas podem ser dominadas, mas as ideias não podem ser bem compreendidas. Em consequência, multiplica-se em vão o esforço de aprendizado, como ocorre sempre que se é obrigado a dominar algo que não se entende.

Ainda, segundo os autores, existe o argumento de que essa experiência desenvolve o raciocínio, mas para eles isso não se sustenta, já que seguir passos e memorizar palavras, embora seja uma atividade mental necessária, pode ser treinado de inúmeras maneiras mais proveitosas. Além disso o argumento de que as Frações são necessárias, na 5ª série (6º ano), porque são muito usadas no dia a dia, peca por inconsistência. Na verdade, excetuando-se aquelas Frações já incorporadas à linguagem - meios, terços, quartos e quintos - as Frações só muito raramente surgem em situações do cotidiano. Por que, então, tanta insistência com as Frações? Os próprios autores respondem:

A idade de nosso currículo sugere a resposta. Ele vem de uma época em que as unidades decimais de medida mal estavam implantadas. Polegadas, libras, onças e léguas eram largamente usadas no comércio e na indústria e todas essas unidades acham-se ligadas às Frações. Naqueles tempos, a escola terminava, para a maioria, no 4º ou 5º ano do grupo escolar. Era, então, razoável - ao menos do ponto de vista social - que se tentasse equipar o estudante com conhecimentos sobre Frações nessa faixa etária, posto que muitos não teriam mais nenhuma oportunidade de frequentar a escola. Essa situação modificou-se há décadas, mas o currículo continuou impávido... (LELLIS; IMENES, 1994, p.7).

Parece claro, para alguns autores, que muito das dificuldades do processo de ensino e aprendizagem de Frações, passa pela falta de maturidade intelectual dos alunos. Talvez por imposição do currículo não há respeito a esse aspecto considerado importante.

Os PCN (BRASIL, 1997) orientam o trabalho com as Frações da seguinte forma:

- reconhecimento das Frações no contexto diário;
- leitura, escrita, comparação e ordenação de representações fracionárias de uso frequentes;
 - reconhecimento de que os Números Racionais admitem diferentes (infinitas) representações na forma fracionária;
 - identificação e produção de Frações equivalentes, pela observação de representações gráficas e de regularidades nas escritas numéricas;
 - exploração dos diferentes significados das Frações em situações-problema: parte-todo, quociente e razão;
 - observação de que os Números Naturais podem ser expressos na forma fracionária;

- relação entre representações fracionária e decimal de um mesmo Número Racional.

As diretrizes propostas pelos PCN deram início a um processo de construção curricular que deverá ser concluída pelos sistemas de ensino estaduais e municipais. O livro Lições do Rio Grande (RIO GRANDE DO SUL, 2009) apresenta sugestões com o propósito de subsidiar a tomada de decisões, por parte do professor, quanto ao tratamento, à ênfase e à profundidade com que alguns temas poderão ser explorados. Quanto ao desenvolvimento do conteúdo de Frações nos anos finais do Ensino Fundamental, encontram-se as seguintes propostas:

- a partir do 6º ano, os números fracionários, os números decimais e os cálculos simples de porcentagem são apresentados a partir do Sistema Monetário, partindo de situações do cotidiano, explorando os conhecimentos prévios dos alunos, devendo o estudo das Frações explorar a história da Matemática, mostrando que elas surgiram pela necessidade do homem medir no Egito Antigo;

- as Frações, no 6º ano por essa abordagem curricular, se detêm mais na relação “parte” e “todo”, ao mesmo tempo em que o professor explora a ideia de divisão;

- a equivalência de Frações deve ser explorada de modo a favorecer a compreensão do aluno, por ser um conceito que ele utiliza ao longo do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, por isso a sua abordagem deve exigir a reflexão dos alunos em lugar de receitas prontas, sem significado;

- no 7º ano, é necessário que os alunos ampliem sua capacidade de operar com números fracionários e decimais, aprofundando a sua compreensão do significado das operações e seus algoritmos;

- no 7º ano, a ideia de Fração precisa ser ampliada para algo que represente um número que pode ser escrito de diferentes formas, como, por exemplo: $\frac{1}{4}$ passa a ser entendido como resultado da divisão de 1 por 4;

- surgem também, no 7º ano, as Frações negativas, em que acontece a junção de duas linguagens, a das Frações e a dos números inteiros;

- no 8º ano, em relação às Frações, surge a construção da ideia de Número Racional e a determinação de Frações geratrizes, sendo exploradas, também, as ideias de infinito e classes de equivalência;

- no 8º e 9º ano, o estudo das Frações amplia-se e essas são exploradas sob diferentes enfoques, como divisão entre dois números e como razão, chegando pela equivalência até a proporção.

Essas sugestões, como afirma o próprio documento, podem ser adaptadas, reduzidas, ampliadas, em função da realidade de cada escola e de cada turma de alunos, considerando-se necessidades e possibilidades, respeitando-se os propósitos do trabalho do professor ou da escola, explicitados em seus planejamentos.

Nos Princípios e Normas para a Matemática Escolar da National Council of Teachers of Mathematics (NCTM, 2000), pode-se encontrar outra proposta de desenvolvimento curricular do conteúdo de Frações, pode-se encontrar. Este documento propõe que, entre a pré-escola e o 2º ano do Ensino Fundamental, pode-se estimular os alunos para que entendam e representem Frações usadas em contexto familiares, tais como $\frac{1}{2}$ de um biscoito ou $\frac{1}{8}$ de uma pizza. A expectativa é que eles possam compreender e representar Frações mais simples como $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{2}$. Nesses primeiros anos escolares, os professores deveriam ajudar os alunos a desenvolver a noção de Frações como divisão de números e, nos níveis médios, como parte dos estudos sobre proporcionalidade, já que os estudantes necessitam dar solidez a seus conhecimentos de Frações como números.

Para os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NCTM, 2000), entre o 3º e 5º anos, os alunos podem aprender a comparar Frações, mediante referências familiares, como $\frac{1}{2}$. À medida que se desenvolve seu sentido numérico, deveriam ser capazes de pensar sobre os números. Por exemplo, ao explicar que $\frac{1}{2} + \frac{3}{8}$ tem que ser menos que 1, porque uma das parcelas é $\frac{1}{2}$ e a outra é menor que $\frac{1}{2}$. Espera-se, nesse nível, que os alunos possam:

- desenvolver a compreensão das Frações como partes de uma unidade inteira, partes de uma coleção, pontos na reta numérica e divisões de Números Naturais;
- utilizar modelos, referências e formas equivalentes para julgar o tamanho de uma Fração;
- reconhecer e generalizar formas equivalentes de Frações;
- desenvolver e utilizar estratégias para estimar resultados de cálculos com Frações e decimais, em situações relevantes de suas experiências.

Entre os 7º e 9º anos as operações com os Números Racionais deveriam ter maior importância. Segundo Graeber e Campbell (1993 apud NTCM, 2000), as intuições dos estudantes e as operações devem adaptar-se quando trabalham com uma estrutura numérica ampliada. Por exemplo, ao se multiplicar um Número Natural por uma Fração compreendida entre 0 e 1 (exemplo: $8 \times \frac{1}{2}$), o resultado é menor que o Número Natural multiplicado, o que contradiz as experiências prévias (com os Números Naturais) dos alunos, segundo os quais, ao multiplicar, resulta sempre um número maior. Ainda, para os Princípios e Normas para a Matemática Escolar (NTCM, 2000), nessa etapa os alunos deveriam:

- trabalhar com Frações para resolver problemas;
- comparar e ordenar Frações com eficácia e encontrar sua posição aproximada na reta numérica;
- compreender o significado e os efeitos das operações aritméticas com as Frações;
- desenvolver e analisar algoritmos para calcular com Frações.

Para Lopes (2006), há vários mitos e equívocos a respeito do currículo de Matemática e sua implementação. Um dos mais preocupantes é o de que um tópico específico ou campo conceitual é exclusividade de uma determinada série. Ele exemplifica, citando as Frações que, há muitas décadas, com todo o seu acervo de conceitos e procedimentos subjacentes (Frações próprias, equivalentes, ordenação, aplicações e cálculos) têm sido "ensinadas" no 6º ano do Ensino Fundamental, como um pacote.

Confinar o tema Frações em algumas séries do currículo é um erro grave, pois desconsidera o fato de que o desenvolvimento do pensamento proporcional se estende por um longo período, que vai dos 7/8 anos aos 14/15 anos, em níveis distintos de complexidade (LOPES, 2008, p.11). Para o autor, há muitas questões que necessitam de reflexões e respostas em relação ao ensino e aprendizagem do conteúdo de Frações:

- os alunos aprendem?
- o que eles aprendem?
- será que mecanizam procedimentos para se dar bem nas provas?
- como incorporam tudo o que é ensinado?
- por que, em geral, não transferem seus conhecimentos sobre Frações para situações em que não foram ensinados?
- por que, em geral, se esquecem do que aprenderam quando passam para as séries seguintes?

A partir dessas questões e reflexões, Lopes (2008) ressalta que estudos como o de Santos (1991) sugerem que o ensino de Frações deve ser gradativo, que deveriam dosar o ensino das operações, de modo que elas pudessem ser, realmente conceituadas e incorporadas às estruturas de pensamento dos alunos. Para o autor, o ideal é que a organização e distribuição dos conteúdos relativos ao ensino de Frações, no currículo de Matemática do 6º ao 9º ano, devem envolver atividades ao longo dos quatro anos, sugerindo:

- os alunos podem ser introduzidos ao estudo das Frações, no 6º ano, e atividades de conceitualização e uso das Frações, ao longo dessas 4 séries, podem funcionar como revisão, reforço e introdução de novas situações, com ênfase no conceito de Fração equivalente e nas operações aditivas (adição e subtração). A equivalência é utilizada para introduzir a forma decimal e para, em seguida, introduzir ou explorar as porcentagens;

- no 7º ano, pode ser realizada uma revisão, com problemas e situações novas, para, assim, começar a problematizar, de modo que os alunos explorem as operações de natureza multiplicativa (multiplicação e divisão). Ainda, nessa série, a notação fracionária é utilizada em situações usualmente intituladas de "razões e proporções";

- uma retomada deve ser realizada no 8º ano, agora em uma perspectiva algébrica, onde a Fração é conceituada como Número Racional, formando o conjunto \mathbb{Q} dos Racionais, que surge como o primeiro conjunto denso com que os alunos têm contato. A densidade é uma importante propriedade de conjuntos numéricos. O conjunto \mathbb{Q} é dito denso porque, em dados quaisquer racionais X_1 e X_2 existe sempre um outro número racional entre eles;

- no 9º ano, os alunos devem realizar um balanço formal de seus conhecimentos numéricos, colocando os conjuntos dos vários tipos de números, que já dominam, uns em relação aos outros, de modo a descobrir novas propriedades, estender definições, etc.. Ao estudarem matemática comercial e financeira, devem utilizar os Números Racionais na forma fracionária ou decimal, como operadores (taxas, fatores de aumento ou decréscimo).

Alguns pesquisadores refletem sobre a importância do estudo das Frações e os aspectos sociais que influenciam o currículo escolar, como e até onde explorar as ideias relacionadas a elas. Conforme Llinares e Sánchez (1988), muitos autores sugerem que poderiam reduzir-se enormemente o ensino das Frações, na escola, com o argumento de sua pouca utilidade prática, e que, em uma cultura que utiliza o Sistema Métrico Decimal, as unidades métricas requerem Frações decimais e não ordinárias. Por outro lado, curiosamente, o argumento de pouca utilização das Frações, por parte das crianças e adultos, é o mesmo em que outros pesquisadores se apoiam para manter sua permanência: se não são compreendidas,

como podem ser utilizadas? Um melhor ensino do conceito de Frações aumentaria imediatamente sua utilização na vida cotidiana (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 25).

Wilson e Dalrympe (1937 apud LLINARES; SÁNCHEZ, 1988) realizaram uma investigação sobre os usos sociais e comerciais das Frações. Fizeram uma tabulação da frequência que eram utilizadas por diversas pessoas em seus trabalhos, concluindo que “a necessidade de manejar com desenvoltura as Frações na vida cotidiana se limitava a metades, terços, quartos, doze avos [...], o resto das Frações se utilizava raramente [...], e a divisão não aparecia quase nunca.” Consequentemente, sugeriram que se poderia reduzir enormemente o ensino das Frações na escola.

Para Llinares e Sánchez (1988), os critérios guiados por necessidades sociais não parecem os mais adequados para decidir sobre o ensino das Frações, já que,

[...] ainda que muitos dos estudantes não continuem os estudos superiores, não cremos correto estabelecer discriminações “a priori” entre os que serão futuros matemáticos e cientistas dos que não serão. Por isso, não devemos limitar o currículo às estritas necessidades da vida diária e somos partidários de manter as Frações na escola elementar. Agora, manter as Frações não quer dizer perpetuar o desconhecimento do seu significado, com a subtilização do conceito e a sobrevalorização dos algoritmos como em muitas ocasiões encontramos. Devemos dar ao aluno um conhecimento intuitivo profundo das Frações, apresentando as crianças contextos significativos tanto para o conceito como para seu campo de aplicação, e buscando conexões conceituais com os decimais, porcentagens, razões, etc. (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 33-34). Tradução nossa⁵.

Conforme o livro Lições do Rio Grande (RIO GRANDE DO SUL, 2009), é preciso sempre problematizar diante de cada disciplina ou conteúdo: qual o papel desse conteúdo na formação básica para viver no mundo contemporâneo? Para que esse conhecimento é importante? Segundo a Lei de Diretrizes e Bases (BRASIL, 1996), a Educação Básica não está destinada a nenhum desses objetivos, pois ela está totalmente voltada para a constituição de pessoas capazes de viver, conviver e trabalhar nesta sociedade, de modo produtivo, solidário, integrado e prazeroso.

⁵ [...] aunque muchos de los estudiantes no continuarán estudios superiores, no creemos correcto establecer discriminaciones “a priori” entre los serán futuros matemáticos y científicos de los que no. Por ello, no debemos limitar el currículo a las estrictas necesidades de la vida diaria, y somos partidarios de mantener las fracciones en la escuela elemental. Ahora bien, mantener las fracciones no quiere decir perpetuar el desconocimiento de su significado, la infrautilización del concepto y la sobrevaloración de los algoritmos con que en muchas ocasiones nos encontramos. Debemos dar a los alumnos un conocimiento intuitivo profundo de las fracciones, presentando al niño contextos significativos tanto para el concepto como para su campo de aplicación, y buscando conexiones conceptuales con decimales, porcentajes, razones, etc.

1.2 O PAPEL DO PROFESSOR NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES

As Lições do Rio Grande (RIO GRANDE DO SUL, 2009) trazem uma importante reflexão sobre o papel do professor no contexto do processo de ensino e aprendizagem:

Cabe ao professor garantir a aprendizagem de seus alunos bem como a sua formação como cidadãos capazes de atuar na realidade que os cerca, transformando-a. Para isso, é fundamental que o professor seja capaz de gerenciar a sua sala de aula, no que diz respeito ao planejamento da ação pedagógica, à seleção do conteúdo, à escolha das situações de aprendizagem, à organização do espaço da sala, dos materiais, dos equipamentos e dos recursos a serem utilizados, no que refere às relações pessoais e interpessoais, gerenciando os conflitos com soluções criativas e educativas, analisando os erros e encarando-os como aliados no ensino e na aprendizagem (RIO GRANDE DO SUL, 2009, p.44).

Segundo Ponte (1998 apud SILVA, 2007, p. 26), a forma como o professor conduz o processo de ensino e aprendizagem, na sala de aula pressupõe, necessariamente, um conhecimento de quatro domínios fundamentais: (a) a Matemática, (b) o currículo, (c) o aluno e os seus processos de aprendizagem e (d) a organização da atividade instrucional, sendo que esses quatro domínios constituem o núcleo do conhecimento profissional do professor, referente à sua “prática letiva” e, além disso, estão estruturados de acordo com as concepções do professor.

Conforme Llinares e Sánchez (1988), as teorias subjetivas do professor, suas atitudes, crenças e expectativas assumem um papel relevante nesse complexo processo que se desenvolve em sala de aula,. É importante o que pensa o educador sobre a própria atuação como professor de Matemática, sobre o conteúdo matemático em geral e sobre a sua opinião sobre o processo de ensino e aprendizagem, entre outros, já que, de alguma maneira essas ideias atuam como um filtro na hora de transformar a informação teórica em recursos práticos (BROMMER; BROPHY, 1986 apud LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 21).

Fazer surgir nossas concepções como professores é vital para poder maximizar o resultado da conexão entre a teoria e a prática cotidiana. Proporcionar as razões que explicam tanto as decisões tomadas em relação ao ensino, aprendizagem e conteúdo que vamos tratar, como o caminho seguido para tomar essas decisões e não outras, podem ajudar-nos a ser profissionais reflexivos e não simplesmente transmissores das ideias dos outros (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 21). Tradução nossa⁶.

⁶ El hacer surgir nuestras propias concepciones como profesores es de vital importancia para poder maximizar el resultado de las conexión entre la Teoría y la Práctica cotidiana. Proporcionar las razones que expliquen tanto las decisiones en relación a la enseñanza, el aprendizaje y el contenido que vamos a tratar, como el camino seguido para tomar estas decisiones y no otras, puede ayudarnos a ser profesionales reflexivos y no simples transmissores de las ideas de otros.

Para Llinares e Sánchez (1988), no caso de um conceito que organiza os conhecimentos cujo uso e a incidência em seu meio social é significativo, as ideias do professor condicionam suas decisões, tanto em relação ao conteúdo, como a sua seleção, planejamento e na avaliação do processo.

Em relação a esse contexto, os autores apresentam uma série de questões indicativas, divididas em três grupos: o primeiro se refere às Frações e à utilidade ou não do seu ensino na escola; o segundo grupo trata sobre o que significa aprender o conceito de Frações e o lugar que elas devem ocupar no currículo escolar; o último grupo relaciona-se à a valorização que se dá à aprendizagem das operações com Frações.

No primeiro grupo, Llinares e Sánchez (1988) colocam uma série de questões que os professores podem e devem fazer sobre sua conduta enquanto educadores. Durante um planejamento, podem questionar-se sobre o porquê de ensinar Frações aos alunos, ou talvez, que isso não seja um problema seu, já que os conteúdos dos programas escolares são fixados pelos planos de estudos. Os autores indagam se os professores têm parado para considerar sobre o que pretendem com o ensino das Frações. Se creem que a razão para ensiná-las é que são úteis na vida cotidiana. Ou será que seu interesse reside em que são necessárias para outros conteúdos escolares? Condicionam essas opiniões ao conteúdo que vão explicar? De que forma a metodologia empregada, em sala de aula, para tratar esses conteúdos, reflete as ideias dos professores?

Ainda em relação a esse primeiro grupo de questões, Llinares e Sánchez (1988) salientam que outro aspecto que preocupa os docentes é sobre o que se deve ensinar sobre Frações. O que é o básico? É preciso acrescentar ou reduzir algo ao que está nos livros didáticos, já que esses não levam em consideração as características dos seus alunos? Por outro lado, a aparição das calculadoras e sua notação decimal afetou de algum modo o ensino de Frações? Esse poderá ser desnecessário? Ou, ao contrário, torna-se mais necessário à ênfase que põem na compreensão dos conceitos e não no tratamento do algoritmo?

O segundo grupo de questões levantadas por Llinares e Sánchez (1988) é acerca do aprendizado do conceito de Frações e o lugar que devem ocupar no currículo. Os autores projetam algumas perguntas que podem surgir quando o professor ensina Frações: o professor pensa que os alunos apresentam problemas de aprendizagem? Se esses problemas existem, são do mesmo tipo que os encontrados em outros conceitos matemáticos? Considera que as Frações podem ter interpretações diferentes? Considera que seu uso é complicado? Acredita que as dificuldades de utilização, pelos alunos, ocorrem porque deveriam ser ensinados de forma distinta?

Quanto ao “lugar” das Frações no currículo, será que o professor considera que não é apropriado e que deveria ser incorporado a outros cursos? Anterior ou posterior? Por quê? Ou, por acaso, isso ocorrerá em função dos conhecimentos prévios que os alunos necessitam? Que noções são básicas? Que destrezas terão que manejar para poder introduzir as Frações?

No terceiro grupo, os autores questionam sobre os aspectos relacionados com as operações com Frações. Será que os professores creem que os alunos identificam as noções de operações com Frações em situações cotidianas? Será que os alunos utilizam os algoritmos relativos às operações com as Frações nas situações do cotidiano? Que relação existe entre o algoritmo que pode ensinar na escola e o processo pessoal que um aluno utiliza diante de uma situação similar, encontrada fora da escola? É necessário manter o ensino do algoritmo das operações com Frações vinculadas a situações concretas, ou, por outro lado, é realmente útil ensinar na escola? Não seria mais prático passar as Frações para números decimais e utilizar a calculadora para realizar os cálculos?

Finalizando esse grupo de questões, os autores supõem que talvez os professores observem durante o processo de aprendizagem que os alunos cometem erros diante de problemas de mesma estrutura. Mas esses erros são comuns a vários alunos? Os erros se devem ao uso de procedimentos errôneos? Como e quando são detectados? Quando são detectados, que explicação têm dado? Essa explicação tem influenciado o enfoque posterior das mesmas questões? E as levam em consideração na hora de continuar o processo de ensino? Fazendo uma análise das questões levantadas, Llinares e Sánchez (p. 23, 1988) destacam que

O modo de responder às perguntas anteriores depende, em parte, das nossas crenças. É evidente que o processamento de informação que o professor realiza na hora de tomar suas decisões, sua forma de pensar, suas opiniões influenciam de forma decisiva na hora de realizar o processo de ensino e aprendizagem e inicia as “rotinas” de comportamento que marcam sua atuação.

[...] Portanto, é importante conhecer as próprias crenças sobre cada aspecto do ensino, para que a dinâmica de renovação e melhora do processo não se dê de forma atrofiada. E, uma vez conhecida, há de buscar oportunidades (reuniões, seminários, centro de professores, etc.) para poder trocar com outros companheiros. O confrontar ideias pode ajudar a justificar e a clarear pensamentos distintos e enfoques desiguais para os mesmos temas (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 23). Tradução nossa⁷.

⁷ El modo de responder a las preguntas anteriores depende en parte de nuestras creencias. Es evidente que El procesamiento de información que El profesor realiza a la hora de tomar sus decisiones, su forma de pensar, sus opiniones, influyen de forma decisiva a la hora de plantearse el proceso de enseñanza aprendizaje, y en la puestas en marcha de unas “rutinas” de comportamiento que marcan su actuación.

[...] Por tanto, es importante conocer nuestras propias creencias sobre cada aspecto de la enseñanza, para que la dinámica de renovación y mejora del proceso no se quede anquilosada. Y, una vez conocidas, hay que buscar oportunidades (reuniones, seminarios, centros de profesores, etc.) para poder intercambiarlas con otros compañeros. El confrontar opiniones puede ayudar a justificar y a aclarar pensamientos distintos y enfoques dispares para los mismos temas.

É possível perceber, por parte dos autores uma preocupação quanto à formação dos professores e a necessidade dos mesmos estarem em constante reflexão, num processo de autoconhecimento e autoavaliação.

Buscou-se, neste capítulo, fazer uma breve análise sobre o ensino de Frações através do currículo de Matemática no Ensino Fundamental, na perspectiva dos documentos oficiais e de autores que desenvolvem pesquisas nessa área. A intenção foi refletir sobre o processo de ensino e aprendizagem de Frações, o que ensinar, quando ensinar e como ensinar esse tema ao longo do Ensino Fundamental.

2 REFLEXÕES METODOLÓGICAS SOBRE O PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES

2.1 UM POUCO DE HISTÓRIA

Para Santos (2005), a noção de número tem sido relacionada, através dos tempos, a todos os tipos de atividade humana. Após muitos séculos de utilização dos números para contar, medir e calcular o homem começou a especular sobre a natureza e propriedades dos próprios números.

Conforme os PCN (BRASIL, 1997), ao longo do processo de ensino e aprendizagem escolar, os alunos irão perceber a existência de diversas categorias numéricas, criadas em função de diferentes problemas que a humanidade teve que enfrentar - Números Naturais, Números Inteiros positivos e negativos, Números Racionais (com representações fracionárias e decimais) e Números Irracionais. Os alunos ampliarão os conhecimentos em relação ao conceito de número ao se depararem com situações-problema envolvendo as operações de adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação e radiciação.

Conforme Santos (2005),

existe um consenso entre diversos pesquisadores da história da Matemática como, por exemplo, Boyer (1974); Caraça (1998), entre outros, afirmam que o surgimento da Matemática deve-se aos de problemas oriundos da vida diária, ou seja, salvo sua evolução e seu formalismo, a Matemática emerge de uma apreensão sensível do real, isto é, de uma tentativa de construir modelos matemáticos para resolver problemas reais (SANTOS, 2005, p.60).

Segundo Boyer (1996), as primeiras noções relacionadas com os conceitos de número, grandeza e forma podem ser encontradas nos primeiros tempos da raça humana. O conceito de Número Inteiro é o mais antigo na Matemática e sua origem se perde nas névoas da antiguidade pré-histórica.

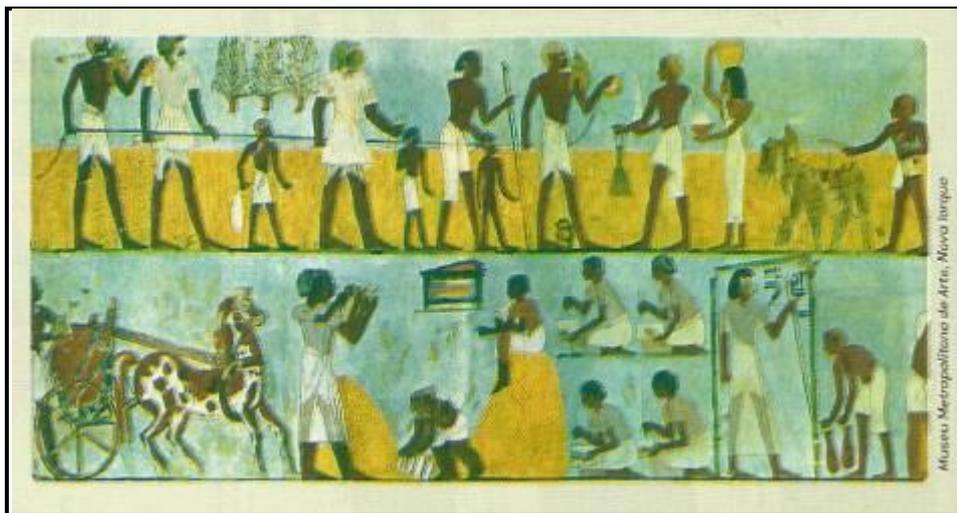
Quanto ao surgimento dos Racionais, para Boyer (1996), a noção de Fração racional surgiu bem depois dos Inteiros e, em geral, não estava relacionada de perto com os sistemas para os números inteiros. Entre as tribos primitivas parece não ter havido praticamente nenhuma necessidade da utilização de Frações. Portanto, os homens da Idade da Pedra não usavam Frações, mas, com os avanços culturais, durante a Idade do Bronze (por volta de 3150 a.C.), parece ter surgido a necessidade do conceito de Frações e de notação para Frações.

As primeiras ideias sobre Frações estão relacionadas às civilizações egípcia e mesopotâmica, tendo a sua origem na geometria. Boyer (1996) cita a obra Histórias (440 a.C.) de Heródoto, que faz referência a esse fato:

Sesóstris [...] repartiu o solo do Egito entre seus habitantes [...]. Se o rio levava qualquer parte do lote de um homem [...] o rei mandava pessoas para examinar e determinar por medida a extensão exata da perda [...]. Por esse costume, eu creio, é que a geometria veio a ser conhecida no Egito, de onde passou para a Grécia (BOYER, 1996, p.6).

Percebe-se, no texto, a necessidade de expressar numericamente uma medição. O Rei Sesóstris governou o Egito por volta do ano 3000 a.C. e, segundo Heródoto (440 a.C.), dividiu as terras em torno do Rio Nilo em lotes. Na figura 1, pode-se ver uma representação de um mural da época, onde, na parte superior, aparecem agrimensores estendendo uma corda com nós.

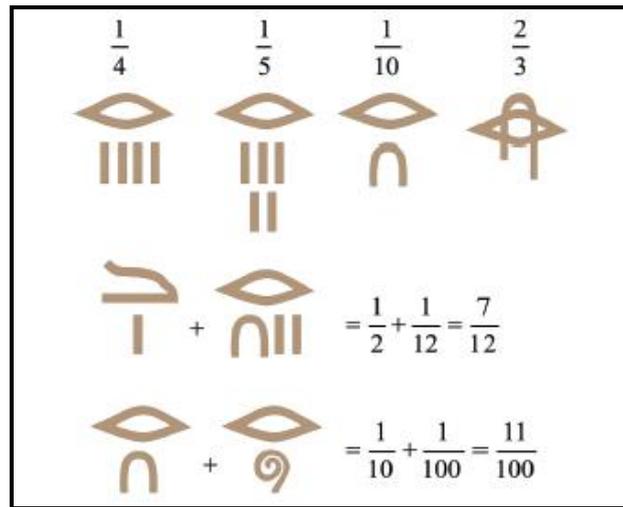
Figura 1 - representação de um mural do ano 3.000 a.C., exposto no Museu Metropolitano de Arte, Nova Iorque.



Fonte: extraído do livro Projeto Radix Matemática 6º ano.

Os egípcios utilizavam Frações com numeradores iguais a um. Uma das exceções era a Fração $\frac{2}{3}$. Na figura 2, encontram-se alguns exemplos de notações de Frações utilizadas pelos egípcios.

Figura 2 - exemplos de notação de Frações utilizadas pelos egípcios.



Fonte: extraído do livro Projeto Radix Matemática 6º ano.

O homem, ao longo dos tempos, foi adaptando a Matemática as suas necessidades culturais, aos seus avanços científicos e, assim, evoluindo o pensamento numérico. Para Santos (2005, p. 65), os conceitos numéricos foram crescendo e se, antes, serviam apenas para recenseamento, tornaram-se “marcas” adaptadas a inúmeros usos. A partir daí, não se podia apenas, comparar duas grandezas por estimativa, mas era possível dividi-las em parcelas ou, pelo menos, supô-las divididas em partes iguais de uma grandeza da mesma espécie, escolhida como padrão. Apesar desse progresso, por causa de suas notações imperfeitas, os antigos não foram capazes nem de unificar a noção de Fração nem de construir um sistema coerente para suas unidades de medida.

Segundo Santos (2005), em tabuletas de argila provenientes do período babilônico antigo (1990 a 1600 a.C.), é possível encontrar tabelas de números incluindo Frações. E entre os gregos, casos particulares de proporções (média aritmética, geométrica e a proporção áurea) eram familiares desde a época dos pitagóricos. O autor cita o exemplo do Livro V dos Elementos de Euclides, no qual era possível encontrar a teoria das proporções de Eudoxo de Cnido (aproximadamente 408 a 355 a.C.), que não só sugere a definição atual de igualdade de Frações $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, se e somente se $ad = bc$, como é muito próxima às definições de número real surgidas no século XIX.

Para o autor, na segunda metade do século XV, a principal linha de desenvolvimento da Matemática passou pelo crescimento das cidades mercantis, sob a influência direta do comércio, da navegação, da astronomia e da agrimensura. As Frações passaram a fazer parte do cotidiano das pessoas e os tipos de representação e conceitos da Antiguidade foram

aperfeiçoados e adaptados às soluções dos problemas da época. As Frações com numeradores maiores que o inteiro apareceram somente a partir do século XVI, representação essa já bem próxima das contidas nos livros dos séculos XIX e XX, com expressão de divisão. Segundo Ifrah (1996 apud Santos, 2005):

A notação moderna das Frações ordinárias se deve aos hindus, que, devido a sua numeração decimal de posição, chegaram a simbolizar mais ou menos como nós uma Fração como $\frac{34}{1265}$, onde 34 é o numerador e 1265 é o denominador. Essa notação foi depois adotada e aperfeiçoada pelos árabes, que inventaram a famosa barra horizontal (IFRAH, 1996 apud SANTOS, 2005, p. 66).

A análise histórica e epistemológica da Matemática pode ser utilizada como um dispositivo didático útil para tornar seu ensino mais interessante. Martins (1998) afirma que é possível mostrar, através de fatos históricos, o processo gradativo e lento da construção do conhecimento, permitindo que se tenha uma visão mais concreta da natureza real das Ciências, seus métodos, suas limitações, possibilitando a formação de um espírito crítico, fazendo com que o conhecimento científico seja desmistificado, sem, entretanto, ser destituído de seu valor, podendo fazer com que o educando perceba que suas dúvidas são cabíveis diante de conceitos que levaram tempo para serem estabelecidos. Para tanto, é necessário que o professor esteja apto para a tarefa de realizar o ensino da Matemática vinculado com a história da evolução científica. Para Robilotta (1988): “[...] conduzir um estudante que está fora da estrutura para dentro dela é um processo altamente complexo, que demanda do professor uma razoável compreensão de como a Ciência se desenvolve e evolui”.

Trabalhar o contexto histórico, em sala de aula, possibilita aos alunos entender a origem do conhecimento matemático, os caminhos percorridos, permitindo-lhes conjecturar sobre fatos e refletir sobre as descobertas e os equívocos ocorridos ao longo dessa construção.

2.2 PROCESSOS DIDÁTICOS PARA O ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES

Para Llinares e Sánchez (1988), os resultados de investigações de Behr et al (1983), Kerslake (1986) e Lesh et al (1983), relativas ao processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de Frações indicam que a criança pode conseguir uma compreensão ampla e operativa de todas as ideias relacionadas com o conceito de Frações. Para isso, deve-se planejar as sequências didáticas, de tal forma, que proporcionem a elas a adequada experiência com a maioria de suas interpretações.

O entendimento do conceito de Frações com as suas relações, para os autores, é um processo de aprendizagem de longo prazo. A variedade de estruturas cognitivas a que as diferentes interpretações das Frações estão conectadas condiciona esse processo de aprendizagem. Existe um longo caminho, desde o primeiro contato intuitivo dos alunos com as Frações (relação parte-todo, metades, terços, etc.), até chegar ao conhecimento de caráter algébrico associado às Frações (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p.53).

Segundo Llinares e Sánchez (1988), ao ensinar Frações, deve existir um equilíbrio entre o significado das mesmas, em contextos concretos práticos (situações problemas) e em situações mais abstratas - cálculos sem contexto (caráter algébrico). A compreensão operativa do conceito de Frações deve proporcionar a fundamentação em que se apoiam as operações algébricas que vão ser desenvolvidas posteriormente. Um bom trabalho metodológico com as Frações pode contribuir para que essas operações algébricas não se convertam em algo sem sentido para os alunos.

2.2.1 A relação parte-todo e medida

Segundo Llinares e Sánchez (1988), essa situação ocorre quando um “todo” (contínuo ou discreto) se divide em partes “congruentes” (equivalentes como quantidade de superfície ou quantidades de objetos). A Fração indica a relação que existe entre um número de partes e o número total de partes (que pode estar formado por vários “todos”). O todo recebe o nome de unidade e essa relação parte-todo depende diretamente da habilidade de dividir um objeto, em partes ou peças iguais.

Para Bittar e Freitas (2005), o estudo de Frações deve ser iniciado por meio de atividades, situações e materiais adequados ao nível de desenvolvimento cognitivo dos alunos, partindo dos seus conhecimentos prévios. Desde cedo, a criança utiliza formas de medir que usam números fracionários, principalmente a metade, representada por $\frac{1}{2}$, porém, a criança não conhece essa notação. Para os autores, o professor pode começar o estudo de Frações explorando um problema do tipo:

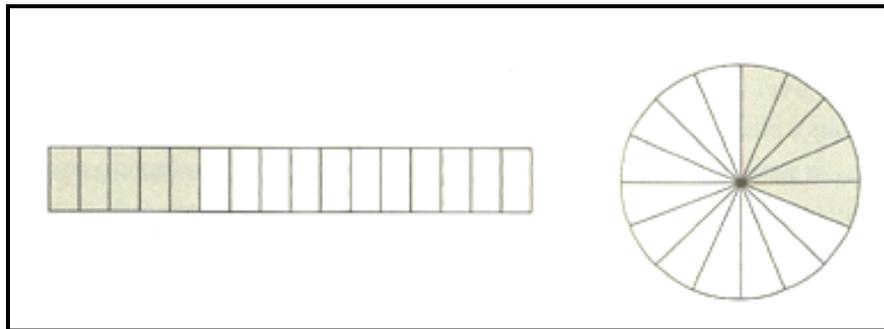
- “João ganhou um pacote de balas de sua avó. Ele deveria ficar com a metade das balas e dar a outra metade para seu irmão Lucas. Se o total de balas do pacote era igual a 18, quantas balas cada um recebeu?”

Uma vez encontrado o resultado, o professor deve explorar a ideia de “metade de uma quantidade” e introduzir, gradativamente, a notação fracionária para “metade de” alguma

quantidade. Pode-se, em seguida, estender o problema para o caso de terem que dividir a quantidade total entre três irmãos. Dessa forma, o total de balas foi dividido em três partes iguais e cada criança recebeu $\frac{1}{3}$ desse total.

Segundo Bittar e Freitas (2005), a simbologia e nomenclatura usadas no estudo das Frações devem ser acompanhadas sempre de uma ou mais representações gráficas como, por exemplo, as representações de $\frac{5}{16}$, como mostra a figura 3.

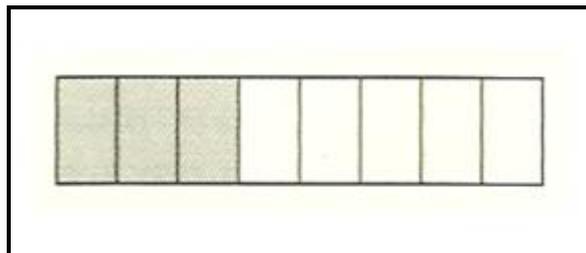
Figura 3 - representações gráficas da Fração $\frac{5}{16}$.



Fonte: Bittar e Freitas (2005).

Para os autores, é costume a utilização de retângulos para o estudo das Frações. Por exemplo, para representar $\frac{3}{8}$, divide-se um retângulo em oito partes iguais e pinta-se 3 dessas partes (figura 4).

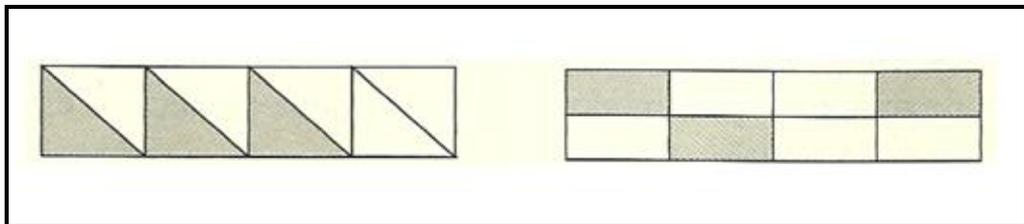
Figura 4 - representação gráfica da Fração $\frac{3}{8}$ utilizando retângulo.



Fonte: Bittar e Freitas (2005).

Mas, é importante observar que existem várias formas de representar $\frac{3}{8}$ desse retângulo, como mostra a figura 5.

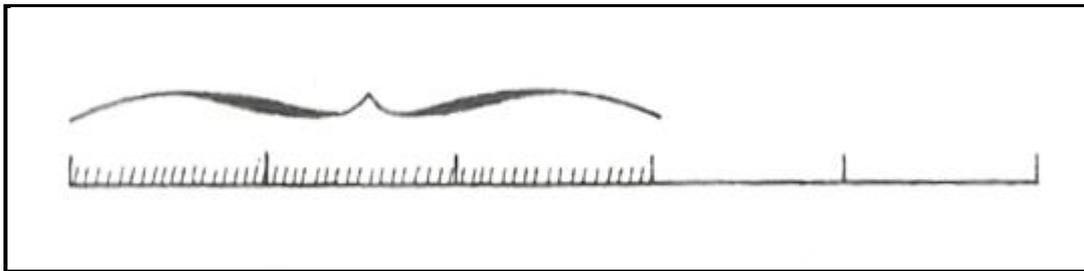
Figura 5 - representação gráfica da Fração $\frac{3}{8}$ utilizando retângulo.



Fonte: Bittar e Freitas (2005).

Os autores ressaltam que é importante trabalhar com quantidades contínuas e discretas, sendo fundamental variar a forma das figuras trabalhadas, como círculos, canudos, fichas e outros. Llinares e Sánchez (1988) exemplificam que se podem utilizar diagramas para assinalar uma extensão, ao dividir um segmento em partes iguais, conforme a figura 6. Neste exemplo, a Fração indica as partes tomadas em relação ao número de partes em que se dividiu o segmento.

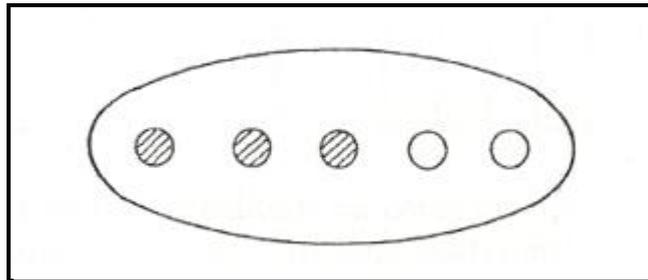
Figura 6 - representação gráfica de uma Fração em um segmento.



Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Em um contexto discreto, pode-se representar como no exemplo a seguir, onde o “todo” está formado pelo conjunto global de cinco bolas, três das quais estão pintadas (figura7). A Fração $\frac{3}{5}$ indica a relação entre o número de bolas pintadas e o número total de bolas.

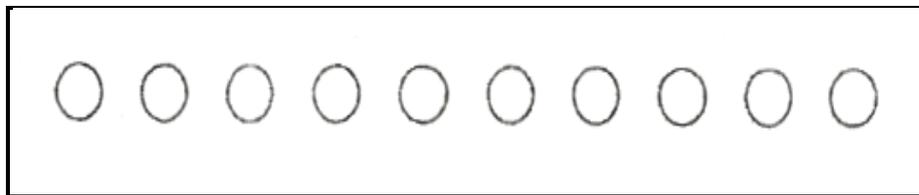
Figura 7 - representação gráfica da Fração $\frac{3}{5}$ através de quantidade discreta.



Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

É interessante ressaltar, segundo os autores, que utilizar contextos discretos possibilita à criança ampliar seu esquema relação parte-todo, como exemplo na figura 8.

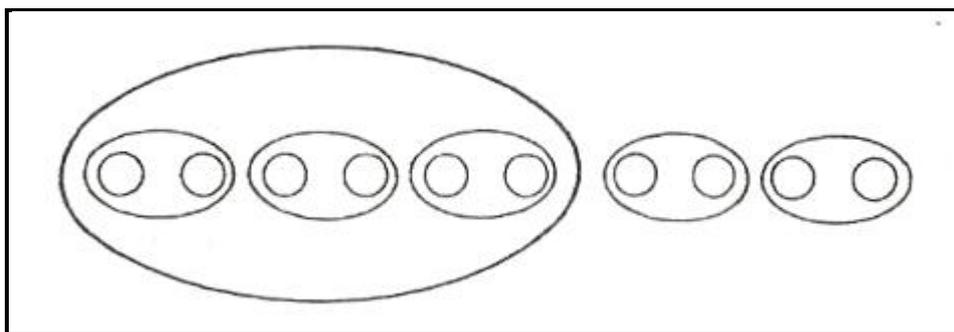
Figura 8 - representação gráfica de unidades.



Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

A partir desse conjunto, pode-se representar a Fração $\frac{3}{5}$ (dividir o conjunto em cinco partes e tomar três). Os subconjuntos que resultam também estão formando cada um dos elos por vários objetos (nesse caso, por dois), conforme figura 9.

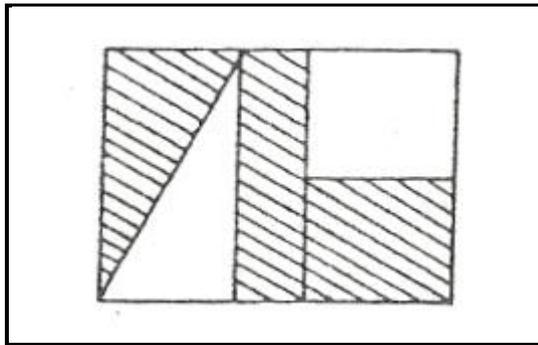
Figura 9 - representação gráfica da Fração $\frac{3}{5}$ através de quantidade discreta.



Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Conforme Llinares e Sánchez (1988), na caracterização da relação parte-todo, usa-se a nomenclatura de “partes congruentes”, o que não indica, necessariamente, partes da mesma forma. A figura 10 é uma representação não usual de parte-todo, onde a relação entre as partes sombreadas e o número de partes também pode ser representada por $\frac{3}{5}$.

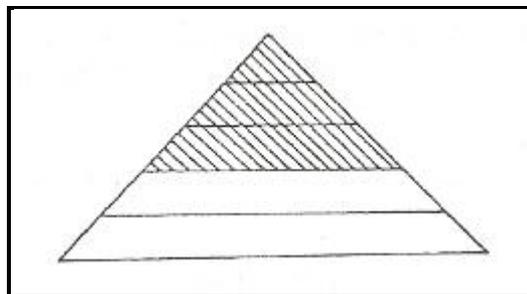
Figura 10 - representação gráfica da Fração $\frac{3}{5}$



Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

A noção de partes congruentes é de vital importância para poder justificar, como erradas, situações como a da figura 11.

Figura 11 - representação gráfica de uma pirâmide.



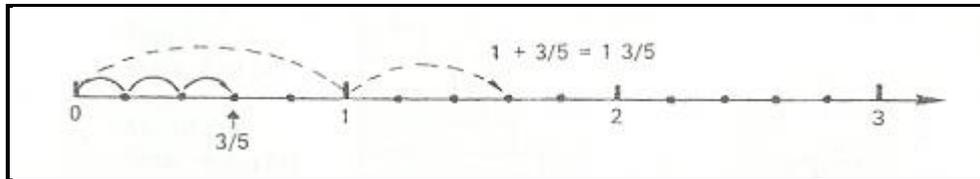
Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Neste caso, não se pode indicar por $\frac{3}{5}$ a parte sombreada, ao não estar formada por partes congruentes.

Para Llinares e Sánchez (1988), é importante trabalhar situações onde se associam Frações a pontos na reta numérica. Nesse caso, associa-se a Fração $\frac{a}{b}$ com um ponto situado

sobre a reta numérica, em que cada segmento de unidade foi dividido em b partes (ou em um múltiplo de b) congruentes das que se tomam a (figura 12). Pode-se considerar como um caso particular da relação parte-todo.

Figura 12 - representação das Frações $\frac{3}{5}$ e $1\frac{3}{5}$ na reta numérica.



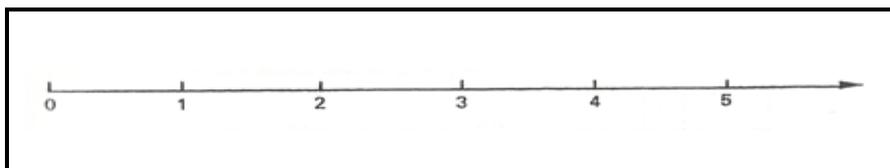
Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Conforme Dickson (1984 apud LLINARES; SÁNCHEZ, 1988), trabalhar Frações na reta numérica pode provocar dificuldades para algumas crianças, mas também apresenta vantagens como:

- faz com que as Frações impróprias (Frações maiores que a unidade) apareçam de forma muito mais natural, assim como a notação de números mistos;
- faz com que o conjunto das Frações apareça no eixo como uma extensão do conjunto dos Números Naturais (as Frações preenchem os “vazios” entre os Naturais);
- tem conexões com a ideia de medida (uso de escala).

Os resultados de algumas investigações também sugerem que a interpretação das Frações mediante a reta numérica é especialmente difícil para as crianças (NOVILLIS apud LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p.60). Um dos problemas que pode surgir é a identificação do segmento unidade quando a reta numérica é expandida além do 1 (figura 13).

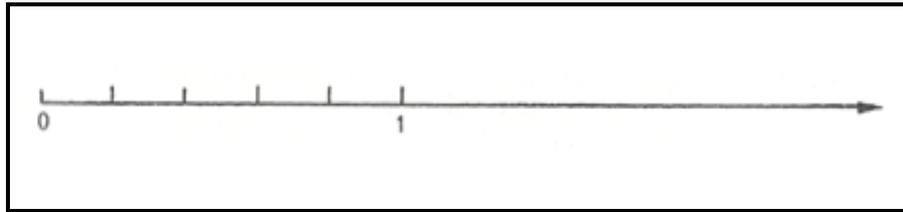
Figura 13 - representação de uma reta numérica.



Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Se, no exemplo anterior (figura 13), for solicitado aos alunos que assinalem a Fração $\frac{3}{5}$, é possível que alguns alunos indiquem o ponto onde está o 3. Essa dificuldade diminui quando se proporciona uma representação como a da figura 14.

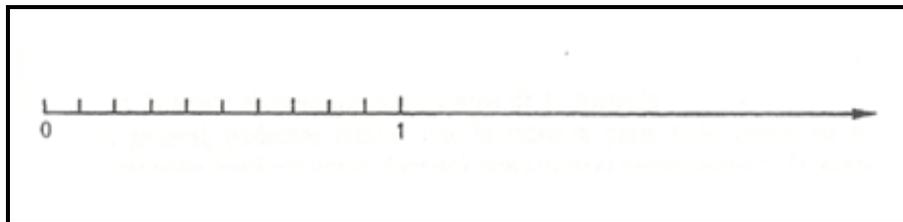
Figura 14 - representação de uma reta numérica.



Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Também surgem problemas quando o segmento unidade está dividido em um múltiplo do denominador, como no exemplo da figura 15.

Figura 15 - representação de uma reta numérica.



Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Segundo Llinares e Sánchez (1988), a reta numérica também serve como uma boa representação da interpretação das Frações como medida. Além disso, o uso da representação das Frações através da reta numérica deve ajudar a criança a “conceitualizar” as relações parte-todo em um contexto e reconhecer contextos equivalentes que provêm de novas divisões da unidade. Sendo assim, conforme os autores, o manejo das Frações na reta numérica pode ser uma boa introdução à noção de equivalência: a mesma parte da unidade recebe nomes diferentes em função do número de divisões.

2.2.2 As Frações como quociente⁸

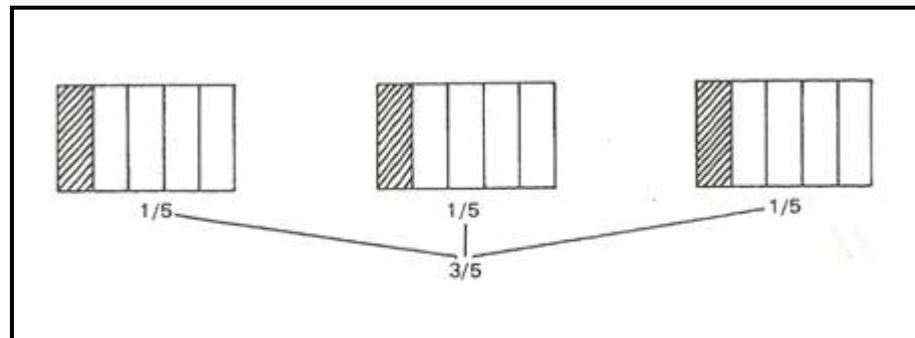
Nesta interpretação, associa-se a Fração à operação de dividir um número natural por outro, mostrando-se que o símbolo $\frac{a}{b}$ representa $a \div b$, com $b \neq 0$.

⁸ O título é baseado nas ideias de Llinares e Sánchez (1988).

Llinares e Sánchez (1988) exemplificam uma situação onde as Frações indicam uma divisão de dois números naturais ($\frac{3}{5} = 3 \div 5$) em um contexto de repartir.

- Exemplo: Temos três barras de chocolates e devemos repartir de forma igual entre cinco crianças. Com quanto cada uma ficará (figura 16)?

Figura 16 - exemplo de um problema de divisão com Frações.



Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Segundo os autores, para evitar obstáculos ao desenvolvimento de sequências didáticas com a interpretação da ideia de quociente (divisão), situações devem ser criadas, utilizando contextos discretos e contínuos, conforme os exemplos a seguir:

- Exemplo de contexto discreto: Repartir vinte cartas entre cinco caixas de correio.
- Exemplo de contexto contínuo: “Temos uma fita de 22 centímetros e precisamos repartir entre 4 crianças. Com que tamanho da fita cada uma ficará?”

No exemplo do contexto discreto, para o processo de solução, pode-se realizar de forma mais direta, simplesmente distribuindo as cartas. No contexto contínuo, não existe um processo tão direto. Um procedimento de estimação, sondagem ou uma operação aritmética pode ser necessário para encontrar a solução.

Para Llinares e Sánchez (1988), pode-se considerar que, nessa interpretação das Frações como quociente e nas situações de divisão-repartição em uma quantidade, se for dividido em um número de partes dadas, pode-se distinguir dois aspectos:

- quando proporcionam a quantidade e o número de partes em que será dividido e é pedido o que vale cada parte (repartição): “Três pizzas entre cinco crianças”;

- quando é proporcionada a quantidade e o que vale cada parte e é solicitado o número de partes (medida): “Temos três pizzas e a cada criança é correspondido $\frac{3}{5}$ de uma pizza. A quantas crianças poderemos dar as pizzas?”.

2.2.3 As Frações como razão

Segundo Llinares e Sánchez (1988), algumas vezes, as Frações são usadas como “índices comparativos” entre duas quantidades de uma grandeza (comparação de situações). Assim, utilizam-se as Frações como uma razão.

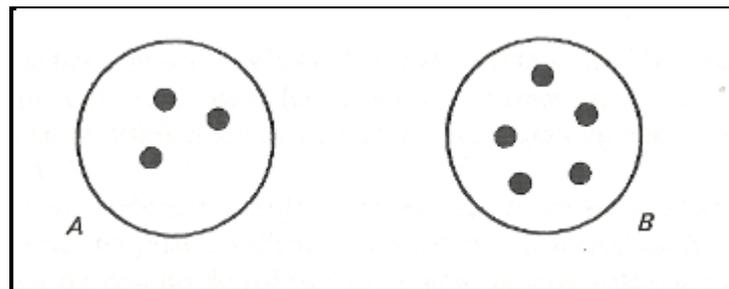
Nesse caso, não existe de forma natural uma unidade (um todo) como pode ocorrer em outros casos (a comparação pode ser bidirecional). Nessa situação, a ideia de par ordenado de números naturais toma força. Normalmente, a relação parte-parte (ou todo-todo) se escreve com $a:b$.

Alguns exemplos de diferentes contextos que podem ajudar a entender esta interpretação de Frações:

- A relação entre os pontos elementos de A e de B é de três para cinco, que pode ser representada por $\frac{3}{5}$ ou 3:5.
- A relação entre os pontos de B e de A é de cinco para três, que também pode ser representada por $\frac{5}{3}$ ou 5:3.

Na figura 17, apresenta-se a representação dos conjuntos A e B.

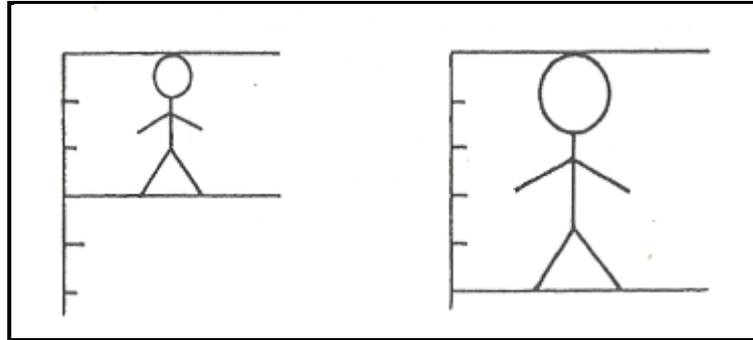
Figura 17 - representação dos conjuntos A e B.



Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

- Conforme a figura 18, a altura do boneco A é $\frac{3}{5}$ ou 3:5 de B. E a altura do boneco B é $\frac{5}{3}$ ou 5:3 de A.

Figura 18 - representação dos bonecos A e B.



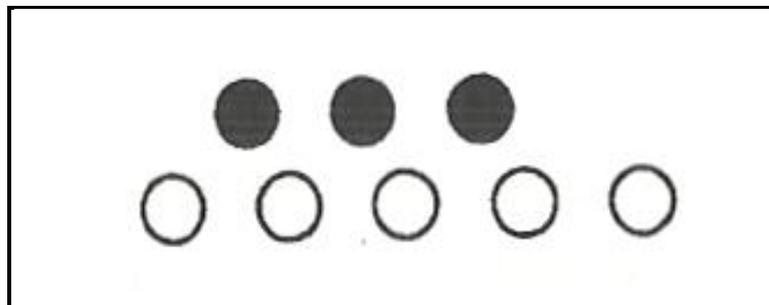
Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

- Escalas em desenhos de mapas.
- Receitas de comidas, em misturas de líquidos, etc.

As comparações realizadas nesses exemplos descrevem uma relação “conjunto a conjunto” (todo-todo), mas as Frações como razão também aparecem em situações que descrevem comparação parte-parte, como nos exemplos a seguir:

- A relação (razão) entre bolas pretas e brancas é de $\frac{3}{5}$ (figura 19).

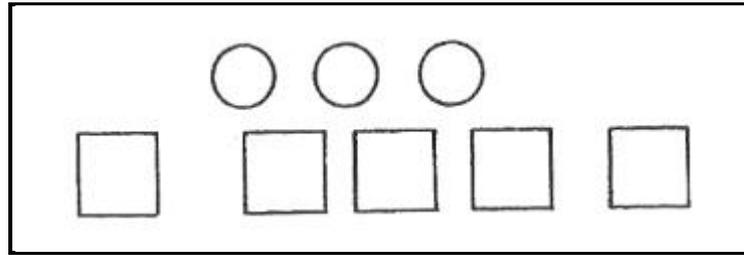
Figura 19 - Representação do comparativo de um conjunto de bolas pretas e brancas.



Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

- A razão entre os círculos e os quadrados é de $\frac{3}{5}$ ou 3:5, como mostra a figura 20.

Figura 20 - representação de um conjunto de círculos e quadrados.



Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

2.2.4 A Fração como operador

Segundo Llinares e Sánchez (1988), essa interpretação das Frações é vista em um papel de transformação: “algo que atua sobre uma situação (estado) e a modifica”. Os autores exemplificam utilizando um contexto discreto onde, em uma situação de partida (estado-unidade), o conjunto formado por 36 alunos de uma classe, onde o efeito da aplicação do operador $\frac{2}{3}$ (dois terços) pode ser representado, conforme a Tabela 1.

Tabela 1 - exemplo de Frações como operador.

ESTADO-UNIDADE (SITUAÇÃO)	OPERADOR	ESTADO FINAL
36 alunos	(Dividir por 3, multiplicar por 2)	24 alunos

Fonte: Llinares e Sánchez (1988)

Em um contexto contínuo, por exemplo, quando atua a Fração $\frac{2}{3}$, considerada como operador sobre um segmento de reta dada, se obtém outro segmento de reta $\frac{2}{3}$ do original.

Ainda conforme os autores, há de observar que, nessa interpretação, se utilizam as Frações em um duplo aspecto: descrevendo uma ordem, uma ação a realizar (operador) e descrevendo um estado das coisas, ou seja, descrevendo uma situação.

Essa interpretação enfatiza o papel das Frações como elementos da álgebra de função (transformação), ao mesmo tempo em que conduz à ideia de que os Números Racionais formam um grupo (estrutura algébrica) com a multiplicação.

Encontra-se, assim, segundo Llinares e Sánchez (1988), um contexto natural para a composição de transformação (função, operador), a ideia de inversa (o operador que reconstrói o estado inicial) e a ideia de identidade (o operador que não modifica o estado inicial).

Este capítulo tratou da interpretação e da caracterização dos contextos que dão significados à noção de Frações, dos diferentes significados que se podem associar à ideia de Frações, descrevendo suas características mais relevantes, levando em conta o trabalho de Llinares e Sánchez (1988).

3 AS DIFICULDADES NO PROCESSO DE ENSINO E APRENDIZAGEM DE FRAÇÕES

Como mencionado no capítulo 1, o ensino e a aprendizagem das Frações é um processo complexo para os alunos e as dificuldades podem surgir quando eles transferem as propriedades do conjunto dos Números Naturais para as Frações, não compreendendo as características particulares de cada conjunto numérico. Para Nunes e Bryant:

Com as Frações, as aparências enganam. Às vezes, as crianças parecem ter uma compreensão completa delas e ainda não a têm. Elas usam os termos corretos, falam sobre Frações coerentemente, resolvem alguns problemas, mas diversos aspectos cruciais das Frações ainda lhes escapam. De fato, as aparências podem ser tão enganosas que é possível que alguns alunos passem pela escola sem superar dificuldades relativas às Frações sem que ninguém perceba (NUNES; BRYANT, 1997, p. 191).

Segundo Llinares e Sánchez (1988), as observações anotadas pelo professor em relação ao desenvolvimento do trabalho com os estudantes levam a precisar que há erros que aparecem de forma aleatória, por descuido, distração, etc., e outros erros se devem ao fato de que, simplesmente, o aluno não sabe a resposta correta e propõe um resultado ao azar.

Há outros tipos de erros que se devem a não compreensão total do conceito ou à aplicação de procedimentos errôneos, os quais podem ser devido à elaboração de métodos pessoais alternativos aos ensinados pelo professor ou pela modificação/esquecimento de algum passo de um algoritmo ensinado. Os autores apresentam tipos de erros que podem ser facilmente identificados no trabalho com as Frações, por parte dos alunos:

- Exemplo 1: alunos que trabalharam muito a interpretação parte-todo das Frações, a partir de diagramas, podem ter dificuldades ao considerar $\frac{3}{5}$ como um número compreendido entre 0 e 1, ou como a divisão de 3 entre 5 é uma situação de repartição, apresentado-se um problema conceitual na integração das distintas interpretações das Frações. Nessa situação, a utilização da Reta Numérica pode servir para ajudar o aluno a integrar as distintas interpretações.

- Exemplo 2: um aluno resolvendo uma tarefa, como na figura 21, vista a seguir.

Figura 21 - exemplo de tarefa

$$3 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

O aluno, provavelmente, ignora o significado dos símbolos apresentados e resolve a operação utilizando o esquema aditivo dos naturais. A introdução dos números mistos, desde um primeiro momento, em um contexto concreto, ajuda a evitar/superar esse tipo de problema.

- Exemplo 3: atividades de subtração de Frações como na figura 22:

Figura 22 - exemplo de tarefa.

$$\frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{2}{6} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$

$$\frac{4}{5} - \frac{3}{4} = \frac{4}{20} - \frac{3 \cdot 1}{20 \cdot 20}$$

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{2}{5} = \frac{3}{20} - \frac{2}{20} = \frac{1}{20}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Segundo Llinares e Sanchez (1988), é provável que, para esse aluno, alguém lhe tenha ensinado a regra para reduzir Frações a um denominador comum mediante o uso do mínimo múltiplo comum (MMC). Assim, a criança calcula corretamente, mas não altera os numeradores (pode ter esquecido/modificado algum passo do algoritmo ensinado). Esse erro pode ser devido a uma rápida introdução ao cálculo algorítmico, o que converteu o manejo dos passos do algoritmo em algo sem sentido (desconectado da ideia de equivalência de Frações).

- Exemplo 4: quando um aluno procede da maneira como mostra a figura 23, vista a seguir.

Figura 23 - exemplo de tarefa.

The image shows four handwritten fraction addition problems arranged in a 2x2 grid, enclosed in a rectangular box. Each problem shows a sum of two fractions with different denominators, followed by an equals sign and a result where the denominators have been incorrectly made the same by adding them together.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{5} + \frac{2}{5} = \frac{5}{5}$$

$$\frac{1}{4} + \frac{2}{5} = \frac{10}{9} + \frac{4}{9} = \frac{14}{9}$$

$$\frac{2}{3} + \frac{3}{4} = \frac{12}{7} + \frac{6}{7} = \frac{18}{7}$$

$$\frac{2}{5} + \frac{1}{2} = \frac{2}{7} + \frac{10}{7} = \frac{12}{7}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Esse aluno construiu um algoritmo errado e bastante complicado para somar Frações com denominadores diferentes, que consiste em colocar um denominador comum igual à soma dos denominadores e substituir os numeradores de cada Fração pelo produto do denominador e numerador da outra. Uma vez reduzidos a um denominador comum, soma-os corretamente. Essa é uma mescla de algoritmo mal aprendido com um procedimento sistemático próprio.

É importante assinalar, segundo Llinares e Sánchez (1988) que, nessas situações, os alunos acreditam que estão fazendo o correto. O único modo de corrigir esse erro é provocar um conflito, por exemplo, por meio de visualizações, tentando que a criança se dê conta da contradição que existe entre seu modo de atuar e o que lhe mostra a realidade.

Muitos dos erros apresentados no trabalho com Frações têm origem na similaridade que, tanto na linguagem como na simbologia, se apresentam com os Números Naturais. Por um lado, as Frações se nomeiam utilizando nomes iguais ou muito parecidos àqueles que são familiares no contexto dos números ordinais, assim como, por exemplo, “um quarto”, “dois quintos”, etc.

Por outro lado, e isso é o mais grave, segundo os autores, os mesmos símbolos dos Números Naturais também são utilizados para as Frações, diferenciando-se apenas no traço na horizontal. A experiência que os alunos têm com os Números Naturais às levam à tendência de ver as Frações como um conjunto de dois números naturais separados por um traço. Como consequência, acabam utilizando seus conhecimentos de cálculo, regras e algoritmos com os Números Naturais para as Frações. Isso constitui o que alguns autores denominam de “efeito de distração dos Números Naturais” (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988 p. 158).

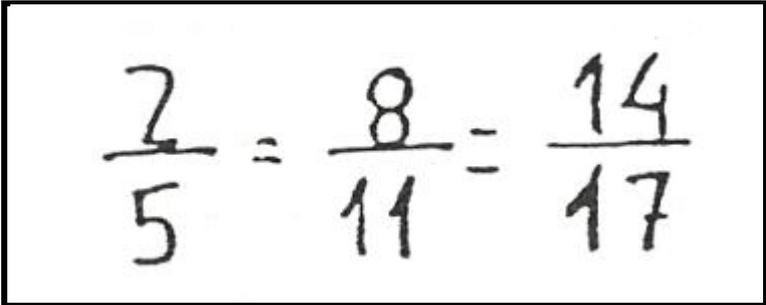
Pesquisas como de Nunes e Bryant (1997), Merlini (2005), Moutinho (2005) e, Nunes, Campos, Magina e Bryant (2009), analisam o processo de ensino e aprendizagem das Frações, tratando também das dificuldades que alunos apresentam com o conteúdo de Frações, mas neste trabalho será utilizada a pesquisa de Llinares e Sánchez (1988) para categorizar os erros

típicos na aprendizagem de Frações, na qual os autores discutem a origem e sugerem soluções para tais erros.

3.1 ERROS NA NOÇÃO DE EQUIVALÊNCIA E SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES

- Exemplo 1: às vezes, diante de uma tarefa de Frações equivalentes, pode-se encontrar uma resposta, como na figura 24:

Figura 24 - exemplo de tarefa.



$$\frac{2}{5} = \frac{8}{11} = \frac{14}{17}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Esse exemplo reflete uma situação em que a Fração é considerada como um par de números naturais que não estão relacionados entre si. A resposta está baseada no reconhecimento de um modelo aditivo em que os numeradores (somam seis) se estendem aos denominadores.

Llinares e Sánchez (1988) afirmam que algumas investigações têm mostrado, também, que os alunos apresentam problemas diante da transitividade do sinal de igual. Assim, Hart (1981 apud LLINARES E SÁNCHEZ, 1988) assinala que, diante de uma expressão do tipo

$\frac{2}{3} = \frac{\square}{12} = \frac{14}{\square}$, os alunos têm maior dificuldade em calcular \square , já que uma vez calculado o

valor 8, para o numerador da segunda Fração, comparam $\frac{8}{12}$ com $\frac{14}{\square}$, o que resulta mais

difícil que fazer com $\frac{2}{3}$. E não utilizar $\frac{2}{3} = \frac{14}{\square}$ pode ser devido ao fato de que só se fixam na

igualdade das últimas Frações. E isso o professor deve considerar ao planejar as atividades metodológicas.

- Exemplo 2: na simplificação de uma Fração, uma criança pode escrever conforme a figura 25.

Figura 25 - exemplo de erro na simplificação de Frações.

$$\frac{2}{6} = \frac{1}{3} \quad \frac{4}{6} = \frac{2}{3} \quad \frac{3}{6} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{4}{9} = \frac{2}{3} \quad \frac{3}{9} = \frac{1}{3}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Para Llinares e Sánchez (1988), à primeira vista, parece que não existe uma lógica nesses resultados. Mas, fazendo uma análise mais detalhada, mostra que o aluno elaborou uma regra para simplificar Frações, associando a cada Número Natural outro mais simples, pelo qual se substitui. Na prática, dois passa a ser um, três também um, quatro torna-se dois, seis é três e nove é três.

3.2 Erros na adição e subtração de Frações

- Exemplo 1: na figura 26, consideram-se alguns exemplos de erros.

Figura 26 - exemplo de erro na adição de Frações.

$$\frac{2}{3} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} \quad \frac{1}{2} + \frac{3}{5} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{6}{7} + \frac{1}{2} = \frac{7}{9} \quad \frac{4}{5} + \frac{2}{6} = \frac{6}{11}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Essas respostas correspondem a um dos erros mais comuns na adição de Frações, que consiste na soma independente dos numeradores e denominadores. A subtração também apresenta erros análogos a esse. A origem do erro pode estar na similaridade de notações que existem entre as Frações e os Números Naturais (levando ao uso de procedimentos aditivos com os Naturais), pois a criança pode estar confundindo com o algoritmo da multiplicação e mesclando ambos.

- Exemplo 2: erros envolvendo subtração de Frações (figura 27).

Figura 27 - exemplo de erro na subtração de Frações.

$$5 \frac{1}{2} - 3 = 2 \frac{1}{2} \quad 6 \frac{1}{5} - \frac{2}{5} = 6 \frac{1}{5}$$

$$3 \frac{1}{5} - 2 \frac{3}{5} = 1 \frac{2}{5} \quad 6 - 3 \frac{1}{2} = 3 \frac{1}{2}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Nessa situação, a criança considera separadamente os Números Naturais e as Frações. Não considera o número misto como um todo e os subtrai em separado, não considerando, no caso das Frações, se o minuendo é ou não maior que o subtraendo. Se há uma só Fração, simplesmente a coloca.

Nesse caso, segundo Llinares e Sánchez (1988), seria conveniente propor à criança que explicasse o porquê dos seus procedimentos. A partir de, suas respostas deve-se tentar deduzir se o que lhe falta são os requisitos básicos para abordar a tarefa (como a subtração dos Números Naturais) ou que a notação do número misto não está bem aprendida. Nesse último caso, o ideal seria fazer uma recapitulação de atividades para a introdução da notação dos números mistos.

3.3 Erros na multiplicação e divisão de Frações

- Exemplo 1: um erro bastante comum, como mostra a figura 28, é realizar a multiplicação do seguinte modo:

Figura 28 - exemplo de erro na multiplicação de Frações.

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} = \frac{12}{6} \quad \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{6}{10} \times \frac{5}{10} = \frac{30}{10}$$

$$\frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Como se observa, as Frações se reduzem a um denominador comum e logo se multiplica os numeradores. Estes erros provêm, em muitos casos, segundo os autores, de uma mescla do algoritmo da adição com o da multiplicação. Uma introdução precoce ao manejo dos algoritmos dá lugar a uma mescla de ambos, produzindo um procedimento de cálculo sem nenhum fundamento.

- Exemplo 2: na figura 29, há outro tipo de erro comum na multiplicação de Frações.

Figura 29 - exemplo de erro na multiplicação de Frações.

$$\frac{1}{6} \times 1 = \frac{1}{6} \quad \frac{3}{4} \times 2 = \frac{6}{8} \quad \frac{2}{3} \times 3 = \frac{6}{9}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Provavelmente, a criança tenha aprendido que, para multiplicar Frações, tem que multiplicar os numeradores e os denominadores e resolve o caso em que um dos fatores é um Número Natural, utilizando como fator para ambos. Também pode ser que esteja utilizando o método que lhe foi ensinado para construir Frações equivalentes (multiplicar numerador e denominador por um mesmo número).

Isso indica que alguns alunos mantêm um conflito ante a ideia de que, para obter Frações equivalentes, multiplica-se por um “número” o numerador e o denominador da Fração, podendo vê-la ao mesmo tempo, como uma Fração múltipla da outra.

- Exemplo 3: na figura 30, há uma sequência típica de erro na divisão de Frações, conforme visto a seguir.

Figura 30 - exemplo de erro na divisão de Frações.

$$\frac{4}{9} : \frac{2}{3} = \frac{2}{3} \quad \frac{2}{6} = \frac{1}{6} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{3}{5} : \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \quad \frac{5}{4} : \frac{3}{2} = \frac{1}{2} \quad \frac{2}{6} : \frac{1}{3} = \frac{2}{2}$$

Fonte: Llinares e Sánchez (1988).

Segundo Llinares e Sánchez (1988), o procedimento que se está aplicando para obter os resultados consiste em dividir separadamente os numeradores e os denominadores, ignorando os possíveis restos obtidos, se a divisão não é exata. Esse erro tem sua origem em uma confusão com o algoritmo da multiplicação.

Por outro lado, convém notar que o procedimento dá o resultado correto com alguma frequência e que, portanto, sua utilização pode ser reforçada por exercícios. Pode ser conveniente provocar o conflito de situações que podem levar a resultados absurdos.

Para os autores, a “observação” e a indagação continuada das estratégias dos alunos constituem um instrumento muito valioso para efetuar uma tarefa de diagnóstico, proporcionando, entre outras coisas, um modo de discernir os alunos que utilizam um procedimento incorreto dos que têm erros conceituais. Isso deve ter, posteriormente, implicações na hora de realizar o processo de ensino.

4 RECUPERAÇÃO PARALELA DE CONTEÚDOS

Para Grossi (2008 apud GROENWALD; ZOCH; HOMA, 2009), os educadores têm como desafio descobrir maneiras diferentes de ensinar a mesma coisa, pois os estudantes têm ritmos e históricos variados. Além disso, o sistema educacional, historicamente, é projetado igualmente para todos os estudantes, de forma que o aluno deve adaptar-se em um contexto educacional definido. Para esses autores, o professor, além de questionar a abordagem do conteúdo, deve despertar a curiosidade do educando, demonstrando sua utilização em diferentes situações da vida real. Assim, uns dos desafios que os professores encontram, em sala de aula, é a identificação das dificuldades individuais dos alunos.

Segundo Groenwald e Moreno (2007), a maneira e o ritmo de aprendizagem de cada aluno dependem de seu nível de amadurecimento, seus conhecimentos anteriores, seu tipo de inteligência, que pode ser verbal, lógica ou espacial. Ainda, para os autores, o cotidiano da sala de aula convive com, pelo menos, três tipos de alunos que têm aproveitamento insuficiente: os imaturos, que precisam de mais tempo para aprender; os que têm dificuldade específica em uma área do conhecimento; os que, por razões diversas, não se aplicam, não estudam, embora tenham condições.

Conforme a Indicação do Conselho Estadual de Educação (CEE) nº 05/98 (SÃO PAULO, 1998), o compromisso da escola não é somente com o ensino, mas, principalmente, com a aprendizagem. A recuperação deve ser entendida como uma das partes de todo o processo de ensino e aprendizagem de uma escola que respeite a diversidade de características e de necessidades de todos os alunos.

O mesmo documento indica, ainda que dentro do processo de ensino e aprendizagem, recuperar significa voltar, tentar de novo, adquirir o que perdeu e não pode ser entendido como um processo unilateral. O conhecimento é o resultado de um complexo processo de modificação, reorganização e construção realizado pelo aluno, a partir de propostas e intervenções pedagógicas adequadas. Nesse sentido, a recuperação, para ser eficiente, deve estar inserida no trabalho pedagógico, realizado no dia-a-dia escolar. Para um projeto pedagógico consistente, a recuperação deve ser organizada para atender aos problemas específicos de aprendizagem que os alunos possam apresentar. A recuperação da aprendizagem precisa: ser imediata, assim que for constatada a perda, e contínua; ser dirigida às dificuldades específicas do aluno; abranger não só os conceitos, mas também as habilidades, procedimentos e atitudes.

Conforme o Parecer do Conselho Estadual de Educação (CEED) nº 740/99 (RIO GRANDE DO SUL, 1998), os estudos de recuperação têm o papel de corrigir a tempo as falhas na aprendizagem, de modo a evitar o fracasso escolar, com o objetivo de auxiliar o aluno a dirimir as dúvidas e superar as dificuldades surgidas no decorrer do processo de ensino e aprendizagem. Esses estudos de recuperação devem ser organizados pela escola e poderão ser realizados de forma individual ou coletiva, não necessariamente em sala de aula, porém, em qualquer outro ambiente dentro ou fora do estabelecimento, dependendo do espaço disponível, sempre acompanhado pelo professor.

Há muito tempo, a recuperação, na educação escolar, já estava prevista na legislação, como na Lei 5692/71 (BRASIL, 1971), no art. 14, que dizia: "O aluno de aproveitamento insuficiente poderá obter aprovação mediante estudos de recuperação proporcionados obrigatoriamente pelo estabelecimento". No parágrafo 1º do art.11 constava: "os estabelecimentos de ensino de 1º e 2º graus funcionarão entre os períodos letivos regulares para, além de outras atividades, proporcionar estudos de recuperação aos alunos de aproveitamento insuficiente [...]". Mas, conforme a Indicação do CEE nº 05/98, a recuperação acontecia entre os períodos letivos (semestre ou ano letivo) e, na prática, muitas escolas adotaram períodos de recuperação bimestral ou anual, durante os quais somente os alunos "com aproveitamento insuficiente" tinham um efetivo trabalho escolar. Os demais eram dispensados formalmente ou convencidos de que esses recessos deveriam ser encarados por eles e por suas famílias como uma recompensa por seu bom aproveitamento. Percebe-se, nitidamente, que o conceito de recuperação estava mais associado ao de aprovação do que ao de aprendizagem, no seu sentido amplo: o de o aluno apropriar-se do conhecimento.

Segundo Norcia (2008), a LDB nº 9394/96 (BRASIL, 1996) trouxe para o centro dos debates a necessidade de atividades de recuperação de conteúdos que levassem ao desenvolvimento de habilidades para a inclusão de todos os alunos na sociedade cidadã e produtiva, enquanto a legislação anterior demonstrava uma maior preocupação com a recuperação de notas e não propriamente com a recuperação do ensino e aprendizagem. No artigo 12, consta que a escola deve prover meios para a recuperação dos alunos de menor rendimento. Além disso, na letra "e" do inciso V do art. 24, coloca a "obrigatoriedade de estudos de recuperação, de preferência paralelos ao período letivo, para os casos de baixo rendimento escolar, a serem disciplinados pelas instituições de ensino em seus regimentos".

Conforme o Parecer da CEED nº 140/97 (RIO GRANDE DO SUL, 1997), todos os regimentos das escolas previam estudos de recuperação ao longo do ano letivo (denominados estudos de Recuperação Preventiva) e um período, obrigatório, de estudos de recuperação,

após o final do ano letivo (denominados estudos de Recuperação Terapêutica). A LDB nº 9394/96 (BRASIL, 1996) removeu a obrigatoriedade do oferecimento de estudos de recuperação “entre os períodos letivos”, admitindo que a escola adapte seus procedimentos, de modo a liberar o espaço de tempo que ocupa com a Recuperação Terapêutica para alargar o próprio ano letivo e, em especial, para a superação de dificuldades de aprendizagem, na medida em que as mesmas forem sendo detectadas pelo professor.

Sendo assim, a recuperação de conteúdos deve fazer parte do cotidiano escolar, onde todos os meios devem estar mobilizados para que o processo de ensino e aprendizagem ocorra de forma satisfatória, oportunizando aos alunos que apresentam dificuldades de aprendizagem acompanhar esse processo, respeitando as suas individualidades. É importante que o professor propicie condições, aos alunos que apresentam dificuldades na aquisição de conhecimentos, de revisitar os mesmos. Nesse sentido, a recuperação de conteúdos é entendida como retomada de estudos, com aulas de revisão, que não devem ser repetição das metodologias que já foram trabalhadas em sala de aula.

Para Belther (2005), é preciso que se desenvolva um trabalho diversificado e significativo:

[...] o trabalho de recuperação dos alunos deve apresentar-se diverso daquele oferecido pelo professor da classe regular, pois se o aluno não aprendeu com a metodologia do professor regular, não é pedagogicamente correto que se repita o mesmo procedimento pelo professor do reforço. Esse trabalho precisa ser significativo, atraente e motivador; não deve apresentar um caráter punitivo, mas uma nova possibilidade de aprender e agora de forma mais individualizada, para atender à diversidade de características, de necessidades e ritmos de cada aluno. As aulas devem centrar-se no desenvolvimento de habilidades básicas que auxiliarão a aprendizagem nas diferentes disciplinas escolares. Assim, ao invés de se priorizar o desenvolvimento de conteúdos específicos, a prioridade deve ser o desenvolvimento de habilidades básicas que contribuirão para todas as áreas de conhecimento. As dificuldades específicas com os conteúdos das disciplinas devem ficar a cargo, sobretudo, do trabalho do professor da classe regular, que deve cuidar delas a partir da recuperação contínua dos alunos no desenvolvimento das aulas regulares (BELTHER, 2005, p. 172).

Segundo Mario et al (2007), a educação, enquanto prática social, se constitui em direito social do indivíduo. A luta pela garantia de escola para todos constitui uma das bandeiras em prol da inclusão social e da efetiva participação na sociedade civil. A inclusão de alunos especiais e com problemas de aprendizagem também faz parte desse processo de atendimento à diversidade.

Conforme Coll (2004), um aluno com necessidades educativas especiais (NEE) é aquele que apresenta algum problema de aprendizagem ao longo de sua escolarização, que exige uma atenção mais específica e maiores recursos educacionais do que os necessários para

os colegas de sua idade. Neste trabalho, serão considerados alunos com NEE aqueles que apresentam dificuldades de aprendizagem, necessitando de estudos de recuperação, a fim de acompanhar o processo de escolarização.

Ainda segundo o Parecer da CEED 740/99 (RIO GRANDE DO SUL, 1999), é preciso que a escola oportunize a superação das dificuldades, considerando as diferenças individuais dos alunos e a diversidade das causas determinantes de situações de recuperação, é de se esperar que o tempo de duração destes estudos varie de acordo com a construção do conhecimento de cada aluno.

Segundo Mario et al (2007), valorizar a singularidade de cada ser humano é um compromisso ético de contribuir com as transformações necessárias à construção de uma sociedade mais justa. Ainda, para os autores, a escola não pode se manter com a mesma organização, currículo e formas de atendimentos inalterados, sob pena de acentuar, cada vez mais, o quadro das dificuldades, ou seja, permanecer com ofertas educativas homogêneas a alunos com características diferenciadas.

5 TECNOLOGIA DA INFORMAÇÃO E COMUNICAÇÃO NA EDUCAÇÃO

O uso de Tecnologias da Informação e Comunicação (TIC), no ambiente educacional, se faz cada vez mais necessário, como forma de atualização do processo de ensino e aprendizagem e como meio de interação com o aluno, elemento principal desse processo. As TIC, se constituíram em um importante instrumento na educação, possibilitando ao professor criar situações de aprendizagem onde o aluno pode pensar, criar, comunicar e intervir, sendo sujeito ativo nesse processo.

As TIC na educação fazem parte de um processo natural do avanço da sociedade. A utilização desses recursos não é mais o centro da discussão, e sim o fato de como eles devem ser explorados, buscando aproveitar ao máximo suas possibilidades. No que se refere ao computador, este está inserido, diretamente ou indiretamente, no cotidiano das pessoas. Os alunos, no seu cotidiano, muitas vezes, utilizam o computador para entretenimento como, por exemplo, para acesso a jogos e Internet e acabam passando mais tempo nos computadores do que em outras atividades (FIGUEIREDO; BITTENCOURT, 2005). Diante dessa realidade, o professor deve estar preparado para inserir esses recursos em sala de aula.

Conforme Borba e Penteado (2001), uma nova mídia, como a informática, abre possibilidades de mudanças dentro do próprio conhecimento, sendo possível haver uma ressonância entre uma dada pedagogia, uma mídia e uma visão de conhecimento. Para Barboza Jr. (2009), o professor deve estar preparado para inserir as TIC, em sala de aula, mas não deve ter como objetivo utilizar a tecnologia apenas pelo uso, sem uma intenção clara e bem estruturada. O autor ressalta que

[...] as TICs fornecem vários recursos que podem ser aplicados na educação, porém cada um desses recursos deve ser estudado e analisado pelos professores, antes de serem usados em sala de aula, caso contrário, o uso das TIC, na educação só servirá para informatizar o que era feito no modelo tradicional de educação (BARBOZA Jr., 2009, p. 19).

Para Kenski (2008), a presença de uma determinada tecnologia pode provocar profundas mudanças na maneira de organizar o ensino e a escolha dessa tecnologia altera a natureza do processo educacional e a comunicação entre os participantes. Segundo a autora, as TIC, encaradas como recursos didáticos, ainda estão longe de serem utilizadas em todas as suas possibilidades para uma melhor educação.

Para que as TIC possam trazer alterações no processo educativo, no entanto, elas precisam ser compreendidas e incorporadas pedagogicamente. Isso significa que é

preciso respeitar as especificidades do ensino e da própria tecnologia, para poder garantir que seu uso, realmente, faça diferença. Não basta usar a televisão ou o computador, é preciso saber usar de forma pedagogicamente correta a tecnologia escolhidas (KENSKI, 2008, p. 46).

Segundo Costa (2010), as tecnologias na escola podem beneficiar professores e alunos, quando usadas como ferramenta para atividades, para desenvolver projetos e para a criação de condições que permitam a participação ativa do aluno na aprendizagem. Ainda, para o autor,

[...] Não é necessário que o professor seja um especialista em tecnologia, mas é interessante que ele a conheça e domine, de modo a utilizá-la numa perspectiva crítica. Para fazer uso adequado dos recursos tecnológicos e para facilitar o desenvolvimento das sequências didáticas, é importante que o professor conheça o modo de operação técnica (comandos, funções, linguagens, etc.), de forma a explorar suas possibilidades e identificar as limitações. Também é necessário desenvolver a percepção das consequências do uso da tecnologia nos modos de pensar, de ser e de sentir dos alunos (COSTA, 2010, p. 93).

Conforme Paula e Nunes (2009, p. 4), na década de 90, o Ministério da Educação (MEC) elaborou o Programa “Salto para o Futuro”, para estimular a incorporação da informática na educação. De acordo com o programa,

[...] não se trata de informatizar a parte administrativa da escola (como o controle das notas ou dos registros acadêmicos), ou de ensinar informática para os jovens (eles aprendem sozinhos, fuçando, experimentando, testando sua curiosidade, ou quando precisam usar este ou aquele software ou jogo. O problema está em como estimular os jovens a buscar novas formas de pensar, procurar e selecionar informações, de construir seu jeito próprio de trabalhar com o conhecimento e de reconstruí-lo continuamente, atribuindo-lhe novos significados, ditados por seus interesses e necessidades. Como despertar-lhes o prazer e as habilidades da escrita, a curiosidade para buscar dados, trocar informações, atíçar-lhes o desejo de enriquecer seu diálogo com o conhecimento sobre outras culturas e pessoas, de construir peças gráficas, de visitar museus, de olhar o mundo além das paredes de sua escola, de seu bairro ou de seu País [...] (MEC, 1998, p. 50 apud PAULA; NUNES, 2009, p.4).

Corroborando com essa ideia e visando promover o uso pedagógico das TIC nas redes públicas do Ensino Fundamental e Médio, o MEC, através da Portaria nº 522/MEC, de 9 de abril de 1997, criou o Programa Nacional de Tecnologia Educacional (ProInfo), para atuar no segmento urbano e rural. Pelo programa o MEC arca com a compra, distribuição e instalação dos laboratórios de informática das escolas públicas de educação básica e, em contrapartida, os governos locais (municipais e estaduais) providenciam a infraestrutura das escolas para receberem os equipamentos e a capacitação dos educadores para utilizarem os computadores e as tecnologias envolvidas. O MEC incentiva a utilização de softwares livres e produz

conteúdos específicos, voltados para o uso didático-pedagógico, associado à distribuição do sistema operacional Linux Educacional, que acompanha os computadores do laboratório. A figura 31 contém o número de laboratórios ProInfo adquiridos no período de 2004 a 2010.

Figura 31 - número de laboratórios Proinfo adquiridos até 2010.



Fonte: http://gestao2010.mec.gov.br/indicadores/chart_40.php

Mais especificamente, na Matemática, as TIC, segundo Ponte (1995), valorizam as possibilidades de realização, na sala de aula, de projetos e atividades de modelação, exploração e investigação, favorecendo o desenvolvimento, nos alunos, de atitudes mais positivas e uma visão mais completa sobre a natureza dessa disciplina. Dentro desse contexto o uso das TIC no meio escolar se tornou um importante instrumento de apoio, que deve ser utilizado pelo educador como um facilitador no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, sendo, também, um recurso que pode ser utilizado para a recuperação de conteúdos com alunos que apresentam dificuldades em Matemática.

6 PRESSUPOSTOS METODOLÓGICOS

Neste capítulo, é apresentado o tema, a problemática, os objetivos, a metodologia adotada para o desenvolvimento da pesquisa e as ações realizadas para a construção do ambiente de investigação.

6.1 TEMA

Esta pesquisa tem como tema investigar, desenvolver, aplicar e avaliar uma sequência didática eletrônica para as séries finais do Ensino Fundamental com o conteúdo de Frações, direcionada a alunos que necessitem de estudos de recuperação, utilizando as Tecnologias de Informação e Comunicação (TIC).

6.2 PROBLEMA DE PESQUISA

Alguns conteúdos do currículo matemático apresentam dificuldades de entendimento por parte dos alunos; sendo assim, o educador deve lançar-se em busca de metodologias e recursos diferenciados de aprendizagem. Campos et al (1995) citam a compreensão das representações fracionárias dos Números Racionais como um exemplo de conteúdo que os alunos têm demonstrado pouco domínio na vida escolar.

Para aqueles alunos que apresentam dificuldades de aprendizagem, é importante que a recuperação de conteúdos faça parte do cotidiano escolar, respeitando as suas individualidades e oportunizando a todos acompanhar o processo escolar.

A preocupação com tais dificuldades leva ao interesse de investigar quais são as dificuldades que os alunos apresentam com o conteúdo de Frações e de que forma uma sequência didática, com a utilização das TIC pode auxiliar na recuperação de situações desfavoráveis⁹ de aprendizagem, com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental.

6.3 OBJETIVOS

A seguir estão explicitados o objetivo geral e os objetivos específicos que norteiam a investigação desse projeto.

⁹ Considera-se “situações desfavoráveis” aquelas onde as dificuldades de aprendizagem não permitem aos alunos acompanhar de forma satisfatória o andamento do programa curricular.

6.3.1 Objetivo geral

Esta pesquisa tem como objetivo desenvolver uma sequência didática eletrônica a partir da investigação de questões didáticas e dificuldades relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de Frações, para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, que apresentam dificuldades de aprendizagem nesse tema, utilizando as TIC como recurso didático.

6.3.2 Objetivos específicos

Para alcançar o objetivo geral foram traçados os objetivos específicos explicitados a seguir:

- investigar teoricamente o processo de ensino e aprendizagem das Frações nas séries finais do Ensino Fundamental, especialmente, no que diz respeito à cognição¹⁰ em Frações e as dificuldades que os alunos apresentam em relação ao conteúdo;
- investigar recursos tecnológicos que possibilitam o desenvolvimento de uma sequência didática com o tema Frações, para os anos finais do Ensino Fundamental que possibilite uma recuperação individualizada das dificuldades dos alunos;
- implementar (desenvolvimento, aplicação e avaliação) o ambiente de investigação na plataforma SIENA¹¹, disponibilizando a sequência didática do conteúdo de Frações desenvolvida com os recursos tecnológicos pesquisados como mais adequados a auxiliar à proposta de recuperação de conteúdo;
- implementar (desenvolvimento, aplicação e avaliação) um experimento com alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, que necessitam de reforço no conteúdo de Frações, com o intuito de possibilitar uma recuperação paralela individualizada;
- investigar as dificuldades dos alunos participantes do experimento no conteúdo de Frações.

6.4 METODOLOGIA DA PESQUISA

Nesta pesquisa, foi realizada uma intervenção didática no sentido de investigar aspectos teóricos e didáticos relativos ao conteúdo de Frações para desenvolver uma

¹⁰ Cognição no sentido de compreensão.

¹¹ A ser descrito na seção 6.4.1 Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem.

sequência didática com o uso de TIC, para auxiliar alunos com dificuldades de aprendizagem que necessitavam de estudos de recuperação neste tema.

Com vista no problema de pesquisa e nos objetivos traçados, essa pesquisa foi desenvolvida em duas etapas. Da primeira etapa da pesquisa, faz parte o levantamento bibliográfico dos aspectos teóricos e didáticos dos conceitos do conteúdo de Frações e sobre as dificuldades de aprendizagem relacionadas a esse tema. Nesta fase, foi realizada uma investigação teórica e didática dos conceitos de Frações, e a partir de pesquisas realizadas por outros autores identificar as dificuldades que os alunos normalmente apresentam na compreensão deste conteúdo. Ainda, nesta etapa, com base no levantamento bibliográfico, foi realizada a planificação dos conceitos a serem trabalhados através da elaboração de um grafo com os conceitos a serem desenvolvidos na sequência didática eletrônica.

Concluindo essa primeira etapa, foi desenvolvida uma sequência didática eletrônica do conteúdo de Frações, com materiais de estudo para cada conceito a ser trabalhado com os alunos. A sequência didática foi elaborada buscando utilizar as metodologias adequadas ao desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem do conteúdo investigado, a fim de proporcionar estudos de recuperação para alunos com dificuldade de aprendizagem com o conteúdo de Frações. Outra ação que se fez necessária foi a investigação e o desenvolvimento de recursos informáticos (TIC), para a utilização nesta sequência didática que se adequassem às necessidades educativas dos alunos, ampliando a compreensão deles em relação ao tema Frações.

Os recursos tecnológicos investigados também são adequados ao ambiente de investigação na plataforma Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA), utilizado nessa pesquisa, e que atendessem as limitações e os recursos disponíveis nos laboratórios de informática do ProInfo. O desenvolvimento da sequência didática foi apoiada no *Design Instrucional fixo (DI fixo)* (FILATRO, 2008). Finalizando a primeira etapa desta pesquisa, foi construído um banco de questões para o SIENA, a ser utilizado nos testes adaptativos. O teste adaptativo é adequado à habilidade do examinado e tem por finalidade administrar questões de um banco de questões. Para o banco de questões, foram desenvolvidas em média trinta questões para cada nodo, sendo divididas em três níveis de dificuldades.

A segunda etapa iniciou com a implementação do ambiente de investigação na plataforma SIENA. Nessa fase foram disponibilizados na plataforma o grafo de Frações, os materiais de estudos nos recursos tecnológicos pesquisados, em PowerPoint, atividades *online* e atividades com o aplicativo JClic, assim como o banco de questões para os testes adaptativos.

Em outra fase dessa etapa, foi desenvolvido um experimento na plataforma SIENA. O experimento foi realizado no laboratório de informática da Escola Municipal de Ensino Fundamental Irmão Pedro, no município de Canoas, Rio Grande do Sul. Fundada em 10 de outubro de 1940, a EMEF Irmão Pedro é a mais antiga escola municipal de Canoas. Localizada no bairro Estância Velha, atualmente a escola conta com um grupo de aproximadamente 80 professores e atende 1.482 alunos. O Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB) da escola segundo o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisa Educacionais Anísio Teixeira (INEP)¹², foi de 5,1 em 2011, para 4ª série/5º ano, e de 3,8 para a 8ª série/9º ano, atingindo em ambas avaliações nos dois últimos anos as metas estipuladas pelo Ministério da Educação (MEC) para a escola. Porém, salienta-se que esse índice é considerado baixo para o que os órgãos governamentais esperam alcançar em 2022.

A EMEF Irmão Pedro é uma das escolas participantes do projeto Observatório da Educação, desenvolvido pelo PPGEICIM, da ULBRA, campus de Canoas (RS), o projeto é composto por seis escolas, pertencentes aos municípios de Canoas, Sapucaia do Sul e São Leopoldo. A escolha dessa escola, entre as demais participantes, para realizar o experimento foi pelo fato de possuir um laboratório de informática bem estruturado com trinta computadores em funcionamento e também de o laboratório estar disponível.

Os alunos participantes do experimento foram de duas turmas do 7º ano do turno da manhã, selecionados pela professora titular das turmas, tendo como critério o desempenho deles em uma avaliação realizada no início do ano letivo de 2012 com o conteúdo de Frações. Os selecionados são aqueles que apresentaram uma nota inferior a 6 (e que estão na avaliação das turmas estão no ANEXO A e B).

A escolha das turmas do 7º ano se deve a dois aspectos importantes. O primeiro que todos os conceitos desenvolvidos na sequência didática eletrônica já seriam do conhecimento dos alunos e o segundo aspecto é que no 7º ano as Frações voltam ao currículo de Matemática sendo ampliados esses conceitos ao conjunto dos Números Racionais.

Com base nesse segundo critério, o experimento serviu como estudo de recuperação do conteúdo de Frações, com aqueles alunos que ainda apresentavam dificuldade com esse tema. Crê-se que independente de série escolar é importante prover meios de realizar a inclusão dos alunos com dificuldades no processo escolar, para que os conteúdos não compreendidos por esses alunos não se acumulem tornando um obstáculo ainda maior para o

¹² <http://ideb.inep.gov.br/resultado/resultado/resultado.seam?cid=12530>

ensino e aprendizagem. Após esse trabalho desenvolvido a professora titular retomou o conteúdo dos Números Racionais com as turmas.

Foram realizados oito encontros, sempre às quartas-feiras, de 02 de maio a 20 de junho de 2012, de duas horas de duração, no turno da tarde, das 14h às 16h. No quarto encontro, houve problemas na conexão da internet, sendo realizada uma aula de correção de atividades matemáticas que já haviam sido desenvolvidas.

Os alunos selecionados foram convocados, pela professora titular, a participar de “aulas de reforço”, conforme ANEXO C. Dos 25 alunos selecionados para o experimento, seis nunca compareceram a nenhum encontro e, dos dezenove que participaram, sete deles concluíram todos os nodos. Três alunas foram afastadas pela professora titular das “aulas de reforço” por problemas disciplinares; esses problemas foram alheios ao experimento, pois às alunas se envolveram em uma briga fora da escola.

Todos os alunos receberam um *login* e uma senha individual previamente cadastrada para acessar a sequência didática denominada na plataforma SIENA de “Frações”, com isso, é possível também acompanhar o desempenho individual através do banco de dados da plataforma. Para a experiência, os alunos foram denominados de Aluno 101 a Aluno 125 para identificação, sendo o seu *login* e sua senha correspondente a sua identificação.

O aluno ao acessar pela primeira vez cada um dos nodos, realiza o teste adaptativo dos conceitos daquele nodo, a fim de avaliar a necessidade ou não de recuperar esse conceito. Estipulou-se para essa pesquisa a pontuação de 0.6 como mínima a ser alcançada nos testes adaptativos, pressupondo assim a não necessidade de realizar estudos de recuperação naquele conceito. Essa pontuação é calculada pelo sistema como especificado na seção 7.1. Ao alcançar a pontuação de 0.600 ou mais o aluno está habilitado ao próximo nodo da sequência didática eletrônica, quando não alcança a nota média, o aluno realiza estudos de recuperação.

A proposta das aulas era que os testes adaptativos fossem realizados individualmente, e que, nos estudos de recuperação, o pesquisador estivesse disponível para esclarecer eventuais dúvidas e questionamentos. Também, era realizado pelo pesquisador um acompanhamento individual a aqueles alunos que apresentassem dificuldade com determinado conceito. Esse trabalho individual consistia em acompanhar o alunos nos estudos de recuperação auxiliando-os na leitura e na realização das atividades *online* e no aplicativo *JClic*.

A partir dos dados coletados no experimento, com os alunos foi realizada uma análise dos resultados em três perspectivas:

a) análise geral do desempenho dos alunos, que permite identificar quais os conceitos que o grupo de alunos participantes do experimento apresentou dificuldades. Essa análise permite posteriormente avaliar o material de estudo disponibilizado na sequência didática eletrônica;

b) análise individual do desempenho dos alunos, que possibilitou uma apreciação mais detalhada do desempenho de cada aluno. Essa análise permitiu identificar em quais conceitos o aluno apresentou dificuldade e se a sequência didática auxiliou o aluno em suas dificuldades de aprendizagem.

c) e fundamentado no DI fixo (FILATRO, 2008), a análise da sequência didática eletrônica, incluindo os materiais de estudos, os recursos tecnológicos empregados e o banco de questões. A análise da sequência didática eletrônica foi realizada a partir da análise do desempenho geral e individual do grupo de alunos e possibilita uma reavaliação dos materiais de estudo em relação aos conteúdos disponibilizados para identificar a necessidade de estender, excluir ou redistribuir algum conteúdo do tema Frações. Também é realizada uma reavaliação dos recursos tecnológicos a fim de adequá-los se necessário às necessidades educativas dos alunos. Os bancos de questões também foram analisados para verificar as necessidades de reclassificação das questões e de aumentar a quantidade de questões disponibilizadas aos testes adaptativos.

Para realizar a análise dos resultados dos dados coletados foram utilizados o banco de dados da plataforma SIENA, gravações de áudio e vídeo, registros dos alunos e observações do pesquisador. O banco de dados armazena todos os testes adaptativos realizados pelos alunos, com o desempenho individual, incluindo as questões que caíram no teste e as respostas dadas pelos alunos. As gravações de áudio e vídeo possibilitaram resgatar e analisar os diálogos realizados entre alunos e o professor pesquisador quando necessitavam esclarecer alguma dúvida relativa ao conteúdo ou à plataforma. Os registros dos alunos analisados foram os rascunhos feitos por eles principalmente para resolver as questões dos testes adaptativos. Esses rascunhos permitiram analisar o desenvolvimento do raciocínio, das técnicas e dos procedimentos utilizados pelos alunos para resolver as questões, complementando as informações do banco de dados do SIENA. Também fizeram parte da coleta de dados as observações realizadas pelo professor pesquisador, que possibilitou realizar anotações e verificações quanto ao desempenho dos alunos e do ambiente de investigação empregado. A todos os alunos foi solicitada uma autorização assinada pelo responsável para uso de imagem e voz (APÊNDICE C), além de todos os alunos terem preenchido uma ficha com o seu perfil, conforme o APÊNDICE D.

6.4.1 Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA)

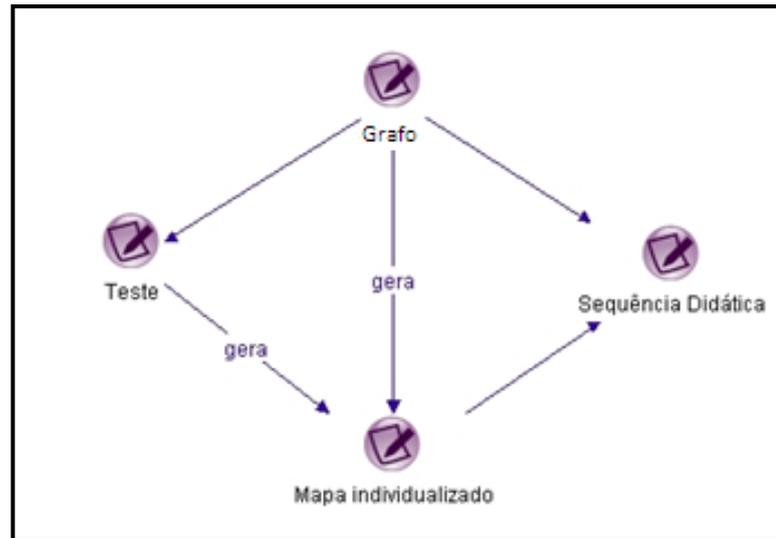
Conforme Groenwald e Moreno (2006), o SIENA é uma ferramenta informática que auxilia na autoaprendizagem e autoavaliação, a partir dos conhecimentos prévios dos alunos. É um sistema que possibilita ao professor um planejamento de ensino de acordo com a realidade dos alunos, podendo proporcionar uma aprendizagem significativa, através de uma análise do nível de conhecimento prévio de cada aluno. Para os autores o SIENA:

[...] é capaz de comunicar informações sobre o conhecimento dos alunos em determinado tema, tem o objetivo de auxiliar no processo de recuperação de conteúdos matemáticos, utilizando a combinação de mapas conceituais e testes adaptativos (GROENWALD; MORENO, 2006, p. 26).

O SIENA foi desenvolvido pelo grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna (ULL), Tenerife, Espanha juntamente com o Grupo de Estudos Curriculares de Educação da Matemática (GECEM), da ULBRA, Canoas, Brasil. Conforme Groenwald e Moreno (2007, p.5), o SIENA foi desenvolvido através de uma variação dos tradicionais mapas conceituais de Novak e Gowin, sendo denominado de Grafo Instrucional Conceitual Pedagógico - PCIG (*Pedagogical Concept Instructional Graph*), ou também denominado somente como grafo, que permite a planificação do ensino e da aprendizagem de um tema específico.

Ainda, segundo os autores, o grafo deve ser desenvolvido por relações do tipo “o conceito A deve ser ensinado antes do conceito B”, começando pelos nodos dos conceitos prévios, seguindo para os conceitos fundamentais, até atingir os nodos objetivos. Esse processo informático permite gerar um mapa individualizado das dificuldades dos alunos, o qual estará ligado a um hipertexto (material de estudo), que servirá para recuperar as dificuldades que cada aluno apresenta no conteúdo desenvolvido, auxiliando no processo de avaliação. Cada nodo do grafo contém uma sequência didática para cada conceito avaliado no teste, conforme a figura 32.

Figura 32 - esquema da plataforma SIENA.



Fonte: Groenwald e Moreno (2007).

Segundo Lemos, Seibert e Groenwald (2011), o grafo está ligado a um teste adaptativo que gera o mapa individualizado das dificuldades do estudante; esse teste adaptativo informatizado é administrado pelo computador, que procura ajustar as questões do teste ao nível de habilidade do aluno. Segundo Costa (2009 apud LEMOS; SEIBERT; GROENWALD, 2011, p. 167) um teste adaptativo informatizado procura encontrar um teste ótimo para cada estudante, para isso, a proficiência do indivíduo é estimada interativamente durante a administração do teste e, assim, só são selecionados os itens que mensurem eficientemente a proficiência do examinado.

Quando um conceito não é superado, o sistema não prossegue avaliando por esse ramo de conceitos do grafo, pois se entende que esse conceito é necessário para a compreensão do seguinte, abrindo para o estudante a possibilidade de realizar a sua recuperação. É importante dizer que o sistema poderá prosseguir por outras ramificações do grafo. O desempenho do aluno é calculado a partir da fórmula $\frac{D \times P}{D \times P + (1 - P) \times L}$, onde: D é a dificuldade da pergunta; L é o nível de adivinhação da pergunta; P é a nota da pergunta anterior (LEMOS; SEIBERT; GROENWALD, 2011, p. 168).

O sistema mostrará para cada conceito, através do seu banco de dados, quais foram as perguntas realizadas, quais foram respondidas corretamente e qual a estimativa realizada por ele sobre o grau de conhecimento de cada conceito. A figura 33 apresenta um exemplo do banco de dados do SIENA.

Figura 33 - exemplo do banco de dados de um teste adaptativo de um nodo.



Acabado: true
Nota: 0.671

#	Respuesta	Respuesta correcta	Tiempo(antes de que se acabe)	Pregunta	Puntos antes	Puntos después
0	1	true	270	Na mão de José estão dois milésimos do total de chaves da fábrica onde ele trabalha. Qual a fração que representa a quantidade de chaves que José está assegurando?	0.100	0.280
1	1	true	230	Rita e Bernardo desenharam dois retângulos com as mesmas medidas. Depois dividiram em partes iguais, a região interna de cada retângulo e começaram a pintar, Rita pintou de vermelho e Bernardo de azul. Responda corretamente, que fração do retângulo representa a parte pintada por Rita? E a parte pintada por Bernardo, que fração do retângulo representa?	0.280	0.576
2	4	false	251	A figura representa um segmento de reta. Assinale a fração que corresponde ao trecho pintado em azul?	0.576	0.576
3	0	false	274	Sabe-se que 6 terrenos de mesmo tamanho serão divididos igualmente entre 5 herdeiros. Cada herdeiro ficaria com que parte do terreno?	0.576	0.576
4	0	true	277	$\langle \text{mrow} \rangle \langle \text{mtext} \rangle$ Você tem 3 barras de chocolate para dividir igualmente entre 5 colegas. Quanto de chocolate cada colega receberá? $\langle \text{mtext} \rangle \langle \text{mrow} \rangle \langle \text{math} \rangle$	0.576	0.671
5	3	false	255	Veja como Claudia está medindo o comprimento da caneta. Qual o comprimento da caneta em palmos?	0.671	0.671
6	3	false	267	Qual a fração correspondente aos serrotes neste grupo de ferramentas?	0.671	0.671

Fonte: <http://siena.ulbra.br>

Segundo os autores, a ferramenta SIENA possui duas opções de uso. Na primeira, o aluno estuda os conteúdos dos nodos do grafo e realiza o teste para informar quais são seus conhecimentos sobre determinados conteúdos. A segunda opção oportuniza ao aluno realizar o teste e estudar os nodos nos quais apresentou dificuldades, sendo possível uma recuperação individualizada dos conteúdos em que não alcançou a média estipulada como necessária para avançar no grafo. Todos os nodos do grafo estão ligados a uma sequência didática que possibilita ao aluno estudar os conceitos ou realizar a recuperação dos nodos em que apresenta dificuldade.

A plataforma SIENA esta disponível no endereço <http://siena.ulbra.br>, sendo que o acesso aos trabalhos e banco de dados está restrito a usuários cadastrados no sistema. Esse cadastramento é realizado pelos administradores da plataforma e fornece um login e uma senha pessoal ao usuário.

7 AMBIENTE DE INVESTIGAÇÃO NA PLATAFORMA SIENA

Para Seibert e Groenwald (2012) o ambiente de investigação é, também, o mediador entre o pesquisador e o estudante; é nele que são hospedadas as informações necessárias para o encaminhamento do experimento, com as atividades propostas para os alunos e ferramentas a serem utilizadas e é nele que, também, estarão disponibilizados os dados a serem analisados pelo pesquisador.

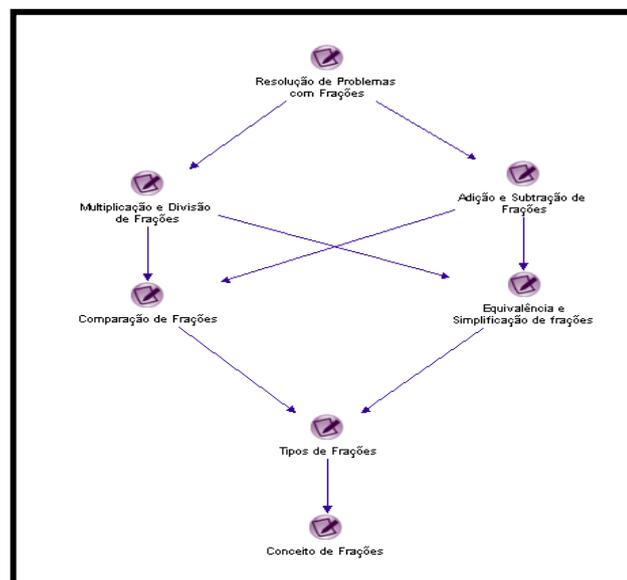
Neste capítulo, apresenta-se como foi implementado na plataforma SIENA o ambiente de investigação da pesquisa desenvolvida contendo o grafo construído com o conteúdo de Frações, o banco de questões para os testes adaptativos e a sequência didática eletrônica com o tema Frações, para alunos que necessitavam estudos de recuperação nesse conteúdo.

7.1 GRAFO

O grafo dos conceitos a serem trabalhados com o tema Frações, está composto por sete nodos, habilitados na seguinte sequenciação: Conceito de Frações; Tipos de Frações; Equivalência e Simplificação de Frações; Comparação de Frações; Adição e Subtração de Frações; Multiplicação e Divisão de Frações e Resolução de Problemas com Frações.

O grafo foi desenvolvido no *software Compendium*, que é uma ferramenta que permite o mapeamento de ideias e argumentos, facilitando as interconexões dos nodos (figura 34).

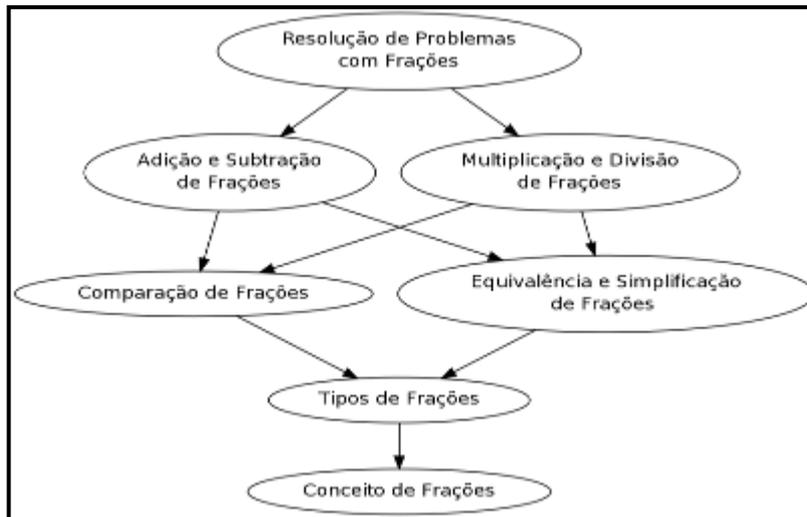
Figura 34 - grafo com o conteúdo de Fração no *software Compendium*



Fonte: Autor

Após ser desenvolvido no *software Compendium* e exportado para a plataforma SIENA, ficou planificado conforme a figura 35.

Figura 35 - grafo com o conteúdo de Frações na plataforma SIENA.



Fonte: <http://siena.ulbra.br>

Na figura 36, apresenta-se a lista de nodos, na página de acesso da sequência didática na plataforma SIENA.

Figura 36 - lista dos nodos na plataforma SIENA.

Nombre	Ver	Editar	Borrar	
<input type="text"/>				
Comparação de Frações	Ver	Editar	Borrar	
Multiplicação e Divisão de Frações	Ver	Editar	Borrar	
Adição e Subtração de Frações	Ver	Editar	Borrar	
Resolução de Problemas com Frações	Ver	Editar	Borrar	
Equivalência e Simplificação de Frações	Ver	Editar	Borrar	
Tipos de Frações	Ver	Editar	Borrar	
Conceito de Frações	Ver	Editar	Borrar	

1-7 / 7

[Añadir un nodo a la asignatura](#)
[Atrás](#)
[Importar mapa de compendium](#)

Fonte: <http://siena.ulbra.br/courses/9>

Para cada nodo do grafo, foi desenvolvido um banco de questões para os testes adaptativos e construídos materiais de estudo com apresentações em *PowerPoint*, atividades *online* e atividades desenvolvidas no aplicativo *JClic* para estudos de recuperação.

7.2 TESTE ADAPTATIVO

O teste adaptativo tem por finalidade administrar questões de um banco de questões, que correspondam ao nível de capacidade do examinando. Como cada questão apresentada a um indivíduo é adequada à sua habilidade, nenhuma questão do teste é irrelevante (SANDS e WATERS, 1997 apud LEMOS; SEIBERT; GROENWALD, 2011, p. 168). Ao contrário dos testes de papel e caneta, cada estudante recebe um teste com questões diferentes e tamanhos variados, produzindo uma medição mais precisa da proficiência e com uma redução, do tamanho do teste, em torno de 50% (WAINER, 2000 apud LEMOS; SEIBERT; GROENWALD, 2011, p. 168).

Para compor o banco de questões do teste adaptativo, é necessário cadastrar perguntas para cada conceito do grafo, com o objetivo de avaliar o grau de conhecimento individual do aluno. Essas perguntas são de múltipla escolha, numeradas de 1 a 5, sendo necessário definir para cada questão: o grau de sua relação com o conceito; o grau de sua dificuldade (fácil, média ou difícil); a resposta verdadeira; a possibilidade de responder a pergunta considerando exclusivamente sorte ou azar; a estimativa do conhecimento prévio do aluno sobre esse conceito e tempo para o aluno responder a pergunta (em segundos). São fundamentais essas definições para que através do teste adaptativo, de acordo com as respostas dadas seja possível estimar o grau de conhecimento prévio do aluno em relação ao conceito trabalhado. O teste adaptativo funciona lançando perguntas aleatórias ao aluno, com um nível de dificuldade de acordo com as respostas do estudante ao teste. O sistema dispõe de um mecanismo de parada, quando já não pode obter uma maior estimativa sobre ao grau de conhecimento de um conceito, ou quando não existam mais perguntas. Por essa razão cada nodo do grafo deve ter um número suficiente de perguntas, de diferentes níveis de dificuldade. A progressão do aluno se dá sempre que alcançar uma nota superior ao estipulado, pelo professor, no teste.

Nesta pesquisa, o banco de questões de cada nodo (APÊNDICE B) foi desenvolvido com questões criadas pelo autor ou adaptadas dos trabalhos de Llinares e Sánchez (1988), Giménez e Bairral (2005) e de livros didáticos de Ribeiro (2009), Spinelli e Souza (2007),

Dante (2009), Barroso (2006), Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (2007), Giovanni e Giovanni Jr. (2002), Guelli (1999) e Centurión, Jakubovic e Lellis (2004).

Para a composição dos bancos de questões dos testes adaptativos, para cada nodo do grafo, foram desenvolvidas, em média, 30 questões, com três níveis de dificuldades. Nunes et al. (2012) definem da seguinte forma os níveis de dificuldades:

[...] são consideradas fáceis as questões de aplicação direta de um conceito, uma propriedade ou um algoritmo. As questões de dificuldade média exigem leitura mais detalhada, interpretação e análise de dados, aplicando, na sua resolução, um ou mais conceitos. As questões difíceis necessitam de leitura, interpretação e análises mais detalhadas e elaboradas, exigindo elaboração de hipóteses, plano de ação e execução desse plano, onde o estudante não conhece de imediato a resposta, necessita organizar o conhecimento já adquirido e adequá-lo na resolução da atividade (NUNES et al., 2012).

As questões foram classificadas em níveis de dificuldades pelo autor, pela orientadora deste trabalho e por um professor da Educação Básica membro do projeto Observatório da Educação. Na figura 37, apresentam-se exemplos de questões com os três níveis de dificuldades do nodo Conceito de Frações.

Figura 37 - exemplos de questões dos três níveis de dificuldade.

Nível fácil	Nível médio	Nível difícil
 <p>Indique a Fração correspondente à parte da região plana que está pintada:</p> <p>0) $\frac{5}{8}$ 1) $\frac{1}{8}$ 2) $\frac{1}{3}$ 3) $\frac{3}{5}$ 4) $\frac{3}{8}$</p> <p>Fonte: Adaptado de Dante (2009).</p>	 <p>Veja como Claudia está medindo o comprimento da caneta. Qual o comprimento da caneta em palmos?</p> <p>0) $\frac{6}{5}$ 1) $\frac{3}{5}$ 2) $\frac{5}{6}$ 3) $\frac{1}{5}$ 4) $\frac{4}{6}$</p> <p>Fonte: Adaptado de Barroso (2006).</p>	<p>Júlio pegou na geladeira uma garrafa de dois litros de suco para distribuir igualmente com mais três amigos. A garrafa está pela metade. Considerando o total da capacidade total da garrafa, que Fração de suco Júlio deve colocar em cada copo para distribuir igualmente entre todos?</p> <p>0) $\frac{1}{2}$ 1) $\frac{1}{3}$ 2) $\frac{1}{4}$ 3) $\frac{1}{5}$ 4) $\frac{4}{1}$</p> <p>Fonte: Adaptado de Barroso (2006).</p>

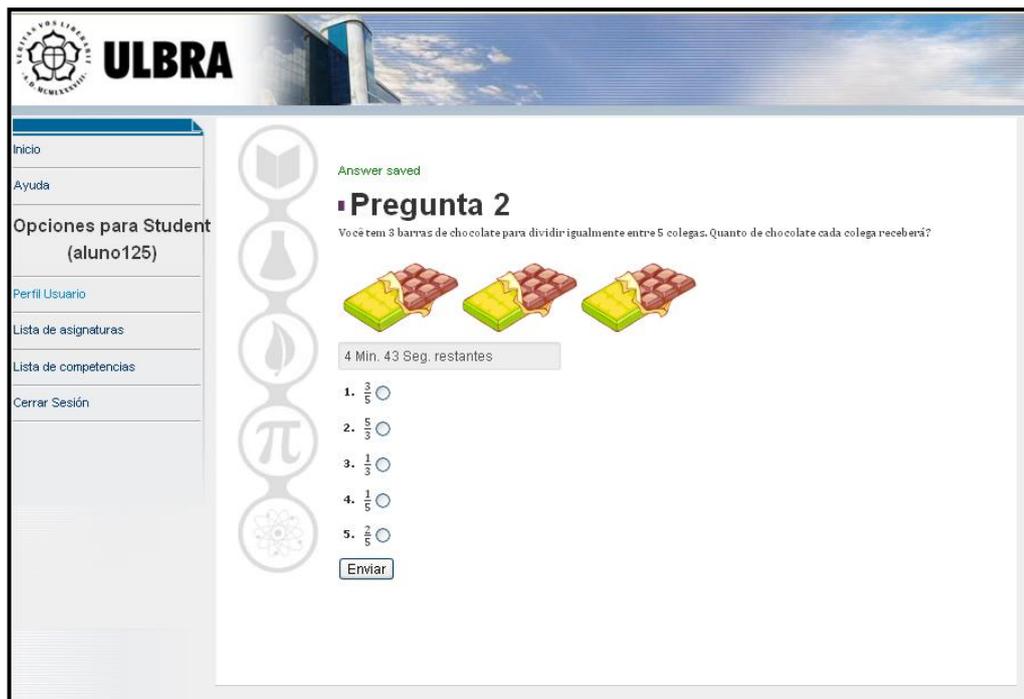
Fonte: Autor

Nestes exemplos, pode-se perceber que a questão de nível fácil é uma interpretação direta da imagem relacionando o conceito de parte-todo. A questão considerada de nível médio também trata do conceito parte-todo, mas é preciso que o aluno relacione o comprimento da mão e o comprimento da caneta. No último exemplo, considera-se como uma questão de nível difícil porque exige do aluno compreensão da ideia de Frações, leitura e interpretação de dados para resolver o problema.

Para as questões de nível fácil, foi estipulada a pontuação de 0,35, para as de nível médio a pontuação é de 0,5 e, para as questões de nível considerado difícil, a pontuação é de 0,7. Com base nessas pontuações, o sistema define a média conforme o desempenho do aluno. Todas as questões são de múltipla escolha, com cinco opções. Para formar essas opções, além da resposta correta, as demais foram escolhidas a partir das pesquisas de Llinares e Sánchez (1988), Campos, Silva e Pietropaolo (2009), Nunes e Bryant (1997) e dos PCN (BRASIL, 1997; 1998) com os erros mais frequentes realizados pelos alunos.

Na figura 38, visualiza-se como uma questão é apresentada ao aluno, quando este está estudando na plataforma SIENA.

Figura 38 - exemplos de questões na plataforma SIENA.



Fonte: <http://siena.ulbra.br/courses/9>

No APÊNDICE B, encontram-se o banco de questões dividido por nodos e níveis de dificuldades.

7.3 SEQUÊNCIA DIDÁTICA ELETRÔNICA

Segundo Zabala (1998, p.18), sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido, tanto pelos professores como pelos alunos”. Dolz e Schneuwly (2004) consideraram que essas sequências didáticas são organizadas pelo professor com o objetivo de alcançar a aprendizagem de seus alunos, envolvendo atividades de aprendizagem e avaliação.

Nessa pesquisa, foi desenvolvida uma sequência didática do tema de Frações na plataforma SIENA para alunos que necessitam de estudos de recuperação. Conforme Groenwald, Zoch e Homa:

A vantagem do uso de uma sequência didática em uma plataforma de ensino é a possibilidade da utilização de diferentes recursos, com padrão superior de qualidade, como vídeo-exemplos, textos com exemplos em movimento, ou seja, um conteúdo visual com maior qualidade. Assim, nesse ambiente virtual de aprendizagem, os alunos deixam de receber o mesmo conteúdo ao mesmo tempo e passam a percorrer caminhos diferenciados, de acordo com o seu perfil de estudante e com o seu desempenho (GROENWALD; ZOCH; HOMA, 2009, p.2).

A plataforma SIENA possibilita que os alunos trabalhem somente aqueles conceitos em que apresentam dificuldade de aprendizagem. Segundo Lemos, Monteiro, Seibert e Groenwald (2011, p.3) este sistema pode se constituir em um instrumento para auxílio ao professor na recuperação de conteúdos, já que possibilita que seja realizada uma retomada dos conceitos de forma diferenciada e individualizada, de acordo com as necessidades de cada estudante.

Para o planejamento, desenvolvimento e utilização dos recursos e métodos a serem adotados na construção da sequência didática, essa pesquisa apoiou-se no *design* instrucional. Filatro (2008) considera que o termo *design* é o resultado de um processo ou atividade (um produto), em termos de forma e funcionalidade, com propósitos e intenções claramente definidos, enquanto instrução é a atividade de ensino que se utiliza da comunicação para facilitar a aprendizagem. Assim Filatro (2008) define *design* instrucional como sendo:

[...] a ação institucional e sistemática de ensino, que envolve o planejamento, o desenvolvimento e a aplicação de métodos, técnicas, atividades, materiais, eventos e produtos educacionais em situações didáticas específicas, a fim de promover, a partir dos princípios de atividades e instrução conhecidos a aprendizagem humana. Em outras palavras, definimos *design* instrucional como o processo (conjunto de atividades) de identificar um problema (uma necessidade) de aprendizagem e desenhar, implementar e avaliar uma solução para esse problema (FILATRO, 2008, p. 3).

Corroborando com essa ideia, Romiszowski (2004) afirma que *design* instrucional é a área da tecnologia educacional entendido como planejamento baseado em princípios científicos de comunicação, aprendizagem e ensino, visando à melhoria do processo ensino e aprendizagem e dos materiais didáticos sendo elaborados.

Para Filatro (2010), compreender de que forma as TIC contribuem para o aperfeiçoamento do processo de ensino e aprendizagem representa uma oportunidade de redescobrir a natureza ímpar, insubstituível e altamente criativa da educação no processo de desenvolvimento humano e social. A autora completa que esse é o campo de pesquisa e atuação do *design* instrucional, entendido como o planejamento, o desenvolvimento e a utilização sistemática de métodos, técnicas e atividades de ensino para projetos educacionais apoiados por tecnologias.

O modelo de *design* instrucional identificado nesta pesquisa é o do *Design* Instrucional fixo (DI fixo) (FILATRO, 2008). Neste modelo, todos os componentes do *design* instrucional são planejados e produzidos antecipadamente à ação de aprendizagem. Segundo Filatro (2008), em geral, o produto resultante desse modelo é rico em conteúdo bem estruturado, mídias selecionadas e *feedbacks* automatizados. Apesar de muitas vezes esse modelo de *design* instrucional dispensar a participação de um educador durante a execução, neste trabalho, considera-se o educador como elemento fundamental na mediação de todo o processo. O DI fixo é dividido em cinco fases; essa divisão também é conhecida como modelo Addie (abreviatura em inglês de *analyses, design, development, implementation e evaluation* - análise, *design*, desenvolvimento, implementação e avaliação).

Na fase da análise, foi realizada a identificação da necessidade de aprendizagem, a definição dos objetivos instrucionais e a caracterização dos alunos. Nesta fase, foram definidos o problema de pesquisa, a investigação sobre as dificuldades no ensino e aprendizagem de Frações, a definição do ambiente e em que situação seria aplicada a aprendizagem; a quem se destinaria essa sequência didática e como seria realizada a avaliação dos alunos.

Definidos os elementos da fase anterior, a fase subsequente é a do *design*, onde foi realizado o planejamento das instruções. Neste momento, foi definido como os objetivos seriam alcançados. O conteúdo foi mapeado, estruturado e sequenciado; foi feita a seleção das mídias mais apropriadas para a apresentação do conteúdo de Frações e como essas mídias seriam utilizadas e produzidas. A terceira fase é a do desenvolvimento, em que foi feita a produção e a adaptação dos recursos utilizados na sequência didática de Frações. Depois de desenvolvida a sequência didática eletrônica com o conteúdo de Frações, foi realizado um

experimento com um grupo de alunos de uma escola pública; essa fase é denominada de implementação.

A fase da avaliação é realizada em dois momentos da pesquisa. O primeiro é durante o desenvolvimento com testes-piloto, com o intuito principalmente de verificar os recursos tecnológicos utilizados na sequência didática na plataforma SIENA, e o funcionamento dos testes adaptativos. O segundo momento da avaliação é posterior à implementação, após a análise dos dados coletados no experimento, quando será feita revisão e avaliação dos resultados, analisando a necessidade, as mudanças na sequência didática ou adequação dos recursos utilizados para edições posteriores.

A construção das sequências didáticas depende das TIC a serem utilizadas, segundo Filatro (2010), é com o auxílio dessas aplicações que será possível validar os objetivos de aprendizagem, elaborar as atividades pedagógicas a serem desenvolvidas no decorrer do curso e definir como será medido o aproveitamento do aluno.

Para desenvolver os materiais didáticos de estudo da sequência didática de cada nodo do grafo na plataforma SIENA, foram utilizados os seguintes recursos:

- **Processador de texto:** Utilizou-se o *Microsoft Word*, salvo no modo página web, para a construção das páginas iniciais de cada nodo e nas apresentações das atividades *online*;
- **Editor de apresentação:** Para a criação do material de estudo de recuperação foi utilizado o *Microsoft PowerPoint*, que é um programa utilizado para criação/edição e exibição de apresentações gráficas. As apresentações para serem utilizadas na plataforma SIENA são convertidas em formato mais compacto em Flash (.swf) através do programa *iSpring*. Além dos recursos disponíveis no *Microsoft PowerPoint* também foram utilizadas imagens em formato .jpg e .gif disponíveis na *internet*.
- **Aplicativo JClic:** Foram desenvolvidas atividades no aplicativo JClic, que é um programa para a criação, realização e avaliação de atividades educativas multimídia, desenvolvido na plataforma Java. As atividades realizadas no aplicativo permitem ao aluno exercitar os conceitos abordados no material de estudo, através de diversos tipos de atividades educativas, como associações, exercícios com texto, palavras-cruzadas. Para a implantação na plataforma SIENA das atividades criadas, os projetos são executados através do aplicativo *JClic Applet*; deste modo, às atividades se mostram como um objeto inserido em uma página *web*;
- **Atividades online:** Foram pesquisadas diversas atividades relacionadas ao tema Frações, disponíveis na *internet*. Essas atividades têm o propósito de proporcionar, ao aluno,

contato com o conteúdo de forma mais interativa e lúdica. Conforme Lemos, Monteiro e Seibert (2011, p.2) “o uso da tecnologia permite modernizar o lúdico, fazendo uma releitura dos jogos e das atividades didáticas utilizadas em sala de aula”.

A pesquisa dos recursos tecnológicos empregados na sequência didática eletrônica considerou as características e as limitações do laboratório de informática a ser utilizado no experimento, na escola. Esse laboratório faz parte do ProInfo do Governo Federal, que tem como características principais o sistema operacional Linux Educacional, e o compartilhamento dos gabinetes (um gabinete possui dois ou três monitores de vídeo).

Acredita-se que a construção de uma sequência didática utilizando tecnologias com o conteúdo de Frações pode vir a estimular o aluno a desenvolver habilidades como raciocínio lógico e a ampliação do pensamento matemático, elementos bases para adquirir conhecimento, explorando situações que possibilitam ao aluno testar ideias e formular hipóteses, proporcionando um ambiente de interatividade.

Além disso, é importante disponibilizar aos professores meios que os auxiliem na tarefa de realizar a inclusão de alunos com déficit de aprendizagem. Segundo Ponte (1995), a utilização das TIC na Matemática, valorizam as possibilidades de realização, na sala de aula, de projetos e atividades de modelação, exploração e investigação, favorecendo o desenvolvimento, nos alunos, de atitudes mais positivas e uma visão mais completa sobre a natureza desta disciplina. Sendo assim, o uso das TIC no meio escolar pode ser utilizado, pelo educador, como um facilitador no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, sendo também, um recurso que pode ser empregado para a recuperação de conteúdos com alunos que apresentam dificuldades em Matemática.

Nos itens a seguir serão apresentados os materiais de estudo desenvolvidos para cada nodo da sequência didática, que incluem apresentações em *PowerPoint* com material de revisão dos conceitos, essas apresentações são no estilo de histórias em quadrinhos, utilizando cenários criados com recursos do próprio *software* e imagens de bonecos em *giffs e .jpg*. Como complemento ao material de estudo, cada nodo também contém atividades *online* e exercícios desenvolvidos no aplicativo *JClic*. As sequências didáticas como são apresentadas aos alunos, estão no APÊNDICE A.

7.3.1 Nodo Conceito de Frações

O nodo Conceito de Frações tem como propósito introduzir os primeiros conceitos do tema Frações, tratando do surgimento histórico das Frações, seus significados, leitura dos

números fracionários e buscando em situações cotidianas para que os alunos possam reconhecer esses números.

Para tanto, foram desenvolvidas três apresentações em *PowerPoint*: a primeira tratando de como surgiram historicamente as Frações; a segunda trabalhando os significados e a leitura das Frações e a terceira, reforçando a ideia da utilidade das Frações. Pode-se observar na figura 39 a página inicial do nodo; cada porta possui um *link* ao material de estudo (apresentação ou atividade).

Figura 39 - página inicial do material de estudo do nodo Conceito de Frações.



Fonte: <http://siena.ulbra.br>

O material de estudo do nodo Conceito de Frações inicia com uma apresentação em *PowerPoint*, utilizando a história da Matemática como proposta metodológica. Segundo Groenwald, Kaiber e Mora (2004),

O enfoque histórico é uma proposta metodológica que permite ao aluno descobrir a gênese dos conceitos e métodos que aprenderá em aula. Em outras palavras este enfoque permitirá ao aluno fazer relação das ideias matemáticas desenvolvidas em sala de aula com as suas origens. O conhecimento da história da Matemática proporciona uma visão dinâmica da evolução dessa disciplina, buscando as ideias originais em toda a sua essência (GROENWALD; KAIBER; MORA, 2004, p.47).

Ainda conforme os autores, essa visão da Matemática faz com que a disciplina seja vista como um saber construído pelo homem para responder as suas dúvidas na leitura do mundo, permitindo ao aluno apropriar-se deste saber, o que lhe proporcionará uma melhor

leitura do contexto global (GROENWALD; KAIBER; MORA, 2004, p.48). Para a construção da apresentação “Um pouco de História...” (figura 40) utilizou-se os trabalhos de Boyer (1996), Santos (2005), Lições do Rio Grande (RIO GRANDE DO SUL, 2009), Giovanni e Giovanni Jr. (2002) e Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (2007).

Figura 40 - apresentação "Um pouco de História..."

UM POUCO DE HISTÓRIA...

Olá, tudo bem? Meu nome é João e estarei junto com você nos nossos estudos sobre Frações.

Meu nome é Ana e também estarei te acompanhando.

Vamos iniciar imaginando a seguinte situação: temos 1 chocolate e iremos dividir igualmente para 3 crianças.

Como assim João? 1 chocolate dividido igualmente para 3 crianças? E dá para dividir 1 por 3?

Ana, se pensarmos somente nos **Números Naturais** não iremos conseguir resolver o problema.

Mas então João como iremos resolver este problema?

Antes de resolvermos este problema, quero te contar uma história.

Uma história? Legal João!

Por volta do ano 4.000 a.C., um antigo faraó de nome **Sesóstris** repartiu o solo do Egito às margens do rio Nilo entre seus habitantes.

Uma vez por ano, na época das cheias, as águas do Nilo sobem muitos metros acima de seu leito normal, inundando uma vasta região ao longo de suas margens.

Ao avançar sobre as margens, o rio derrubava as cercas de pedra que cada agricultor usava para marcar os limites do seu terreno.

Adaptado: Matemática Pensar e Descobrir 5ª série - Editora FTD



Quando as águas do rio Nilo baixavam era preciso refazer a medição dos terrenos. Os egípcios usavam cordas para fazer a medição. Havia uma unidade de medida assinada na própria corda. As pessoas encarregadas de medir esticavam a corda e verificavam quantas vezes aquela unidade de medida estava contida nos lados do terreno.

No entanto, por mais adequada que fosse a unidade de medida escolhida, dificilmente um pedaço de terra tinha uma medida inteira no lado do terreno.

Adaptado: Matemática Pensar e Descobrir 5ª série - Editora FTD



Para resolver problemas assim surgiram as **FRAÇÕES**, da necessidade de representar uma medida que não tem uma quantidade inteira de unidades.

Os egípcios conheciam as Frações de numerador 1 e esta era a forma que eles usavam para representá-las:

$\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{20}$

Adaptado: A Conquista da Matemática 6ª ano - Editora FTD

Assim como no nosso problema, nem sempre é possível obter medidas inteiras.

João, então podemos fazer como os egípcios e utilizar as **Frações**.

Vamos utilizar as **Frações** para resolver essa nossa divisão.

Vamos ver como fica.

• Neste caso, a divisão com Números Naturais não resolve o problema:

$$\begin{array}{r} 1 \ 3 \\ - 0 \ 0 \\ \hline 1 \end{array}$$

• Cada criança receberia 0 chocolate, sobraria 1 e ninguém sairia satisfeito.

• Com as Frações, porém, é possível fazer essa divisão de 1 por 3.

$1 \div 3 = \frac{1}{3}$ (se lê um terço)

• Cada criança recebe $\frac{1}{3}$ do chocolate.

• Nesta divisão, o dividendo é 1, o divisor é 3, o quociente $\frac{1}{3}$ e o resto é 0.

Adaptado: Matemática na medida certa 5ª série - Editora Scipione

Viu Ana, foi possível resolver o nosso problema.

Sim João, agora entendi a importância das **Frações**, podemos partir para a próxima lição.

Fonte: Autor

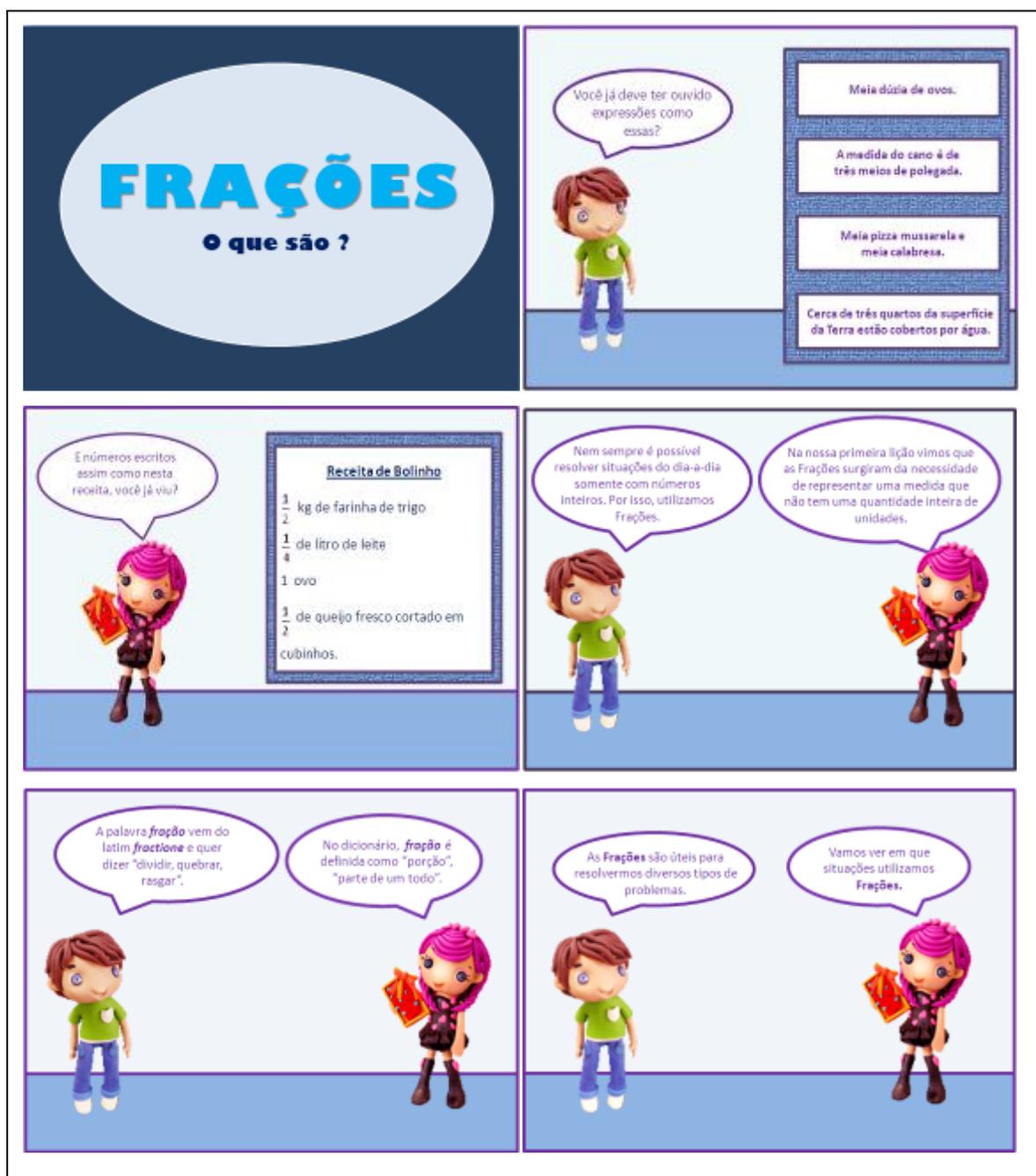
Na apresentação “Frações, o que são?” o tema é tratado a partir de expressões e números fracionários possíveis de serem encontrados em situações do dia a dia, como em receitas de culinária e medidas. Para Llinares e Sánchez (1988, p.33), utilizar situações do cotidiano permite que os alunos reconheçam a Matemática no mundo que os cerca, sendo a tarefa do professor auxiliá-los na construção do conceito matemático. No caso particular das Frações, essa relação com situações vivenciadas pelos alunos pode auxiliar na construção dos significados das Frações, nos seus diferentes sentidos.

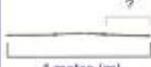
Ainda nessa apresentação, abordou-se além de exemplos de situações de uso das

Frações, também a representação algébrica e a leitura de Frações. Outro aspecto destacado é a representação gráfica das Frações, que, segundo Bittar e Freitas (2005), devem variar as formas e a maneira como são representadas.

Essa apresentação se fundamentou nas ideias de Llinares e Sánchez (1988), Campos, Silva e Pietropaolo (2009), Nunes et al. (2009), Bittar e Freitas (2005), Nova Escola (2009), Lições do Rio Grande (RIO GRANDE DO SUL, 2009) e Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (2007). Na figura 41, apresenta-se o material de estudo “Frações, o que são?”.

Figura 41 - apresentação "Frações o que são?".



 <p>1 metro (m)</p> <p>* Expressar o resultado de uma medição não exata.</p> <p>Exemplo: se o comprimento da corda é de 1 metro, quanto mede a parte em destaque?</p> <p>$\frac{1}{3}$ de metro</p>	 <p>* Expressar uma divisão.</p> <p>Exemplo: tenho 5 doces para repartir em partes iguais entre 3 crianças. Quanto cada uma receberá?</p> <p>$\frac{5}{3}$</p>	 <p>* Expressar proporcionalidade.</p> <p>Para ampliar ou reduzir imagens, construir mapas ou maquetes, utilizamos a ideia de proporcionalidade.</p> <p>Exemplo: em um mapa cada 1 centímetro no papel equivale a 100 centímetros do tamanho real. Podemos escrever esta proporção de diferentes maneiras:</p> <p>1 para 100 1:100 $\frac{1}{100}$</p>	 <p>* Expressar relação entre as partes e o todo</p> <p>Exemplo: para fazer uma jarra de suco, misturo 1 copo do líquido concentrado com 5 medidas de água</p> <p>$\frac{1}{6}$</p>	 <p>* Expressar porcentagem</p> <p>Exemplo: em uma turma com 20 alunos (o que representa 100% do total) estão presentes 75% dos alunos. Podemos representar através de Frações a quantidade de alunos presente.</p> <p>$\frac{3}{4}$</p>	 <p>* Expressar probabilidade.</p> <p>Exemplo: quando jogamos um dado, qual é a probabilidade de sair o 2?</p> <p>$\frac{1}{6}$</p>
---	--	--	---	--	---

Adaptado: Revista Nova Escola, Edição Especial nº 27 Matemática, Setembro 2003, Editora Abril

Vamos conhecer mais sobre as Frações?

A expressão $\frac{a}{b}$, sendo $a \in \mathbb{N}$ e $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$ é chamada de **Fração** e representa um **Número Racional** escrito na forma fracionária.

Exemplos de frações:

$\frac{1}{2}$, $\frac{5}{17}$, $\frac{4}{3}$

Vamos ver agora o que representa o $\frac{a}{b}$

Na Fração $\frac{a}{b}$, temos:

$\frac{a}{b}$
numerator
denominator

O **denominador b** indica em quantas partes iguais uma unidade foi dividida.

O **numerador a** indica quantas dessas partes foram consideradas.

Vamos ver como se faz a leitura das Frações!

Para fazer a leitura de uma Fração, devemos ler o **numerador** e, em seguida o **denominador**, que recebe alguns **nomes especiais**.

Lendo frações...

* Frações com denominador de 2 a 9:

Denominador	2	3	4	5	6	7	8	9
Leitura	meio	terço	quarto	quinto	sexto	sétimo	oitavo	nono

* Frações com denominador 10, 100, 1.000, ...:

Denominador	10	100	1.000	...
Leitura	décimos	centésimos	milésimos	...

* Frações com outros denominadores:

Denominador	11	12	13	...
Leitura	onze avos	doze avos	treze avos	...

Alguns exemplos....

Denominador menor que 10:

$\frac{1}{2}$ → um meio

$\frac{3}{4}$ → três quartos

$\frac{4}{7}$ → quatro sétimos

$\frac{5}{3}$ → cinco terços

Denominador maior que 10 e diferente de 100, 1.000...:

$\frac{4}{12}$ → quatro doze avos

$\frac{10}{20}$ → dez vinte avos

$\frac{15}{71}$ → quinze setenta e um avos

$\frac{65}{405}$ → sessenta e cinco quatrocentos e cinco avos

Saiba que....

Quando o denominador de uma fração for igual a 10, 100, 1000..., lemos o numerador seguido da palavra **décimos**, **centésimos**, **milésimos**...

Quando o denominador de uma fração for maior que 10 e diferente de 100, 1000..., lemos o **numerador** e **denominador** seguido da palavra **avos**.

Toda fração cujo denominador é 10, 100, 1000... É chamada **fração decimal**.

Alguns exemplos....

Denominador igual a 10, 100, 1.000, 10.000...:

$\frac{1}{10}$ → um décimo

$\frac{11}{10}$ → onze décimos

$\frac{22}{100}$ → vinte e dois centésimos

$\frac{517}{1000}$ → quinhentos e dezessete milésimos

O **numerador** e o **denominador** são os termos de uma Fração. Vamos ver alguns exemplos.





• A figura foi dividida em 4 partes iguais e estamos considerando 1 destas partes.

$\frac{1}{4}$ parte considerada
4 partes divididas



• A figura foi dividida em 10 partes iguais e estamos considerando 3 destas partes.

$\frac{3}{10}$ parte considerada
10 partes divididas

Veja este outro exemplo ao lado. A figura foi dividida em 8 partes iguais.





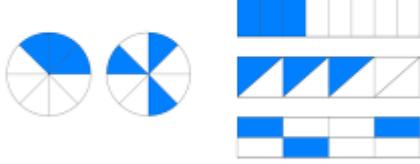
• a parte azul corresponde a $\frac{1}{8}$ da figura.

• as partes amarelas correspondem a $\frac{3}{8}$ da figura.

• as partes laranjas correspondem a $\frac{4}{8}$ da figura

Adaptado: A conquista da Matemática 6º ano. Editora FTD.

• É importante observar que existem várias formas de representar graficamente a mesma fração. Por exemplo para representar $\frac{3}{8}$, dividimos a figura em 8 partes iguais e pintamos 3 destas partes, como nas figuras abaixo:



TODAS AS FIGURAS ACIMA REPRESENTAM A MESMA QUANTIDADE DO TOTAL.

As figuras 1 e 2 representam a Fração $\frac{1}{2}$, as partes são **CONGRUENTES**, ou seja, representam a mesma área da superfície.

A figura 3 representa a Fração $\frac{3}{5}$.

A figura 4 também representa a Fração $\frac{3}{5}$, mesmo as partes não tendo a mesma forma elas são **CONGRUENTES**, representam a mesma área da superfície.

1)  $\frac{1}{2}$

2)  $\frac{1}{2}$

3)  $\frac{3}{5}$

4)  $\frac{3}{5}$

Agora observe as figuras ao lado.



As figuras abaixo não são representações gráficas de frações:



• Porque as figuras não estão divididas em partes congruentes, ou seja, as partes não tem áreas de superfície iguais.

É importante sempre prestarmos atenção nas lições. Isso é fundamental para os nossos estudos.



Se tivermos alguma dúvida, podemos voltar e revisar o conteúdo. Vamos para o nosso próximo estudo.



Fonte: Autor

Na apresentação “Para que servem as Frações?” foi destacada a ideia dos significados de parte-todo na forma contínua e discreta. Os primeiros contatos das crianças com o significado parte-todo acontecem relativamente cedo, expressões como “meia maçã”, “meio copo de leite”, “quero uma fatia de torta” pertencem ao vocabulário infantil, mas essas aproximações que as crianças realizam são em um primeiro momento qualitativas e não alcançam a classificação quantitativa de uma situação (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 80). Por isso, para estes autores, de alguma maneira se pode entender que a relação parte-todo se

encontra na origem das demais interpretações do Número Racional e se converte na base do trabalho com as demais interpretações das Frações; por isso, foi inicialmente dada uma maior ênfase a este significado no material de estudo. Outro aspecto abordado nessa apresentação foi a localização de Frações na reta numérica, para que desta forma o aluno reconheça a Fração como número e não como uma superposição de dois Números Naturais (VASCONCELOS, 2007, p.37). O referencial utilizado neste material foi Llinares e Sánchez (1988), Campos, Silva e Pietropaolo (2009) e, Giménez e Bairral (2005). Na figura 42, pode-se ver a apresentação.

Figura 42 - apresentação "Para que servem as Frações?"

FRAÇÕES

Para que servem?

Nas nossas lições anteriores vimos o que são e como surgiram as Frações.

A partir de agora iremos estudar para que elas servem e como as encontramos em situações do dia a dia.

Já sabemos que as Frações surgiram de situações onde não podemos resolver com os Números Naturais.

Como por exemplo o problema que iremos mostrar a seguir.

• A parte colorida representa que Fração das figuras? Clique nas imagens e descubra.



$\frac{1}{5}$



$\frac{3}{4}$



$\frac{1}{4}$

• Quando trabalhamos desta forma estamos relacionando a parte com o todo (com o inteiro ou com a unidade), ou seja, com isso estamos representando que o todo está sendo dividido em partes iguais.

• Vamos ver essa outra situação:

• Num loja de brinquedo há 4 carrinhos vermelhos e 3 carrinhos azuis do mesmo tipo e marca. Que fração representa a quantidade de carrinhos vermelhos em relação ao total de carrinhos?



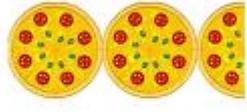
• Resposta: Temos um total de 7 carrinhos, dos quais 4 são vermelhos. A fração que representa tal situação é $\frac{4}{7}$.

A relação parte-todo significa que "um todo está dividido em partes equivalentes de superfície (primeiro exemplo) ou de elementos (segundo exemplo)".

Adaptado: Considerações e resumo de ensino e aprendizagem de representações fracionárias de números racionais. Campos, Sílvia Pietropaolo. Dilema 2004, 2008.

• Agora imaginaremos essa situação:

• O desenho abaixo mostra a quantidade de pizzas que Paulo e seu irmãos comeram. Quantas pizzas eles comeram?



• Resposta: Podemos responder usando as expressões:

Eles comeram 2 pizzas e mais metade de outra.
ou
Eles comeram 2 pizzas e meia.

Podemos também representar essa quantidade em números. Vamos representar na **reta numérica**, assinalado em vermelho:

Como vemos os números naturais são insuficientes, precisamos representar com um Número Racional, e podemos expressar em notação fracionária (Fração) ou decimal:

$2 \frac{1}{2}$ ou 2,5

Vamos ver outros exemplos de Números Racionais na **reta numérica**:

Acima estão alguns exemplos de Números Racionais expressos em notação fracionária (Fração) e decimal. Lembre-se por exemplo que:

$1 + \frac{1}{2} = 1 \frac{1}{2}$ e $1 + 0,5 = 1,5$

E que:

$\frac{1}{2} = 1,5$

Utilizamos as Frações também como resultado de uma divisão, ou seja, significa um quociente.

É isso mesmo João, vamos ver um exemplo desse tipo de problema.

Queremos dividir três chocolates igualmente entre dois amigos. Quanto receberá cada um?

Resposta: Não podemos responder de forma adequada utilizando os números naturais, pois essa divisão obtém-se 1 chocolate para cada um e ainda sobra 1 chocolate. O resto ainda pode ser subdividido. Para expressar o resultado dessa divisão devemos utilizar um número racional representado na forma de fracionária ou decimal.

3 chocolates

1ª Solução

Cada chocolate foi dividido entre os dois amigos.

2 amigos

2ª Solução

1 chocolate inteiro para cada um e sobrou 1 chocolate que foi novamente dividido entre os amigos.

Adaptado: Considerações a respeito do ensino e aprendizagens de representações fracionárias de números racionais. Denise Silvia Pires de Aguiar. Editora 2009, 2009.

Então cada amigo deverá receber $\frac{3}{2}$ de chocolate ou 1 chocolate mais $\frac{1}{2}$ chocolate.

Então:

$$3 \div 2 = \frac{3}{2} = 1 \frac{1}{2}$$

Neste caso, como podemos ver na resposta, o resultado não é um Número Natural, então, utilizamos as Frações como quociente desta divisão.

Ara, podemos utilizar as Frações para comparar duas quantidades de uma grandeza.

Utilizamos como **razão**, como por exemplo uma probabilidade de um evento.

Quando jogamos um dado qual é a probabilidade de tirarmos um 3?

Resposta: Como um dado contém seis lados e cada lado tem um número diferente de 1 a 6, a probabilidade de tirarmos um 3 é de uma chance em seis ou podemos escrever $\frac{1}{6}$.

Fizeram uma rifa na escola. Foram impressos 150 bilhetes. Eu comprei 20 bilhetes. Qual é a minha chance de ganhar o prêmio?

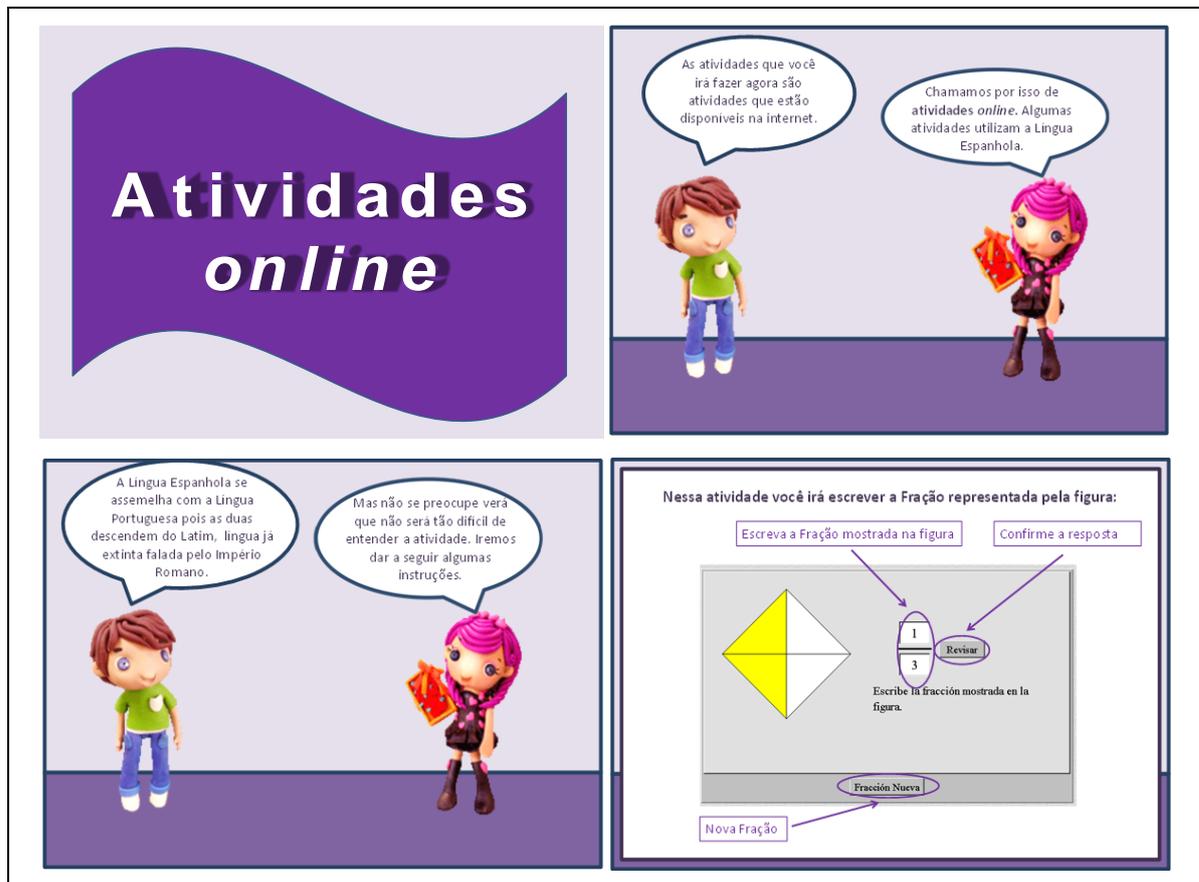
Resposta: A minha chance de ganhar é de $\frac{20}{150}$ ou $\frac{2}{15}$.

Com base nos autores utilizados, nos materiais de estudos anteriores, foram pesquisadas atividades que complementassem esses conceitos; assim foram disponibilizadas para os alunos atividades de parte-todo de forma discreta e contínua em várias formas geométricas, que podem ser manipuladas de maneira interativa. Há atividades abordando a ideia de medidas, utilizando formas geométricas variadas.

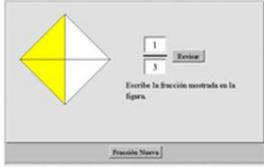
Essas atividades foram pesquisadas na internet e outras construídas com o aplicativo *JClic*. Essa apresentação com as atividades *online* foi produzida no editor de texto *Word* e salvo no modo página da *web*, como mostra a figura 43. Os *links* das páginas da *web* utilizados nessa apresentação foram:

- http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_104_g_1_t_1.html?from=topic_t_1.html
- http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/
- <http://ntic.educacion.es/w3/recursos/primaria/matematicas/fracciones/menuu1.html>
- <http://translate.google.com.br/?hl=pt-BR&tab=wT>

Figura 43 - apresentação "Atividades Online".



CLIQUE NA IMAGEM PARA INICIAR A ATIVIDADE:

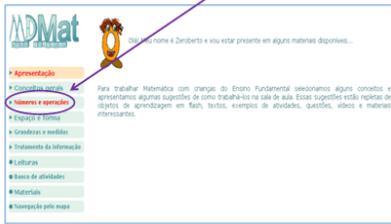


Em caso de dúvida você poderá retornar as explicações e também poderá consultar o Google Tradutor



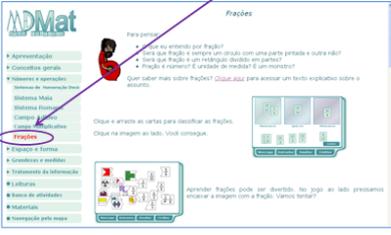
Arraste o balde de tinta para pintar conforme pede:

Clique na opção **Números e operações**



Arraste o balde de tinta para pintar conforme pede:

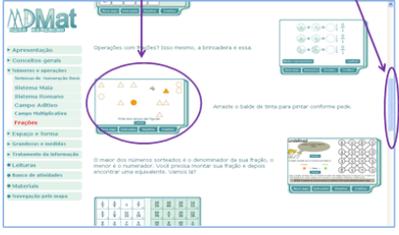
Clique na opção **Frações**



Arraste o balde de tinta para pintar conforme pede:

Use a barra de rolagem para encontrar esta atividade (é a 6ª de cima para baixo)

Barra de rolagem



CLIQUE NA IMAGEM PARA INICIAR A ATIVIDADE:



LAS FRACCIONES - 1 para medir - Colorea

Clique na opção **COLOREA**



LAS FRACCIONES - 1 para medir - Colorea

Fração que você deve representar

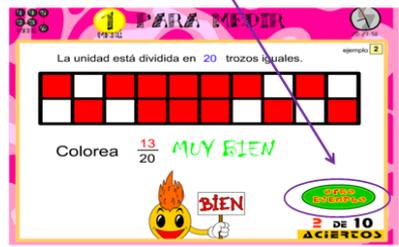
Clique na parte que quer colorir



Confirme a resposta

LAS FRACCIONES - 1 para medir - Colorea

Clique na opção **OTRO EJEMPLO** para nova atividade.

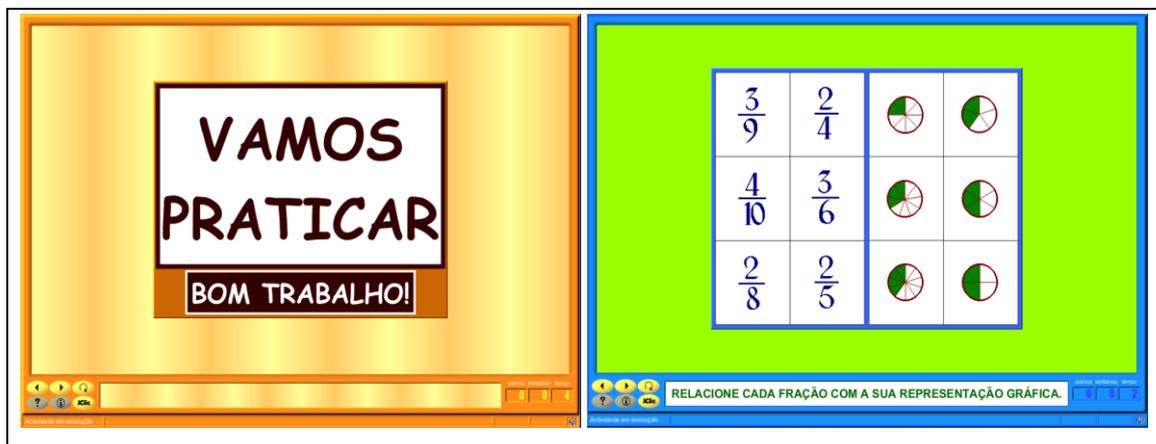


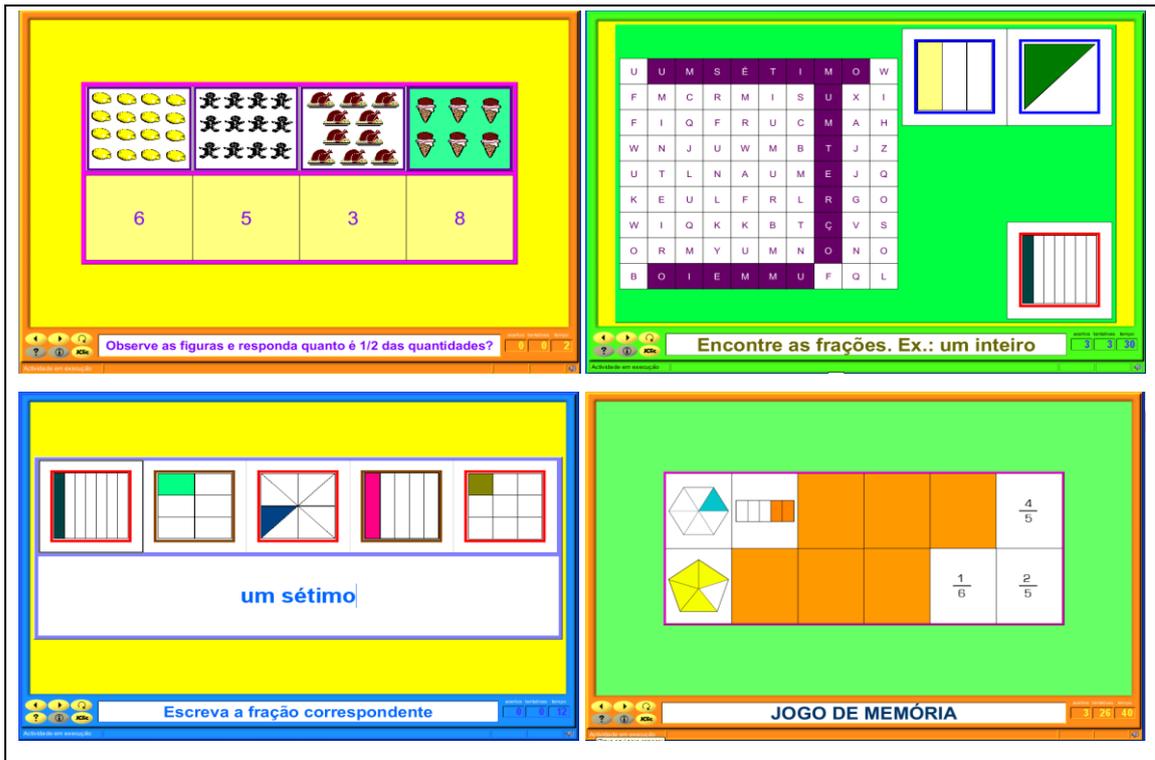


Fonte: <http://siena.ulbra.br>

Na figura 44, são apresentadas algumas atividades do projeto construído no aplicativo *JClic* para este nodo. O projeto possui vinte atividades no todo.

Figura 44 - atividades no aplicativo *JClic*.





Fonte: Autor

7.3.2 Nodo Tipos de Frações

Neste conceito, foram desenvolvidas uma apresentação em *PowerPoint*, uma apresentação em *Word* como página da *web* com atividades *online* e um projeto no aplicativo *JClic*. Na figura 45, a página inicial deste nodo.

Figura 45 - página inicial do nodo "Tipos de Frações"



Fonte: <http://siena.ulbra.br>

Para o material de estudo deste nodo, além de apresentar os tipos de Frações com as suas nomenclaturas, também foi ampliada e reforçada a ideia iniciada anteriormente de reconhecer a Fração como número. O entendimento da Fração como número é imprescindível para que o aluno inicie a compreensão de equivalência e posteriormente dos algoritmos das operações. Para Kerslake (1986, apud GIMÉNEZ; BAIRRAL, 2005),

Quando se associa a Fração a uma parte de uma figura, ficamos induzidos a “pensar” que as Frações são partes, pois sabemos que a parte é menor que o todo. Se dissermos que $\frac{7}{5}$ é uma Fração, parece que estamos em uma contradição, pois se “as

Frações servem para indicar coisas menores que a unidade” torna-se difícil aceitar que essa Fração é *um número*, ficando mais fácil admitir que são dois (KERSLAKE, 1986 apud GIMÉNEZ; BAIRRAL, 2005, p. 7).

O trabalho das Frações próprias, impróprias, mistas e aparentes na forma escrita e em representações gráficas é importante para evitar a construção de conceitos equivocados, segundo Giménez e Bairral (2005), comumente são apresentadas concepções errôneas sobre as Frações aos alunos com:

- a) a Fração é uma parte menor que a unidade;
- b) são dois números separados por um traço;
- c) a Fração é um operador que sempre indica uma subdivisão e, portanto um resultado menor.

O material de estudo foi baseado nos trabalhos de Ribeiro (2009), Centurión, Jakubovic e Lellis (2004), Giménez e Bairral (2005), nas indicações das Lições do Rio Grande (RIO GRANDE DO SUL, 2009) e nos PCN (BRASIL, 1997), conforme a figura 46.

Figura 46 - apresentação "Tipos de Frações".



É que durante o dia você comeu as barras de chocolates da seguinte forma:

• Você comeu metade 1 barra de chocolate como sobremesa do almoço. Vamos representar geometricamente e através de escrita:

 → Você comeu um inteiro → $\frac{2}{2} = 1$

• A noite após o jantar você comeu metade da outra barra de chocolate Intelta:

 → Você comeu metade → $\frac{1}{2}$

• Então neste dia você comeu uma barra e meia de chocolate.

Observe a seguinte explicação:

 + 

$\frac{2}{2} = 1$ + $\frac{1}{2}$

• Podemos escrever na forma fracionária o total de chocolate que você comeu das seguintes formas:

$\frac{2}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ ou $1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2}$

• Então:

$\frac{3}{2} = 1\frac{1}{2}$

Você percebeu que neste exemplo surgiu algumas formas de representação de frações.

• Vejamos elas:

$\frac{1}{2}$ → Um meio: o denominador é maior que o numerador.

$\frac{3}{2}$ → Três meios: denominador menor que o numerador.

$\frac{2}{2}$ → Dois meios: o denominador é igual ao numerador. Essa fração representa o número natural 1.

$1\frac{1}{2}$ → Um inteiro e um meio: essa representação contém um Número Natural e uma fração.

Essas representações são exemplos de Tipos de Frações:

Vamos ver as características de cada uma delas agora.

Vamos começar pelas FRAÇÕES PRÓPRIAS.

As FRAÇÕES PRÓPRIAS representam quantidades maiores que zero e menores que a unidade, ou seja, representam partes de um inteiro.

Vejamos alguns exemplos de FRAÇÕES PRÓPRIAS, observe as áreas pintadas:

 → $\frac{3}{6}$ ou $\frac{1}{2}$

 → $\frac{1}{5}$

 → $\frac{3}{4}$

 → $\frac{7}{12}$

Já que um dos significados de frações é "parte, pedaço" de um todo que foi dividido igualmente, quando tomamos uma parte do todo é *própria* dizer que nos referimos a uma fração. Daí vem o nome *Fração Própria*.

Observe essa receita de Sequilhos de Coco

Sequilhos de Coco

Ingredientes

300g de açúcar

250g de margarina

100g de coco ralado

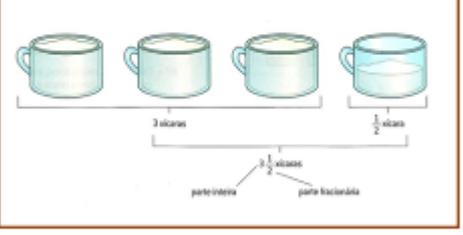
$3\frac{1}{2}$ xícaras de polvilho doce

2 ovos

1 xícara de farinha de trigo

• Note que a quantidade de polvilho doce é expressa por $3\frac{1}{2}$ xícaras, o que representa três xícaras e mais metade de uma xícara.

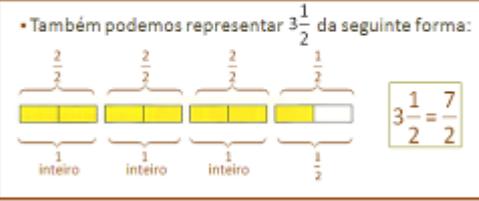
Veja como podemos representar essa quantidade de polvilho:



Adaptado: Projeto Radix: raiz do conhecimento 6º ano – Editora Scipione

• O número $3\frac{1}{2}$ que representa a quantidade de polvilho é chamado de número na forma mista e é lido três inteiros e um meio.

• Também podemos representar $3\frac{1}{2}$ da seguinte forma:

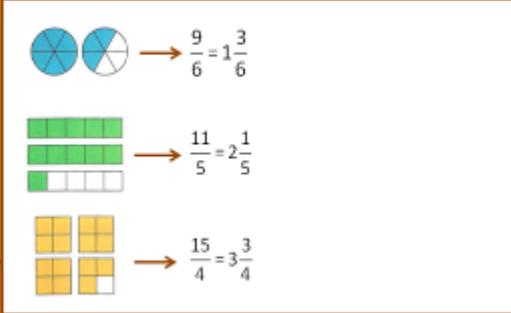


Adaptado: Projeto Radix: raiz do conhecimento 6ª ano – Editora Scipione

Frações com valor igual a 1 unidade ou maior do que 1 unidade são chamadas de FRAÇÕES IMPRÓPRIAS.

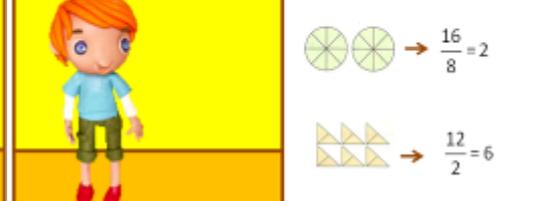
As FRAÇÕES IMPRÓPRIAS são correspondentes aos NÚMEROS NATURAIS e aos NÚMEROS MISTOS.

Vejamos outros exemplos, observe as áreas pintadas:



As FRAÇÕES IMPRÓPRIAS que representam números naturais são chamadas de APARENTES.

Veja os exemplos abaixo de FRAÇÕES APARENTES que representam números naturais, observe as áreas pintadas nas figuras:



Fonte: Autor

Uma das atividades *online* pesquisadas para este conceito utilizou a comparação entre Frações para classificar em menor, maior ou igual a 1, nas representações de Frações próprias, impróprias e aparentes.. A segunda atividade disponibilizada na apresentação, novamente trabalhava com a reta numérica e a escrita numérica das Frações. Esse tipo de atividade para Giménez e Bairral (2005) é muito importante para o reconhecimento da equivalência e contribui para melhorar o conhecimento formal de Frações. A seguir, os *links* das páginas da *web*, utilizadas na apresentação “Atividades *Online*” (figura 47):

- <http://www.visualfractions.com/MixedLines/mixedlines.html>
- http://mdmat.mat.ufrgs.br/anos_iniciais/
- <http://translate.google.com.br/?hl=pt-BR&tab=wT>

Figura 47 - apresentação "Atividades Online".

Atividades **ONLINE**

Tipos de Frações

CLIQUE E ARRASTE AS CARTAS PARA CLASSIFICAR AS FRAÇÕES

Clique na opção **Números e operações**

CLIQUE E ARRASTE AS CARTAS PARA CLASSIFICAR AS FRAÇÕES

Clique na opção **Frações**

Clique nesta atividade, a 1ª de cima para baixo

CLIQUE NA IMAGEM PARA INICIAR A ATIVIDADE

Régua numérica com a representação de uma Fração como no exemplo abaixo.

Preencha com a Fração correspondente da régua numérica

Depois de preencher a Fração clique em **OK**

Clique em **NEW EXAMPLE** para nova atividade

CLIQUE NA IMAGEM PARA INICIAR A ATIVIDADE

Em caso de dúvida você poderá retornar as explicações e também poderá consultar o Google Tradutor

Também foi desenvolvido um projeto no aplicativo *JClic* com dez atividades como exercícios para este conceito, destacando as formas de representações e nomenclaturas. Na figura 48, podem-se ver algumas dessas atividades.

Figura 48 - atividades no aplicativo JClic.

TIPOS DE FRAÇÕES

PRÓPRIAS: numerador < denominador
fração < 1 $\frac{3}{5}$

APARENTES: numerador = denominador
fração = 1 $\frac{5}{5}$

IMPRÓPRIAS: numerador > denominador
fração > 1 $\frac{9}{5}$

Toda fração imprópria pode ser expressa na forma de número misto (natural + fracionário):
 $\frac{9}{5} = 1 + \frac{4}{5}$

LEIA COM ATENÇÃO

RELACIONE

PRÓPRIA
APARENTE
IMPRÓPRIA

RELACIONE

RELACIONE

Como se chamam as frações que tem o denominador maior que o numerador? **imprópria**

RESPONDA

RELACIONE

Fonte: Autor

7.3.3 Nodo Equivalência e Simplificação de Frações

Este nodo é composto por duas apresentações, atividades *online* e atividades no aplicativo *JClic*, na figura 49, está a página inicial do nodo.

Figura 49 - página inicial do nodo Equivalência e Simplificação de Frações.



Fonte: <http://siena.ulbra.br>

Segundo os PCN (BRASIL, 1998), é importante que o aluno consiga reconhecer que uma Fração pode ser representada por diferentes (e infinitas) escritas. A noção de equivalência se apoia na ideia de realizar diferentes divisões que resultam na mesma relação parte e todo (VASCONCELOS, 2007). Corroborando com essa ideia, Llinares e Sánchez (1988) escrevem que,

A importância da ideia de equivalência de frações se deve ao papel chave que joga em diversos aspectos: na relação de ordem (ordenar duas Frações, inserir Frações entre duas Frações dadas), no desenvolvimento dos algoritmos de adição e subtração de Frações com denominadores diferentes. Em um nível mais elevado, a conceitualização do Número Racional como classes de equivalência de Frações (entendendo como classes de equivalência o conjunto de todas as Frações que descrevem as mesmas relações entre a parte considerada e o todo) (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 117) Tradução nossa¹³.

¹³ La importancia de idea de equivalencia de fracciones se debe al papel clave que juega en diversos aspectos: en la relación de orden (ordenar dos fracciones, insertar varias fracciones entre dos fracciones dadas), en el desarrollo de los algoritmos de la suma y resta de fracciones de denominador diferentes. En un nivel más elevado, la conceptualización del número racional como clases de equivalencia de fracciones (entendido como clase de equivalencia el conjunto de todas las fracciones que describen la misma relación entre la parte considerada y el todo).

Na apresentação “Frações Equivalentes” foram utilizadas a régua de Frações, formas geométricas e a reta numérica para que os alunos pudessem visualizar as Frações e equivalências (figura 50).

Figura 50 - apresentação “Frações Equivalentes”.

FRAÇÕES Equivalentes

Olá Cintia, você já ouviu falar de **Frações Equivalentes**?

Sim Pedro, duas ou mais Frações são **equivalentes** quando representam a mesma porção do todo.

Veja a régua de Frações ao lado, e compare as Frações.

• Você percebeu que:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \text{ então } \frac{1}{2} = \frac{2}{4}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \text{ então } \frac{1}{2} = \frac{3}{6}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \text{ então } \frac{1}{2} = \frac{4}{8}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{10} \text{ então } \frac{1}{2} = \frac{5}{10}$$

• Podemos dizer que as Frações $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{4}$, $\frac{3}{6}$, $\frac{4}{8}$ e $\frac{5}{10}$ se equivalem.

Muito bem Cintia, é isso mesmo! Vou te mostrar um outro exemplo.

EQUI significa igual: **EQUIVALENTE** quer dizer de igual valor.

A parte colorida representa $\frac{3}{4}$ da figura.

A parte colorida representa $\frac{6}{8}$ da figura.

A parte colorida representa $\frac{9}{12}$ da figura.

• Note que as frações:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$$

Representam a **mesma parte** da figura.

• Dizemos que essas são **FRAÇÕES EQUIVALENTES** e escrevemos:

$$\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$$

Legal Cintia, através das representações geométricas é possível visualizar a ideia.

É verdade Pedro, as representações geométricas nos ajudam a entender melhor a ideia de equivalência. Vamos ver outro exemplo.

$\frac{1}{2}$ $\frac{2}{4}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{5}{10}$

• Em cada uma das figuras está pintado a **metade** do disco.

• Então podemos afirmar que:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$$

São **FRAÇÕES EQUIVALENTES**.

Adaptação: A Conquista da Matemática 6º ano – Editora FTD

Cintia, você sabe como obtemos uma **Fração equivalente**?

Para isso precisamos estudar uma **propriedade importante das Frações**. Por isso é importante que você fique atento as explicações

• Vimos, no primeiro caso, que $\frac{3}{4} = \frac{6}{8} = \frac{9}{12}$ são **Frações Equivalentes**.

Considerando $\frac{3}{4}$ nossa Fração inicial, temos:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{+2} \\ \frac{3}{4} = \frac{6}{8} \\ \xrightarrow{+2} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{+3} \\ \frac{3}{4} = \frac{9}{12} \\ \xrightarrow{+3} \end{array}$$

• Multiplicamos o numerador e o denominador da Fração pelo mesmo Número Natural em cada caso, conservando a sua razão.

Obtendo assim uma **Fração Equivalente**.

Não esqueça **razão** é o quociente de dois números. No nosso caso é o quociente entre o numerador e o denominador

• As Frações abaixo representam um grupo de Frações Equivalentes:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$$

• A **razão** entre elas é a mesma:

$$\frac{1}{2} = 1 \div 2 = 0,5$$

$$\frac{2}{4} = 2 \div 4 = 0,5$$

$$\frac{3}{6} = 3 \div 6 = 0,5$$

$$\frac{4}{8} = 4 \div 8 = 0,5$$

$$\frac{5}{10} = 5 \div 10 = 0,5$$

• As Frações representadas no nosso segundo exemplo:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$$

• Também são **Frações Equivalentes**.

• Para chegar a $\frac{1}{2}$, temos:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{-5} \\ \frac{5}{10} \rightarrow \frac{1}{2} \\ \xrightarrow{-5} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{-4} \\ \frac{4}{8} \rightarrow \frac{1}{2} \\ \xrightarrow{-4} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{-3} \\ \frac{3}{6} \rightarrow \frac{1}{2} \\ \xrightarrow{-3} \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{-2} \\ \frac{2}{4} \rightarrow \frac{1}{2} \\ \xrightarrow{-2} \end{array}$$

• Dividimos o numerador e o denominador da Fração pelo mesmo Número Natural, obtendo assim uma **Fração Equivalente**.

• Daí, podemos enunciar a **propriedade fundamental das Frações**:

Quando **multiplicamos** ou **dividimos** o numerador e o denominador de qualquer fração por um **mesmo Número Natural, diferente de zero**, sempre obtemos uma **FRAÇÃO EQUIVALENTE** à inicial.

FRAÇÕES EQUIVALENTES NA RETA NUMÉRICA

Família dos meios:

Família dos terços:

Família dos quartos:

Reta numérica:

Adaptado: Fracciones – La relación parte-todo – Linares e Sánchez

• Esses são exemplos de grupos de Frações Equivalentes:

$$\frac{1}{2} = \left\{ \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10} \dots \right\}$$

$$\frac{1}{3} = \left\{ \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \frac{5}{15} \dots \right\}$$

$$\frac{1}{4} = \left\{ \frac{2}{8}, \frac{3}{12}, \frac{4}{16}, \frac{5}{20} \dots \right\}$$

O conceito de simplificação de Frações é importante para dar sustento às ideias de equivalências e posteriormente aos algoritmos das operações com Frações. A apresentação “Simplificação de Frações” inicia fazendo uma revisão de Frações equivalentes; assim, trabalha-se a ideia de Frações irredutíveis partindo dos conhecimentos prévios dos alunos (figura 51).

O material de estudo e das atividades de equivalência e simplificação de Frações foi apoiado nos trabalhos de Llinares e Sánchez (1988), Lições do Rio Grande (RIO GRANDE DO SUL, 2009), Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (2007), Spinelli e Souza (2007) e, Giménez e Bairral (2005).

Figura 51 - apresentação “Simplificação de Frações”.

Simplificação de FRAÇÕES

Olá, agora nós vamos trabalhar com **SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES**, mas para isso precisamos relembrar algumas coisas.

Você lembra quando estudamos **FRAÇÕES EQUIVALENTES**?

Vamos iniciar revendo como obtemos Frações Equivalentes.

Estes três quadrados têm os lados de mesma medida e cada um deles está dividido em partes iguais:

Cada parte pintada é representada por uma Fração. Essas Frações são equivalentes entre si:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{4}{8}$$

Dividindo o numerador e denominador da Fração $\frac{2}{4}$ por 2, obtemos a Fração $\frac{1}{2}$. Da mesma forma, se dividimos o numerador e o denominador de $\frac{4}{8}$ por 4, também obtemos $\frac{1}{2}$.

Vamos verificar.

Vamos ver então:

$$\frac{2}{4} \begin{matrix} \rightarrow \\ = \\ \rightarrow \end{matrix} \frac{1}{2} \quad \frac{4}{8} \begin{matrix} \rightarrow \\ = \\ \rightarrow \end{matrix} \frac{1}{2}$$

A fração $\frac{1}{2}$ é equivalente às outras duas e é a **mais simples** ou **irredutível**, porque não podemos dividir o numerador e o denominador da fração $\frac{1}{2}$ pelo mesmo Número Natural e encontrar outra Fração Equivalente à ela.

Quando não conseguimos mais simplificar uma Fração, dizemos que ela está na **FORMA SIMPLIFICADA** ou **FORMA IRREDUTÍVEL**.

Simplificar uma Fração significa obter uma Fração equivalente à Fração dada, escrita com termos menores.

Vamos ver alguns exemplos de simplificação de Frações:

$$\frac{6}{9} \begin{matrix} \div \\ = \\ \div \end{matrix} \frac{2}{3} \quad \text{A Fração } \frac{2}{3} \text{ é a forma irredutível da Fração } \frac{6}{9}$$

$$\frac{6}{12} \begin{matrix} \div \\ = \\ \div \end{matrix} \frac{2}{4} \begin{matrix} \div \\ = \\ \div \end{matrix} \frac{1}{2} \quad \text{A Fração } \frac{1}{2} \text{ é a forma irredutível da Fração } \frac{6}{12}$$

$$\frac{12}{36} \begin{matrix} \div \\ = \\ \div \end{matrix} \frac{3}{9} \begin{matrix} \div \\ = \\ \div \end{matrix} \frac{1}{3} \quad \text{A Fração } \frac{1}{3} \text{ é a forma irredutível da Fração } \frac{12}{36}$$

Como vimos, então:

Simplificar uma fração é encontrar outra, equivalente à primeira, mas com numerador e denominador menores. A maneira utilizada de simplificar uma fração é dividir seu numerador e seu denominador por um divisor comum (maior que 1).

Fonte: Autor

As atividades *online* de equivalência foram selecionadas com base com conteúdos desenvolvidos no material de estudo, destacando as representações geométricas de diferentes formas, a visualização de translações, escrita fracionária e reta numérica, conforme a figura 52. Os *links* dos sites utilizados na apresentação foram:

- http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_159_g_2_t_1.html?from=topic_t_1.html
- <http://ntic.educacion.es/w3/recursos/primaria/matematicas/fracciones/menuu3.html>

Figura 52 - apresentação “Atividades Online Frações Equivalentes”.

Atividades online
FRAÇÕES
Equivalentes

Cintia, este foi exemplos de **Frações Equivalentes**.

Sim Pedro, duas ou mais Frações são **equivalentes** quando representam a mesma porção do todo.

FRAÇÕES EQUIVALENTES

Clique nas setas para dividir em partes equivalentes

Digite a Fração Equivalente

Verificar a resposta

Expresa ambas fracciones en fracciones equivalentes, de modo que tengan la misma cantidad de pedacitos (esto es, que tengan el mismo denominador).

$\frac{1}{2} = \frac{\quad}{6}$ $\frac{2}{6} = \frac{\quad}{6}$ Revisar

Clique para Novo Problema

Acompanhe a sequência da atividade:

Marque na reta numérica a Fração que se pede.

Expresa ambas fracciones en fracciones equivalentes, de modo que tengan la misma cantidad de pedacitos (esto es, que tengan el mismo denominador).

¡Muy bien! Ahora haz clic en la recta numérica para mostrar dónde se sitúa $\frac{1}{2}$.

$\frac{1}{2} = \frac{3}{6}$ $\frac{2}{6} = \frac{2}{6}$ Revisar

Verifique a resposta

Clique aqui para Novas Frações

CLIQUE NA IMAGEM PARA INICIAR A ATIVIDADE

Expresa ambas fracciones en fracciones equivalentes, de modo que tengan la misma cantidad de pedacitos (esto es, que tengan el mismo denominador).

$\frac{1}{3} = \frac{\quad}{5}$ $\frac{2}{5} = \frac{\quad}{5}$ Revisar

Em caso de dúvida você poderá retornar as explicações e também poderá consultar o Google Tradutor

Google Tradutor

LAS FRACCIONES - 3 FRACCIONES EQUIVALENTES – CIRCULOS 1

Clique na opção CIRCULOS 1

3 FRACCIONES EQUIVALENTES

CONTENIDOS

ACTIVIDADES

PRÁCTICA

TEST

PECES AMIGOS

EL COCO (¿TIENES BUENA MEMORIA?)

EL CÍRCULO

EL MATEMÁTICO

CALCULADORA

ESCALAS

CÁLCULO MENTAL

EJERCICIOS PARA IMPRIMIR

LAS FRACCIONES - 3 FRACCIONES EQUIVALENTES – CIRCULOS 1

Escriba 3 Frações Equivalentes

Confirme a resposta

LAS FRACCIONES - 3 FRACCIONES EQUIVALENTES – CIRCULOS 1

Confirme a resposta

LAS FRACCIONES - 3 FRACCIONES EQUIVALENTES – CIRCULOS 1

Confirme a resposta

LAS FRACCIONES - 3 FRACCIONES EQUIVALENTES – ESCALAS

Clique na opção ESCALAS

LAS FRACCIONES - 3 FRACCIONES EQUIVALENTES – ESCALAS

Escolha a escala adecuada

Clique aqui para nova atividade

CLIQUE NA IMAGEM PARA INICIAR A ATIVIDADE:

Em caso de dúvida você poderá retornar as explicações e também poderá consultar o Google Tradutor

Fonte: Autor

Como reforço para o conceitos de equivalência e simplificação de Frações foi desenvolvido o projeto, com doze atividades, no aplicativo *JClíc*. Na figura 53, são mostrados exemplos dessas atividades.

Figura 53 - atividades no aplicativo JClíc.

The figure displays six screenshots of the JClíc application interface, arranged in a 3x2 grid. Each screenshot shows a different activity related to fractions.

Top Left Screenshot: Titled "SIMPLIFICAÇÃO DE FRAÇÕES". It explains that fractions can be simplified by decomposing the numerator and denominator. It shows the fraction $\frac{36}{48} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 3}{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3} = \frac{3}{4}$. Below this, two division tables are shown:

36	2	48	2
18	3	24	2
9	3	12	2
3	3	6	2
1		3	3
		1	

Top Right Screenshot: Titled "COMPLETE". It shows "Frações equivalentes por:" and "AMPLIFICAÇÃO:" with a diagram of $\frac{3}{5} = \frac{3 \times 2}{5 \times 2} = \frac{6}{10} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15} = \frac{3 \times 4}{5 \times 4} = \frac{12}{20} = \frac{3 \times 3}{5 \times 3} = \frac{9}{15}$. Below it, "SIMPLIFICAÇÃO:" shows $\frac{36}{48} = \frac{36 \div 2}{48 \div 2} = \frac{18}{24} = \frac{18 \div 2}{24 \div 2} = \frac{9}{12} = \frac{9 \div 3}{12 \div 3} = \frac{3}{4}$. A table on the right contains the numbers 0, 5, 1, 6, 2, 7, 3, 8, 4, 9.

Middle Left Screenshot: Titled "SIMPLIFIQUE E RELACIONE COM A FRAÇÃO IRREDUTÍVEL". It shows several fractions with their prime factorizations: $\frac{60}{120} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 5}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5}$, $\frac{75}{100} = \frac{3 \times 5 \times 5}{2 \times 2 \times 5 \times 5}$, $\frac{18}{15} = \frac{2 \times 3 \times 3}{3 \times 5}$, $\frac{78}{130} = \frac{2 \times 3 \times 13}{2 \times 5 \times 13}$, $\frac{32}{72} = \frac{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}{2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3}$, $\frac{110}{385} = \frac{2 \times 5 \times 11}{5 \times 7 \times 11}$, $\frac{54}{90} = \frac{2 \times 3 \times 3 \times 3}{2 \times 3 \times 3 \times 5}$, $\frac{84}{140} = \frac{2 \times 2 \times 3 \times 7}{2 \times 2 \times 5 \times 7}$. Below these are two rows of irreducible fractions: $\frac{4}{9}, \frac{3}{5}, \frac{6}{5}$ and $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{2}{7}$.

Middle Right Screenshot: Titled "RELACIONE CADA FRAÇÃO COM A SUA EQUIVALENTE". It shows a 3x4 grid of fraction cards. The first two columns contain circular diagrams representing fractions (e.g., 1/2, 1/4, 3/4). The last two columns contain numerical fractions: $\frac{4}{6}, \frac{6}{8}, \frac{2}{10}, \frac{3}{5}, \frac{2}{8}, \frac{4}{10}$.

Bottom Left Screenshot: Titled "RELACIONE CADA FRAÇÃO COM A SUA EQUIVALENTE". It shows a 2x6 grid of fraction cards: $\frac{2}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{5}, \frac{6}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{5}$ in the first row, and $\frac{6}{10}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4}, \frac{2}{10}, \frac{4}{10}, \frac{4}{6}$ in the second row.

Bottom Right Screenshot: Titled "RELACIONE AS FRAÇÕES EQUIVALENTE". It shows a 2x6 grid of fraction cards: $\frac{10}{15}, \frac{6}{8}, \frac{7}{35}, \frac{2}{4}, \frac{12}{16}, \frac{4}{20}$ in the first row, and $\frac{4}{6}, \frac{3}{8}, \frac{3}{15}, \frac{4}{8}, \frac{9}{12}, \frac{8}{12}$ in the second row. Below these are two rows of irreducible fractions: $\frac{1}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}$.

Fonte: Autor

7.3.4 Nodo Comparação de Frações

Este nodo foi composto do material de estudo sobre os conceitos de comparação de Frações, atividades *online* e atividades no aplicativo *JClíc*. Na figura 54, apresenta-se a página inicial com as portas de acesso aos materiais de estudo.

Figura 54 - página inicial do nodo Comparação de Frações.



Fonte: <http://siena.ulbra.br>

Para realizar as comparações de Frações, o aluno precisa utilizar os seus conhecimentos sobre o significado das Frações e a ideia de Frações equivalentes, por que uma das aplicações da ideia de Frações equivalentes se manifesta, quando queremos comparar duas Frações e determinar se uma é menor, igual ou maior que outra (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988). A comparação de Frações trabalha também a ideia de ordem. Para o material de estudo, utilizou-se a ideia de comparação através de figuras, escrita, símbolos ($>$, $<$ e $=$) e reta numérica. O material de estudo e as atividades foram baseadas no trabalho de Llinares e Sánchez (1988), Ribeiro (2009), Lições do Rio Grande (2009) e Barroso (2006) para apoiar este nodo. Na figura 55, a apresentação “Comparação de Frações”.

Figura 55 - apresentação “Comparação de Frações”.





1/5, 2/5, 3/5, 4/5, 5/5

Note que:

- $\frac{1}{5}$ é menor que $\frac{2}{5}$.
- $\frac{2}{5}$ é menor que $\frac{3}{5}$.
- $\frac{3}{5}$ é menor que $\frac{4}{5}$.
- $\frac{4}{5}$ é menor que $\frac{5}{5}$.

$$\frac{1}{5} < \frac{2}{5} < \frac{3}{5} < \frac{4}{5} < \frac{5}{5} \rightarrow \begin{matrix} \text{numerator} \\ \text{denominator} \end{matrix}$$

Quando duas Frações tem o mesmo denominador a menor fração é aquela que apresenta o menor numerador.



1/2, 1/3, 1/4, 1/5

Note que:

- $\frac{1}{2}$ é maior que $\frac{1}{3}$.
- $\frac{1}{3}$ é maior que $\frac{1}{4}$.
- $\frac{1}{4}$ é maior que $\frac{1}{5}$.

$$\frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \frac{1}{4} > \frac{1}{5} \rightarrow \begin{matrix} \text{numerator} \\ \text{denominator} \end{matrix}$$

Quando duas Frações tem o mesmo numerador a maior fração é aquela que apresenta o menor denominador.



Luciano pintou $\frac{3}{4}$ do muro e Igor $\frac{2}{3}$. Qual dos dois pintou a maior parte do muro?

Adaptado: Projeto Radix Matemática 6º ano – Editora Scipione

- Note que as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ possuem DENOMINADORES diferentes.
- Para compararmos, devemos encontrar Frações Equivalentes a $\frac{2}{3}$ e $\frac{3}{4}$ e que tenham um DENOMINADOR COMUM.

$$\frac{2}{3} = \left\{ \frac{4}{6}, \frac{6}{9}, \frac{8}{12}, \dots \right\}$$

$$\frac{3}{4} = \left\{ \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \dots \right\}$$

- A Fração $\frac{8}{12}$ é equivalente a $\frac{2}{3}$, assim como $\frac{9}{12}$ é equivalente a $\frac{3}{4}$.
- Vamos utilizar $\frac{8}{12}$ e $\frac{9}{12}$ para a comparação, pois possuem denominadores comuns.

- Das Frações resultantes concluímos que:

$$\frac{9}{12} > \frac{8}{12} \text{ então } \frac{3}{4} > \frac{2}{3}$$

- Assim concluímos que Igor pintou a maior parte do muro.

• É possível também comparar Frações utilizando o **mínimo múltiplo comum (m.m.c.)** dos denominadores. Este método é útil para encontrarmos Frações equivalentes a duas ou mais Frações. Veja o exemplo:

Qual das Frações é maior $\frac{1}{3}$ ou $\frac{2}{5}$?

Vamos utilizar o método do **m.m.c.** dos denominadores para comparar:

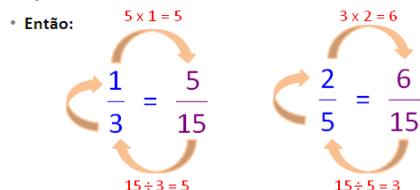
Múltiplos de 3: 0, 3, 6, 9, 12, **15**, ...
 Múltiplos de 5: 0, 5, 10, **15**, ... **m.m.c. (3, 5) = 15**

• Agora que temos o **m.m.c.** dos denominadores, precisamos obter Frações Equivalentes às Frações iniciais.

• Sabemos que o **m.m.c. (3, 5) = 15**

• **1º Passo:** dividir o **m.m.c.** pelo denominador da Fração inicial;

• **2º Passo:** multiplicar o resultado desta divisão pelo numerador da Fração inicial.



• Das Frações resultantes concluímos que:

$$\frac{6}{15} > \frac{5}{15} \text{ então } \frac{2}{5} > \frac{1}{3}$$

• Vamos ver a seguir um exemplo utilizando os dois métodos de resolução:

• Qual das Frações é a maior $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{3}{4}$?

• Vamos resolver este problema por Frações Equivalentes:

• Qual das Frações é a maior $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{3}{4}$?

$$\frac{1}{2} = \left\{ \frac{2}{4}, \frac{3}{6}, \frac{4}{8}, \frac{5}{10}, \frac{6}{12}, \dots \right\}$$

$$\frac{1}{3} = \left\{ \frac{2}{6}, \frac{3}{9}, \frac{4}{12}, \dots \right\}$$

$$\frac{3}{4} = \left\{ \frac{6}{8}, \frac{9}{12}, \frac{12}{16}, \dots \right\}$$

$$\frac{6}{12} > \frac{6}{12} > \frac{4}{12} \text{ então } \frac{3}{4} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

• Agora vamos resolver o mesmo problema por **m.m.c.**:

• Qual das Frações é a maior $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ ou $\frac{3}{4}$?

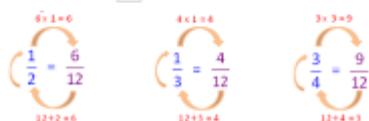
• **m.m.c. dos denominadores:**

• Múltiplos de 2: 0, 2, 4, 6, 8, 10, **12**, ...

• Múltiplos de 3: 0, 3, 6, 9, **12**, ...

m.m.c. (2, 3, 4) = 12

• Múltiplos de 4: 0, 4, 8, **12**, ...



• Chegamos ao mesmo resultado do outro método:

$$\frac{9}{12} > \frac{6}{12} > \frac{4}{12} \text{ então } \frac{3}{4} > \frac{1}{2} > \frac{1}{3}$$

• Portanto, é possível utilizar tanto o método do conjunto das Frações Equivalentes quanto o método do **m.m.c.** para comparar Frações.

COMPARANDO FRAÇÕES NA RETA NUMÉRICA

• É importante utilizar a reta numérica para localizar as Frações na hora de comparar, vejamos alguns exemplos:



• Podemos afirmar, por exemplo, então que:

• $\frac{1}{2}$ está localizada entre $\frac{1}{4}$ e $\frac{3}{4}$.

• Que $2\frac{1}{2}$ está localizada entre 2 e 3.

• Que $\frac{3}{4}$ está localizada entre $\frac{1}{2}$ e 1.



Para as atividades *online*, destacam-se atividades que associam a comparação de Frações na forma escrita e em representações, utilizando a reta numérica. Quanto a comparação de Frações, Llinares e Sánchez (1988) argumentam que a utilização da reta numérica para representar as Frações pode potencializar a conexão com a noção de medida, e o desenvolvimento da relação de ordem entre as Frações, e isso favorece a ampliação por parte dos alunos da sua visão das Frações, em particular, a ideia de vê-las como número e não só como representação de diagramas “parte-todo”. Na figura 56, podem-se ver as atividades selecionadas para este nodo e, para esta atividade utilizou-se atividades dos seguintes sites:

- <http://ntic.educacion.es/w3/recursos/primaria/maticas/fracciones/menuu2.html>
- <http://www.visualfractions.com/CompareL/comparel.html>

Figura 56 - apresentação “Atividades *Online* Comparação de Frações”.

Atividades *online* Comparação de Frações

Olá, é hora de praticar!

É isso aí, vamos fazer algumas atividades *online*, ou seja, que estão disponíveis na internet.

COMPARAÇÃO DE FRAÇÕES
Para iniciar clique em **Start**

COMPARE
Start Report Explain
Press the <, =, or > button to show how the first fraction compares to the second fraction.

Clique no botão de **menor**, **maior** ou **igual** para comparar a primeira Fração com a segunda

Representação na **reta numérica**

Acompanhe seu índice de respostas corretas, tentativas e escore em porcentagem

Clique em **NEW EXAMPLE** para nova atividade.

Resposta

CLIQUE NA IMAGEM PARA INICIAR A ATIVIDADE

Em caso de dúvida você poderá retornar as explicações e também poderá consultar o Google Tradutor

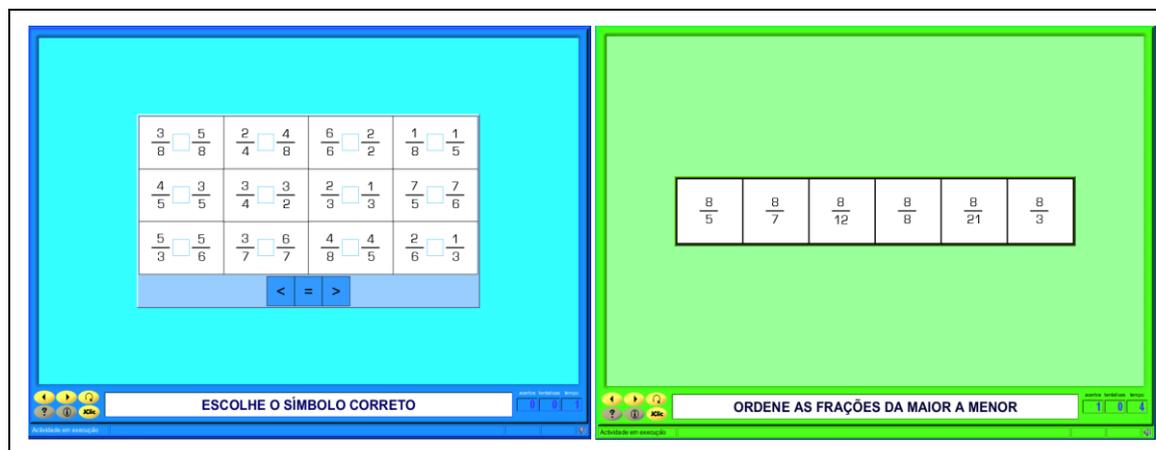
Google Tradutor



Fonte: Autor

Também foi construído para este nodo um projeto do aplicativo *JClíc*, com treze atividades de associação, quebra-cabeça, jogo da memória e de completar texto. Na figura 57, apresentam-se exemplos dessas atividades.

Figura 57 - atividades no aplicativo *JClíc*.



The figure shows four screenshots of an educational software interface:

- Top Left:** A screen titled "ORDENE DA MAIOR A MENOR" (Order from largest to smallest). It displays the least common multiple (m.m.c.) of 7, 2, 3, and 6, which is 42. Below this, there are four fractions: $\frac{6}{7}$, $\frac{2}{2}$, $\frac{1}{3}$, and $\frac{5}{6}$. Each fraction has a box for its numerator and denominator. Below the fractions are four empty boxes for the ordered result, with arrows indicating the sequence. A numeric keypad with digits 0-9 is visible at the bottom.
- Top Right:** A screen titled "ORDENE AS FRAÇÕES DESENHADAS DA MENOR PARA A MAIOR" (Order the drawn fractions from smallest to largest). It shows five circular fraction models, each divided into a different number of equal parts (2, 3, 4, 5, 6) with a portion shaded green.
- Bottom Left:** A screen titled "ORDENE DA MENOR PARA A MAIOR AS FRAÇÕES DESENHADAS" (Order the drawn fractions from smallest to largest). It shows four circular fraction models with different shaded portions.
- Bottom Right:** A screen titled "Associe o problema com a resposta correta." (Associate the problem with the correct answer). It contains several word problems and a list of names: Sofia, Helena, Gabriela, Marta, Lucas, Ana, André, Roberto, Maria, and Miguel.

Fonte: Autor

7.3.5 Nodo Adição e Subtração de Frações

Na figura 58, apresenta-se a página inicial deste nodo para os materiais de estudo sobre adição de Frações, subtração de Frações e atividades *online*.

Figura 58 - página inicial nodo Adição e Subtração de Frações.

The screenshot shows the initial page of the educational software. At the top, it displays the logo of the Universidade Luterana do Brasil (ULBRA) and the program name: "PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - PPGECIM". Below this, the names of the coordinators are listed: "ORIENTAÇÃO PROF. DR. ALEXANDRE BRANCO MONTEIRO" and "DR. CLAUDIA LISETE OLIVEIRA GROENWALD". The main title is "FRAÇÕES ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO". Below the title, it says "CLIQUE NOS NÚMEROS PARA ENTRAR NO MATERIAL DE ESTUDO". There are four numbered buttons (1, 2, 3, 4) with corresponding cartoon characters and icons representing different materials: "Adição de Frações", "Subtração de Frações", "Atividade online I", and "Atividade online II". At the bottom, it says "BOM TRABALHO!".

Fonte: <http://siena.ulbra.br>

Para Llinares e Sánchez (1988), pode conectar-se os algoritmos relativos às operações com as Frações aos processos de resolução de problemas, e a um manejo dos símbolos. Assim começa-se o caminho de introdução à Álgebra, ao ser o conjunto dos Números Racionais o primeiro caso de conjunto numérico manejado pelos alunos em que as quatro operações não tem restrições.

A introdução às operações de adição e subtração se inicia com situações problemas envolvendo Frações com denominadores iguais, para posteriormente trabalhar com Frações com denominadores diferentes. Para operações com denominadores diferentes a metodologia ressaltada no material de estudo foi o uso de Frações equivalentes; para tanto, esse nodo utilizou as ideias de Dante (2009), Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (2007), Llinares e Sánchez (1988) e Nunes et al. (2009). Na figura 59 está a apresentação “Adição de Frações”.

Figura 59 - apresentação “Adição de Frações”.

Adição de FRAÇÕES

Rita, que deliciosa aquela torta que a sua mãe fez! Sobrou um pedaço?

Ficou muito boa mesmo Cleiton! Sim ainda tem, comemos metade dela como sobremesa do almoço e mais duas fatias à noite.

Hum! Vou querer um pedaço!

Tudo bem, mas só se você me falar quanto nós comemos da torta, OK?

Tudo bem então. Em quantos pedaços tua mãe dividiu a torta?

Ela cortou a torta em 8 pedaços de tamanhos iguais.

Então, vamos pensar juntos? Observe o quadro ao lado.

- A mãe da Rita dividiu a torta em 8 partes de tamanho iguais, como na figura ao lado.
- A Rita disse que comeram metade da torta de sobremesa no almoço, representada pela cor branca.
- E no jantar, segundo ela, comeram mais duas fatias, representada pela cor cinza. Restou o pedaço, conforme a figura ao lado.

• Vamos pensar neste problema como Frações, então observe com bastante atenção, pois vamos necessitar das lições aprendidas até agora:

- A mãe da Rita dividiu a torta em 8 pedaços de tamanho iguais, assim podemos escrever em Frações como sendo $\frac{8}{8}$ ou como vimos anteriormente quando estudamos tipos de Frações, esta fração é uma Fração aparente pois representa o número natural 1. A torta completa representa 1 inteiro ou $\frac{8}{8}$.

• Como sobremesa do almoço, Rita falou que comeram metade da torta, representada na figura pela parte de cor **branca**. Comeram então 4 pedaços de 8, a fração que utilizamos para representar é $\frac{4}{8}$. Como vimos anteriormente podemos simplificar esta fração, e dividir o numerador e o denominador por 4, chegando assim a **Fração equivalente** $\frac{1}{2}$.




• E na sobremesa do jantar comeram mais 2 pedaços, representados na figura pela cor cinza. Podemos afirmar que dois pedaços representam $\frac{2}{8}$ o que equivale também a $\frac{1}{4}$.

Bom, a Rita perguntou qual foi a quantidade que comeram. Então vamos pensar juntos.

• Queremos saber a quantidade da torta que comeram. Então vamos somar a sobremesa do almoço e da janta. Levamos em consideração portanto a parte **branca** e a **cinza** das figuras. Vejamos como fica:



• Escrevendo em Frações:

$$\frac{4}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8}$$

• Então foram consumidos $\frac{6}{8}$ de torta ou simplificando: $\frac{3}{4}$.

Rita, vocês comeram $\frac{3}{4}$ da torta. Ou também podemos dizer $\frac{3}{4}$.

Isso mesmo Cleiton, este é um caso de **adição de Frações**, e nesta situação as Frações tinham **denominadores iguais**.

Isso mesmo Rita, observe o quadro ao lado.

• Quando realizamos **adição de Frações com o mesmo DENOMINADOR** devemos somar o **NUMERADOR** e manter o denominador:

$$\frac{4}{8} + \frac{2}{8} = \frac{6}{8}$$

• Devemos procurar **Frações Equivalentes** com o **mesmo denominador**.

• Categoria de Frações Equivalentes à $\frac{1}{2}$:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \frac{4}{8} = \frac{5}{10}$$

Vamos utilizar as Frações $\frac{2}{4}$ e $\frac{1}{4}$ que são Equivalentes.

• Categoria de Frações Equivalentes à $\frac{1}{4}$:

$$\frac{1}{4} = \frac{2}{8} = \frac{3}{12} = \frac{4}{16} = \frac{5}{20}$$

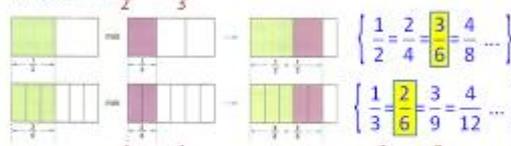

Podemos perceber que chegamos a que a mesma resposta do problema. $\frac{3}{4}$

• Quando realizamos **adição de frações com DENOMINADORES diferentes**, precisamos transformar as frações em **Frações equivalentes** com o mesmo denominador.

• E em seguida efetuamos a **adição** dessas Frações.

• Acompanhe outro exemplo de **adição** com denominadores diferentes.

• Vamos calcular $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$:



Então calcular $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$ é o mesmo que calcular $\frac{3}{6} + \frac{2}{6}$.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{3}{6} + \frac{2}{6} = \frac{5}{6}$$

Frações com denominadores diferentes. Frações equivalentes com o mesmo denominador.

Na figura 60, pode-se ver a apresentação “Subtração de Frações”.

Figura 60 - apresentação “Subtração de Frações”.

Subtração de

FRAÇÕES

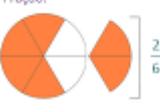
• Um dia Rita foi na casa do Cleiton para brincar, a $\frac{2}{6}$ dele, Dona Iolanda fez uma pizza para o lanche. Ela dividiu a pizza em 6 pedaços de mesmo tamanho, e Cleiton e Rita comeram um pedaço cada um. Que Fração da pizza sobrou?

A pizza inteira pode ser representada por uma Fração.



$\frac{6}{6}$

Os 2 pedaços que foram comidos podem ser representados por uma Fração.



$\frac{2}{6}$

Sobram 4 pedaços, que podem ser representados por uma Fração.



$\frac{4}{6}$

$$\frac{6}{6} - \frac{2}{6} = \frac{4}{6}$$

• Portanto, sobraram $\frac{4}{6}$ da torta.

Adaptado: Projeto Análise Matemática 5ª série – Editora Moderna

Rita você sabia que quando subtraímos Frações utilizamos a mesma ideia da adição?

Isso mesmo Cleiton, temos que encontrar **denominadores iguais** para subtrairmos. Vamos ver um exemplo.

Neste caso, as Frações têm o mesmo denominador, então subtraímos os numeradores e conservamos os denominadores.

E quando os denominadores forem diferentes, devemos encontrar Frações equivalentes como na adição.

• Mais tarde, Cleiton quis comer mais pizza. Ele comeu metade de um dos pedaços que havia sobrado. Que Fração da pizza sobrou dessa vez?

• Havia sobrado $\frac{4}{6}$ da torta.



• Podemos encontrar a fração que sobrou da pizza fazendo a subtração:

$$\frac{4}{6} - \frac{1}{12}$$

• Mas para isso devemos procurar **Frações Equivalentes** de mesmo denominador.

• A porção da pizza que João comeu mais tarde (metade de um pedaço) pode ser representado pela Fração $\frac{1}{12}$, pois é como se a pizza fosse dividida em 12 pedaços e um destes João comeu.

Adaptado: Projeto Análise Matemática 5ª série – Editora Moderna

Quando as Frações têm denominadores diferentes, encontramos Frações Equivalentes de mesmo denominador, para depois subtrair.

• Como os denominadores são diferentes, devemos procurar **Frações Equivalentes** de mesmo denominador.

• Categoria de Frações equivalentes a $\frac{4}{6}$:

$$\frac{4}{6} = \frac{8}{12} = \frac{12}{18} = \frac{16}{24} = \frac{20}{30} \dots$$

• Categoria de Frações equivalentes a $\frac{1}{12}$:

$$\frac{1}{12} = \frac{2}{24} = \frac{3}{36} = \frac{4}{48} = \frac{5}{60} \dots$$

• Vamos utilizar as frações $\frac{8}{12}$ e $\frac{1}{12}$.

• Então:

$$\frac{4}{6} - \frac{1}{12} = \frac{8}{12} - \frac{1}{12} = \frac{7}{12}$$

Viu como devemos proceder da mesma forma da adição e encontrarmos sempre Frações Equivalentes.

• Sobrou da pizza então:



$\frac{7}{12}$

• Sete doze avos

Viu como devemos proceder da mesma forma da adição e encontrarmos sempre Frações Equivalentes.

• Sobrou da pizza então:



$\frac{7}{12}$

• Sete doze avos

As atividades selecionadas para este nodo envolveram situações que alunos utilizam Frações equivalentes para a resolução, e também o mínimo múltiplo comum (MMC), este trabalhado no nodo Comparação de Frações. Para as atividades com as operações de adição e subtração de Frações, foram desenvolvidas duas apresentações com atividades *online*. A primeira apresentação (figura 61) contém atividades na reta numérica, transformação de representações gráficas em Frações equivalentes e com o algoritmo da adição e subtração de Frações. Para essa apresentação, pesquisou-se nos seguintes sites:

- <http://ntic.educacion.es/w3/recursos/primaria/matematicas/fracciones/menuu5.html>
- <http://translate.google.com.br/?hl=pt-BR&tab=wT>
- http://nlvm.usu.edu/es/nav/frames_asid_106_g_2_t_1.html?from=topic_t_1.html
- http://www2.gobiernodecanarias.org/educacion/17/WebC/eltanque/todo_mate/fracciones_e/ejercicios/sumayresta_p.html

Figura 61 - apresentação “Atividades *Online* I Adição e Subtração”.

Atividades *online* I Adição e Subtração

Agora Rita iremos praticar o que estudamos no nosso material de estudo.

Isso mesmo Cleiton, as atividades que iremos fazer são *online*, quer dizer que estão disponíveis na internet.

Nossas atividades *online* estão na língua espanhola.

Por isso daremos algumas dicas de como realizar a atividade. Você verá que não será difícil.

ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO DE FRAÇÕES COM DENOMINADORES IGUAIS

Realize os cálculos e digite os números aqui. Clique em **COMPRUEBO** para ver se a resposta está correta.

Suma y resta de fracciones con igual denominador. **COMPRUEBO**

Para sumar o restar fracciones con igual denominador se suman o se restan los numeradores y se deja el mismo denominador. **VER EJEMPLO**

$\frac{6}{4} + \frac{8}{4} = \frac{14}{4}$ **COMPRUEBO** *Muy Bien*

$\frac{5}{4} + \frac{9}{4} = \frac{7}{4} + \frac{7}{4} = \frac{14}{4}$ **COMPRUEBO**

$\frac{8}{4} - \frac{8}{4} = \frac{8}{4} - \frac{8}{4} = \frac{0}{4}$ **COMPRUEBO**

$\frac{13}{4} + \frac{15}{4} = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{10}{4}$ **COMPRUEBO**

$\frac{3}{4} - \frac{3}{4} = \frac{3}{4} - \frac{3}{4} = \frac{0}{4}$ **COMPRUEBO**

$\frac{13}{4} - \frac{5}{4} = \frac{2}{4} + \frac{2}{4} = \frac{4}{4}$ **COMPRUEBO**

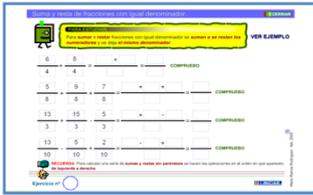
$\frac{10}{4} - \frac{10}{4} = \frac{10}{4} - \frac{10}{4} = \frac{0}{4}$ **COMPRUEBO**

RECUERDA: Para calcular una serie de sumas y restas sin paréntesis se hacen las operaciones en el orden en que aparecen de izquierda a derecha.

Especie nº 1 **No has introducido todos los números.** **RECUERDA**

Después de responder esta serie, clique em **INICIAR** para novas atividades

CLIQUE NA IMAGEM PARA INICIAR A ATIVIDADE



Em caso de dúvida você poderá retornar as explicações e também poderá consultar o Google Tradutor

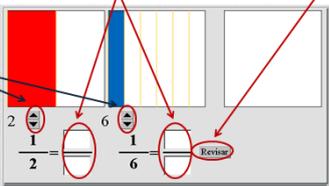


ADIÇÃO COM FRAÇÕES EQUIVALENTES

Clique nas setas para dividir em partes iguais

Digite a Fração Equivalente

Verificar a resposta



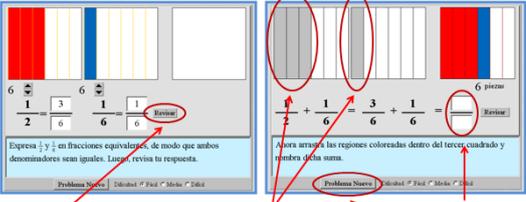
Expresa $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{6}$ en fracciones equivalentes, de modo que ambos denominadores sean iguales. Luego, revisa tu respuesta.

Problema Nuevo Dificultad Fácil Medio Difícil

Clique para Novo Problema

Escolha o nível de dificuldade

Acompanhe a sequência da atividade:



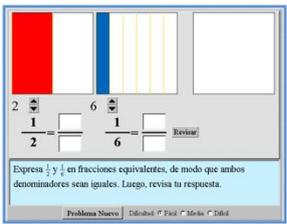
Verifique a resposta

Agora arraste as partes coloridas para dentro do terceiro quadro

Resolva a operação

Clique aqui para Novo Problema

CLIQUE NA IMAGEM PARA INICIAR A ATIVIDADE



Em caso de dúvida você poderá retornar as explicações e também poderá consultar o Google Tradutor



LAS FRACCIONES - 5 SUMA Y RESTA - LA REGLA

Clique na opção LA REGLA (A RÉGUA)



LAS FRACCIONES - 5 SUMA Y RESTA - LA REGLA

Digite o resultado da operação



Confirme a resposta

LAS FRACCIONES - 5 SUMA Y RESTA - LA REGLA



Clique em OUTRO EJEMPLO para nova atividade

CLIQUE NA IMAGEM PARA INICIAR A ATIVIDADE:



Em caso de dúvida você poderá retornar as explicações e também poderá consultar o Google Tradutor



Para a segunda apresentação (figura 62) utilizou-se os seguintes sites:

- <http://www.visualfractions.com/AddUnlikeCircle/addunlikecircle.html>
- <http://www.visualfractions.com/SubtractCircle/subtractcircle.html>
- <http://www.visualfractions.com/AddEasy/addlines.html>
- <http://www.visualfractions.com/SubtractEasy/subtractlines.html>

Com destaque para atividades que utilizavam representações escrita e gráfica de forma simultânea.

Figura 62 - apresentação “Atividades *Online* II Adição e Subtração”.

Atividades online II Adição e Subtração

As atividades estão escritas em inglês, por isso iremos dar algumas instruções. Não se preocupe, você verá que é não será difícil de entender.

Afinal a língua inglesa está no nosso dia a dia, como em músicas, internet, jogos de videogames e etc. Observe as instruções.

Para iniciar clique em **Start**

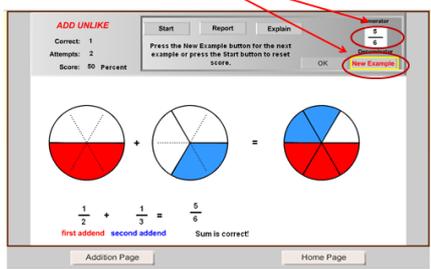
Irá surgir a **representação geométrica** de uma Fração como no exemplo abaixo.

Preencha com a Fração correspondente a **representação geométrica**

Irá surgir uma segunda representação, preencha com a Fração correspondente e clique em **OK**.

Agora é hora de realizar a adição das Frações, depois clique em **OK** para confirmar a resposta.

Muito bem, depois de responder e confirmar a resposta, clique em **NEW EXEMPLE** para fazer novas operações.

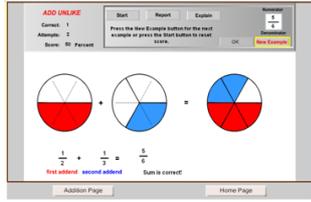


Clique nas imagens para começar as atividades. Se tiver dúvida com alguma palavra em inglês utilize o Google Tradutor

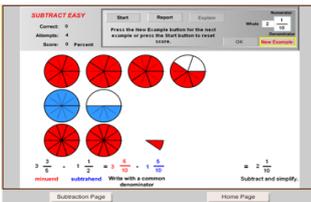
São 4 modalidades de atividades. Vamos começar, vá para o próximo slide.



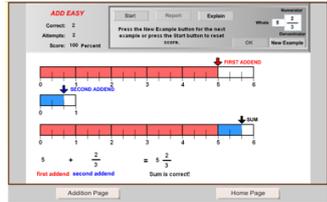
ADIÇÃO COM DENOMINADORES DIFERENTES



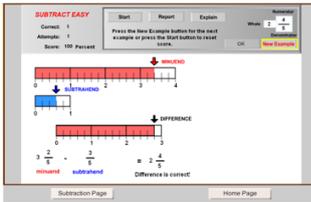

SUBTRAÇÃO COM DENOMINADORES DIFERENTES




ADIÇÃO COM DENOMINADORES IGUAIS




SUBTRAÇÃO COM DENOMINADORES IGUAIS




Fonte: Autor

7.3.6 Nodo Multiplicação e Divisão de Frações

Foi construída uma página inicial com *links* para três apresentações. A primeira porta para os conceitos de multiplicação de Frações; a segunda, para os conceitos de divisão de Frações e a terceira, para atividades *online*, conforme a figura 63.

Figura 63 - página inicial do nodo Multiplicação e Divisão de Frações.



Fonte: <http://siena.ulbra.br>

Assim como no nodo anterior, o conceito de multiplicação de Frações foi introduzido com uma situação problema em que os alunos pudessem reconhecer a sua utilização, pois, segundo Llinares e Sánchez (1988), as operações com Frações nem sempre parecem tão naturais aos alunos, e muitas vezes são evitadas e substituídas por outros procedimentos em busca da solução. Ainda para os autores, o primeiro contato com a operação de multiplicar vinculada às Frações aparece ao representar a soma de Frações iguais (número natural por Fração), como no exemplo do leite no material de estudo. Os usos de metodologias que integram problemas utilizando representações geométricas auxiliam o aluno a entender o conceito e o algoritmo da multiplicação de Frações.

O material de estudo, das operações de multiplicação e divisão de Frações, apoiou-se principalmente nas ideias de Llinares e Sánchez (1988), Giovanni, Castrucci e Giovanni Jr. (2007), Dante (2009) e Ledur, Hennemann e Wolff (1988). Na figura 64, mostra-se a apresentação do material de estudo “Multiplicação de Frações”.

Figura 64 - apresentação “Multiplicação de Frações”.

Multiplicação de FRAÇÕES

Olá Julia, de onde você está vindo?

Olá Pedro, fui no mercado comprar leite. Estou ajudando a minha mãe a fazer um bolo.

Legal Julia, que parte do bolo está fazendo?

Estou fazendo o recheio do bolo, como convidamos muitas pessoas tivemos que aumentar a receita em 4 vezes.

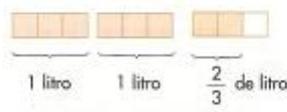
Hum, é só multiplicar as quantidades por 4.

É isso mesmo Pedro, tive que fazer os cálculos antes de fazer as compras, vamos ver como calculei a quantidade de leite para as 4 receitas.

- Em cada receita leva $\frac{2}{3}$ de um litro de leite, para calcular a quantidade de leite necessária para 4 receitas precisamos adicionar 4 parcelas iguais a $\frac{2}{3}$.
- Veja a figura:
 

$$\frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{3}$$
- Adicionar $\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}$ é o mesmo que multiplicar 4 por $\frac{2}{3}$:

$$4 \times \frac{2}{3} = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}$$

- Então vamos precisar de $\frac{8}{3}$ de litros de leite, esta é uma **Fração Imprópria** e podemos escrever na forma mista $2\frac{2}{3}$, que nesse caso significa 2 litros de leite mais $\frac{2}{3}$ de litro de leite.
- Vamos representar geometricamente:
 

Você utilizou a ideia de **multiplicação de Frações**.

Sim Pedro, multiplique o número de receitas pela quantidade de leite. Quer ver um outro exemplo?

- Um bolo foi dividido em 8 fatias iguais.
- Ana e suas quatro colegas comeram uma fatia cada uma. Juntas as cinco comeram que parte do bolo?
- Vamos começar representando geometricamente a situação:
 
 - Cada fatia representa $\frac{1}{8}$ do bolo.
 - Então:

$$5 \times \frac{1}{8} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$
 ou

$$5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

Então juntas elas comeram $\frac{5}{8}$ do bolo.

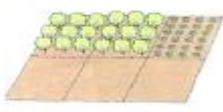
Na Matemática, a palavra "de" pode ser substituída pelo sinal x de multiplicação.



- Veja algumas situações:
- o dobro de 8 é 16, porque $2 \times 8 = 16$
- o triplo de 4 é 12, porque $3 \times 4 = 12$
- Quando multiplicamos Frações a ideia é a mesma:
- o dobro de $\frac{1}{3}$ é $\frac{2}{3}$, porque $2 \times \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$
- o triplo de $\frac{1}{4}$ é $\frac{3}{4}$, porque $3 \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$
- Você percebeu que para multiplicar um número natural por um número representado por uma Fração, multiplicamos o Número Natural pelo numerador da Fração e conservamos o denominador.

• Vamos pensar na seguinte situação:

• O pai do João tem um terreno. Ele usa $\frac{1}{2}$ do terreno para a plantação e em $\frac{2}{3}$ dessa plantação ele cultiva laranjas. Que parte do terreno é ocupada no cultivo de laranjas?



Para resolvermos esse problema é preciso descobrir quanto é $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$, ou seja, calcular $\frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$.

Adaptado: Coleção Aprendendo Sempre: Matemática 5º Ano – Editora Ática

Vamos usar figuras para ilustrar a situação:



- **Terreno**
- Pintamos $\frac{1}{2}$ (plantação)
- Marcamos $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ (laranjas)
- Observe que $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{2}$ é o mesmo que $\frac{2}{6}$ do terreno.

Então:

$$\frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{6}, \text{ que é igual a } \frac{1}{3}$$

- Para multiplicar dois números escritos na forma de Fração, multiplica-se o numerador de uma pelo numerador da outra, e o denominador de uma pelo denominador da outra.

É importante estarmos atentos aos dados quando resolvemos esse tipo de problema.

Isso mesmo Pedro, as representações geométricas nos ajudam a visualizar o problema. Mas como vimos podemos fazer os cálculos de forma direta.



• Observe alguns exemplos de multiplicação com Frações:

$$5 \times \frac{1}{8} = \frac{5}{8}$$

$$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = \frac{2}{2} = 1$$

$$\frac{2}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{15}$$

- Lembre-se que os Números Naturais são Frações aparentes:
- Por exemplo: $2 = \frac{2}{1}$ $5 = \frac{5}{1}$
- Então:
$$2 \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5} \text{ é o mesmo que } \frac{2}{1} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{5}$$

• Observe as multiplicações:

$$\frac{4}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{12}{28} = \frac{3}{7}$$

$$\frac{5}{12} \times \frac{3}{5} = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}$$

- Nas duas multiplicações, simplificamos depois de obter o produto. No entanto, a multiplicação com duas ou mais Frações torna-se mais simples quando simplificamos antes de efetuar a operação.
- Observe:
$$\frac{4}{7} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{7} \times \frac{3}{1} = \frac{3}{7} \rightarrow \text{Simplificamos 4 com 4, dividindo ambos por 4.}$$

$$\frac{5}{12} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{4} \times \frac{1}{1} = \frac{1}{4} \rightarrow \text{Simplificamos 5 com 5, dividindo ambos por 5. Simplificamos 3 com 12, dividindo ambos por 3.}$$

Simplificar antes de realizar uma multiplicação pode ser bastante útil.

Fonte: Autor

Para Llinares e Sánchez (1988),

A operação de dividir Frações corresponde já diretamente a uma operação de sentido algébrico. Sua vinculação a procedimentos ou situações intuitivas é tão remota que podemos aceitar que não existem. Há diversas estratégias para apresentar essa operação, mas a mais conhecida é a que se fundamenta na ideia de Frações inversas. [...] Assim, ao apoiar a introdução da divisão de Frações ao da ideia de Frações inversas se está considerando a ideia de operação inversa da multiplicação (a saber, relações de natureza algébrica) (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p. 151-152). Tradução nossa¹⁴.

¹⁴ La operación de dividir fracciones corresponde ya directamente a una operación de sentido algébrico. Su vinculación a procedimientos o situaciones intuitivas es tan remota que podemos aceptar que no existen. Hay diversas estrategias para presentar esta operación, pero la más conocida es la que se fundamenta en la idea de fracciones inversas. [...] Así, al apoyar la introducción de la división de fracciones en la idea de operación inversa se está planteando la idea de operación inversa de la multiplicación (es decir, relaciones de índole algebraico).

Na apresentação “Divisão de Frações” (figura 65), utilizou-se o recurso de representações gráficas para ilustrar o algoritmo da divisão.

Figura 65 - apresentação “Divisão de Frações”

Divisão de FRAÇÕES

Diariamente encontramos problemas envolvendo Frações e nem percebemos.

São situações que precisamos somar, subtrair, multiplicar e dividir quantidades representadas com Frações.

Até em situações simples, como dividir um alimento.

As vezes queremos dividir uma pizza em fatias iguais, uma barra de chocolate, e muitas outras situações. Como por exemplo a que veremos.

- Antônio comprou só $\frac{1}{4}$ de uma torta e vai repartir igualmente entre seus 2 sobrinhos.
- Que parte da torta inteira cada um vai ganhar?
- Vamos representar geometricamente:



torta inteira	$\frac{1}{4}$ da torta	$\frac{1}{4} \div 2$	a parte de cada um	parte correspondente $\times \frac{1}{2}$ da torta inteira.
---------------	------------------------	----------------------	--------------------	---

Então: $\frac{1}{4} \div 2 = \frac{1}{8}$ Cada sobrinho vai ganhar $\frac{1}{8}$ da torta inteira.

Neste caso dividimos uma Fração por um Número Natural.

Observe essa situação que aconteceu na casa da Rita.

- Dona Luiza mãe da Rita, preparou para o jantar $\frac{3}{4}$ de uma jarra cheia de suco de limão, ela quer dividir em três porções iguais e colocar cada porção num copo.
- Que fração da capacidade da jarra dona Luiza vai colocar em cada copo?

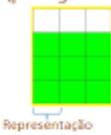
- Vamos representar a porção do suco dentro da jarra com um desenho.
- Agora vamos dividir em 3 partes iguais.
- E, em seguida, assinalar uma das três partes.



A parte assinalada é representada pela fração $\frac{1}{4}$ do total.

$$\frac{3}{4} \div 3 = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Podemos resolver o problema de outra maneira, considerando cada copo como $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{3}$.



Representação de um copo



copo $\frac{3}{4}$ de $\frac{1}{3}$

$$\frac{3}{4} \text{ de } \frac{1}{3} = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3 \times 1}{4 \times 3} = \frac{3}{12} = \frac{1}{4}$$

Portanto chegamos a mesma resposta, mas resolvendo de outra maneira. Dona Luiza vai colocar uma porção equivalente a $\frac{1}{4}$ da capacidade da jarra.

Interessante Julia, podemos resolver transformando e dividindo em multiplicação.

Pedro, neste caso estamos trabalhando com Frações Inversas. Observe esta outra situação.

• Veja outro problema envolvendo divisão com Frações:

• Uma receita de mousse de chocolate leva $\frac{1}{8}$ de quilograma (kg) de chocolate em pó. Com $\frac{3}{4}$ de quilogramas (kg) de chocolate em pó, quantas receitas dará para fazer?

• Para resolver esse problema, vamos considerar que o retângulo abaixo representa 1 quilograma (kg) de chocolate em pó.



A parte em marrom representa $\frac{3}{4}$ de quilograma de chocolate em pó.



Dividindo o retângulo em 8 partes podemos ver quantas vezes $\frac{1}{8}$ cabe em $\frac{3}{4}$.

• Com a figura, foi possível descobrir que $\frac{1}{8}$ cabe 6 vezes em $\frac{3}{4}$, ou seja, que

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = 6$$

• Veja como é possível fazer essa divisão sem o auxílio de uma figura. Para isso, lembre que ao multiplicar o numerador e o denominador de uma fração por um mesmo número, diferente de zero, obtemos uma fração equivalente à fração inicial:

$$\frac{3}{4} \div \frac{1}{8} = \frac{3}{4} \times \frac{8}{1} = \frac{3 \times 8}{4 \times 1} = \frac{24}{4} = 6$$

Multiplicando as frações pela fração aparente $\frac{8}{1}$

Observação:
 • Quando o produto de dois números na forma de fração é igual a 1, esses números são chamados de **número inverso**.
 • Exemplo: $\frac{1}{8} \times \frac{8}{1} = \frac{8}{8} = 1$

Você observou que o resultado da divisão foi obtido por meio de uma multiplicação com Frações.

Podemos resolver divisão de Frações transformando em multiplicação. Não esqueça das dicas que iremos dar agora.



• Que os **Números Naturais** podem ser representados por **Frações aparentes**.

Exemplos: $\frac{4}{1} = 4$ $\frac{8}{1} = 8$ $\frac{2}{1} = 2$

• Quando a multiplicação de dois Números Racionais não-nulos dá 1, os números são chamados **números inversos**. Um número é considerado o inverso do outro.

Exemplos:

- 4 e $\frac{1}{4}$ são números inversos, 4 é o inverso de $\frac{1}{4}$ e vice-versa.
- 6 e $\frac{1}{6}$ são números inversos, 6 é o inverso de $\frac{1}{6}$ e vice-versa.

• Na divisão com Frações, multiplicamos a primeira fração pela Fração inversa da segunda

$$7 \div \frac{3}{4} = 7 \times \frac{4}{3} = \frac{28}{3}$$

$$\frac{3}{11} \div 3 = \frac{3}{11} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{11}$$

$$\frac{4}{9} \div \frac{5}{3} = \frac{4}{9} \times \frac{3}{5} = \frac{4}{15}$$

$$\frac{3}{10} \div \frac{2}{9} = \frac{3}{10} \times \frac{9}{2} = \frac{27}{20}$$

Vamos calcular juntos:

• Se com $\frac{1}{4}$ kg de farinha você faz um pão, quantos pães você fará com 4 kg?



$4 \div \frac{1}{4} = 16$ • Com 4 kg de farinha, você faz 16 pães.

• Quantas vezes $\frac{1}{4}$ cabe em ?



$\frac{1}{2} \div \frac{1}{4} = 2$ • $\frac{1}{2}$ cabe no $\frac{1}{4}$ duas vezes.

• Quantas vezes $\frac{1}{2}$ cabe em $\frac{3}{4}$?



• O $\frac{1}{2}$ não cabe em $\frac{3}{4}$. Nela, só cabe uma parte deste $\frac{1}{2}$; logo a metade cabe em $\frac{1}{4}$ só meia vez.

Fonte: Metodologia do Ensino Aprendizagem de Matemática, vol. Séries Iniciais de 1ª a 5ª - Cuiabá, Mato Grosso e Goiás

Bem agora vamos fazer algumas atividades!

É sempre importante prestar atenção nas explicações porque elas serão muito úteis nas nossas atividades.



Fonte: Autor

A seguir apresentam-se os *links* utilizados para as atividades *online* (figura 66):

- http://www2.gobiernodecanarias.org/educacion/17/WebC/eltanque/todo_mate/fracciones_e/ejercicios/division_p.html
- http://www2.gobiernodecanarias.org/educacion/17/WebC/eltanque/todo_mate/fracciones_e/ejercicios/multiplicacion_p.html
- <http://ntic.educacion.es/w3/recursos/primaria/matematicas/fracciones/menuu6.html>

Figura 66 - apresentação “Atividades Online: Multiplicação & Divisão”.

Atividades *online*

multiplicação & divisão



É hora de praticar, vamos fazer algumas atividades online.

Fique atento as dicas que daremos.

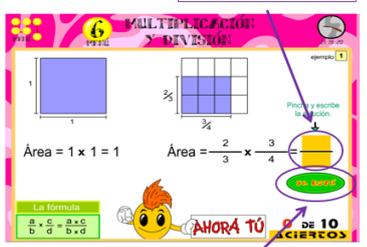
LAS FRACCIONES - 6 MULTIPLICACIÓN Y DIVICIÓN – ÁREAS

Clique na opção **ÁREAS**



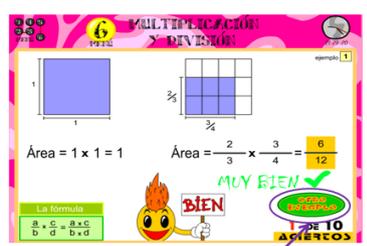
LAS FRACCIONES - 6 MULTIPLICACIÓN Y DIVICIÓN – ÁREAS

Digite a solução da operação



Confirme a resposta

LAS FRACCIONES - 6 MULTIPLICACIÓN Y DIVICIÓN – ÁREAS



Clique em **OUTRO EJEMPLO** para nova atividade

CLIQUE NA IMAGEM PARA INICIAR A ATIVIDADE:



Em caso de dúvida você poderá retornar as explicações e também poderá consultar o Google Tradutor



MULTIPLICACIÓN DE FRACCIONES

Realize os cálculos e digite os números aqui. Clique em **COMPRUEBO** para ver se a resposta está correta.



Depois de responder essa série, clique em **INICIAR** para novas atividades

CLIQUE NA IMAGEM PARA INICIAR A ATIVIDADE

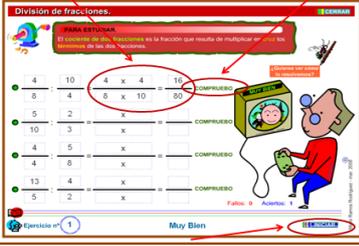


Em caso de dúvida você poderá retornar as explicações e também poderá consultar o Google Tradutor



DIVISÃO DE FRAÇÕES

Realize os cálculos e digite os números aqui. Clique em **COMPRUEBO** para ver se a resposta está correta.



Depois de responder essa série, clique em **INICIAR** para novas atividades

CLIQUE NA IMAGEM PARA INICIAR A ATIVIDADE



Em caso de dúvida você poderá retornar as explicações e também poderá consultar o Google Tradutor



Fonte: Autor

7.3.7 Nodo Resolução de Problemas com Frações

Esse nodo contém uma apresentação de estudo em *PowerPoint*, projeto do aplicativo *JClic* e uma atividade *online* do site da Revista Nova Escola. Na figura 67, apresenta-se a página inicial do nodo.

Figura 67 - página inicial do nodo Resolução de Problemas com Frações.



UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA - PPGECIM

ALEXANDRE BRANCO MONTEIRO
ORIENTAÇÃO PROF.ª DRA. CLAUDIA LISETE OLIVEIRA GROENWALD

FRAÇÕES

RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS

CLIQUE NOS NÚMEROS PARA ENTRAR NO MATERIAL DE ESTUDO




1




2




3

BOM TRABALHO!

Fonte: <http://siena.ulbra.br>

O nodo Resolução de Problemas com Frações tem dois propósitos em relação à pesquisa: o primeiro é com a aprendizagem do aluno, quanto ao material de estudo; o segundo é proposta quanto à análise da evolução do desempenho dos alunos em relação ao conceito de Frações, já que o banco de questões é composto por questões repetidas de outros nodos

(APÊNDICE B) e podem, de certa maneira, fazer um comparativo a partir da evolução do desempenho individual do estudante. Mas este comparativo não é o único instrumento a ser utilizado na análise dos dados; existem outras categorizações a serem analisadas.

A primeira apresentação do material de estudo trouxe as etapas na resolução de problemas, segundo Polya (apud DANTE, 2010, p. 29) essas etapas são: compreender o problema, elaborar um planejamento, executar o planejamento e fazer a verificação. Para Dante (2010), essas etapas não são rígidas, fixas ou infalíveis, mas de modo geral, elas ajudam o aluno a se orientar durante o processo. No material de estudo, além de explicar cada etapa ao aluno, também apresenta exemplos de problemas e de resolução seguindo as etapas propostas (figura 68).

Figura 68 - apresentação “Frações: Resolução de Problemas”.

FRAÇÕES
Resolução de Problemas

Eduardo, durante todos os nossos estudos realizamos muitas atividades.

Sim Ana, e entre elas, resolvemos muitos problemas.

Agora vamos ver como podemos resolver problemas seguindo algumas etapas.

Essas etapas são muito importantes, pois vão nos auxiliar para não cometermos erros.

Problema
Célia tinha 6 laranjas e deu $\frac{1}{3}$ delas a sua irmã. Quantas laranjas ela deu a sua irmã?

1) Compreendo o problema:
• Para compreender um problema é preciso ler com atenção e fazer algumas perguntas:
• O que o problema diz?
- Célia tinha 6 laranjas.
- Ela deu $\frac{1}{3}$ delas a sua irmã.
• O que o problema pede?
- Quantas laranjas ela deu a sua irmã?

2) Planejando
• Você deve pensar na estratégia adequada.
• Que operação é adequada para esse problema?
- A multiplicação para encontrar $\frac{1}{3}$ de 6.

3) Executando:
• Como vou calcular? Posso usar a forma que melhor entendo.
$$\frac{1}{3} \text{ de } 6 = \frac{1}{3} \times 6 = \frac{6}{3} = 2$$

4) Verificando:
• Será que não errei nenhum cálculo? Vamos fazer a prova.
$$\frac{3}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{2}{3} \text{ de } 6 = 4$$

$$6 - 4 = 2$$

5) Respondendo:
• O problema perguntou:
- Quantas laranjas ela deu a sua irmã? “Ela deu 2 laranjas para a sua irmã.”

 <p>Vamos ver outro problema, realizando as etapas.</p> <p>Vamos ver então Ana.</p>	<h3 style="text-align: center;"><u>PROBLEMA</u></h3> <p>Aline tinha R\$ 240,00. Ela gastou $\frac{1}{6}$ dessa quantia na compra de par de sapatos. Com quanto ela ficou?</p> 
<p style="text-align: center;"><u>PROBLEMA</u></p> <p>Aline tinha R\$ 240,00. Ela gastou $\frac{1}{6}$ dessa quantia na compra de par de sapatos. Com quanto ela ficou?</p> <p style="text-align: center;"><u>Compreendendo o problema</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Para compreender um problema é preciso ler com atenção e fazer algumas perguntas: O que o problema diz? <ul style="list-style-type: none"> Aline tinha R\$ 240,00. Ela gastou $\frac{1}{6}$ dessa quantia na compra de par de sapatos. O que o problema pede? <ul style="list-style-type: none"> Com quanto ela ficou? 	<p style="text-align: center;"><u>PROBLEMA</u></p> <p>Aline tinha R\$ 240,00. Ela gastou $\frac{1}{6}$ dessa quantia na compra de par de sapatos. Com quanto ela ficou?</p> <p style="text-align: center;"><u>Planejando</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Você deve pensar na estratégia adequada. Que operação é adequada para esse problema? <ul style="list-style-type: none"> Primeiro eu multiplico para encontrar $\frac{1}{6}$. Depois eu subtraio este $\frac{1}{6}$ do total.
<p style="text-align: center;"><u>PROBLEMA</u></p> <p>Aline tinha R\$ 240,00. Ela gastou $\frac{1}{6}$ dessa quantia na compra de par de sapatos. Com quanto ela ficou?</p> <p style="text-align: center;"><u>Executando</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Como vou calcular? Posso usar a forma que melhor entendo. 1ª vou multiplicar: $\frac{1}{6} \text{ de R\\$ 240,00} = \frac{1}{6} \times 240 = \frac{240}{6} = 40$ 2ª agora vou subtrair R\$ 40,00 do total: $\text{R\\$ 240,00} - \text{R\\$ 40,00} = \text{R\\$ 200,00}$ 	<p style="text-align: center;"><u>PROBLEMA</u></p> <p>Aline tinha R\$ 240,00. Ela gastou $\frac{1}{6}$ dessa quantia na compra de par de sapatos. Com quanto ela ficou?</p> <p style="text-align: center;"><u>Verificando</u></p> <ul style="list-style-type: none"> Será que não errei nenhum cálculo? Vamos fazer a prova. $\frac{1}{6} \text{ de } 240 = 40$ $\frac{6}{6} - \frac{1}{6} = \frac{5}{6} = 40 + 40 + 40 + 40 + 40 = 200$
<p style="text-align: center;"><u>Respondendo</u></p> <ul style="list-style-type: none"> O problema perguntou: <ul style="list-style-type: none"> Com quanto ela ficou? <p style="text-align: center;">“ Depois de gastar com a compra ela ficou com R\$ 200,00”</p>	 <p>Vamos praticar?</p> <p>Vamos fazer atividades e não se esqueça de seguir os passos, eles podem auxiliar na solução.</p>

No projeto *JClic* desenvolvido para este nodo, foram desenvolvidas treze atividades destacando as etapas da resolução de problema, para que o aluno se habitue na compreensão do problema. As atividades desenvolvidas foram de associação, caça-palavras, completar texto e de múltiplas escolhas, conforme exemplo na figura 69.

Figura 69 - exemplos de atividades no aplicativo *JClic*.

The figure displays six screenshots of the JClic application interface, illustrating different types of activities:

- Top Left:** A table with two rows and three columns. The first row lists: 'PARA RESOLVER PROBLEMAS PRECISAMOS SEGUIR ETAPAS. SÃO ELAS:', 'PLANEJANDO A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA', and 'RESPONDENDO A PERGUNTA DO PROBLEMA'. The second row lists: 'COMPREENDENDO O PROBLEMA', 'EXECUTANDO O PLANEJAMENTO', and 'VERIFICANDO A RESOLUÇÃO DO PROBLEMA'. Below the table is the instruction: 'COLOQUE EM ORDEM AS ETAPAS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS'.
- Top Right:** A table with two columns. The left column lists steps: 'Problema', 'Compreendendo o problema', 'Qual a pergunta do problema?', 'Planejando a resolução do problema', 'Executando o planejamento', 'Verificando a resolução do problema', and 'Respondendo ao problema'. The right column provides corresponding details and calculations for each step. Below is the instruction: 'ASSOCIE AS ETAPAS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS'.
- Middle Left:** A 15x15 grid of letters used for a word search. Below the grid is the instruction: 'Encontre as palavras: PROBLEMA, COMPREENDENDO, PLANEJANDO, EXECUTANDO, VERIFICANDO, RESPONDENDO'.
- Middle Right:** A math problem about Aline's purchase. It includes the problem statement, a table for organizing data (initial amount, amount spent, and remaining amount), and a calculation: $\frac{1}{6}$ de R\$ 240,00 = $\frac{1}{6}$ x 240 =. Below is the instruction: 'ASSINALE A ALTERNATIVA CORRETA'.
- Bottom Left:** A word problem about Ellen's trip. It asks for the distance traveled by train, bus, and car, and provides a table with equivalent fractions: $\frac{6}{15}$, $\frac{2}{15}$, $\frac{6}{15}$, $\frac{7}{15}$, $\frac{4}{15}$, and $\frac{5}{15}$. Below is the instruction: 'Utilize FRAÇÕES EQUIVALENTES para resolver'.
- Bottom Right:** A problem about Paulo's exam performance. It asks for the number of questions answered correctly in different ways. Below is the instruction: 'RELACIONE'.

The figure displays six screenshots of a math software interface, arranged in a 3x2 grid. Each screenshot shows a different problem involving fractions and their operations.

Top Left Screenshot: A problem about a city with 120 inhabitants. A quarter are children, and half of the children are boys. The question is how many boys are there. The interface shows the problem text, a comprehension step, a question, and a calculation: $\frac{1}{3}$ de 6 = $\frac{1}{3} \times 6 = \frac{6}{3} = 2$. The bottom bar says "Leia com atenção e assinale as alternativas corretas."

Top Right Screenshot: A problem about oranges. Célia has 6 oranges and gave a third to her sister. The question is how many she has left. The interface shows the problem text, a comprehension step, and a calculation: $\frac{3}{3}$ de 6 = $\frac{2}{3} \times 6 = \frac{12}{3} = 4$. The bottom bar says "COLOQUE EM ORDEM SEGUINDO AS ETAPAS DA RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS".

Middle Left Screenshot: A problem about a basketball game where Oscar scored 120 points and made a quarter of the total. The question is how many points he made. The interface shows the problem text, a comprehension step, a question, and a calculation: $\frac{1}{4}$ de 120 = $\frac{1}{4} \times 120 = \frac{120}{4} = 30$. The bottom bar says "Assinale a alternativa correta."

Middle Right Screenshot: A problem about a volleyball tournament. The gymnasium has a capacity of 3,000 people, and only 2,000 are present. The question is how many people did not enter. The interface shows the problem text, a comprehension step, and a table with values 1200, 1000, 1800, 2000, and 3000. The bottom bar says "RELACIONE".

Bottom Left Screenshot: A problem about a camera with a 360-photo capacity. The user has used a third. The question is how many photos are left. The interface shows the problem text, a comprehension step, a question, and a calculation: $\frac{1}{3}$ de 360 = $\frac{1}{3} \times 360 = \frac{360}{3} = 120$. The bottom bar says "Leia o problema com atenção e complete as lacunas."

Bottom Right Screenshot: A problem about a pizzeria. The owner has 5 pizzas and a half. The question is how many pizzas are left. The interface shows the problem text, a comprehension step, a question, and a calculation: $\frac{1}{4}$ de 5 = $\frac{1}{4} \times 5 = \frac{5}{4} = 1,25$. The bottom bar says "Leia o problema com atenção e complete as lacunas."

Fonte: Autor

A segunda porta de atividade é composta por um desafio em dois níveis de dificuldade “fácil” e “difícil”. Essa atividade denominada “Enigma das Frações” está disponível no site http://revistaescola.abril.com.br/swf/jogos/exibi-jogo.shtml?211_enigma_fracoes.swf. Nessa atividade, os alunos são desafiados a responder os enigmas feitos pelo “feiticeiro mal Mulôji” ao mocinho “Fracti”, para libertar os habitantes da vila de gnomo. É uma atividade lúdica para trabalhar Frações e testar os conhecimentos dos alunos. Na figura 70, observam-se exemplos dessa atividade.

Figura 70 - atividade online “Enigma das Frações”.

The figure displays ten sequential screenshots from the online game "Enigma das Frações".

- Screenshot 1:** Title screen "Enigma das Frações" with buttons for "ver introdução" and "iniciar jogo".
- Screenshot 2:** Question: "Cada caixa de biscoito tem 6 pacotes de $\frac{3}{4}$ kg. Quanto pesa uma caixa completa?" with three options: $4\frac{1}{2}$ kg, $\frac{9}{4}$ kg, and 6 kg.
- Screenshot 3:** Instruction: "- ESCOLHA UMA PEÇA QUEBRADA DA CHAVE E DIGA-ME QUANTO FALTA PARA COMPLETAR O RETÂNGULO!" showing a key with a circular dial and a rectangular slot.
- Screenshot 4:** Instruction: "- ACERTOU! ESCOLHA UMA PEÇA PARA RECOMPOR A CHAVE DA PRISÃO!" with an "ok" button.
- Screenshot 5:** Question: "Indique quais das seguintes frações são equivalentes:" with a list of fractions: $\frac{6}{9}$, $\frac{16}{24}$, $\frac{12}{18}$, $\frac{24}{36}$, $\frac{10}{13}$.
- Screenshot 6:** Question: "Calcule $\frac{2}{3}$ de 15 bombons." with three options: 30, 6, and 10.
- Screenshot 7:** Instruction: "- PARA CHEGAR AO OUTRO LADO, VOCÊ PRECISA REATIVAR AS PEÇAS CORRETAS, QUE COMPLETAM A PONTE NA MEDIDA, NEM MAIS NEM MENOS. QUERO VER SE VOCÊ É CAPAZ!" showing a character on a bridge.
- Screenshot 8:** Celebration screen showing the character jumping over a crowd of cheering people.

Fonte: http://revistaescola.abril.com.br/swf/jogos/exibi-jogo.shtml?211_enigma_fracoes.swf

Trabalhar com a metodologia da resolução de problema tem por objetivo equipar os alunos com estratégias, fazê-los pensar produtivamente, desenvolvendo o raciocínio para enfrentar situações utilizando e aplicando a Matemática (DANTE, 2010). Para Tenreiro e Vieira (2001, apud GROENWALD; KAIBER; MORA, 2004, p. 41), a resolução de problemas surge como um contexto para os alunos usarem as suas capacidades de pensamento, prioritariamente de pensamento crítico (formulação de hipóteses, análise, generalização, avaliação, entre outras habilidades).

8 ANÁLISE DOS DADOS

Foi realizada nesta pesquisa a análise do desempenho geral do grupo de alunos, do desempenho individual dos alunos e como etapa do DI fixo (FILATRO, 2008) foi analisada, também, a sequência didática eletrônica desenvolvida.

A análise do desempenho do grupo teve o objetivo de fornecer uma visão geral de quais conceitos sobre Frações os alunos apresentaram dificuldades. Esses dados permitem uma leitura dos resultados do experimento.

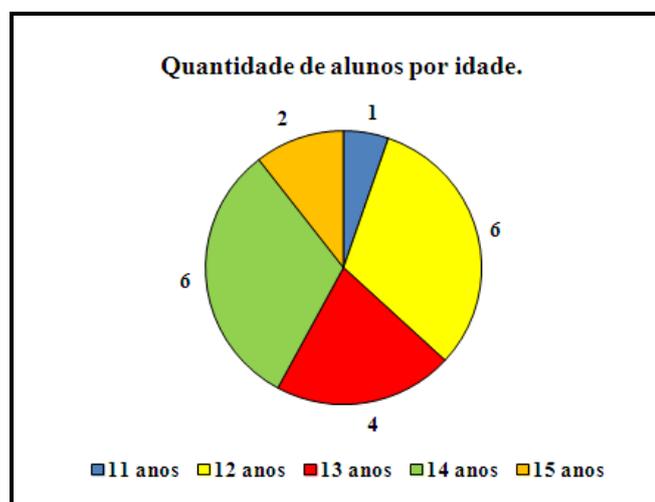
Para a análise individual dos alunos, foram utilizados o banco de dados do SIENA, as anotações dos alunos, as gravações de áudio e vídeo, e as observações do pesquisador. Os dados coletados permitem analisar as dificuldades apresentadas pelos alunos, se elas foram ou não superadas ao longo das atividades e de que forma se deu esse processo.

O terceiro aspecto analisado foi a sequência didática eletrônica. A análise buscou avaliar os pontos positivos e negativos, principalmente, a partir do desempenho apresentados pelos alunos. A análise tem como propósito em edições futuras estar atualizando o material disponibilizado.

8.1 ANÁLISE DO DESEMPENHO GERAL DO GRUPO DE ALUNOS PARTICIPANTES

Inicialmente foi realizado um levantamento do perfil dos alunos participantes do experimento. A figura 71 apresenta um gráfico com a idade dos alunos.

Figura 71- gráfico com a idade dos alunos.



Fonte: ficha perfil

Foi perguntado aos alunos se já tinham ou não repetido em alguma série/ano, e em qual disciplina. Na figura 72, é apresentado o número de alunos que nunca repetiram e a quantidade de alunos repetentes por série. O valor total ultrapassa a quantidade de dezenove alunos porque alguns repetiram em mais de uma série. Nem todos responderam em quais disciplinas repetiram, mas entre os que responderam a disciplina de Matemática é unanimidade entre os repetentes.

Figura 72 – gráfico com a quantidade de alunos com ou sem repetência.



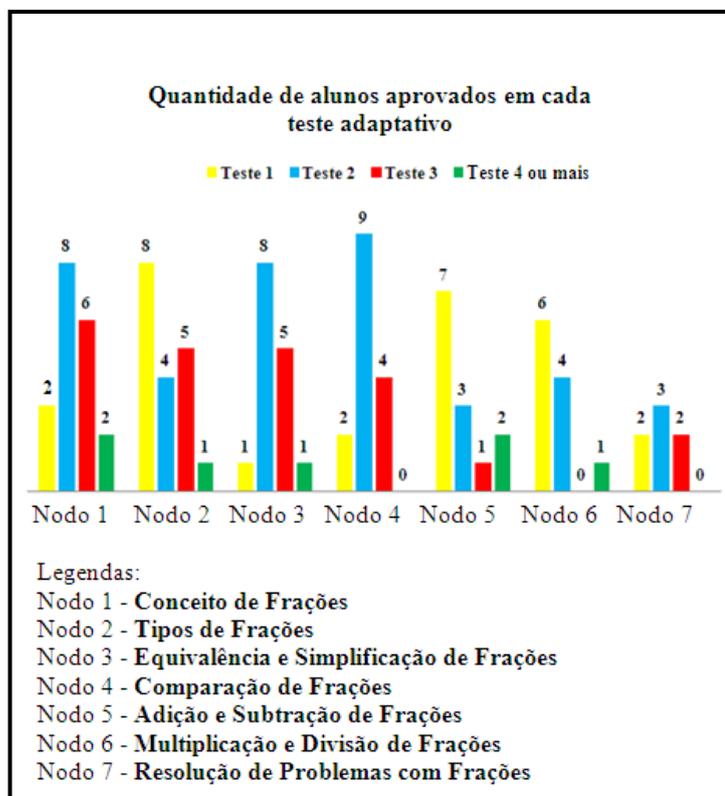
Fonte: ficha perfil

Com exceção de dois alunos que assinalaram que nunca utilizam o computador, os demais utilizavam o computador com frequência. Somente dois responderam que já realizaram alguma atividade matemática no laboratório de informática da escola.

A análise do desempenho geral dos alunos toma como base em qual dos testes adaptativos o aluno alcançou a pontuação de aprovação de 0.6. A figura 73 tem a proposta de mostrar a quantidade de alunos que realizaram os testes adaptativos em cada um dos sete nodos e a quantidade de alunos aprovados em cada teste. Fazendo uma breve explicação do gráfico as barras de quantidades estão divididas em sete blocos representando cada um dos nodos conforme a legenda. As cores das barras identificam o número do teste adaptativo: amarelo para o primeiro teste; azul para o segundo teste adaptativo; vermelho para o terceiro e

a cor verde para quatro ou mais testes. O número acima da barra identifica a quantidade de alunos aprovados naquele teste adaptativo. Foram desconsiderados desta avaliação os testes não concluídos pelos alunos.

Figura 73 – gráfico com as quantidades de alunos aprovados em cada teste adaptativo.



Fonte: banco de dados do SIENA.

Analisando o gráfico é possível perceber que dos 19 alunos participantes do experimento, só um aluno não obteve aprovação no nodo conceito. Esse aluno compareceu somente no primeiro encontro, por isso, a quantidade total de alunos que apareceram no nodo Conceito de Frações (Nodo 1) são de 18 alunos, pois leva em consideração somente os aprovados. A sequência didática de Frações foi concluída por sete alunos como pode ser verificado no nodo Resolução de Problemas com Frações (Nodo 7).

Avaliando o gráfico, no nodo Tipos de Frações (Nodo 2), dos 18 alunos que realizaram os testes adaptativos, oito foram aprovados no primeiro teste, não tendo a necessidade de acessar o material de estudos de recuperação. Porém, seis alunos precisaram realizar três ou mais testes adaptativos para alcançarem a pontuação de aprovação. A princípio, tem-se a impressão, pelo número de aprovados no primeiro teste, é que os alunos não apresentam dificuldades nesse conceito. No entanto, não é uma afirmativa correta, pois

um número considerável de alunos tiveram dificuldades de aprovação, mesmo depois de realizarem os estudos de recuperação. Uma das dificuldades enfrentadas pelos alunos nesse conceito é a compreensão da Fração como número, muitos transferem as propriedades dos números naturais para o trabalho com as Frações.

No nodo Adição e Subtração de Frações, dos treze alunos que realizaram os testes, sete foram aprovados no primeiro teste. Já o nodo Multiplicação e Divisão de Frações, foi o nodo com a maior aprovação proporcional de todos os nodos no primeiro teste adaptativo, o que leva a supor que os alunos não apresentam dificuldades nesse conceito. De maneira geral, os alunos apresentaram um bom desempenho nos nodos envolvendo as quatro operações, porém, analisando individualmente os alunos, é possível perceber que esse bom rendimento está mais ligado ao uso de regras e técnicas de resolução destas operações, do que o entendimento dos conceitos e das propriedades.

Na adição e subtração, a ênfase está no uso do mínimo múltiplo comum na resolução das questões, e a falta de domínio sobre essa técnica acaba sendo um obstáculo aos alunos. A multiplicação é a operação em que os alunos têm os melhores desempenhos; é possível que isto esteja ligado a possibilidade de resolução semelhante aos números naturais, e os alunos resolvem o algoritmo como uma regra, numerador multiplica numerador e denominador multiplica denominador. A divisão é a operação que os alunos mais se confundem na hora de resolver, pois por vezes operam a divisão como se fosse multiplicação. Assim como na multiplicação, o entendimento da resolução do algoritmo da divisão está ligado à regra da inversão de Frações ou multiplicação em “x”, de todas as operações é a de mais difícil compreensão do conceito por parte dos alunos.

Os nodos Conceito de Frações, Equivalência e Simplificação de Frações e Comparação de Frações foram aparentemente os conceitos em que os alunos apresentaram maiores dificuldades no conteúdo de Frações, tendo um baixo índice de aprovação nos primeiros testes. Nestes três conceitos, muitos alunos precisaram realizar mais de dois testes adaptativos para serem aprovados, necessitando ingressar mais de duas vezes em estudos de recuperação.

Em Conceitos de Frações, muitos alunos apresentaram dificuldades com as ideias básicas de Frações, como, por exemplo, no significado das Frações: como quociente, razão e parte-todo, principalmente quando a Fração é representada de forma discreta. Outro conceito que apresenta dificuldade de compreensão dos alunos é equivalência de Frações, resultado de deficiência do entendimento das ideias básicas de Frações. A principal dificuldade no

conteúdo sobre comparação de Frações está no fato de os alunos tratarem numerador e denominador de forma independente, como se fossem dois números.

O objetivo do nodo Resolução de Problemas de Frações era utilizar o banco de questões dos outros seis nodos para fazer uma comparação sobre a evolução do desempenho do aluno, desta forma verificar quais as dificuldades foram superadas e quais ainda permaneceram. As questões envolvendo a resolução de problemas estiveram presentes em todos os nodos e muitos alunos tiveram dificuldades na interpretação dos nodos; alguns alunos dominam o algoritmo das operações com frações, mas quando a atividade se apresenta em forma de problema, passa a ser uma dificuldade ao aluno identificar qual operação resolve a situação apresentada. Porém, foi possível verificar que, entre os alunos que concluíram a sequência didática eletrônica, houve aspectos muito positivos.

Como a proposta da pesquisa era desenvolver uma recuperação do conteúdo de Frações de forma individual, foi feita uma análise do desempenho de cada aluno, já que a análise geral do grupo pode apresentar distorções das dificuldades de cada aluno.

8.2 ANÁLISE INDIVIDUAL DO DESEMPENHO DOS ALUNOS

A análise individual dos alunos objetivou verificar as dificuldades e as particularidades individuais nas atividades propostas na sequência didática eletrônica. A análise utilizou o banco de dados do SIENA, as anotações dos alunos, as gravações de áudio e vídeo, e também as observações do pesquisador. Foram analisados os 19 alunos participantes do experimento, independente de concluírem ou não toda a sequência didática eletrônica.

A análise individual do aluno inicia com uma tabela com o seu desempenho em cada teste adaptativo realizado (nesta tabela, não foram considerados os testes não concluídos pelo aluno) e, logo após, é feita uma análise dos aspectos considerados mais relevantes das atividades realizadas pelo aluno.

Alguns tipos de dificuldades com Frações são recorrentes a vários alunos. Por vezes, ao longo dessa seção, alguns exemplos de dificuldades, de questões podem se repetir e até semelhanças nos comentários podem acontecer, sendo isso consequência da proposta de analisar individualmente os alunos e identificar as particularidades nas dificuldades.

8.2.1 Análise do desempenho do Aluno 101

O Aluno 101 concluiu a sequência didática eletrônica em quatro encontros, apresentando um bom desempenho nos nodos Conceito de Frações, Multiplicação e Divisão

de Frações, e Resolução de Problemas, nos demais nodos necessitou de estudos de recuperação, conforme tabela 2.

Tabela 2 - desempenho do Aluno 101 nos testes adaptativos.

	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.884	0.385	0.273	0.200	0.422	0.958	0.836
2		0.385	0.510	0.923	0.995		
3		0.993	0.845				

Fonte: banco de dados SIENA.

Com o conceito Tipos de Frações, o aluno apresentou dificuldades, sendo necessário realizar três testes adaptativos e ingressar duas vezes no material de estudo. Nos dois primeiros testes, o rendimento do aluno foi baixo, acertando somente duas questões em cada teste. No terceiro teste apresentou um grande progresso, atingindo uma excelente pontuação e superando a dificuldade inicial, principalmente, em questões com números mistos.

Em Equivalência e Simplificação de Frações, foi necessário realizar três testes adaptativos também, mas desta vez o aluno já apresentou uma razoável melhora no desempenho no segundo teste, quase atingindo a média. No primeiro teste, o Aluno 101 apresentou dificuldades em todos os fundamentos deste conceito. No segundo teste adaptativo, as dificuldades foram com o conceito de equivalência de Frações, e melhorou significativamente em questões envolvendo simplificação de Frações. No último teste realizado neste nodo, o aluno evoluiu nos dois conceitos, ficando acima da média estipulada.

De todos os conceitos Comparações de Frações foi o que apresentou a pontuação mais baixa no primeiro teste adaptativo, acertando somente uma questão no teste, mas no segundo teste realizado após os estudos de recuperação a pontuação foi excelente, mostrando um bom rendimento em questões dos três níveis de dificuldades. Pela sua melhora significativa, talvez esse seja o nodo em que o material de estudo mais auxiliou o aluno.

Com as operações de adição e subtração de Frações, o aluno necessitou realizar estudos de recuperação. O segundo teste adaptativo foi quase gabaritado pelo aluno que teve um excelente desempenho, mostrando uma evolução em relação ao primeiro teste principalmente em questões envolvendo resolução de problemas. Na figura 74, um exemplo de uma questão de nível difícil do primeiro teste adaptativo, onde o aluno comete dois erros: o primeiro, de interpretação, ao resolver o problema através da adição ao invés de subtrair, e o

segundo é um erro típico dos alunos, conforme Llinares e Sánchez (1988), que, ao resolver a adição, somam numerador com numerador e denominador com denominador, como se fossem números independentes um do outro.

Figura 74 - exemplo de questão em que o Aluno 101 apresentou dificuldades.

Um automóvel já percorreu $\frac{1}{6}$ de uma distância. Quanto ele ainda tem de percorrer para completar $\frac{3}{4}$ da distância?

0) $\frac{7}{12}$ → Alternativa correta

1) $\frac{3}{12}$

2) $\frac{4}{10}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 101

3) $\frac{1}{10}$

4) $\frac{3}{10}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Nas questões envolvendo multiplicação e divisão de Frações o Aluno 101 não apresentou dificuldade. Uma das poucas questões que o aluno errou no teste é apresentada na figura 75, onde há um erro de interpretação do problema. O aluno resolve a primeira etapa do problema de forma correta, mas se equivoca na resolução final.

Figura 75 - exemplo de questão em que o Aluno 101 apresentou dificuldades.

Aline tinha R\$ 240,00. Ela gastou $\frac{1}{6}$ dessa quantia na compra de um par de sapatos. Com quanto ela ficou?

0) R\$ 40,00 → Alternativa assinalada pelo Aluno 101

1) R\$ 60,00

2) R\$ 100,00

3) R\$ 200,00 → Alternativa correta

4) R\$ 240,00

Fonte: banco de dados do SIENA.

Em Resolução de Problemas com Frações, o aluno foi aprovado no primeiro teste adaptativo, não apresentado maiores dificuldades. Chama a atenção neste teste adaptativo o

fato de que das quatro questões que ele errou, três eram questões do nodo Conceito de Frações de nível fácil. A figura 76 mostra um exemplo de uma das questões.

Figura 76 - exemplo de questão de nível fácil de conceito de Frações que o Aluno 101 errou.

Na turma do Anderson há 12 meninas e 6 meninos. As meninas representam quanto da turma?

0) $\frac{1}{5}$

1) $\frac{1}{4}$

2) $\frac{2}{3}$ → alternativa correta

3) $\frac{9}{5}$

4) $\frac{1}{2}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 101

Fonte: banco de dados do SIENA.

Não é possível afirmar qual foi o raciocínio utilizado pelo aluno para resolver essa questão, pois não fez anotações para resolução do problema, mas talvez o aluno tenha feito uma relação entre a quantidade de meninos e de meninas desconsiderando a quantidade total de elementos.

8.2.2 Análise do desempenho do Aluno 102

O Aluno 102 concluiu a sequência didática em cinco encontros, tendo como característica uma participação positiva no sentido de questionar, solicitar ajuda quando necessitava em relação às dúvidas sobre algum conceito. Também mostrou-se muito concentrado e empenhado com as atividades. Na tabela 3, apresenta-se o desempenho desse aluno nos testes adaptativos.

Tabela 3 - desempenho do Aluno 102 nos testes adaptativos.

	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.200	0.911	0.100	0.100	0.405	0.646	0.294
2	0.686		0.813	0.368	0.630		0.385
3				0.999			0.845

Fonte: banco de dados do SIENA.

No primeiro teste adaptativo do nodo Conceito de Frações, o aluno acertou somente duas questões de nível fácil, demonstrando dificuldades com esse conceito. Depois de ler e fazer as atividades do material de estudo, realizou um segundo teste obtendo uma pontuação um pouco acima da média estipulada. Analisando o segundo teste, é possível perceber que o aluno continuou apresentando dificuldade em questões envolvendo a relação parte-todo de forma discreta, como nos exemplos mostrados da figura 77. Nos demais significados, intercalou acertos e erros.

Figura 77 - exemplos de questões que o Aluno 102 apresentou dificuldades.

Qual a fração correspondente aos serrotes neste grupo de ferramentas?



0) $\frac{5}{8}$
 1) $\frac{1}{8}$
 2) $\frac{1}{3}$
 3) $\frac{3}{5}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 102
 4) $\frac{3}{8}$ → alternativa correta

Em um grupo com 7 meninos e 3 meninas as meninas correspondem a que parte do grupo?



0) $\frac{3}{7}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 102
 1) $\frac{7}{3}$
 2) $\frac{3}{10}$ → alternativa correta
 3) $\frac{7}{10}$
 4) $\frac{1}{3}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Essas duas questões foram sorteadas nos dois testes adaptativos, e o aluno as respondeu equivocadamente. Na questão do grupo de ferramentas o aluno assinalou nos dois testes a alternativa “3” e, na questão do grupo de meninos e meninas, assinalou em ambos os testes a alternativa “0”. É possível que o aluno não tenha a compreensão do significado da relação parte-todo na forma discreta, pois nas duas situações não considerou a quantidade

total de elementos. Outra possibilidade é de ter estabelecido uma relação entre os elementos, interpretando como uma razão.

Com o conceito envolvendo tipos de Frações, não apresentou dificuldades, obtendo uma excelente pontuação. No nodo Equivalência e Simplificação de Frações, o aluno errou todas as questões no primeiro teste e necessitou de estudos de recuperação. No segundo teste, obteve uma boa pontuação, apresentando um bom desempenho tanto em equivalência como em simplificação de Frações.

O nodo Comparação de Frações foi o em que o Aluno 102 apresentou maiores dificuldades, realizando três testes até obter a aprovação. No entanto, foi neste nodo que o aluno mais melhorou o seu desempenho em comparação do primeiro com o último teste. No primeiro teste adaptativo, o aluno errou todas as questões. Fazendo uma análise do teste, é possível perceber que o aluno apresenta dificuldades na compreensão da Fração como um número. Na figura 78, são apresentados dois exemplos de questões do primeiro teste adaptativo, onde se percebe a dificuldade do aluno de compreender a Fração como um número.

Figura 78 - exemplos de questões de comparação de Frações em que o Aluno 102 apresentou dificuldades.

Assinale a alternativa CORRETA:

0) $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$ → Alternativa correta

1) $\frac{2}{3} = \frac{3}{6}$

2) $\frac{1}{3} = \frac{3}{6}$

3) $\frac{1}{5} < \frac{2}{10}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 102

4) $\frac{2}{3} < \frac{2}{6}$

Assinale a alternativa que está CORRETA:

0) $\frac{1}{3} < \frac{1}{6}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 102

1) $\frac{2}{3} = \frac{3}{6}$

2) $\frac{1}{3} > \frac{3}{6}$

3) $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ → Alternativa correta

4) $\frac{2}{3} = \frac{2}{6}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

No segundo teste deste nodo, a dificuldade foi com questões envolvendo resolução de problemas. No último teste adaptativo o aluno teve um excelente rendimento, apresentando um crescimento em todos os fundamentos desse conceito.

As dificuldades no primeiro teste adaptativo com as operações de adição e subtração foram em questões envolvendo resolução de problemas. Uma dificuldade percebida, analisando as anotações do aluno e os esclarecimentos das dúvidas. Foi quanto ao uso do MMC e das Frações equivalentes para resolver as operações. Na verdade, a técnica utilizada pelo o aluno era a do MMC, que eles utilizavam na sala de aula regular. Mas ele não dominava plenamente o conteúdo e isso o prejudicava na realização das atividades. Foi proposto que ele utilizasse também a ideia de Frações equivalentes para a resolução das operações. Na figura 79, são apresentadas anotações do aluno resolvendo uma atividade através de Frações equivalentes e, ao lado, verificando através do MMC.

Figura 79 - anotações realizadas pelo Aluno 102

Handwritten student work showing lists of multiples for numbers 2, 3, 6, and 9, and two vertical division problems. The first division shows 42 divided by 2, 3, and 6, with a remainder of 0. The second division shows 42 divided by 3, 4, and 9, with a remainder of 3.

$2 = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20, 22, 24, 26, 28, 30, 32, 34, 36, 38, 40, 42$
 $3 = 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30, 33, 36, 39, 42$
 $6 = 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42$
 $9 = 0, 9, 18, 27, 36, 45, 54, 63, 72, \dots$

$$\begin{array}{r} 42 \\ 2 \overline{) 42} \\ \underline{42} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ 3 \overline{) 42} \\ \underline{42} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ 6 \overline{) 42} \\ \underline{42} \\ 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 42 \\ 9 \overline{) 42} \\ \underline{36} \\ 6 \end{array}$$

Fonte: anotações do Aluno 102.

No segundo grupo da anotação com o conjunto $\{3, 4, 6, 9\}$, é possível verificar a dificuldade do aluno em encontrar o MMC. Ao que parece, ele fez 2×3 e 2×3 e depois somou os resultados, obtendo 12 como resposta. A proposta do uso de Frações equivalentes pode ter auxiliado o aluno no segundo teste, pois quando utiliza grupos de múltiplos, não apresenta dificuldade para achar o denominador comum.

Em Multiplicação e Divisão de Frações, o aluno foi aprovado sem ser preciso fazer estudos de recuperação, mas a sua pontuação foi praticamente a mínima para aprovação. Uma das dificuldades apresentadas pelo aluno no teste foi com a interpretação das questões envolvendo resolução de problemas, como no exemplo da figura 80, em que ele resolve sem levar em consideração o que o problema pedia.

Figura 80 - exemplo de questão do nodo Multiplicação e Divisão de Frações que o aluno 102 apresentou dificuldades.

Serginho e Paula tinham a mesma quantia. Serginho gastou $\frac{1}{5}$ e em seguida $\frac{1}{10}$ de sua quantia. Paula separou $\frac{1}{2}$ de sua quantia e gastou $\frac{1}{2}$ do que separou. Quanto cada um gastou?

0) Serginho gastou $\frac{2}{15}$ e Paula gastou $\frac{2}{4}$

1) Serginho gastou $\frac{3}{10}$ e Paula gastou $\frac{1}{4}$ → Alternativa correta

2) Serginho gastou $\frac{1}{10}$ e Paula gastou $\frac{1}{2}$

3) Serginho gastou $\frac{1}{50}$ e Paula gastou $\frac{1}{4}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 102

4) Serginho gastou $\frac{3}{10}$ e Paula gastou $\frac{1}{4}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

No nodo de Resolução de Problemas com Frações, o aluno realizou três testes adaptativos, sendo que os dois primeiros foram feitos sem entrar no material de estudo, e obteve pontuações baixas. O que se verifica analisando os testes é que as dificuldades foram com a interpretação dos problemas. O aluno foi orientado a acessar no material de estudo, ler atentamente e realizar as atividades. O uso de estratégias para resolução de problemas pode ter sido um auxílio ao aluno no terceiro teste, pois a pontuação alcançada foi bem maior que as anteriores.

Como relatado anteriormente, o Aluno 102 se mostrou um dos mais empolgados com as aulas. A sua opinião de avaliação sobre o trabalho desenvolvido foi “muito legal bem divertido foi feito vários exercícios, mas consegui me desenvolver ganhei mais notas muito legal”. A referência ao “ganhei mais notas” foi em relação à disciplina de Matemática na aula regular.

8.2.3 Análise do desempenho do Aluno 103

O desempenho do Aluno 103 foi satisfatório durante toda a sequência didática, como se pode ver na tabela 4, apresentando dificuldades nos conceitos, equivalência e simplificação de Frações. Necessitou de estudos de recuperação também nas operações de adição, subtração e em resolução de problemas.

Tabela 4 - desempenho do Aluno 103 nos testes adaptativos

	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.143	0.879	0.510	0.754	0.100	1.000	0.294
2	0.142		0.294		0.992		0.999
3	0.997		0.610				

Fonte: banco de dados SIENA.

Nos trabalhos com os Conceitos de Frações foi necessário uma atenção especial ao aluno por parte do pesquisador, pelo baixo rendimento apresentado nos primeiros testes. Nos dois primeiros testes, o aluno acertou somente uma questão em cada, necessitando entrar duas vezes no material de estudo. Na segunda vez que ingressou nos estudos de recuperação, foi feito um acompanhamento para auxiliá-lo a superar as suas dificuldades, diante das ideias apresentadas sobre conceito de Frações. Esse acompanhamento, na leitura e realização das atividades de estudos, pode ter ajudado o aluno no seu desempenho no terceiro teste, no qual teve um ótimo rendimento, errando somente uma questão.

O crescimento que o aluno mostrou quanto ao conceito de Frações, analisando os seus testes, pode ter influenciado positivamente no restante da sequência didática. Nos dois primeiros testes, o aluno demonstrou grandes dificuldades de conhecimento em relação às Frações, o que não se verificou nos outros nodos, onde apresentou um desempenho muito satisfatório. Analisando o teste adaptativo do nodo Tipos de Frações, é possível ver que o aluno não apresentou dificuldade, atingindo uma pontuação acima da média não necessitando de estudos de recuperação.

Outro nodo em que o Aluno 103 demonstrou um pouco mais de dificuldade de aprovação foi em Equivalência e Simplificação de Frações, necessitando realizar três testes, com uma peculiaridade: a pontuação do segundo teste adaptativo foi bem menor que a primeiro, em que quase atingiu a média (0.510). Normalmente os alunos demonstravam um

crescimento de um teste para o outro, neste caso houve um decréscimo. Como o sistema sorteia perguntas aleatoriamente de níveis de dificuldade e do tipo de conceito, isso pode ter influenciado o desempenho do aluno. O trabalho com os conceitos de equivalência e simplificação de Frações foi um conteúdo em que os alunos em geral apresentaram mais dificuldade. O aluno precisou de duas aulas de estudos neste nodo. No terceiro teste alcançou praticamente a média mínima para aprovação. Analisando este teste, oscilou entre acertos e erros em questões dos três graus de dificuldades, de ambos os conceitos de equivalência e simplificação.

Em Comparação de Frações não precisou de estudos de recuperação, sendo aprovado no primeiro teste. Uma dificuldade verificada na análise do teste do aluno foi em questões envolvendo resolução de problemas, como no exemplo da figura 81. Neste exemplo, talvez a dificuldade não tenha sido a interpretação da questão, mas o fato de, na comparação, ter considerado somente os denominadores, não compreendendo a Fração como número.

Figura 81 - exemplo de questão de nível médio em que o Aluno 103 apresentou dificuldades.



Foi promovida uma disputa entre duas lanchonetes. Em uma hora e com 5 funcionários, cada lanchonete fez o maior número possível de lanches. Ganhou à disputa a lanchonete que fez mais lanches. A lanchonete A fez $\frac{2}{3}$ do total de lanches e a lanchonete B fez $\frac{2}{6}$ do total de lanches. Qual lanchonete GANHOU a disputa?

0) Lanchonete A → Alternativa correta
 1) Lanchonete B → Alternativa assinalada pelo Aluno 103
 2) Os dois produziram a mesma quantidade
 3) Não é possível comparar as quantidades
 4) Nenhum

Fonte: banco de dados do SIENA.

Nas operações de adição e subtração de Frações, como já havia ocorrido no primeiro nodo, o aluno apresentou uma grande deficiência nos conhecimentos prévios. Não é possível fazer uma análise mais detalhada das dificuldades iniciais do aluno, mas talvez seja possível supor que como foi verificada com outros alunos, a dificuldade esteja na interpretação de problemas e nas técnicas de resolução das operações, onde a ênfase está no uso do MMC, mas

sem dominar totalmente seu entendimento. Após os estudos de recuperação, o desempenho no segundo teste adaptativo foi excelente.

O desempenho do Aluno 103 no teste adaptativo com as operações de multiplicação e divisão foi excelente, atingindo a pontuação máxima. Uma curiosidade que chama atenção ao analisar as anotações do aluno, é o fato de ele realizar todas as operações no papel, por mais simples que fossem. Na figura 82, temos um exemplo dessa situação, em que, para resolver uma das questões do teste, efetuou no papel operações simples como multiplicar 240 por 1, e subtrair 6 de 240.

Figura 82 - exemplo de anotações feitas pelo Aluno 103.

The image shows two handwritten mathematical operations. On the left, a subtraction is performed: 240 minus 6. The result, 234, is written below a horizontal line. On the right, a multiplication is performed: 240 multiplied by 1. The result, 240, is written below a horizontal line.

$$\begin{array}{r} 240 \\ - 6 \\ \hline 234 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 240 \\ \times 1 \\ \hline 240 \end{array}$$

Fonte: anotações do Aluno 103.

No nodo Resolução de Problemas, o aluno apresentou dificuldades no primeiro teste, talvez na interpretação das questões, mas, analisando os instrumentos de coleta de dados, não é possível confirmar isso. Essa suposição é baseada no desempenho posterior do aluno aos estudos de recuperação no segundo teste adaptativo, onde atingiu uma excelente pontuação. O material de estudo que trabalha as estratégias de resolução de problemas pode ter influenciado o rendimento do aluno no último teste.

A avaliação do aluno a respeito do trabalho desenvolvido foi positiva. Ele escreveu: “Adorei porque o professor é muito atencioso”. A respeito de quais dificuldades encontrou no trabalho desenvolvido, disse: “Nenhuma porque o professor me ajudou”. Essas duas falas ilustram um aspecto importante do experimento, que era a proposta de um acompanhamento

participativo e individual aos alunos por parte do pesquisador para dar apoio as eventuais dúvidas e dificuldades dos alunos.

8.2.4 Análise do desempenho do Aluno 104

O Aluno 104 participou do segundo, terceiro e quarto encontro, sendo que, neste último como já mencionado anteriormente, não houve atividades no computador. O aluno apresentou dificuldades no primeiro nodo da sequência didática, necessitando realizar quatro testes adaptativos; precisou ingressar duas vezes no material de estudo (tabela 5).

Tabela 5 - desempenho do Aluno 104 nos testes adaptativos.

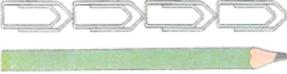
	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.200	0.758	0.280	0.576			
2	0.143		0.217				
3	0.143						
4	0.210						
5	0.796						

Fonte: banco de dados SIENA.

Na primeira aula, o aluno realizou o teste de conhecimentos prévios do nodo Conceito de Frações e apresentou um baixo rendimento, necessitando ingressar nos estudos de recuperação. Após ler e fazer as atividades propostas, realizou mais três testes adaptativos em sequência e novamente apresentou um baixo rendimento. Esse aluno tinha como característica ser disperso e conversar demasiadamente com os colegas. Foi necessária uma atenção especial do professor pesquisador para com ele. Esse comportamento pode ter influenciado no seu desempenho, mas é uma suposição, pois desistiu de participar.

Na segunda aula, o aluno foi orientado a primeiramente ingressar no material de estudos, estudar atentamente e depois realizar o teste. Desta vez, o Aluno 104 alcançou uma pontuação acima da média, ficando habilitado ao próximo nodo. Continuou apresentando dificuldades em questões como a da figura 83.

Figura 83 - questão em que o Aluno 104 apresentou dificuldade.



Élton está fazendo medições. Ele usou o clipe como unidade para medir o comprimento do lápis, como na imagem acima. Agora responda qual o comprimento do clipe em relação ao lápis?

0) $\frac{4}{4}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 104

1) $\frac{4}{1}$

2) $\frac{3}{7}$

3) $\frac{1}{4}$ → alternativa correta

4) $\frac{7}{3}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

No nodo Tipo de Frações, não necessitou de estudos de recuperação, atingindo no teste adaptativo uma pontuação acima da média, mas uma das dificuldades apresentadas pelo aluno foram questões envolvendo segmentos de reta. O grafo da sequência didática habilita simultaneamente após Tipos de Frações os nodos Equivalência e Simplificação de Frações, e Comparação de Frações, o aluno pode ingressar em qualquer um dos dois nodos. O Aluno 104 realizou dois testes e os estudos de recuperação com o conceito de Equivalência e Simplificação de Frações, onde apresentou dificuldades, principalmente com as ideias de simplificação de Frações, e mesmo não aprovado desistiu deste nodo e ingressou no nodo de Comparação de Frações onde fez um teste adaptativo, e quase alcançou a média. O aluno desistiu das aulas não sendo aprovado em nenhum dos dois últimos nodos mencionados.

8.2.5 Análise do desempenho do Aluno 105

Analisando o desempenho do Aluno 105, notou-se que os resultados finais em todos os nodos foram excelentes (tabela 6), mesmo naqueles conceitos que apresentou dificuldades iniciais, mostrou um crescimento final. Em quatro nodos o aluno não precisou de estudos de recuperação, e em três nodos teve um péssimo rendimento nos primeiros testes, mas uma ótima pontuação final.

Tabela 6 - desempenho do Aluno 105 nos testes adaptativos.

	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.143	0.887	0.143	0.200	0.998	0.999	0.927
2	0.970		0.217	0.385			
3			1.000	0.927			

Fonte: banco de dados SIENA.

Na análise do primeiro teste adaptativo sobre Conceito de Frações, foi possível verificar a dificuldade do aluno em questões envolvendo a relação parte-todo de forma discreta. Essa é uma dificuldade por parte dos alunos, por isso, a importância de se apresentar a eles situações envolvendo as Frações em representação discreta (CAMPOS; SILVA; PIETROPAOLO, 2009). Na figura 84, são mostrados dois exemplos de questões em que o Aluno 105 errou, possivelmente por não considerar o total de elementos, relacionando somente as partes, ou ainda por ter feito uma relação de razão dos elementos.

Figura 84 - exemplos de questões em que o Aluno 105 apresentou dificuldades.

Em um grupo com 7 meninos e 3 meninas as meninas correspondem a que parte do grupo?



0) $\frac{3}{7}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 105

1) $\frac{7}{3}$

2) $\frac{3}{10}$ → alternativa correta

3) $\frac{7}{10}$

4) $\frac{1}{3}$

Qual a fração correspondente aos serrotes neste grupo de ferramentas?



0) $\frac{5}{8}$

1) $\frac{1}{8}$

2) $\frac{1}{3}$

3) $\frac{3}{5}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 105

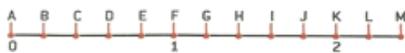
4) $\frac{3}{8}$ → alternativa correta

Fonte: banco de dados do SIENA.

No segundo teste, o aluno demonstrou um crescimento em todos os fundamentos, errando três questões, duas de nível difícil e uma de nível médio de dificuldade. No nodo Tipos de Frações, a única dificuldade percebida no teste adaptativo foi em questões com representação de segmentos de reta, como na figura 85, mas não precisou de estudos de recuperação.

Figura 85 - exemplo de questão com o uso de segmentos de reta que o Aluno 105 apresentou dificuldades.

O segmento **AM** está dividido em partes iguais.



Qual a distância entre o ponto A e o ponto G escrito na forma fracionária e na forma mista?

0) $\frac{1}{5}$ e $1\frac{1}{5}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 105

1) $\frac{1}{6}$ e $1\frac{1}{2}$

2) $\frac{1}{5}$ e $1\frac{1}{6}$

3) $\frac{6}{5}$ e $1\frac{1}{5}$ → Alternativa correta

4) $\frac{5}{6}$ e $1\frac{1}{5}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Pelas dificuldades apresentadas pelo aluno em relação aos conceitos de equivalência e simplificação de Frações, foi preciso um acompanhamento mais próximo por parte do pesquisador no auxílio em suas dificuldades. O desempenho nos dois primeiros testes foi muito baixo, e, mesmo entrando no material de estudo, o aluno continuou tendo dificuldades em ambos os conceitos. Esse acompanhamento da leitura das atividades do material de estudo e com o esclarecimento de dúvidas, pode ter auxiliado o excepcional desempenho do aluno no terceiro teste adaptativo, saindo de uma pontuação quase mínima nos primeiros testes para a pontuação máxima do sistema de 1.000.

A situação com o conceito comparação de Frações foi muito semelhante ao que aconteceu no nodo anterior, pelas dificuldades nos primeiros testes adaptativos, pelo acompanhamento ao estudo e pelo ótimo desempenho no último teste adaptativo. Nos dois

primeiros testes, as únicas questões que o aluno acertou foram de nível fácil, como o exemplo da figura 86.

Figura 86 - exemplo de questão de nível fácil do nodo Comparação de Frações.

Assinale a alternativa INCORRETA:

0) $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$

1) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

2) $\frac{1}{3} < \frac{3}{6}$

3) $\frac{2}{3} < \frac{1}{3} \rightarrow$ Alternativa correta

4) $\frac{2}{3} > \frac{2}{6}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Depois de desenvolver um trabalho semelhante do nodo anterior de acompanhamento do aluno, no terceiro teste, o aluno apresentou uma melhora considerável alcançando uma ótima pontuação e estando habilitado ao próximo nodo.

Nos três últimos nodos, envolvendo as operações com Frações e a resolução de problemas, o aluno foi aprovado em todos, no primeiro teste, não necessitando de estudos de recuperação. As pontuações alcançadas pelo aluno nos três nodos foram altas, não apresentando dificuldades com esses conteúdos.

Vale destacar a peculiaridade do baixo desempenho inicial do aluno nos primeiros nodos, contrastando com o excelente desempenho nos últimos nodos. Pode ser feita uma conjectura no sentido de que, ao longo das atividades, houve uma compreensão por parte do aluno a respeito das ideias de Fração e isso refletiu nos últimos nodos da sequência didática. Inclusive a resposta do aluno com a sua opinião a respeito do trabalho era que tinha gostado muito, porque melhorou bastante na disciplina de Matemática.

8.2.6 Análise do desempenho do Aluno 106

A dificuldade inicial do Aluno 106, no nodo Conceito de Frações, não se refletiu nos nodos posteriores, com exceção do conceito de comparação e nas operações de multiplicação e divisão de Frações. A tabela 7 apresenta o desempenho do Aluno 106 nos testes adaptativos.

Tabela 7 - desempenho do Aluno 106 nos testes adaptativos.

	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.200	0.935	0.999	0.217	0.939	0.238	
2	0.385			0.385		0.385	
3	0.947			0.950		0.998	

Fonte: banco de dados SIENA.

Nos dois primeiros testes, foram grandes as dificuldades do aluno. A sua pontuação foi bem abaixo da média estipulada. O aluno acertou duas e três questões respectivamente nos dois primeiros testes adaptativos, mostrando falta de compreensão em todo o conceito. No terceiro teste, depois de ter feito estudos de recuperação por duas vezes, mostrou uma melhora significativa neste conceito, porém continuou com dificuldades em questões envolvendo Frações como quociente (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988), como no exemplo da figura 87.

Figura 87 - exemplo de questão em que o Aluno 106 apresentou dificuldades, envolvendo o significado de Frações como quociente.

Sabe-se que 6 terrenos de mesmo tamanho serão divididos igualmente entre 5 herdeiros. Como você faria essa divisão? Cada herdeiro ficaria com que parte do terreno?

0) $\frac{5}{6}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 106 no primeiro teste

1) $\frac{1}{6}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 106 no terceiro teste

2) $\frac{6}{5}$ → alternativa correta

3) $\frac{1}{5}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 106 no segundo teste

4) $\frac{5}{2}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Uma característica em comum das respostas assinaladas pelo aluno, nos três testes adaptativos, é que em todas elas o numerador é menor que o denominador, o que parece estar ligado à ideia de Giménez e Bairral (2005) de que, para os alunos, a Fração tem que ser uma

representação menor que a unidade. Em nenhum dos testes adaptativos o aluno assinalou as alternativas 2 e 4, que eram Frações impróprias.

A análise dos erros do aluno no conceito de Frações é apenas uma suposição sobre a dificuldade com o significado das Frações como divisão, pois, no segundo nodo, sobre tipos de Frações, o aluno não apresentou dificuldades aparentes, sendo aprovado no primeiro teste adaptativo. Neste teste, o aluno errou três questões, uma das questões errada envolvia a ideia de divisão, o que pode ainda ter representado uma dificuldade para o aluno. Na figura 88, está apresentada esta questão, onde é possível perceber que o raciocínio do aluno está correto, porém, na hora de representar a Fração novamente, coloca o numerador como menor que o denominador.

Figura 88 - exemplo de questão sobre Tipos de Frações em que o Aluno 106 apresentou dificuldades envolvendo o significado de Frações como quociente.

A professora de Cássia propôs à classe o seguinte problema:
 - Como repartir igualmente 4 folhas de papel colorido para 3 alunos?

Um grupo fez assim:

A	A	B	C
A	B	B	C
A	B	C	C

Outro grupo fez assim:

A	B	C	A
			B
			C

Indique o resultado nas formas fracionária e mista:

0) $\frac{3}{4}$ e $1\frac{1}{3}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 106

1) $\frac{4}{3}$ e $1\frac{1}{3}$ → Alternativa correta

2) $\frac{4}{3}$ e $1\frac{1}{4}$

3) $\frac{4}{3}$ e $1\frac{4}{3}$

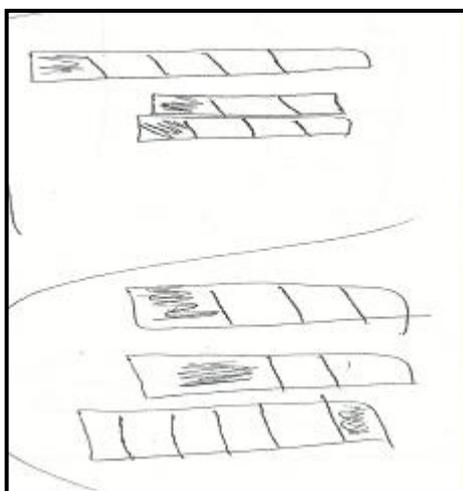
4) $\frac{1}{3}$ e $1\frac{4}{3}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Em Equivalência e Simplificação de Frações o desempenho do aluno foi muito bom, o que não se repetiu com o conteúdo de comparação de Frações. No nodo Comparação de Frações, o aluno teve dificuldades em todos os fundamentos, com um rendimento baixo nos primeiros testes. Analisando as anotações do aluno, percebe-se um fato recorrente a muitos

alunos, quando se representam Frações de forma contínua, a dificuldade de se desenhar a figura com partes congruentes, como na figura 89. Isso talvez seja um obstáculo aos alunos que utilizam esse tipo de recurso de representação para fazer comparações de Frações, sendo possível ser a causa de boa parte dos erros envolvendo esse conceito.

Figura 89 - representação de Frações na forma contínua feitas pelo Aluno 106.



Fonte: registros do Aluno 106.

Com as operações envolvendo Frações, o Aluno 106 apresentou dificuldades no Nodo Multiplicação e Divisão de Frações em questões envolvendo principalmente resolução de problemas, como no exemplo da figura 90. Essa dificuldade aparentemente foi superada no terceiro teste adaptativo neste nodo.

Figura 90 - exemplo de questão do Nodo Multiplicação e Divisão de Frações em que o Aluno 106 apresentou dificuldades.

Fabiana preparou 3 litros de refresco. Quantas canecas de $\frac{1}{3}$ de litros ela pode encher com esse refresco?

0) 9 → Alternativa correta

1) 7

2) 5

3) 4 → Alternativa assinalada pelo Aluno 106 nos dois primeiros testes adaptativos.

4) 3

Fonte: banco de dados do SIENA.

O Aluno 106 completou os seis nodos e não compareceu ao último encontro para completar a sequência didática eletrônica, mas, avaliando como um todo, o desempenho do aluno foi muito bom, pois realizou esses seis nodos em apenas três encontros.

8.2.7 Análise do desempenho do Aluno 107

O Aluno 107 participou de cinco encontros e não completou toda a sequência didática, faltando os nodos com as operações de multiplicação e divisão, e resolução de problemas envolvendo as Frações. Dos nodos realizados, o aluno demonstrou dificuldade no conceito de Frações, precisando entrar duas vezes nos estudos de recuperação, conforme se pode ver na tabela 8.

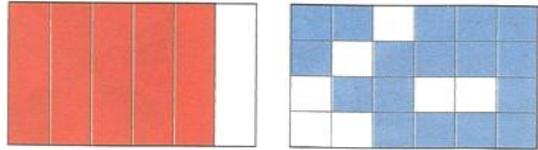
Tabela 8 - desempenho do Aluno 107 nos testes adaptativos

	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.368	0.385	0.385	0.280	0.621	0.342	
2	0.385	0.907	0.999	0.994			
3	0.845						

Fonte: banco de dados SIENA.

Além das dificuldades com o conceito de Frações, é possível que a falta de atenção possa ter atrapalhado o aluno, que tinha como característica por vezes ser um pouco disperso. A figura 91 é um exemplo de questão, entre outras verificadas, em que o aluno inverte os dados da pergunta e assinala a alternativa errada. Essa questão foi sorteada nos três testes, e em todos o aluno assinalou a mesma alternativa. É importante ressaltar que há outros casos de questões em que ocorreu o mesmo.

Figura 91 - exemplo de uma questão que o Aluno 107 inverte a resposta.



Rita e Bernardo desenharam dois retângulos com as mesmas medidas. Depois dividiram em partes iguais, a região interna de cada retângulo e começaram a pintá-las, Rita pintou de vermelho e Bernardo de azul. Responda corretamente, que fração do retângulo representa a parte pintada por Rita? E a parte pintada por Bernardo, que fração do retângulo representa?

0) Rita $\frac{17}{24}$ e Bernardo $\frac{5}{6}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 107.

1) Rita $\frac{5}{6}$ e Bernardo $\frac{17}{24}$ → alternativa correta

2) Rita $\frac{6}{5}$ e Bernardo $\frac{24}{17}$

3) Rita $\frac{24}{17}$ e Bernardo $\frac{6}{5}$

4) Rita $\frac{5}{6}$ e Bernardo $\frac{7}{24}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Analisando o desempenho do Aluno 107 nos três nodos seguintes da sequência didática eletrônica, é possível inferir que o material de estudo o tenha auxiliado para superar as suas dificuldades nestes conceitos. Esses três nodos têm como semelhança a dificuldade inicial do aluno nesses conceitos (tipos, equivalência, simplificação e comparação de Frações) e, depois dos estudos de recuperação, um ótimo desempenho final. Outra similaridade entre esses nodos é que as dificuldades iniciais do aluno não são específicas em um conteúdo, mas em todos os fundamentos e também variando em todos os graus de dificuldades das questões, não sendo possível verificar uma dificuldade específica inicial, ou que tenha permanecido ao final de cada nodo.

No nodo de Adição e Subtração de Frações, o aluno não precisou realizar estudos de recuperação, pois no primeiro teste obteve uma pontuação um pouco acima da média. Foi verificado que a dificuldade do aluno no teste adaptativo neste nodo foi em relação às questões de grau de dificuldade difícil, envolvendo resolução de problemas, como exemplificado na figura 92. Quase todas as questões que o aluno errou no teste eram desse tipo.

Figura 92 - exemplo de uma questão que o Aluno 107 inverte a resposta.

Helena recebeu uma encomenda de 60 toalhas. Ela fez $\frac{1}{3}$ do total das toalhas na primeira semana, $\frac{1}{4}$ na segunda semana e na terceira semana completou a encomenda. Quantas toalhas Helena fez na terceira semana?

0) 10
 1) 20 → Alternativa assinalada pelo Aluno 107
 2) 25 → Alternativa correta
 3) 30
 4) 35

Fonte: banco de dados do SIENA.

Essa dificuldade que muitos alunos apresentam em questões envolvendo a resolução de problemas, segundo Dante (2010), é porque a resolução tem sido, ao longo dos anos, um dos tópicos mais difíceis de trabalhar em sala de aula. É muito comum que os alunos saibam efetuar todos os algoritmos (adição, subtração, multiplicação e divisão), conheçam muitas fórmulas, mas não consigam resolver um problema que envolva um ou mais desses algoritmos ou fórmulas. Essa dificuldade vista com a resolução de problemas nas operações de adição e subtração se repetiu também nas operações de multiplicação e divisão, mas infelizmente o aluno não concluiu a sequência didática, onde poderia ser feita uma melhor análise do seu desempenho no último nodo de Resolução de Problemas com Frações.

8.2.8 Análise do desempenho do Aluno 108

O Aluno 108 participou somente do segundo encontro realizado, não comparecendo nas demais aulas do experimento. Apresenta-se, na tabela 9, o desempenho do Aluno 108.

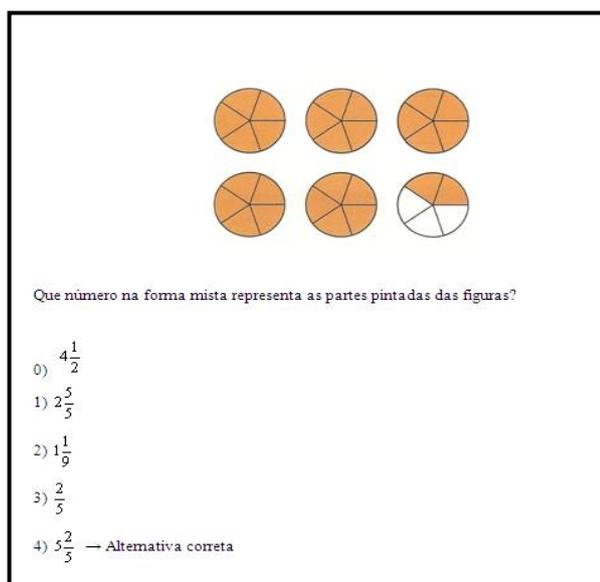
Tabela 9 - desempenho do Aluno 108 nos testes adaptativos

	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.671	0.357					
2		0.929					

Fonte: banco de dados SIENA.

No teste adaptativo do Nodo Conceito de Frações, alcançou uma pontuação um pouco maior que a média estipulada, não necessitando entrar no material de estudo. No nodo Tipos de Frações, no primeiro teste adaptativo, não obteve uma pontuação satisfatória necessitando realizar estudos de recuperação. O aluno apresentou uma significativa melhora no segundo teste adaptativo em questões como as da figura 93, já que não havia acertado nenhuma deste tipo no primeiro teste deste nodo.

Figura 93 - questão sobre tipo de Frações respondido pelo Aluno 108.



Fonte: banco de dados do SIENA

8.2.9 Análise do desempenho do Aluno 109

O Aluno 109 não concluiu o trabalho porque foi afastado das aulas de recuperação pela professora titular por problemas disciplinares. Ele concluiu quatro nodos e iniciou o quinto, realizando o primeiro teste adaptativo, mas não conseguindo aprovação (tabela 10).

Tabela 10 - desempenho do Aluno 109 nos testes adaptativos.

	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.200	0.143	0.100	0.493	0.226		
2	0.385	0.200	1.000	0.785			
3	0.671	0.803					

Fonte: banco de dados SIENA.

O aluno apresentou muitas dificuldades no primeiro nodo sobre conceitos básicos de Frações, precisando de um acompanhamento em seus estudos de recuperação. As maiores dificuldades do aluno foram com os problemas, principalmente aqueles que envolviam interpretação de representação discreta, como a questão exemplificada na figura 94.

Figura 94 - exemplo de problema em que o Aluno 109 apresentou dificuldade.



Élton está fazendo medições. Ele usou o clipe como unidade para medir o comprimento do lápis, como na imagem acima. Agora responda qual o comprimento do clipe em relação ao lápis?

0) $\frac{4}{4}$

1) $\frac{4}{1}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 104 no primeiro e segundo teste adaptativo.

2) $\frac{3}{7}$

3) $\frac{1}{4}$ → alternativa correta

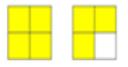
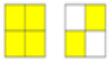
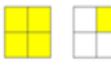
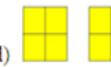
4) $\frac{7}{3}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

O exemplo anterior foi um tipo de questão em que o aluno apresentou dificuldade em todos os testes adaptativos do nodo Conceito de Frações. As dificuldades do aluno na compreensão dos conceitos iniciais sobre Frações podem ter refletido, também, no nodo seguinte onde foram trabalhados os tipos de Frações. Na figura 95, uma questão de nível fácil, em que o aluno apresenta dificuldade de relacionar a escrita e a sua representação em forma de desenho. Na sua resposta, o aluno não considerou a parte inteira ($1\frac{3}{4}$), assinalando a resposta “e” que representava a fração $\frac{3}{4}$.

Figura 95 - questão do nodo Tipos de Frações que o Aluno 109 apresentou dificuldades.

Qual dos desenhos representa a fração $1\frac{3}{4}$?

a)  b)  c)  d)  e) 

0) a → Alternativa correta

1) b

2) c

3) d

4) e → Alternativa assinalada pelo Aluno 109.

Fonte: banco de dados do SIENA.

No nodo Equivalência e Simplificação de Frações, o aluno errou todas as questões no primeiro teste. No segundo teste, realizado após os estudos de recuperação, acertou todas as questões do teste adaptativo, o que leva a crer que a leitura e as atividades do material de estudo auxiliaram o aluno a superar as suas dificuldades.

No conteúdo de comparação de Frações, é possível perceber apesar das dificuldades um razoável desempenho do aluno no primeiro teste adaptativo, o que significa um avanço em relação aos outros nodos onde os rendimentos iniciais do aluno foram muito baixos. A figura 96 mostra duas questões semelhantes em que o aluno apresentou dificuldades de interpretação neste nodo. É possível, pelas respostas assinaladas pelo aluno, que só tenha levado em conta a quantidade de tacadas dadas para fazer a comparação, desconsiderando o aproveitamento dos jogadores na relação de tacadas e bolas encaçapadas. Isso demonstra uma dificuldade do aluno na compreensão de Fração como razão.

Figura 96 - questões sobre comparação de Frações em que o Aluno 109 apresentou dificuldades.

Quatro amigos estavam jogando bilhar: Zé, Toninho, Fábio e Manoel. Zé deu $\frac{3}{4}$ tacadas e demubou 2 bolas na caçapa, Toninho deu 5 tacadas e demubou 3 bolas, Fábio deu 6 tacadas e demubou 5 bolas, e Manoel deu 3 tacadas e demubou 1 bola. Quem teve o MELHOR desempenho em relação às tacadas feitas?

0) Fábio → Alternativa correta
 1) Zé → Alternativa assinalada pelo Aluno 109.
 2) Toninho
 3) Manoel
 4) João

Quatro amigos estavam jogando bilhar: Zé, Toninho, Fábio e Manoel. Zé deu $\frac{3}{4}$ tacadas e demubou 2 bolas na caçapa, Toninho deu 5 tacadas e demubou 3 bolas, Fábio deu 6 tacadas e demubou 5 bolas, e Manoel deu 3 tacadas e demubou 1 bola. Quem teve o PIOR desempenho em relação às tacadas feitas?

0) Fábio → Alternativa assinalada pelo Aluno 109
 1) Zé
 2) Toninho
 3) Manoel → Alternativa correta
 4) João

Fonte: banco de dados do SIENA.

Os nodos com as operações e resolução de problemas com as Frações não foram feitos pelo aluno, o que impossibilitou a sua análise.

8.2.10 Análise do desempenho do Aluno 110

Este aluno completou a sequência didática de Frações em quatro encontros de duas horas-aula, sendo que a tabela 11 mostra o seu desempenho nos testes adaptativos realizados nodo a nodo. Percebe-se que, nos nodos Conceito de Frações e Equivalência e Simplificação de Frações, o Aluno 110 teve a necessidade de realizar mais testes até alcançar a média estipulada, o que nos leva a supor que estes apresentaram maiores dificuldades ao aluno. Analisando o desempenho deste aluno nos primeiros testes de cada nodo, as menores pontuações foram nos Nodos de Equivalência e Simplificação de Frações e Comparação de Frações, com uma pontuação de 0.100.

Tabela 11 - desempenho do Aluno 110 nos testes adaptativos.

	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.294	0.143	0.100	0.100	0.621	0.172	0.410
2	0.200	0.686	0.593	0.927		0.966	0.709
3	0.200		0.593				
4	0.996		0.686				

Fonte: banco de dados SIENA.

No nodo Conceito de Frações, a pontuação dos primeiros três testes adaptativos realizados foi abaixo da média. Verificando as questões destes testes, é possível perceber uma dificuldade do aluno quanto à compreensão do significado das Frações como divisão, como em questões envolvendo resolução de problemas. Do significado de Fração como parte-todo de forma discreta, a questão ilustrada na Figura 97 foi sorteada em três testes e o Aluno 110 acertou em todos.

Figura 97 - questão significado de Fração como divisão.

Qual a fração correspondente aos serrotes neste grupo de ferramentas?



0) $\frac{5}{8}$
 1) $\frac{1}{8}$
 2) $\frac{1}{3}$
 3) $\frac{3}{5}$
 4) $\frac{3}{8}$ → alternativa correta

Fonte: banco de dados SIENA.

Em compensação a questão ilustrada na figura 98, também envolvendo a ideia de Fração como parte-todo de forma discreta, nos três testes adaptativos, o aluno errou essa questão.

Figura 98 - questão significado de Fração como divisão.

Em um grupo com 7 meninos e 3 meninas as meninas correspondem a que parte do grupo?



0) $\frac{3}{7}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 110

1) $\frac{7}{3}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 110

2) $\frac{3}{10}$ → alternativa correta

3) $\frac{7}{10}$

4) $\frac{1}{3}$

Fonte: banco de dados SIENA.

As alternativas assinaladas pelo aluno relacionam a quantidade de meninos com a quantidade de meninas, não considerando a quantidade total de elementos. Comparando as duas questões, é possível que o aluno compreenda o conceito de parte-todo, envolvendo elementos de forma discreta, pois no primeiro exemplo de questão o enunciado está explícito à ideia de “Fração do grupo de ferramentas”. Já no segundo a ideia está implícita, falando de “um grupo com 7 meninos e 3 meninas”. Apesar de também ter uma imagem na questão para ilustrar a situação, o aluno pode ter confundido o que pedia a questão, interpretando como uma relação de razão entre os elementos.

No quarto teste adaptativo do nodo de Conceito de Frações, o aluno alcançou a pontuação de 0.996, bem acima da nota estipulada como mínima. Nesse teste, foi possível verificar que as questões envolvendo o significado parte-todo de forma contínua, como usualmente são trabalhadas nos livros didáticos, e que, segundo Nunes e Bryant (1997), é também normalmente como o professor dá ênfase em sala de aula, o Aluno 110 não apresentou dificuldades. Na figura 99, um exemplo deste tipo de questão.

Figura 99 - exemplo de questão de Fração significado parte-todo de forma contínua que o Aluno 110 não apresentou dificuldades.

A figura representa um segmento de reta. Assinale a fração que corresponde ao trecho pintado em vermelho:



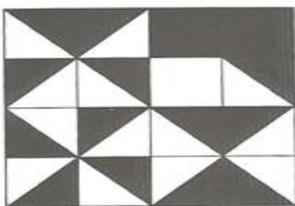
0) $\frac{1}{7}$
 1) $\frac{7}{1}$
 2) $\frac{1}{8}$ → alternativa correta
 3) $\frac{7}{8}$
 4) $\frac{8}{7}$

Fonte: banco de dados SIENA.

Mas quando esse tipo de questão é apresentado de forma diferente da usual, o aluno apresenta dificuldades de entendimento, como no exemplo da figura 100. Neste exemplo, a resposta do aluno foi $\frac{14}{10}$, o que se pode interpretar que foi feita uma dupla contagem dos elementos, ou seja, utilizou a ideia de razão, contando a quantidade de partes brancas e relacionou com a quantidade de partes pretas da figura, e ainda desconsiderou o fato de a figura estar dividida em triângulos, fazendo a contagem das partes pintadas.

Figura 100 - exemplo de questão de nível difícil de parte-todo de forma contínua em que o Aluno 110 apresentou dificuldades.

Que fração representa as partes brancas da figura acima?



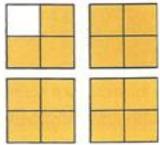
0) $\frac{14}{10}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 110
 1) $\frac{14}{32}$
 2) $\frac{15}{17}$
 3) $\frac{15}{32}$ → alternativa correta
 4) $\frac{32}{15}$

Fonte: banco de dados SIENA

No nodo Tipo de Frações, o Aluno 110 realizou dois testes adaptativos. No primeiro, a pontuação foi de 0.143; já no segundo, o desempenho foi satisfatório alcançando a pontuação de 0.686. É possível que o material de estudo disponibilizado nesse nodo tenha auxiliado o aluno em suas dificuldades em relação a esse conceito, já que algumas questões foram respondidas erradas no primeiro teste. O aluno acertou no segundo, como no exemplo apresentado na figura 101.

Figura 101 - exemplo de questão do nodo Tipos de Frações.

Observe a figura e indique o número misto que representa a parte pintada:



0) $3\frac{3}{4}$ → Alternativa correta assinalada pelo Aluno 110 no segundo teste.

1) $3\frac{1}{4}$

2) $3\frac{1}{2}$

3) $4\frac{3}{4}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 110 no primeiro teste.

4) $4\frac{1}{4}$

Fonte: banco de dados SIENA

Nas questões como a do exemplo anterior, o aluno mostrou uma melhora significativa do primeiro para o segundo teste. Porém, em questões envolvendo a nomenclatura dos tipos de Frações, como no exemplo da figura 102, o aluno não apresentou melhora de um teste para o outro.

Figura 102 - exemplo de questão com nomenclatura de tipos de Frações que o Aluno 110 apresentou dificuldades.

Como se chama a fração que o numerador é maior que o denominador?

0) Fração aparente

1) Fração própria → Alternativa assinalada pelo Aluno 110 no segundo teste adaptativo.

2) Fração imprópria → Alternativa correta

3) Fração numeradora → Alternativa assinalada pelo Aluno 110 no primeiro teste adaptativo.

4) Fração denominadora

Fonte: banco de dados SIENA.

O nodo Equivalência e Simplificação de Frações juntamente com o nodo Conceito de Frações, foram os nodos em que o Aluno 110 mais realizou testes adaptativos até alcançar a pontuação mínima para aprovação. Também nesse nodo e no nodo Comparação de Frações onde este aluno obteve o menor desempenho no primeiro teste adaptativo, mostrando a sua dificuldade diante destes conceitos. Porém, a percepção nesse nodo também é que o material de estudo disponibilizado auxiliou o aluno nas suas dificuldades em algumas das ideias sobre equivalência e simplificação de Frações. Analisando o primeiro teste, percebe-se que o aluno errou todas as questões, ficando com uma pontuação de 0.100. Essa pontuação é estipulada pelo sistema como de conhecimentos prévios do aluno, ou seja, o aluno inicia o teste com essa pontuação.

Apesar de o Aluno 110 realizar quatro testes adaptativos, foi nítida a evolução posterior aos estudos de recuperação. No segundo e no terceiro teste, a pontuação do aluno foi de 0.593, bem próxima à pontuação de aprovação. No quarto teste, obteve uma pontuação satisfatória, atingindo 0.686, sendo aprovado. Mesmo após os estudos de recuperação, o aluno continuou apresentando dificuldades em questões como na figura 103, envolvendo o conceito de simplificação de Frações.

Figura 103 - exemplo de questão de simplificação de Frações em que o aluno apresentou dificuldades.

Assinale a alternativa com a forma irredutível da fração $\frac{8}{72}$:

0) $\frac{1}{2}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 110 no segundo, terceiro e quarto teste.

1) $\frac{1}{4}$

2) $\frac{1}{9}$ → Alternativa correta

3) $\frac{2}{18}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 110 no primeiro teste.

4) $\frac{1}{5}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

No nodo Comparação de Frações, o aluno realizou dois testes adaptativos. No primeiro teste, como já mencionado anteriormente, obteve uma pontuação de 0.100, errando todas as questões. No segundo teste adaptativo, o Aluno 110 alcançou uma pontuação excelente de 0.927, o que leva a acreditar que o material de estudo colaborou para que o aluno

melhorasse o seu desempenho. Um fato que vale destacar nesse nodo é que em questões de resolução de problemas, como da figura 104, o aluno não apresentou dificuldades no segundo teste.

Figura 104 - exemplo de questão do nodo Comparação de Frações de resolução de problemas.

Quatro amigos estavam jogando bilhar: Zé, Toninho, Fábio e Manoel. Zé deu 3 tacadas e derrubou 2 bolas na caçapa, Toninho deu 5 tacadas e derrubou 3 bolas, Fábio deu 6 tacadas e derrubou 5 bolas, e Manoel deu 3 tacadas e derrubou 1 bola. Quem teve o MELHOR desempenho em relação às tacadas feitas?

0) Fábio → Alternativa correta
 1) Zé
 2) Toninho
 3) Manoel
 4) João

Fonte: banco de dados do SIENA.

Mas em questões do tipo exemplificado na figura 105, o aluno continuou apresentando dificuldades no segundo teste adaptativo.

Figura 105 - exemplo de questão do nodo Comparação de Frações que o Aluno 110 apresentou dificuldades.

Assinale a alternativa que está CORRETA:

0) $\frac{1}{3} < \frac{1}{6}$
 1) $\frac{2}{3} = \frac{3}{6}$
 2) $\frac{1}{3} > \frac{3}{6}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 110
 3) $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$ → Alternativa correta
 4) $\frac{2}{3} = \frac{2}{6}$

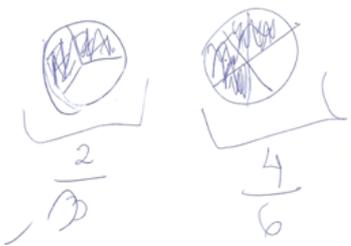
Fonte: banco de dados do SIENA.

Na figura 106, estão as anotações utilizadas pelo aluno para resolver questões envolvendo comparação de Frações. Pode-se verificar que o Aluno 110 utilizou como recurso de comparação o desenho de “círculos divididos em partes iguais”. Analisando os desenhos dos “círculos”, é possível supor que o fato de não estarem desenhados adequadamente pode ter induzido o aluno ao erro na resolução das questões.

Figura 106 - questão envolvendo o conceito de comparação de Frações e anotações escrita pelo Aluno 110.

Considere as frações $\frac{2}{3}$ e $\frac{4}{6}$ de uma mesma figura. Podemos afirmar então que:

- 0) $\frac{2}{3} < \frac{4}{6}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 110
- 1) $\frac{2}{3} > \frac{4}{6}$
- 2) Representam a mesma região da figura. → Alternativa correta
- 3) Não representam a mesma região da figura.
- 4) Não é possível comparar.



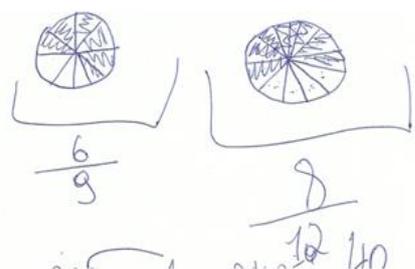
Fonte: banco de dados do SIENA e anotações do Aluno 110.

Na figura 107, pode-se ver outra questão semelhante ao exemplo anterior que o Aluno 110 utilizou do mesmo recurso de desenho e novamente respondeu erroneamente.

Figura 107 - questão envolvendo o conceito de comparação de Frações e anotações escrita pelo Aluno 110

Considere as frações $\frac{6}{9}$ e $\frac{8}{12}$ de uma mesma figura. Podemos afirmar então que:

- 0) $\frac{6}{9} < \frac{8}{12}$
- 1) $\frac{6}{9} > \frac{8}{12}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 110
- 2) Representam a mesma região da figura. → Alternativa correta
- 3) Não representam a mesma região da figura.
- 4) Não é possível comparar.

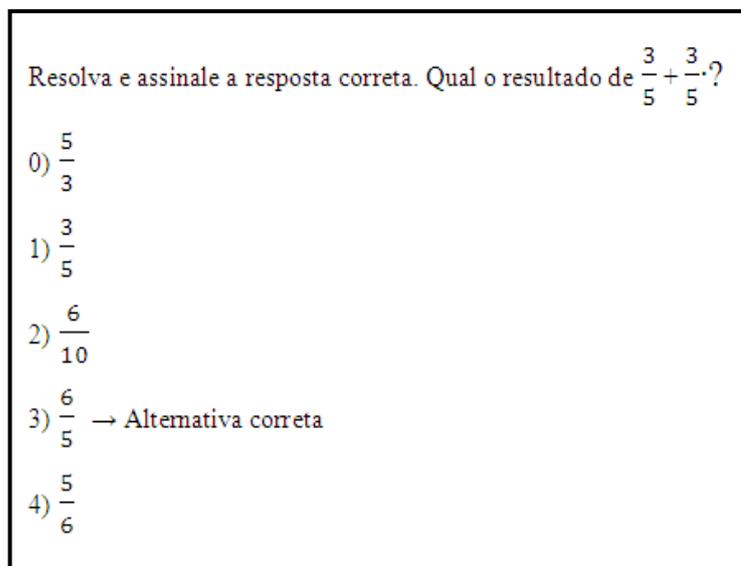


Fonte: banco de dados do SIENA e anotações do Aluno 110.

Não se pode afirmar precisamente quais foram as dificuldades do aluno nesse conceito, mas uma reflexão é que em questões envolvendo comparação de Frações e utilizando os sinais de $>$, $<$ e $=$ este aluno apresentou mais dificuldades do que em questões envolvendo resolução de problemas.

No nodo Adição e Subtração de Frações, o Aluno 110 não apresentou dificuldades sendo aprovado no primeiro teste e obtendo uma nota de 0.621, sem a necessidade de entrar no material de estudo de recuperação. Diferente do nodo anterior, nas questões envolvendo resolução de problemas, o aluno apresentou um menor desempenho no teste do que naquelas que envolvia o algoritmo da adição e da subtração. Na figura 108, pode-se ver um tipo de questão com o algoritmo da adição em que este aluno apresentou um bom desempenho.

Figura 108 - questão de adição de Frações com o algoritmo da operação.



Resolva e assinale a resposta correta. Qual o resultado de $\frac{3}{5} + \frac{3}{5}$?

0) $\frac{5}{3}$

1) $\frac{3}{5}$

2) $\frac{6}{10}$

3) $\frac{6}{5}$ → Alternativa correta

4) $\frac{5}{6}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Em uma das questões envolvendo subtração de Frações com denominadores diferentes, pode-se identificar um dos erros destacados por Llinares e Sánchez (1988) que os alunos costumam cometer nas operações de adição e subtração de Frações. Neste exemplo da figura 109, o aluno subtraiu o numerador da primeira Fração pelo numerador da segunda, assim como fez com o denominador.

Figura 109 - exemplo de erro cometido pelo Aluno 110.

Resolva e assinale a resposta correta. Qual o resultado de $\frac{3}{4} - \frac{1}{6}$?

0) $\frac{7}{6}$

1) $\frac{2}{6}$

2) $\frac{7}{12}$ → Alternativa correta

3) $\frac{2}{2}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 110

4) $\frac{4}{10}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Na figura 110, um exemplo de questão envolvendo resolução de problema. A alternativa assinalada pelo aluno apresenta um dos erros citado na pesquisa de Llinares e Sánchez (1988) de tratar o numerador e o denominador da Fração como números independentes um do outro.

Figura 110 - exemplo de questão de subtração de Frações com resolução de Frações.

Hugo gastou $\frac{1}{5}$ de sua mesada com lanches na escola e $\frac{3}{10}$ com um presente. Que fração de sua mesada Hugo gastou a mais com o presente em relação a mesada?

0) $\frac{2}{5}$

1) $\frac{2}{10}$

2) $\frac{1}{10}$ → Alternativa correta

3) $\frac{4}{5}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 110

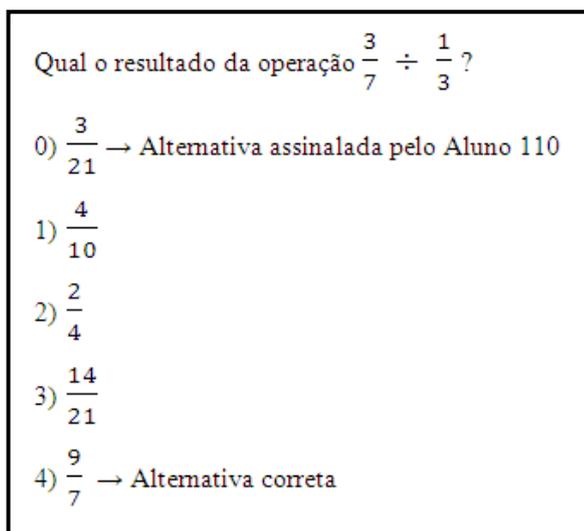
4) $\frac{1}{5}$

Fonte: banco de dados do SIENA

O Aluno 110, no nodo Multiplicação e Divisão de Frações, realizou três testes adaptativos. No primeiro teste adaptativo, iniciou mas não concluiu; em seguida realizou um segundo teste adaptativo, obtendo uma pontuação de 0.172 e, no terceiro teste após os estudos de recuperação, alcançou a pontuação de 0.966. Analisando os testes adaptativos, percebe-se

que o Aluno 110 não apresentou dificuldades aparentes na operação de multiplicação, mas é possível perceber que, nas questões envolvendo divisão de Frações o desempenho do aluno foi menor. A figura 111 mostra um exemplo de questão de divisão de Frações, em que o Aluno 110 resolveu como se fosse uma operação de multiplicação de Frações.

Figura 111 - questão de divisão de Frações onde o Aluno 110 resolveu como multiplicação de Frações.



Fonte: banco de dados do SIENA.

No último nodo, o de Resolução de Problemas com Frações, o Aluno 110 realizou dois testes adaptativos, obtendo respectivamente as notas de 0.410 e 0.709, apresentando um razoável desempenho neste nodo.

Analisando a ficha de perfil preenchida pelo Aluno 110, esse aluno utiliza com frequência o computador, mas nunca havia realizado atividades de Matemática no Laboratório de Informática da escola. Segundo a sua opinião sobre o trabalho desenvolvido, “achou muito bom”, afirmando que “gostou das aulas”. Quanto às dificuldades encontradas no trabalho desenvolvido, o aluno respondeu que foi “atenção”.

8.2.11 Análise do desempenho do Aluno 112

O Aluno 112 realizou somente os dois primeiros nodos da sequência didática, conforme tabela 12.

Tabela 12 - desempenho do Aluno 112 nos testes adaptativos

	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.143	1.000					
2	0.999						

Fonte: banco de dados SIENA.

Dois detalhes chamam a atenção em relação ao Aluno 112. O primeiro é o baixo rendimento no primeiro teste adaptativo do Nodo Conceito de Frações. Após realizar estudos de recuperação alcançou uma excelente pontuação, errando somente uma questão de nível difícil do teste adaptativo (figura 112).

Figura 112 - questão de nível difícil que o Aluno 108 respondeu errado.

Resolva o problema de Júlio. Júlio pegou na geladeira uma garrafa de dois litros de suco para distribuir igualmente com mais três amigos. A garrafa está pela metade. Que fração do suco Júlio deve colocar em cada copo para acabar com todo o suco?

0) $\frac{1}{2}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 108

1) $\frac{1}{3}$

2) $\frac{1}{4}$ → alternativa correta

3) $\frac{1}{5}$

4) $\frac{4}{1}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

O segundo detalhe a se destacar é o ótimo desempenho do aluno no nodo Tipos de Frações, gabaritando o teste adaptativo. Com a participação em somente um encontro não é possível fazer uma análise muito profunda das dificuldades deste aluno, ficando o contraste do baixo rendimento no primeiro teste adaptativo antes de realizar estudos recuperação do nodo Conceito de Fração e o excepcional desempenho no segundo teste do nodo.

8.2.12 Análise do desempenho do Aluno 113

O Aluno 113 foi um dos alunos que mais apresentaram dificuldades no experimento, entrando em estudos de recuperação em todos os nodos. Como característica pessoal,

mostrava-se ansioso com a preocupação em passar nos testes adaptativos, sempre perguntando aos colegas em que ponto da sequência didática eles estavam, como se não quisesse ficar para trás. Também era disperso, sendo às vezes preciso chamar a sua atenção para não atrapalhar os demais com as conversas. Esse comportamento ansioso, competitivo e disperso pode ter influenciado o desempenho do aluno, pois em diversas vezes iniciou os testes adaptativos e não concluiu. Esses testes não foram computados. Na tabela 15, constam somente os testes adaptativos concluídos pelo aluno.

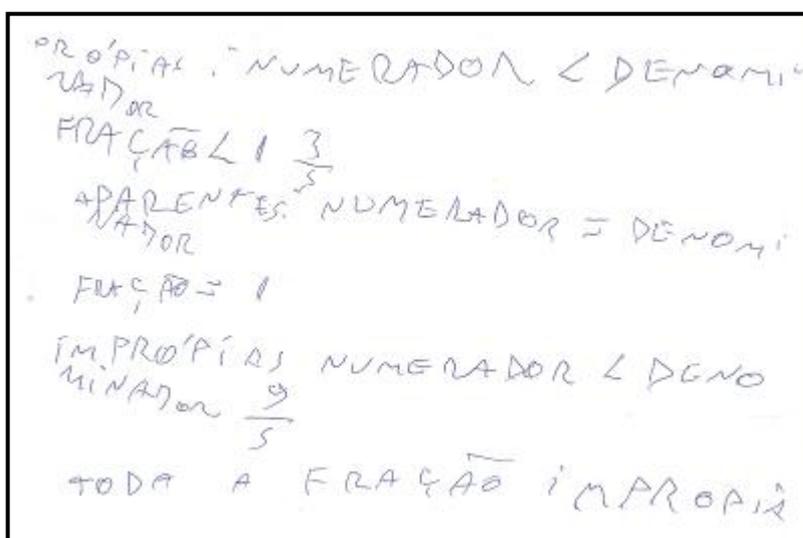
Tabela 13 - desempenho do Aluno 113 nos testes adaptativos

	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.143	0.385	0.347	0.100	0.200	0.342	0.294
2	0.294	0.143	0.967	0.368	0.522	0.294	0.999
3	1.000	0.200		0.671	0.496	0.510	
4		0.410			0.999	0.836	
5		0.999					

Fonte: banco de dados SIENA.

Na figura 113, um exemplo de anotação do aluno, pode-se perceber que a escrita está desorganizada e com erros de conceitos, apesar de os exemplos utilizados estarem corretos. Provavelmente o aluno utilizou essa anotação para se orientar na realização das atividades, e isso pode tê-lo atrapalhado, já que neste nodo foi o que ele apresentou mais dificuldades.

Figura 113 - exemplo de anotações do Aluno 113.



Fonte: anotações do Aluno 113.

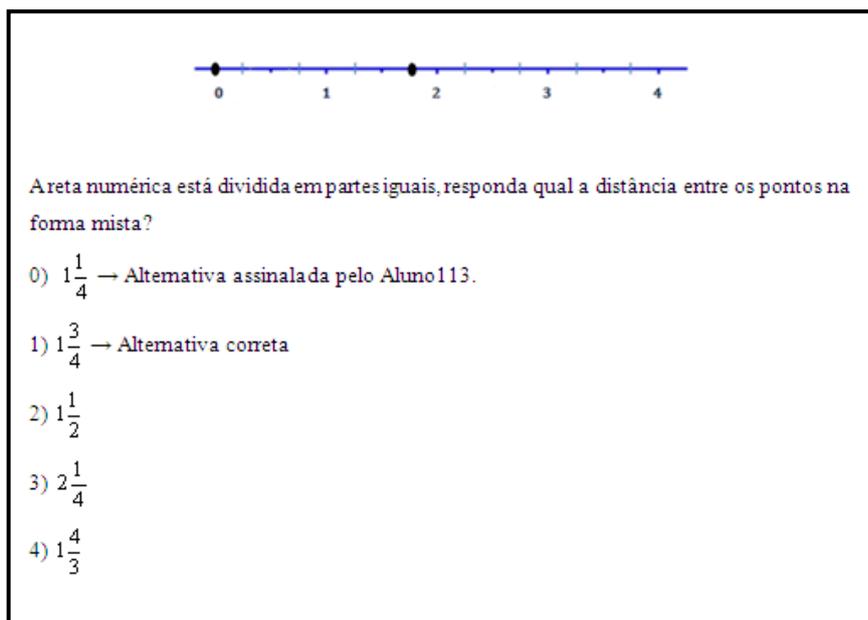
Foi feito um trabalho de conscientização junto ao aluno para que ele fizesse uma leitura calma dos materiais de estudo e realizasse as atividades disponibilizadas de maneira tranquila, pois não havia um tempo pré-determinado para os estudos de recuperação. O comportamento do aluno foi mudando aos poucos, quando começou a compreender a dinâmica das atividades.

Os primeiros nodos foram aqueles em que o aluno apresentou mais dificuldades em relação aos conceitos, tendo pontuações baixas nos primeiros testes, e que persistiram com as mesmas dificuldades apresentadas nos demais testes adaptativos, apesar dos estudos de recuperação. Nos demais nodos, mesmo em alguns realizando quatro e até cinco testes, apresentou um crescimento gradativo, com as dificuldades sendo superadas a cada teste.

No nodo Conceito de Frações, o aluno, nos dois primeiros testes, só acertou questões relacionadas à leitura de Frações e relação parte-todo de forma contínua, mostrando dificuldades em todos os outros conceitos. Depois de ingressar duas vezes nos estudos de recuperação e ter sido acompanhado nos estudos, o desempenho no terceiro teste adaptativo melhorou muito, sendo aprovado com a pontuação máxima do sistema.

Com o conteúdo envolvendo tipos de Frações, o aluno também apresentou dificuldades para conseguir a aprovação. Com grandes dificuldades nos três primeiros testes, não demonstrando grandes avanços quanto ao conteúdo, somente no quarto teste adaptativo mostrou evolução quanto à compreensão deste conceito e foi aprovado no quinto teste. Um dos obstáculos enfrentado pelo aluno foram as questões envolvendo a reta numérica e a nomenclatura dos tipos de Frações (própria, imprópria, aparente). Na figura 114, encontra-se um exemplo de questão envolvendo reta numérica em que o aluno teve dificuldades. No último teste, o aluno errou somente duas questões, sendo elas de nível difícil.

Figura 114 - exemplo de questão envolvendo a reta numérica que o Aluno113 apresentou dificuldades.



Fonte: banco de dados do SIENA.

A partir do terceiro nodo, o Aluno 113 se mostrou mais habituado à dinâmica das aulas, ainda com dificuldades nos conteúdos, mas mais concentrado nas leituras e atividades, mostrando um crescimento a cada teste realizado. Analisando os testes adaptativos dos conceitos de equivalência e simplificação de Frações, com exceção de duas questões, todas as demais que o aluno errou eram sobre o conceito de equivalência de Frações. As dificuldades nas questões do primeiro teste foram superadas após os estudos de recuperação no segundo teste.

Levando em conta o desempenho do Aluno 113 nos testes adaptativos do nodo Comparação de Frações, pode-se dizer que, de todos os nodos, foi o em que ele apresentou uma menor evolução final. No primeiro teste adaptativo, errou todas as questões; no segundo, acertou duas questões e, no terceiro teste, alcançou uma pontuação um pouco acima da média. Na figura 112, estão duas questões que foram sorteadas em todos os testes e que o aluno não acertou nenhuma vez. Não foi marcada nas questões a alternativa do aluno porque variou em todos os testes.

Figura 115 - exemplos de questões envolvendo a reta numérica que o Aluno113 apresentou dificuldades.

Assinale a alternativa INCORRETA:

0) $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$

1) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

2) $\frac{1}{3} < \frac{3}{6}$

3) $\frac{2}{3} < \frac{1}{3} \rightarrow$ Alternativa correta

4) $\frac{2}{3} > \frac{2}{6}$

Assinale a alternativa que está INCORRETA:

0) $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$

1) $\frac{2}{3} = \frac{3}{6} \rightarrow$ Alternativa correta

2) $\frac{1}{3} < \frac{3}{6}$

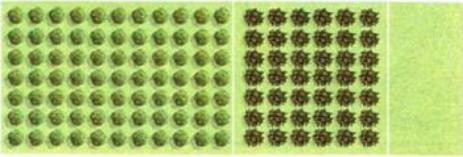
3) $\frac{2}{3} > \frac{2}{6}$

0) $\frac{1}{5} = \frac{2}{10}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

As questões de resolução de problemas foram as maiores dificuldades do aluno nos testes adaptativos com as operações de adição e subtração. Apesar da dificuldade de interpretação em algumas questões, em outras, pode-se identificar que o aluno cometeu um dos erros mais comuns na adição de Frações, que consiste na soma independentemente dos numeradores e os denominadores. A origem do erro pode estar na semelhança de notação que existe entre as Frações e os números naturais, ou, se os alunos já foram apresentados ao algoritmo da multiplicação, podem estar mesclando ambos os algoritmos (LLINARES; SÁNCHEZ, 1988, p.161). Na figura 116, está uma questão de adição em que o aluno comete este tipo de erro.

Figura 116 - questão em que o Aluno 113 soma numerador e denominador de forma independente.



Numa fazenda, $\frac{1}{2}$ da área cultivada corresponde à plantação de laranjas, $\frac{1}{3}$ corresponde à plantação de pêssegos, e o restante corresponde à pastagem. Qual é a fração correspondente às áreas plantadas?

0) $\frac{5}{6}$ → Alternativa correta

1) $\frac{2}{5}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 113

2) $\frac{1}{1}$

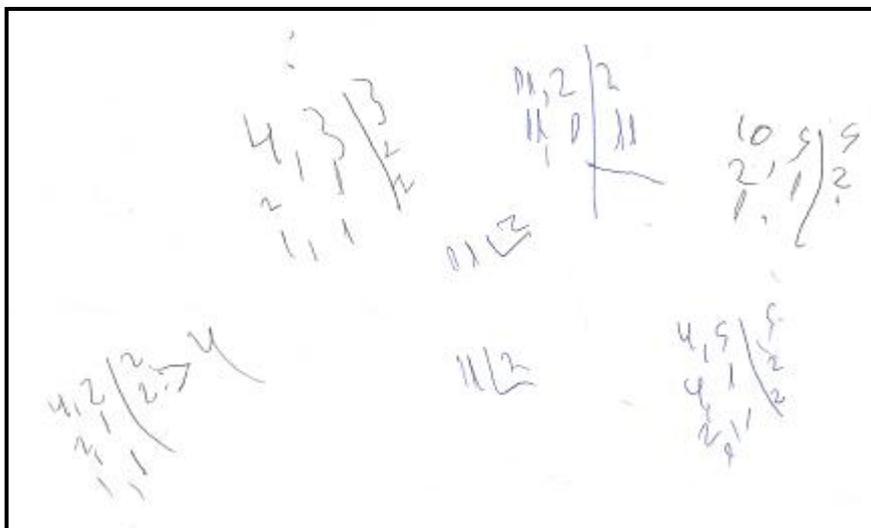
3) $\frac{2}{6}$

4) $\frac{2}{3}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Apesar do trabalho realizado com Frações equivalentes, um fato que chama a atenção é que o aluno usa o MMC até para resolver operações simples como nas anotações da figura 117.

Figura 117 - anotações do Aluno 113 utilizando o MMC.



Fonte: anotações do Aluno 113.

Nos testes adaptativos com as operações de multiplicação e divisão, além novamente das dificuldades com as questões de resolução de problemas, merece destaque também a grande quantidade de erros em questões envolvendo os algoritmos das operações. Muitas vezes, o aluno inverteu as operações de multiplicação e divisão, como é apresentado na figura 118.

Figura 118 - exemplo de questões envolvendo a reta numérica em que o Aluno113 apresentou dificuldades.

Qual o resultado da operação $5 + \frac{1}{2}$?

0) 10 → Alternativa correta

1) $\frac{5}{2}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 113

2) $\frac{1}{7}$

3) $\frac{6}{2}$

4) $\frac{4}{2}$

Qual o resultado da operação $\frac{3}{7} \div \frac{1}{3}$?

0) $\frac{3}{21}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 113

1) $\frac{4}{10}$

2) $\frac{2}{4}$

3) $\frac{14}{21}$

4) $\frac{9}{7}$ → Alternativa correta

Qual o resultado da operação $\frac{2}{5} \times \frac{3}{2}$?

0) $\frac{4}{15}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 113

1) $\frac{5}{10}$

2) $\frac{5}{7}$

3) $\frac{3}{5}$ → Alternativa correta

4) $\frac{5}{3}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

No nodo Resolução de Problemas, o aluno apresentou dificuldades de interpretação no primeiro teste, como na figura 119. No segundo teste adaptativo, o material de estudo pode ter auxiliado o aluno nas suas dificuldades, errando apenas uma questão.

Figura 119 - exemplo de questões de resolução de problema em que o Aluno113 apresentou dificuldade.

<p>A milionária Dona Rica Ricona doou a uma Organização Não Governamental (ONG) de combate à fome no Brasil, três quartos da sua fortuna, avaliada em 12 milhões de reais. Quantos milhões de reais foram doados a ONG?</p> <p>0) 3 milhões de reais → Alternativa assinalada pelo Aluno 113</p> <p>1) 4 milhões de reais</p> <p>2) 5 milhões de reais</p> <p>3) 7 milhões de reais</p> <p>4) 9 milhões de reais → Alternativa correta</p>
--

Fonte: banco de dados do SIENA.

8.2.13 Análise do desempenho do Aluno 114

O Aluno 114 foi um dos três alunos afastados das aulas de recuperação pela professora titular das turmas por problemas de indisciplina. Se levar em conta que ele participou de quatro encontros, sendo três de aulas no laboratório de informática, o Aluno 114 foi um dos mais rápidos na realização da sequência didática, mesmo não concluindo-a, ingressando até o sexto nodo, como se pode ver na tabela 14.

Tabela 14 - desempenho do Aluno 114 nos testes adaptativos.

	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.143	0.143	0.294	0.143	0.385	0.217	
2	0.984	1.000	0.510	0.785	0.610		
3			0.723				

Fonte: banco de dados SIENA.

O aluno apresentou dificuldades em todos os nodos da sequência didática. Um exemplo disso é que, dos seis nodos, em quatro deles, acertou somente uma questão, no

primeiro teste adaptativo. No conteúdo de equivalência e simplificação de Frações precisou realizar três testes adaptativos e entrar duas vezes em estudos de recuperação, mas mostrou uma evolução gradativa em cada teste na superação das dificuldades.

Os conteúdos envolvendo conceitos e tipos de Frações, foram os que o aluno apresentou um maior crescimento atingindo um desempenho final excelente. As dificuldades iniciais nestes conteúdos foram em todos os fundamentos. Após os estudos de recuperação evoluiu muito; inclusive em tipos de Frações conseguiu a pontuação máxima.

No primeiro teste adaptativo do nodo Equivalência e Simplificação de Frações, as dificuldades demonstradas pelo aluno foram com todo o conceito de equivalência. E, no conteúdo de simplificação, a dificuldade foi em questões onde se pedia a forma irredutível de alguma Fração, como na figura 120. Na questão exemplificada, o aluno errou nos três testes realizados.

Figura 120 - exemplo de questão sobre o conteúdo de simplificação que o Aluno 114 apresentou dificuldades.

Assinale a alternativa com a forma irredutível da fração $\frac{16}{64}$:

0) $\frac{1}{2}$

1) $\frac{1}{4}$ → Alternativa correta.

2) $\frac{1}{9}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 114 no primeiro e terceiro teste.

3) $\frac{2}{18}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 110 no segundo teste.

4) $\frac{1}{5}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

As dificuldades apresentadas no primeiro teste persistiram em parte no segundo teste adaptativo apesar do estudo de recuperação. O aluno mostrou uma evolução em equivalência de Frações, onde as maiores dificuldades foram em questões de maior grau de dificuldade como na figura 121. No conteúdo de simplificação, os erros foram novamente em questões

como a do exemplo anterior. Neste segundo teste, o aluno quase atingiu a pontuação mínima para aprovação de 0.6.

Figura 121 - exemplo de questão sobre o conteúdo de equivalência de Frações em que o Aluno 114 apresentou dificuldades.

Uma orquestra é formada por quatro famílias de instrumentos: as cordas, as madeiras, os metais e a percussão. Na ilustração temos uma orquestra formada por 70 instrumentistas, assinale a alternativa que representa o número de instrumentistas que tocam viola em relação ao total de instrumentistas:

0) $\frac{1}{10}$ → Alternativa correta

1) $\frac{2}{10}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 114 no primeiro teste.

2) $\frac{7}{10}$

3) $\frac{1}{7}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 114 no segundo e terceiro teste.

4) $\frac{10}{7}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Apesar de ter conseguido uma pontuação acima da média no terceiro teste, o aluno continuou apresentando dificuldades na resolução de questões como dos dois exemplos anteriores (figura 120 e 121). No nodo Comparação de Frações, o aluno acertou somente uma questão no primeiro nodo. No segundo teste adaptativo feito pelo aluno após entrar no material de estudo, foi aprovado com uma pontuação de 0.785, mas o que chama a atenção neste teste é que a maioria dos erros foram em questões de nível fácil como a da figura 122.

Figura 122 - exemplo de questão sobre o conteúdo de comparação de Frações em que o Aluno 114 apresentou dificuldades.

Assinale a alternativa INCORRETA:

0) $\frac{1}{3} > \frac{1}{6}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 114 no primeiro teste.

1) $\frac{1}{3} = \frac{2}{6}$

2) $\frac{1}{3} < \frac{3}{6}$

3) $\frac{2}{3} < \frac{1}{3}$ → Alternativa correta

4) $\frac{2}{3} > \frac{2}{6}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 114 no segundo teste.

Fonte: banco de dados do SIENA.

Analisando o nodo com as operações de adição e subtração de Frações, o desempenho do aluno foi razoável como um todo, tendo sido aprovado, ficando praticamente na média, no segundo teste adaptativo. As dificuldades maiores no segundo teste foram em questões que envolviam problemas, mas, no primeiro teste, o aluno apresentou dificuldades até em questões consideradas de nível fácil, como na figura 123, onde o aluno resolve a operação tratando o numerador e o denominador como números distintos.

Figura 123 - exemplo de questão de nível fácil com adição de Frações em que o Aluno 114 apresentou dificuldades.

Resolva e assinale a resposta correta. Qual o resultado de $\frac{3}{5} + \frac{3}{5}$?

0) $\frac{5}{3}$

1) $\frac{3}{5}$

2) $\frac{6}{10}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 114.

3) $\frac{6}{5}$ → Alternativa correta

4) $\frac{5}{6}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Com as operações de multiplicação e divisão, o aluno voltou a apresentar dificuldades em todos os fundamentos, mas não concluiu o nodo o que ajudaria para fazer uma análise das suas dificuldades.

8.2.14 Análise do desempenho do Aluno 115

O Aluno 115 participou somente do primeiro encontro, como é possível verificar na tabela 15. Este aluno apresentou muitas dificuldades no primeiro teste, acertando somente uma das seis questões sorteadas. Depois de ingressar no material de estudo realizou um segundo teste, mas não chegou a concluir, finalizando o teste na segunda questão. Desta forma, não é possível fazer uma análise mais detalhada do desempenho deste aluno.

Tabela 15 - desempenho do Aluno 115 nos testes adaptativos

	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.217						

Fonte: banco de dados SIENA.

8.2.15 Análise do desempenho do Aluno 116

Este aluno, não concluiu toda a sequência didática, comparecendo somente a três encontros. Verificando a tabela 16, no primeiro nodo, com os conceitos básicos de Frações, o aluno apresentou dificuldades no primeiro teste adaptativo, mas melhorou muito no segundo teste após os estudos de recuperação.

Tabela 16 - desempenho do Aluno 116 nos testes adaptativos.

	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.385	0.130	0.493	0.273	0.522		
2	0.988	0.484	1.000	0.895			
3		0.724					

Fonte: banco de dados SIENA.

No nodo Tipos de Frações, o Aluno 116 teve uma melhora gradativa a cada teste adaptativo. Algumas dificuldades apresentadas no primeiro teste foram superadas no segundo, mas ainda, em questões como da figura 124, o aluno apresentou dificuldades entendimento ao que estava sendo solicitado na pergunta.

Figura 124 - exemplo de questão em que o Aluno 116 apresentou dificuldades nos dois primeiros testes adaptativos do nodo Tipos de Frações.

Considera 60 minutos como um inteiro, e responda quantos minutos correspondem a $2\frac{1}{4}$ horas?

0) 100 minutos

1) 135 minutos → Alternativa correta

2) 60 minutos → Alternativa assinalada pelo Aluno 116.

3) 120 minutos

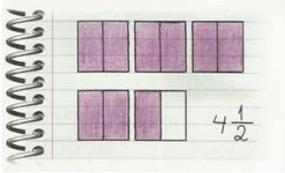
4) 180 minutos

Fonte: banco de dados do SIENA.

No terceiro teste, o aluno conseguiu a aprovação, mas continuou apresentando dificuldade de compreender as perguntas, como, por exemplo, a questão apresentada na figura 125. Há uma imagem e logo após uma pergunta; o aluno interpreta somente a imagem. Essa questão foi sorteada nos três testes realizados e em todos o aluno assinalou a mesma resposta.

Figura 125 - exemplo de questão em que o Aluno 116 apresentou dificuldades de interpretar nos testes adaptativos do nodo Tipos de Frações.

Veja como André fez para escrever a fração $\frac{9}{2}$ na forma mista.



Assinale o número na forma mista que representa $\frac{17}{6}$:

0) $4\frac{1}{2}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 116 em todos os testes adaptativos.

1) $2\frac{5}{6}$ → Alternativa correta

2) $1\frac{1}{9}$

3) $1\frac{5}{6}$

4) $2\frac{1}{9}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Com os conteúdos de equivalência e simplificação de Frações, o aluno teve dificuldades no primeiro teste de conhecimento prévio, principalmente nas questões envolvendo resolução de problemas com o conteúdo de equivalência. No segundo teste, o

aluno acertou todas as questões. Em Comparação de Frações, o aluno realizou dois testes adaptativos e, mesmo depois de utilizar o material de estudo, continuou apresentando também dificuldade em questões envolvendo resolução de problemas como no nodo anterior. A figura 126 apresenta uma questão deste tipo. Neste exemplo, o aluno trabalha com as Frações, utilizando a ideia de números naturais, tratando numeradores e denominadores de forma independente.

Figura 126 - exemplo de questão em que o Aluno 116 apresentou dificuldades de interpretar nos testes adaptativos do nodo Comparação de Frações.

Anderson e seus amigos acamparam durante 3 dias. Da água que levaram, eles consumiram $\frac{2}{6}$ no 1º dia, $\frac{1}{3}$ no 2º dia e $\frac{3}{9}$ no 3º dia. De acordo com as informações podemos afirmar:

0) Que no 3º dia eles consumiram a maior quantidade de água. → Alternativa assinalada pelo Aluno 116.

1) Que no 2º dia eles consumiram a menor quantidade de água.

2) Que no 1º dia eles consumiram a maior quantidade de água.

3) Que nos três dias eles consumiram a mesma quantidade de água, porque as frações $\frac{2}{6}$, $\frac{1}{3}$ e $\frac{3}{9}$ são equivalentes. → Alternativa correta

4) Não podemos saber qual dia consumiram mais ou menos água.

Fonte: banco de dados do SIENA.

No nodo de Adição e Subtração, o aluno realizou um teste adaptativo e quase alcançou a média. Novamente mostrou dificuldades em questões com resolução de problemas. Por ter sido afastado das aulas, não foi possível realizar um trabalho de recuperação desta dificuldade com o aluno.

8.2.16 Análise do desempenho do Aluno 117

O Aluno 117 conseguiu um bom desempenho no nodo Conceito de Frações. Já no primeiro teste de conhecimentos prévios, quase atingiu a pontuação média ficando pouco abaixo, como se pode ver na tabela 17. As questões em que o aluno apresentou maiores dificuldades foram as que envolviam parte-todo em representação discreta, o que foi superado depois dos estudos de recuperação.

Tabela 17 - desempenho do Aluno 117 nos testes adaptativos

	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.593	0.280	0.100	0.385	0.981	0.970	0.280
2	0.995	0.368	1.000	0.999			0.593
3		1.000					1.000

Fonte: banco de dados SIENA.

Os três nodos seguintes (Tipos de Frações, Equivalência e Simplificação, Comparação de Frações) têm uma similaridade muito grande, no grau de dificuldade inicial em ambos os conceitos e um ótimo desempenho final. Avaliando o desempenho do aluno nesses três nodos é possível verificar que, em todos, apresentou muitas dificuldades nos testes adaptativos iniciais, ficando com pontuações muito baixas, mostrando deficiência em todos os fundamentos envolvendo esses conteúdos. No nodo Tipos de Frações, inclusive, necessitou ingressar duas vezes em estudos de recuperação, refazendo as atividades disponibilizadas. Mas apesar do início difícil, o desempenho final do aluno nos três nodos, foi excepcional alcançando a pontuação máxima de 1.000 nos conceitos “tipos, equivalência e simplificação de Frações”. No conteúdo de comparação de Frações, faltou um milésimo para alcançar a pontuação máxima, mostrando que os estudos de recuperação auxiliaram na compreensão do conteúdo.

Vale destacar o empenho do aluno nas aulas. Apesar das dificuldades iniciais, mostrou uma melhora significativa em todos os nodos com ótimos resultados, sendo fruto da sua dedicação aos estudos de recuperação quando apresentou dificuldades em algum conceito.

Não será feita nenhuma análise mais profunda dos nodos de Tipos de Frações, Equivalência e Simplificação e Comparação de Frações, porque é possível resumir o rendimento do aluno em dizer que apresentava uma grande dificuldade em todos os fundamentos destes conceitos e ao final de cada nodo apresentou uma grande melhora em todos os fundamentos, não dando para definir alguma dificuldade final.

Nas quatro operações com Frações, o aluno não apresentou dificuldades específicas em nenhum fundamento. As questões que ele errou nos testes adaptativos foram todas de nível difícil, não sendo possível definir um padrão específico de erro.

Como já falado anteriormente o banco de questões do nodo Resolução de Problemas com Frações é composto por perguntas repetidas de outros nodos, chama a atenção no

primeiro teste adaptativo que as questões que o aluno apresentou dificuldades eram todas relacionadas ao nodo de Conceito de Frações, como no exemplo da figura 127.

Figura 127 - exemplo de questão que Aluno 117 apresentou dificuldades no nodo Resolução de Problemas com Frações.



Numa partida de basquete, a equipe de Oscar marcou 120 pontos. Oscar foi o cestinha dessa partida, marcando $\frac{1}{4}$ do total de pontos. Quantos pontos ele marcou nessa partida?

0) 40 pontos
 1) 30 pontos → alternativa correta
 2) 12 pontos
 3) 100 pontos → alternativa assinalada pelo Aluno 117
 4) 120 pontos

Fonte: banco de dados do SIENA.

No segundo teste adaptativo, apresenta-se uma evolução do aluno no seu desempenho, sendo que as questões que ele errou variaram de conceitos, não se destacando dificuldade em um só, mas mesmo assim não atingiu a pontuação mínima estipulada para aprovação. Foi preciso um terceiro teste, e neste o aluno mostrou como nos outros nodos um excelente desempenho final atingindo novamente a nota máxima.

Talvez o Aluno 117 tenha sido o estudante em que foi mais evidente a importância do material de estudo, pois mostrou uma deficiência dos seus conhecimentos prévios em alguns conceitos e depois dos estudos de recuperação um excelente rendimento final. Esse desempenho é provavelmente resultado da união dos materiais de estudo disponibilizados e o empenho e dedicação do aluno nas aulas. Exemplo disso é que foi o único aluno a comparecer ao último encontro para concluir a sequência didática.

8.2.17 Análise do desempenho do Aluno 120

No nodo Conceito de Frações, o aluno fez três testes adaptativos, sendo que os dois primeiros realizados antes de ingressar no material de estudo. Nestes dois primeiros testes, o Aluno 120 acertou somente uma questão em cada, uma de nível fácil no primeiro e de nível

médio no segundo. Após os estudos de recuperação, o aluno realizou outro teste adaptativo, desta vez acertando todas as questões. Alguns tipos de questões sorteadas neste terceiro teste haviam sido acertadas pelo aluno nos outros dois testes, como questões de parte-todo de representações contínuas e discretas, divisão e resolução de problemas. Isso leva a crer que o material de estudo auxiliou o aluno nas suas dificuldades. Na tabela 18, apresenta-se o desempenho do Aluno 120.

Tabela 18 - desempenho do Aluno 120 nos testes adaptativos

	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.143	0.709					
2	0.217						
3	1.000						

Fonte: banco de dados SIENA.

Nas questões com o conceito de tipos de Frações, apesar de o aluno ter alcançado uma pontuação acima da média estipulada, apresentou dificuldades em questões envolvendo a reta numérica e de assinalar a Fração em forma de número misto a partir da observação de uma figura. O aluno participou de um encontro somente e não compareceu aos demais.

8.2.18 Análise do desempenho do Aluno 121

O aluno necessitou estudos de recuperação em todos os nodos (tabela 19), mas as maiores dificuldades foram com os conteúdos de tipos de Frações e nas operações com Frações, sendo que o nodo Multiplicação e Divisão de Frações não foi concluído porque o aluno não compareceu à última aula.

Tabela 19 - desempenho do Aluno 121 nos testes adaptativos

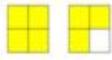
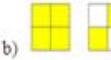
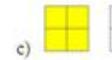
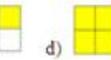
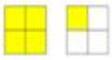
	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.143	0.189	0.100	0.593	0.304	0.294	
2	0.995	0.410	0.785	0.947	0.422	0.510	
3		0.840			0.396		
4					0.470		
5					0.956		

Fonte: banco de dados SIENA.

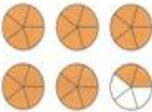
As dificuldades do aluno, demonstradas no primeiro teste adaptativo no nodo Conceito de Frações, em todos os fundamentos, foram aparentemente superadas no segundo teste, onde o aluno teve um ótimo desempenho. Já em Tipos de Frações, o aluno precisou realizar três testes até ser aprovado. A figura 128 ilustra um erro que o aluno cometeu em algumas questões na resolução não levando em consideração as unidades completas.

Figura 128 - erro cometido pelo Aluno 121 em algumas questões sobre tipos de Frações.

Qual dos desenhos representa a fração $1\frac{3}{4}$?

a)  b)  c)  d)  e) 

0) a → Alternativa correta
 1) b
 2) c
 3) d
 4) e → Alternativa assinalada pelo Aluno 121.



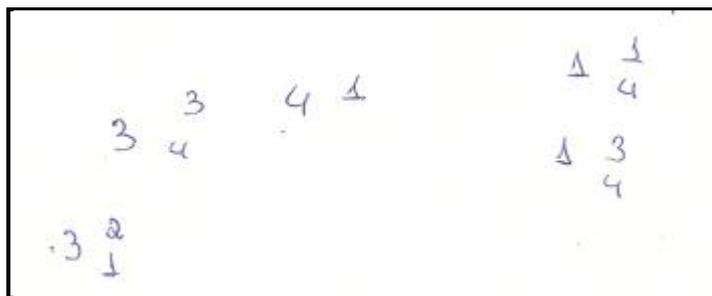
Que número na forma mista representa as partes pintadas das figuras?

0) $4\frac{1}{2}$
 1) $2\frac{5}{5}$
 2) $1\frac{1}{9}$
 3) $\frac{2}{5}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 121.
 4) $5\frac{2}{5}$ → Alternativa correta

Fonte: banco de dados do SIENA.

Analisando as anotações do aluno, um detalhe que desperta a atenção é a escrita dos números mistos. Como se pode ver na figura 129, o aluno não utiliza a barra na escrita das Frações.

Figura 129 - anotações do Aluno 121 com a escrita de números mistos.



Fonte: anotações do Aluno 121.

Em equivalência e simplificação de Frações, o aluno apresentou dificuldades em questões envolvendo o conceito de simplificação e de forma geral nas questões maior grau de dificuldade. No nodo Comparação de Frações, o aluno teve um bom desempenho, quase atingindo a média no primeiro teste, mas precisou entrar no material de estudo. Apresentou dificuldades em questões envolvendo os sinais de $<$, $>$ e $=$.

Avaliando os testes adaptativos com as operações de adição e subtração, percebe-se que as dificuldades do aluno foram em questões de resolução de problemas, talvez com a interpretação da questão. Essa suposição se baseia no fato de que, em questões envolvendo somente o algoritmo das operações, o aluno acertou a sua maioria. A figura 130 traz um exemplo de uma questão que gera dúvida sobre a origem do erro do aluno; se o erro foi aritmético ou na interpretação da questão.

Figura 130 - erro cometido pelo Aluno 121 em uma questão de adição de Frações.



Numa construção, o terreno foi aproveitado assim:

$\frac{1}{4}$: casa $\frac{1}{2}$: jardim Restante: área livre

Que fração do terreno é ocupada pela casa e pelo jardim juntos?

0) $\frac{2}{6}$

1) $\frac{3}{4}$ → Alternativa correta

2) $\frac{1}{3}$

3) $\frac{1}{6}$

4) $\frac{2}{8}$ → Alternativa assinalada pelo Aluno 121.

Fonte: banco de dados do SIENA.

Fazendo uma análise do que a questão pedia e a alternativa assinalada, é possível que o aluno tenha feito a soma das áreas da casa e do jardim de forma errada ou, ainda, tenha interpretado a questão de forma equivocada e tenha calculado a área livre. A área restante livre é $\frac{1}{4}$, forma irredutível da Fração $\frac{2}{8}$, chegando a essa Fração ao colocar todas em um denominador comum.

Outra dificuldade que o aluno apresentou na sequência didática foi com a operação de divisão. Muitas vezes resolveu como se fosse multiplicação. O aluno não concluiu o nodo de Multiplicação e Divisão, mas avaliando o desempenho nos dois testes, estava mostrando uma evolução na superação das dificuldades.

8.2.19 Análise do desempenho do Aluno 122

O Aluno122 foi um dos três alunos excluídos das aulas de recuperação pela professora titular; ele participou de três encontros, sendo dois com o uso do computador e o terceiro como explicado antes foi uma aula de revisão por causa de problemas com a internet. Pode-se verificar na tabela 20 o desempenho deste aluno nos testes adaptativos.

Tabela 20 - desempenho do Aluno 122 nos testes adaptativos

	Conceito de Frações	Tipos de Frações	Equivalência e Simplificação de Frações	Comparação de Frações	Adição e Subtração de Frações	Multiplicação e Divisão de Frações	Resolução de Problemas com Frações
1	0.143	0.944	0.143	0.100			
2	0.992						

Fonte: banco de dados SIENA.

No primeiro teste adaptativo do nodo Conceito de Frações, o aluno apresentou um fraco desempenho, acertando somente uma questão que envolvia a relação parte-todo de forma contínua. No segundo teste adaptativo, o aluno melhorou significativamente apresentando uma pontuação alta. Uma questão que chama a atenção é em relação ao conceito de divisão, na questão apresentada na figura 131. O aluno errou, mas não é possível precisar o motivo do erro. Com base na alternativa assinalada por ele, talvez seja um indício do que Giménez e Bairral (2005) descrevem que algumas concepções sobre Frações são ensinadas erroneamente aos alunos, e estes ficam induzidos a “pensar” que as Frações servem para

indicar coisas menores que a unidade. Em outras questões divisões, onde o todo era menor que as partes a serem divididas, o aluno não apresentou dificuldades.

Figura 131 - questão do nodo Conceito de Frações de nível médio.

Sabe-se que 6 terrenos de mesmo tamanho serão divididos igualmente entre 5 herdeiros. Como você faria essa divisão? Cada herdeiro ficaria com que parte do terreno?

0) $\frac{5}{6}$

1) $\frac{1}{6}$

2) $\frac{6}{5}$ → alternativa correta

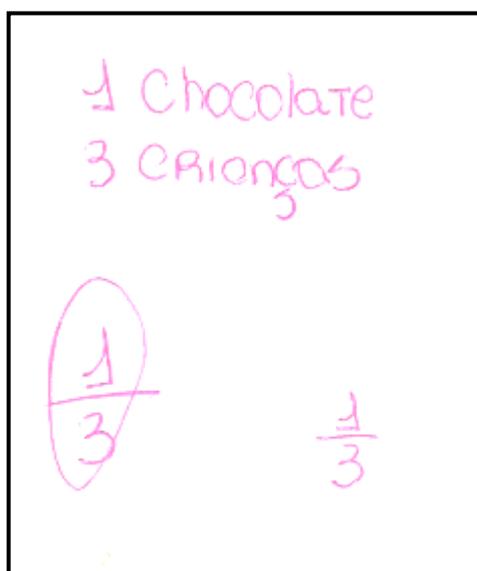
3) $\frac{1}{5}$ → alternativa assinalada pelo Aluno 122

4) $\frac{2}{5}$

Fonte: banco de dados do SIENA.

Na figura 132, um exemplo de uma anotação feita pelo aluno para resolver uma questão envolvendo a ideia de divisão. Nesta questão, ao contrário do exemplo anterior, o todo é menor do que as partes a serem divididas e o aluno desenvolveu de forma correta a ideia.

Figura 132 - exemplo de raciocínio desenvolvido pelo Aluno 122.



Fonte: anotações do Aluno 122.

O aluno apresentou um bom desempenho no conceito de Tipos de Frações, não necessitando entrar no material de estudo. Como em outros casos de alunos, o Aluno 122 ingressou no nodo Equivalência e Simplificação de Frações e também no nodo Comparação de Frações, não concluindo nenhum dos dois. Desta forma, não é possível analisar a evolução do desempenho do aluno, nem avaliar se o material de estudo auxiliou o aluno nas suas dificuldades, pois não foi realizado um segundo teste para comparar ao primeiro de cada nodo, em que, aliás, o aluno foi muito mal tanto em Equivalência e Simplificação, quanto em Comparação de Frações.

8.3 ANÁLISE DA SEQUÊNCIA DIDÁTICA ELETRÔNICA DE FRAÇÕES

Para o desenvolvimento da sequência didática eletrônica, realizou-se uma investigação teórica do processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de Frações, buscando utilizar metodologias e recursos informáticos que fossem adequados à proposta de estudos de recuperação para alunos com dificuldades de aprendizagem. Analisando o desempenho individual dos alunos, entende-se que a sequência didática eletrônica desenvolvida alcançou os resultados esperados auxiliando os alunos a superarem as suas dificuldades, atendendo de forma satisfatória a proposta de recuperação de conteúdo. A análise da sequência didática eletrônica realizada nessa seção, bem como as sugestões, têm o intuito de acrescentar novos materiais, aos já disponibilizados.

A proposta da análise da sequência didática eletrônica é uma das etapas do DI fixo (FILATROS, 2008), que propõem a avaliação para atualizações futuras. Isso é possível porque a plataforma SIENA possibilita editar, acrescentar e excluir qualquer material da sequência didática, sendo isso um ponto muito positivo no seu uso com este tipo de trabalho. Entende-se que realizar atualizações é um processo natural quando se propõe a trabalhar com TIC, já que pesquisas, atividades e recursos são desenvolvidos e lançados com regularidade.

Para realizar a análise da sequência didática eletrônica utilizou-se como base principalmente o desempenho dos alunos, tendo como proposta uma avaliação dos materiais de estudos e do banco de questões. Incluiu-se, também, como instrumento de análise as percepções do pesquisador durante o desenvolvimento de toda a pesquisa.

Analisando o nodo Conceito de Frações, foi possível verificar a dificuldade dos alunos com os conceitos básicos de Frações, com exceção da relação parte-todo, o que confirma as pesquisas de Campos, Silva e Pietropaolo (2009), que apontam o destaque dado em sala de aula para este significado. Seria interessante expandir o conteúdo abordado, dando mais

ênfase às Frações como razão, quociente, operador e como parte-todo na representação discreta, aprofundando esses conceitos, pelas dificuldades de entendimentos que os alunos apresentam com esses significados.

Ampliando os materiais de estudos e aprofundando os conceitos, poderia dar uma melhor base aos alunos sobre Frações, apoiando os demais conteúdos da sequência didática. Quanto às atividades disponibilizadas neste nodo parecem estar condizentes com o propósito do material de estudo, porém, com a ampliação dos conceitos a serem trabalhados, também haverá a necessidade de buscar novas atividades interativas.

Com o conceito Tipos de Frações, uma boa parte dos alunos não necessitou entrar nos estudos de recuperação, mas é importante ressaltar, a partir da análise do desempenho individual dos estudantes, que apresentaram dificuldades nesse conceito, é que poderiam ser ampliadas as atividades com a nomenclatura dos tipos de Frações e as suas representações, já que apresentaram dificuldades em nomear Frações próprias, impróprias e aparentes. A maior dificuldade dos alunos neste conceito está na compreensão da Fração como um número, a ampliação dos conceitos de Frações no primeiro nodo talvez reflitam positivamente no nodo Tipos de Frações.

Crê-se que para uma maior funcionalidade do nodo Equivalência e Simplificação de Frações esse deva ser desmembrado em dois, criando um nodo específico para cada um dos conceitos. Assim pode-se desenvolver um material de estudos e um banco de questões mais específico a cada um dos conceitos. Essa ideia de dividir o nodo está ligada ao fato de que as dificuldades dos alunos no conceito de equivalência foram mais amplas que em simplificação de Frações, onde as dificuldades foram mais específicas a algumas situações.

Um dos conceitos em que os alunos mais apresentaram dificuldades foi o de equivalência de Frações, essa falta de compreensão está relacionada às dificuldades com alguns significados das Frações. A utilização de recursos tecnológicos colabora com os alunos a entender esse conceito, como os que foram utilizados nesse nodo, já que possibilita uma interatividade, sendo as atividades disponibilizadas sobre equivalência de Frações de acordo com a proposta do nodo, porém pelas dificuldades apresentadas pelos alunos o material de estudos deve ser ampliado e, também, como apoio a esse conteúdo poderia ser acrescentada uma atividade interativa de “régua de Frações”. A importância de se trabalhar bem o conceito de equivalência se reflete nas operações de adição e subtração principalmente. O material de estudos sobre Simplificação de Frações precisa ser ampliado, trabalhando principalmente as ideias de Fração irredutível.

No nodo Comparação de Frações, as dificuldades dos alunos foram semelhantes às encontradas em Tipos de Frações, que foi na compreensão da Fração como número. Um trabalho introdutório pode facilitar o entendimento melhor deste conceito. De todos os nodos, esse foi o em que os alunos apresentaram um melhor desempenho depois dos estudos de recuperação, o que leva a crer que o material de estudo e as atividades disponibilizadas foram compatíveis com as dificuldades dos alunos.

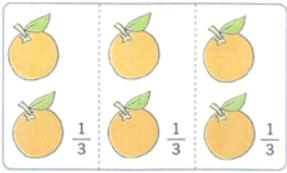
Nas quatro operações com Frações, os alunos em geral não apresentaram dificuldades; foram os nodos em que tiveram melhor aproveitamento. Porém, é possível perceber que nas operações de adição e subtração a ênfase no uso do MMC, às vezes, prejudica o aluno; isso é recorrente do não domínio do conceito de Frações equivalentes e do destaque dado ao uso do MMC. Talvez seja necessário ampliar o tratamento dado ao MMC neste nodo, relacionando-o com a ideia de Frações equivalentes, familiarizando os alunos a utilizar também Frações equivalentes na resolução destas operações. É importante destacar que a pesquisa buscou atividades de adição e subtração de Frações utilizando figuras geométricas, régua numérica, o algoritmo das operações, utilizando o recurso de Frações equivalentes ou mínimo múltiplo comum para solucionar as atividades.

No nodo Multiplicação e Divisão de Frações, apesar de os alunos terem tido um bom rendimento, é preciso ampliar mais o conceito de multiplicação e divisão de Frações, utilizando mais exemplos. A compreensão desses conceitos facilitaria a resolução de problemas envolvendo essas operações.

A ideia do nodo Resolução de Problemas com Frações era de auxiliar os alunos a desenvolver estratégias de resolução. O material de estudo foi baseado nas etapas desenvolvidas por Polya, e aparentemente está condizente com a proposta do nodo, porém precisa-se criar mais atividades interativas de resolução de problemas.

Como mencionado na seção 7.2 as questões que compõem os bancos de questões foram classificadas em grau de dificuldades por uma banca; agora, depois de analisar os testes adaptativos, será necessário analisar e reclassificar algumas questões, levando em conta os desempenhos dos alunos. Na figura 133, observa-se um exemplo de uma questão que compõe o banco de questões dos nodos Conceito de Frações e Resolução de Problemas com Frações, que foi classificada como fácil, mas que a maioria dos alunos errou.

Figura 133 - questão sorteada no nodo Conceito de Frações e Resolução de Problemas com Frações.



Observe a figura e leia o que se pede. Célia tinha 6 laranjas e deu $\frac{1}{3}$ delas a sua irmã. Quantas laranjas ela deu a sua irmã?

0) 2 → Alternativa correta
 1) 3
 2) 4 → Alternativa assinalada pelo maioria dos alunos
 3) 6
 4) 1

Fonte: banco de dados do SIENA.

É importante abastecer o SIENA com mais questões. Assim o sistema sorteará uma diversidade maior para os testes adaptativos, e também possibilitando também aumentar as divisões de níveis de dificuldades, que neste trabalho foram três. Isso permitiria ao sistema encontrar mais rapidamente o padrão de conhecimento do aluno.

8.3.1 Considerações sobre a sequência didática eletrônica

A proposta de estudos de recuperação com o uso de TIC faz parte da linha de pesquisa de Ensino e Aprendizagem em ensino de Ciências e Matemática desenvolvida pelo PPGECIM da ULBRA. Este trabalho tem o intuito de planejar, construir e disponibilizar sequências didáticas eletrônicas para auxiliar alunos com dificuldades de aprendizagem. Para tanto, as pesquisas já desenvolvidas no SIENA têm buscado se estruturar no *design* instrucional a fim de qualificar todo esse processo.

Para se desenvolver um trabalho baseado no *design* instrucional, é necessário montar uma equipe multidisciplinar formada por profissionais especialistas em cada função do projeto. Pinheiro (2002) cita alguns profissionais que devem fazer parte desse grupo:

- Coordenador de projeto: responsável pela administração e condução do projeto. Deve ter conhecimentos de administração, liderança, controle de processos, internet e mídias. Trabalha coordenando todo o grupo;

- *Designer* Instrucional: responsável por realizar o desenho instrucional. Deve ter conhecimento em fundamentos pedagógicos e tecnológicos. Trabalha em conjunto com professores, técnicos em mídia e pedagogos;
- Professor da disciplina: responsável por auxiliar no desenho do curso;
- Professor conteudista: responsável pela elaboração do conteúdo;
- Pedagogo: responsável por questões pedagógicas, estratégias para o ensino, avaliação e revisão. Deve ter conhecimento em mídias;
- Técnicos em mídias: responsável pela produção de mídias. Deve ter conhecimento técnico e experiência na mídia a ser produzida;
- Tutores: responsável pelo acompanhamento do aluno.

Nem sempre é possível contar com um grupo multidisciplinar de especialistas; às vezes, só é possível contar com alguns colegas dispostos a auxiliar em algum momento do processo de desenvolvimento. Este trabalho é um exemplo disso; foi preciso suprir a falta de especialistas em algumas áreas, centralizando muitas das funções.

Desenvolver essa pesquisa foi um grande desafio. Além dos elementos que compõem uma pesquisa como as investigações teóricas e práticas, foram necessários estudos específicos sobre os recursos tecnológicos a serem utilizados na pesquisa. Além da pesquisa desses recursos, estão também os testes de aplicativos, mas tudo isso acaba ficando limitado aos conhecimentos e entendimentos do pesquisador, responsável por essa etapa.

Alguns aplicativos não foram utilizados por falta de tempo hábil de desenvolver um estudo muito mais profundo do *software*. Este foi um dos obstáculos enfrentados na pesquisa por não contar com um especialista na área de informática. Assim algumas das ideias iniciais de atividades tiveram que ser adequadas e limitadas aos recursos possíveis de serem utilizados. Outros aplicativos não foram utilizados porque possuem limitações no uso de símbolos matemáticos, muitos deles utilizam a barra vertical (/) para indicar as Frações e, por questões pedagógicas, esses aplicativos ou atividades foram descartados. A própria postagem das questões na plataforma SIENA é um exemplo. As questões tiveram que ser convertidas do *Word* para o *Firemath*, uma ferramenta do navegador *Mozilla Firefox* que permite representar símbolos e fórmulas matemáticas para os padrões da *web*.

A preocupação principal do experimento era de auxiliar os alunos a superarem as suas dificuldades no conteúdo de Frações e, como consequência, validar a sequência didática construída. Além de auxiliar os alunos com dificuldades de aprendizagem, foi possível avaliar

a sequência didática construída, analisando os aspectos positivos e os que podem ser melhorados.

CONCLUSÃO

Este trabalho objetivou desenvolver uma sequência didática eletrônica a partir da investigação de questões didáticas e dificuldades relacionadas ao processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de frações, para alunos dos anos finais do Ensino Fundamental, que apresentam dificuldades de aprendizagem nesse tema, utilizando as TIC como recurso didático.

Para atingir essa meta, essa pesquisa foi dividida em duas etapas. A primeira envolveu um levantamento bibliográfico dos aspectos teóricos e didáticos dos conceitos do conteúdo de frações e sobre as dificuldades de aprendizagem relacionadas a esse tema. Ainda como parte dessa etapa foi desenvolvida uma sequência didática eletrônica do conteúdo de frações, buscando utilizar as metodologias e recursos informáticos que se adequassem às necessidades educativas dos alunos, ampliando a compreensão deles em relação ao tema frações. A segunda etapa iniciou com a implementação do ambiente de investigação na plataforma SIENA. Nessa fase, foram disponibilizados na plataforma os materiais de estudo nos recursos tecnológicos pesquisados, assim como o banco de questões para os testes adaptativos. Como prosseguimento dessa fase, foi desenvolvido um experimento, na plataforma SIENA, com um grupo de 19 alunos, de duas turmas do 7º ano, de uma escola pública do município de Canoas. Com os dados coletados no experimento, foi realizada uma análise dos resultados em três perspectivas: análise geral do desempenho dos alunos, análise individual do desempenho dos alunos e análise da sequência didática eletrônica.

Com a análise do desempenho geral dos alunos, foi possível identificar que os nodos Conceito de Frações, Equivalência e Simplificação de Frações e Comparação de Frações foram aqueles em que os alunos apresentaram maiores dificuldades no conteúdo de frações, tendo um baixo índice de aprovação nos primeiros testes. Sendo no nodo Conceitos de Frações muitos alunos apresentaram dificuldades com os significados das frações como quociente, razão e parte-todo, principalmente na sua representação de forma discreta. Por

consequência a falta de entendimento dos alunos com as ideias básicas de frações acabam apresentando dificuldades na compreensão do conceito de equivalência. A principal dificuldade no conteúdo sobre comparação de frações está no fato de os alunos tratarem numerador e denominador de forma independente, como se fosse dois números. De maneira geral, os alunos apresentaram um bom desempenho nos nodos envolvendo as quatro operações (adição, subtração, multiplicação e divisão) com Frações.

A partir da proposta de recuperação individualizada, foi possível conhecer as particularidades dos alunos e o seu desempenho em cada conceito. Desta forma, foi possível acompanhar o rendimento dos alunos, permitindo conhecer as dificuldades que os mesmos tiveram em cada conceito trabalhado. Essa análise auxiliou a entender essas dificuldades, e de que forma a sequência didática eletrônica auxiliou superação das dificuldades. Analisando o desempenho dos alunos durante o experimento, entende-se que essa pesquisa alcançou os objetivos propostos de desenvolver uma sequência didática eletrônica com conteúdo de Frações para estudos de recuperação com alunos com dificuldades de aprendizagem nesse tema. Auxiliou-os através do material de estudo, disponibilizado, a superarem as dificuldades apresentadas no entendimento do conteúdo.

Como parte da proposta de apoio no DI fixo (FILATRO, 2008), foi realizada a análise da sequência didática para verificar a necessidade de adequações futuras. Essa análise teve como base a análise individual, já que foi possível acompanhar o quanto o material auxiliou os alunos na superação das dificuldades. Nessa análise, verificou-se a necessidade de aprofundar os conceitos básicos de Frações; de dividir o nodo Equivalência e Simplificação de Frações, de modo a trabalhar individualmente melhor esses conceitos; verificou-se também que algumas questões que compõem os testes adaptativos terão que ser reclassificadas ao final da pesquisa. Outro aspecto quanto aos bancos de questões é a necessidade de abastecê-lo com mais questões, a fim do sistema sortear diferentes questões para os testes adaptativos.

Em relação à plataforma SIENA, essa se mostrou eficiente como suporte ao trabalho desenvolvido, possibilitando um ambiente onde o aluno pode trabalhar de forma individualizada, respeitando suas especificidades, retomando somente os conceitos em que apresenta dificuldades. O SIENA também fornece ao professor um banco de dados que auxilia na identificação das dificuldades individuais do aluno, além de possibilitar a edição dos materiais disponibilizados.

Quanto às dificuldades encontradas pelo professor pesquisador está a utilização de recursos informáticos no desenvolvimento da sequência didática eletrônica, tendo como empecilho as limitações na escrita numérica das Frações, pois muitos utilizavam a barra

vertical (/) para indicar Frações, não utilizadas por questões didáticas esses aplicativos. As questões tiveram que ser convertidas em um *software* que permite representar símbolos e fórmulas matemáticas para os padrões da *web*, para realizar a postagem na plataforma SIENA. Outra dificuldade que deve ser considerada é o fato de as aulas terem sido realizadas no turno inverso ao das aulas regulares. A não obrigatoriedade de participação mesmo daqueles indicados pela professora titular, provocaram algumas desistências no decorrer do experimento.

Como parte do projeto do Observatório de Educação, entende-se que é importante dar continuidade a esse trabalho, disponibilizando às instituições, escolas e professores um instrumento que auxilie os alunos com dificuldades de aprendizagem. A partir da pesquisa teórica realizada, dos dados coletados e das observações feitas, será possível realizar revisões em edições futuras desta sequência didática acrescentando em qualidade, dando assim continuidade a este trabalho. Sugere-se para futuras revisões da pesquisa uma ampliação dos recursos a serem utilizados, desenvolvendo novas atividades, atualizando os materiais de estudo e adicionando novas questões aos bancos de questões.

Espera-se que esta investigação contribua positivamente como uma proposta de recuperação de conteúdo, auxiliando os alunos que apresentam dificuldades com o conteúdo de Frações, e que as análises dos dados realizados auxiliem na reflexão do processo de ensino e aprendizagem do conteúdo de Frações. Espera-se que a metodologia utilizada nessa pesquisa possa ser um instrumento para a prática docente e sugere-se que a recuperação de conteúdo seja um ato constante e efetivo no meio escolar, sendo entendida como uma das partes do processo de ensino e aprendizagem, respeitando as diversidades e as necessidades dos alunos.

REFERÊNCIAS

- BARBOZA Jr., Alcides Teixeira. **Ambientes Virtuais de Aprendizagem um estudo de caso no Ensino Fundamental e Médio**. Dissertação de mestrado em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade Cruzeiro do Sul. São Paulo. 2009.
- BARROSO, Juliane Matsubara. **Projeto Araribá Matemática**. 1ª. ed. São Paulo: Moderna, v. 1, 2006.
- BELTHER, Josilda Maria. Os programas de recuperação paralela e a qualidade da educação em São Paulo. **Olhar de Professor**, Ponta Grossa, v. 8, n. 2, p. 163-167, 2005.
- BITTAR, Marilena; FREITAS, José Luiz Magalhães. **Fundamentos e Metodologias de Matemática para os ciclos iniciais do Ensino Fundamental**. 2ª Edição. ed. Campo Grande: Editora UFMS, 2005.
- BORBA, Marcelo de Carvalho; PENTEADO, Miriam Godoy **Informática e Educação Matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2001.
- BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 1996.
- BRASIL. Senado Federal. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional n. 5692**, Brasília, 1971.
- BRASIL. Senado Federal. **Lei de Diretrizes e Bases da Educação Nacional n. 9394**, Brasília, 1996.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**, Brasília, 1997.
- BRASIL. Ministério da Educação. **Parâmetros Curriculares Nacionais**, Brasília, 1998.
- CAMPOS, Tânia Maria de Mendonça; SILVA, Angélica Fontoura Garcia; PIETROPAOLO, Ruy César. Considerações a respeito do ensino e aprendizagem de representações fracionárias de números racionais. In: GUIMARÃES, Gilda; BORBA, Rute Elizabete de Souza Rosa (Org.). **REFLEXÕES SOBRE O ENSINO DE MATEMÁTICA NOS ANOS INICIAIS DE ESCOLARIZAÇÃO**. RECIFE: SBEM, 2009. Cap. 9, p. 131-139.
- CARVALHO, Rosita Edler. **Educação Inclusiva: com os pingos nos "is"**. 4ª Edição. ed. Porto Alegre RS: Editora Mediação, 2006.
- CENTURIÓN, Marília; JAKUBOVIC, José; LELLIS, Marcelo. **Matemática na medida certa**. 9ª. ed. São Paulo: Scipione, 2004.
- COLL, César Salvador. **Desenvolvimento psicológico e educação: transtornos de desenvolvimento e necessidades educativas especiais**. Porto Alegre: [s.n.], v. 3, 2004.

COSTA, Denise Reis. **Métodos estatísticos em teste adaptativos informatizados**. 107 f. Dissertação (mestrado de Estatística) Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro. 2009.

COSTA, Nielce Meneguelo Lobo. Reflexões sobre tecnologia e mediação pedagógica na formação do professor de Matemática. In: COSTA, Nielce Meneguelo Lobo; BELINE, William. **Educação Matemática, tecnologias e formação de professores: algumas reflexões**. Campo Mourão: FECILCAM, 2010. p. 85-116.

DANTE, Luiz Roberto. **Aprendendo Sempre Matemática**. 1ª. ed. São Paulo: Ática, v. 1, 2009.

DANTE, Luiz Roberto. **Formulação e resolução de problemas de Matemática teoria e prática**. 1ª. ed. São Paulo: Ática, 2010.

DOLZ, Joaquim; SCHNEUWLY, Bernard. **Gêneros orais e escritos na escola**. Campinas: Mercado das Letras, 2004.

FIGUEIREDO, Cibele Ziane; BITTENCOURT, João Ricardo. Jogos computadorizados para a aprendizagem Matemática no Ensino Fundamental: refletindo a partir dos interesses dos educandos. **Novas Tecnologias na Educação 1**, Porto Alegre, maio 2005.

FILATRO, Andrea. **Design Instrucional na prática**. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

FILATRO, Andrea. **Design instrucional contextualizado educação e tecnologia**. 3ª. ed. São Paulo: Senac, 2010.

GIMÉNEZ, J.; BAIRRAL, M. **Frações no currículo do Ensino Fundamental conceituação, jogos e atividades lúdicas**. Seropédica: GEPEM/EDUR, 2005.

GIOVANNI, J. R.; CASTRUCCI, B.; GIOVANNI JR., J. R. **A conquista da Matemática**. São Paulo: FTD, 2007.

GIOVANNI, J. R.; GIOVANNI JR., J. R. **Matemática Pensar e Descobrir**. 1ª. ed. São Paulo: FTD, 2002.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; MORENO, Lorenzo Ruiz. Formação de Professores de Matemática: uma proposta de ensino com novas tecnologias. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 8, n. 2, p. 19-28, julho/dezembro 2006.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; MORENO, Lorenzo Ruiz. **Informação e Recuperação de conteúdos: uma experiência em Matemática**. IV Congresso Internacional de Ensino de Matemática. Canoas: [s.n.]. 2007.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; KAIBER, Carmen Teresa; MORA, Castor David. Perspectiva em Educação Matemática. **Acta Scientiae**, Canoas, v. 6, n. 1, p. 37-55, jan./jun. 2004.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; ZOCH, Lisiane Neto; HOMA, Agostinho Iaqchan Ryokiti. Sequência Didática com Análise Combinatória no Padrão SCORM. **BOLEMA**, Rio Claro, v. 22, p. 27 - 56, n. 34 2009.

GUELLI, Oscar. **Matemática uma aventura do pensamento 5ª série**. 8ª. ed. São Paulo: Ática, v. 1, 1999.

KENSKI, Vani Moreira. **Educação e Tecnologias: o novo ritmo da informação**. 4. ed. Campinas: Papyrus, 2008.

LEDUR, Elsa Alice; HENNEMANN, Julia; WOLFF, Maria Stelita. **Metodologia do Ensino-Aprendizagem da Matemática nas Séries Iniciais do 1º grau**. São Leopoldo: Unisinos, 1988.

LELLIS, Marcelo; IMENES, Luiz Márcio. O currículo tradicional e a Educação Matemática. **A Educação Matemática em Revista**, Blumenau, n. 2, p. 5 - 12, 1994.

LE MOS, Andrielly Viana; SEIBERT, Tania Elisa; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. **Multiplicação no Números Naturais uma experiência no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA)**. Seminário Estadual de Pesquisa PPGECIM. Canoas: 2011.

LE MOS, Andrielly Viana; MONTEIRO, Alexandre Branco; SEIBERT, Tania Elisa. **Software livre JClick: explorando conceitos matemáticos através da criação de atividades lúdicas**. 2º Congresso Nacional de Educação Matemática; 9º Encontro Regional de Educação Matemática. Ijuí: Unijuí. 2011. p. 2.

LE MOS, Andrielly Viana; MONTEIRO, Alexandre Branco; SEIBERT, Tania Elisa; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. **Multiplicação no Números Naturais uma experiência no Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem (SIENA)**. Seminário Estadual de Pesquisa PPGECIM. Canoas: [s.n.]. 2011.

LE MOS, Andrielly Viana; SEIBERT, Tania Elisa; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. Sistema Integrado de Ensino e Aprendizagem com o tema multiplicação nos Números Naturais. **Revista de Iniciação Científica da ULBRA**, Canoas, p. 165-176, 2011.

LLINARES, Salvador Ciscar; SÁNCHEZ, Maria Victoria García. **Fracciones la relacion parte-todo**. Madrid: Sintesis, 1988.

LOPES, Antônio José. Matemática Hoje é feita assim. **Reflexões sobre o ensino de Frações no currículo de Matemática**, 2006. Disponível em: <<http://www.matematicahoje.com.br>>. Acesso em: Julho 2012.

LOPES, Antônio José. O que nossos alunos podem estar deixando de aprender sobre Frações, quando tentamos lhes ensinar Frações. **BOLEMA**, Rio Claro, v. ano 21, n. 31, p. 1 -22, 2008.

MARIO, Claudia et al. O reforço e a recuperação: parte integrante do processo de ensino e aprendizagem para o atendimento à diversidade de necessidade e de ritmos dos alunos. **Princípios e Métodos de Administração Escolar COPED**, São Paulo, 2007.

MARTINS, Lilian Al-Chuyer Pereira. A história da ciência e o ensino da Biologia. **Jornal Semestral do gepCE**, Campinas, n. 5, p. 18-21, dezembro 1998.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS MATHEMATICS. **Principios y Estándares para la Educación Matemática**. Tradução de Manuel Fernández Reyes. 1. ed. Sevilha: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2000.

NORCIA, Marcia Josefina. **A recuperação no processo de ensino-aprendizagem: legislação e discurso de professores**. 108 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo. São Paulo. 2008.

NOVAK, Joseph; GOWIN, D. Bob. **Apriendendo a aprender**. Barceloina: Martinez Roca, 1988.

NUNES, Karina Sales; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; SEIBERT Tania Elisa; HOMA, Agostinho Iaqchan Ryokiti. **Inovando o currículo de Matemática através da incorporação das Tecnologias da Informação e Comunicação – ambiente de investigação com o tema Números Decimais**. XVIII Salão de Iniciação Científica e Tecnológica. Canoas: ULBRA. 2012.

NOVA ESCOLA, Revista. **Nova ordem numérica**. São Paulo, n. Edição Especial 27, p. 72-75, Setembro 2009.

NUNES, Terezinha; CAMPOS, Tânia Maria Mendonça; MAGINA, Sandra; BRYANT, Peter. **Educação Matemática: números e operações numéricas**. São Paulo: Cortez Editora, 2009.

NUNES, Terezinha; BRYANT, Peter. **Crianças fazendo Matemática**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1997.

PAULA, Michele Gomes; NUNES, Silma Carmo. **O ProInfo na escola pública: apenas uma utopia? O que pensa o inspetor escola?** Universidade Federal de Uberlândia. Uberlândia, p. 1-11. 2009.

PINHEIRO, Antonio Marco. **Estratégias para o Design Instrucional de Cursos pela Internet: um estudo de caso**. Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, p. 96. 2002.

PONTE, João Pedro. Novas tecnologias na aula de Matemática. **Educação e Matemática**, Lisboa, n. 34, p. 2-7, 1995.

RIBEIRO, Jackson Silva. **Projeto Radix: matemática 6º ano**. 2. ed. São Paulo: Scipione, 2009.

RIO GRANDE DO SUL. Conselho Estadual de Educação. **Parecer nº 140/97**, Porto Alegre, 1997.

RIO GRANDE DO SUL. Conselho Estadual de Educação. **Parecer 740/99**, Porto Alegre, 1999.

RIO GRANDE DO SUL. Secretaria Estadual de Educação. **Lições do Rio Grande: Referencial Curricular Matemática e suas Tecnologias**, Porto Alegre, 2009.

ROBILOTTA, Manoel Roberto. O cinza, o branco e o preto - da revelância da história da ciência no ensino da Física. **Caderno Catarinense de Ensino de Física**, Florianópolis, n. 5, p. 7-22, junho 1988.

ROMISZOWSKI, Hélio Ciffone. Avaliação no Design Instrucional e Qualidade da Educação à Distância qual a relação? **Revista Brasileira de Aprendizagem Aberta e a Distância**, São Paulo, p. 1-7, fevereiro 2004.

SANDS, William A.; WATERS, Brian K. **Computerized adaptive testing: from inquiry to operation**. Washington: American Psychological Association, 1997.

SANTOS, Aparecido. **O conceito de Frações e seus diferentes significados: um estudo diagnóstico junto a professores que atuam no Ensino Fundamental**. 203 f. mestrado (educação matemática), PUC SP. São Paulo. 2005.

SANTOS, Maria Eduarda Vaz Moniz. **Mudança conceitual na sala de aula – um desafio pedagógico**. Lisboa: Livros Horizonte, 1991.

SÃO PAULO. Conselho Estadual de Educação. **Indicação nº 05/98**, São Paulo, 1998.

SEIBERT, Lucas Gabriel; GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira. **Ambiente de investigação uma proposta em um contexto B-Learning**. XI Encontro Gaúcho de Educação Matemática. Lajeado: Univates. 2012. p. 177-184.

SILVA, Angélica Fontoura Garcia. **O desafio do desenvolvimento profissional docente: análise da formação continuada de um grupo de professores da séries iniciais do Ensino Fundamental, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem de Frações**. 308 f. tese (doutorado em Educação Matemática), PUC SP. São Paulo. 2007.

SPINELLI, Walter; SOUZA, Maria Helena Soares. **Matemática Série Brasil**. São Paulo: Ática, v. 4, 2007.

VASCONCELOS, Isabel Cristina Peregrina. **Números Fracionários: a construção dos diferentes significados por alunos da 4ª a 8ª séries de uma escola do Ensino Fundamental**. Universidade Federal do Rio Grande do Sul. Porto Alegre, p. 104. 2007.

WAINER, Howard. **Computerized adaptive testing: aprimer**. New Jersey: Lawrence Erlbaum, 2000.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: Artemed, 1998.

ANEXOS

ANEXO A - AVALIAÇÃO TURMA 7A

AVALIAÇÕES DO 1º TRIMESTRE DISCIPLINA: Matemática 7º ano A

Nº	ALUNO(A)	05	05	10	10	30	30	90	90	10	NT
		1	2	ACC	ACC	ASC	ASC	NP	R	AE	
1		2	4	2	2	12	04	20	36	3	4
2		5	5	6	4,5	18	12	51	78	6	84
3		5	5	7	6	08	12	43	54	6	60
4		5	5	10	10	28	28	86	78	8	94
5		4	5	4	8	12	06	39	18	6	57
6		4,5	4	6	3	06	16	40	24	6	50
7		5	5	7	6	16	10	49	66	5	71
8		0,5	2	3	4,5	28	12	50	66	6	72
9		3,5	3	9	5	16	10	47	36	6	53
10		4,5	5	8	7	06	18	40	36	5	54
11		4,5	5	9	6	20	18	63	48	7	70
12		4,5	5	9	9	22	14	64	72	8	80
13		1	2	4	6	12	12	33	27	5	40
14		2	3	4	7	26	12	54	60	5	65
15		3	2	6	3	20	14	48	66	6	72
16		2,5	4	6	4,5	24	22	63	78	6	84
17		2	NIC	2	NIC	06	NIC	10	NIC	3	15
18		1	4	3	3,5	14	08	34	18	5	39
19		5	5	10	8	20	12	60	48	5	65
20		2	2	8	5	12	12	41	48	5	53
21		5	5	0	5,5	NIC	06	22	33	3	36
22		3,5	3	9	5	14	08	43	24	9	57
23		5	5	5	5	22	20	62	18	6	68
24		4,5	5	7	8,5	26	16	67	42	8	75
25		2	0	10	6,5	20	10	43	39	9	60
26		1,5	3	4	7	18	18	52	33	6	58
27		3	3	8	9	08	10	41	72	9	81
28		4,5	5	6	6	22	18	62	60	8	70
29		4	NIC	5	5	12	NIC	26	24	5	31
30		0,5	1	5	1,5	08	04	21	18	4	25
31		1,5	1	4	2,5	12	10	31	42	6	49
32		1	3	2	5	10	12	33	06	5	38
33		5	5	7	7	20	08	52	36	8	60
34		2	4	3	8,5	16	02	36	48	5	53
35		5	5	8	7	18	18	61	31	9	70
36		3	2	10	7,5	18	16	57	30	9	66
37		4,5	5	9	7	26	22	74	60	9	83
38		4,5	5	5	5,5	30	09	59	42	6	65
39		3	2	5	4,5	NIC	10	25	36	5	41
40											
41											
42											
43											
44											
45											

1 - Testes de Tabuada (09/05/12 e 30/05/12). ACC - Trabalho - 10/05/12
 2 - Teste de Tabuada (18/05/12) ASC - Prova 1 - 18/04/12
 ACC - Atividades em Aula e Temas. ASC - Prova 2 - 18/05/12
 ACC: avaliação com consulta (total 30 pontos) - ASC: avaliação sem consulta (total 60 pontos) - NP: nota parcial (acc+asc= 90 pontos) - R: recuperação (total 90 pontos) - AE -avaliação de empenho (10 pontos) - NT: nota trimestral (total 100 pontos)

ANEXO B - AVALIAÇÃO TURMA 7B

AVALIAÇÕES DO 1º TRIMESTRE DISCIPLINA: Matemática 7º ano B

Nº	ALUNO(A)	05	05	10	10	30	30	90	90	10	NT
		1	2	ACC	ACC	ASC	ASC	NP	R	AE	
1		3	5	8	5	24	16	61	66	7	73
2		4	5	8	8	22	12	59	48	10	69
3		5	5	7	10	22	24	73	78	5	83
4		25	5	6	5	16	08	43	36	4	47
5		35	4	8	65	14	NIC	36	42	6	48
6		4	4	6	2	08	14	38	27	8	46
7		5	5	9	75	16	18	61	57	9	70
8		3	4	5	5,5	15	20	53	30	5	58
9		4	NIC	8	5,5	10	06	34	NIC	5	40
10		2	4	6	6	20	12	50	42	5	55
11		3	4	8	8	18	16	57	60	5	65
12		3	5	7	10	14	10	49	42	7	56
13		4,5	5	8	9	24	16	67	54	8	75
14		25	5	8	7	20	14	57	48	9	66
15		4,5	3	10	9	20	17	64	66	10	76
16		35	5	9	5,5	16	20	54	66	6	72
17		5	5	5	7,5	16	22	61	54	6	66
18		5	5	7	7	28	16	68	60	8	76
19		4	2	3	25	16	NIC	24	36	3	40
20		4	5	6	75	24	NIC	47	30	5	52
21		35	5	4	4	18	12	47	48	3	51
22		25	5	4	9	20	16	57	60	3	63
23		15	NIC	20	8	29	NIC	39	NIC	5	44
24		1	3	4	1	14	06	29	06	4	35
25		5	5	3	5	22	22	62	66	4	70
26		15	4	8	6	16	08	44	18	7	51
27		2	5	7	9	28	22	73	78	7	85
28		4	5	2	4	06	04	25	30	3	33
29		5	4	4	8	NIC	12	33	78	6	84
30		35	5	7	1	28	18	63	54	7	70
31		1	5	8	95	16	20	60	48	7	67
32		4	5	8	95	27	16	70	78	9	87
33		3	5	9	9	26	20	72	78	10	88
34		25	NIC	6	6	NIC	14	NIC	24	06	35
35		05	2	7	8	19	12	49	36	08	57
36		15	4	6	7	18	16	53	42	06	60
37											
38											
39											
40											
41											
42											
43											
44											
45											

1 - Teste de Tabuada (03/03/12 e 30/03/12) ACC - Trabalho - 13/03/12
 2 - Teste de Tabuada (13/05/12) ASC - Prova 1 - 16/04/12
 ACC - Atividades em Aula e Temas ASC - Prova 2 - 14/05/12
 ACC - avaliação com consulta (total 30 pontos) - ASC: avaliação sem consulta (total 60 pontos) - NP: nota parcial
 (acc+asc= 90 pontos) - R: recuperação (total 90 pontos) - AE -avaliação de empenho (10 pontos) - NT: nota trimestral
 (total 100 pontos)

ANEXO C - CONVITE PARA PARTICIPAR DO EXPERIMENTO

E M E FIRMÃO PEDRO
CONVOCAÇÃO

Senhores Responsáveis!

Comunicamos que sua filha....., turma: 7º Ano A, está convocada a participar das aulas de reforço de matemática que acontecerão todas as quartas-feiras das 14h às 16h a partir do dia 02/05/2012, no laboratório de informática.

Professora Geanice – 23/04/2012

APÉNDICES

APÊNDICE A - SEQUÊNCIA DIDÁTICA ELETRÔNICA DE FRAÇÕES

APÊNDICE B - BANCO DE QUESTÕES

APÊNDICE C - AUTORIZAÇÃO PARA USO DE IMAGEM E SOM

AUTORIZAÇÃO PARA USO DE IMAGEM E VOZ

Pelo presente instrumento eu, _____, inscrito/a no RG sob o nº _____ e no CPF sob o nº _____, residente e domiciliado a _____ no município de Canoas – RS, abaixo assinado/a, autorizo por ser o responsável legal, a Escola Municipal de Ensino Fundamental Irmão Pedro e a Universidade Luterana do Brasil – ULBRA usar para pesquisa a imagem e depoimento do/a menor _____, sejam essas destinadas à divulgação da pesquisa da escola e universidade e/ou apenas para circulação interna.

Para fins desse termo, entende-se como imagem qualquer forma de representação, inclusive a fotográfica, bem como processo audiovisual que resulta da fixação de imagens, com ou sem som, que tenha a finalidade de criar, por meio de sua reprodução, a impressão do movimento, independente dos processos de captação, do suporte usado na inicial ou posteriormente para fixá-lo, bem como dos meios utilizados para a sua veiculação.

Canoas, ____ de _____ de 2012.

Assinatura do responsável

APÊNDICE D - FICHA DE PERFIL DE ALUNOS

**Projeto Observatório da Educação do Programa de Pós- Graduação em Ensino de
Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil**

Ficha de Perfil de alunos

Nome da escola:

Nome do aluno:

Idade: Sexo: Ano escolar/Série:

Repetente? Sim () Não ()

Se repetente, em qual série/ano e disciplina?

Utiliza computador com qual frequência? () nunca () às vezes () sempre

Seu professor de Matemática utiliza o Laboratório de Informática? Sim () Não ()

Já realizou alguma atividade de Matemática no Laboratório de Informática? Sim () Não ()

Qual a sua opinião sobre o trabalho desenvolvido?

Quais as dificuldades encontradas no trabalho desenvolvido?