UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

ANÁLISE DE ERROS PRODUZIDOS POR ESTUDANTES DE UM CURSO DE ENGENHARIA CIVIL NA DISCIPLINA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

ALBANO DIAS PEREIRA FILHO

Profa. Dra. Carmen Teresa Kaiber - Orientadora

Canoas,

2012

ALBANO DIAS PEREIRA FILHO

ANÁLISE DE ERROS PRODUZIDOS POR ESTUDANTES DE UM CURSO DE ENGENHARIA CIVIL NA DISCIPLINA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Carmen Teresa Kaiber

Canoas,

2012

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação – CIP

P436a Pereira Filho, Albano Dias.
Análise de erros produzidos por estudantes de um curso de Engenharia Civil na disciplina de Cálculo diferencial e integral I / Albano Dias Pereira Filho. – 2012.
118 f.: il.

Dissertação (mestrado) - Universidade Luterana do Brasil, Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Canoas, 2012.
Orientadora: Profa. Dra. Carmen Teresa Kaiber.

1. Ensino de matemática. 2. Erro construtivo. 3. Análise de erros. 4. Cálculo diferencial e integral. I. Kaiber, Carmen Teresa. II. Título.

Bibliotecária responsável: Simone da Rocha Bittencourt CBR/10-1171

ALBANO DIAS PEREIRA FILHO

ANÁLISE DE ERROS PRODUZIDOS POR ESTUDANTES DE UM CURSO DE ENGENHARIA CIVIL NA DISCIPLINA DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL I

Dissertação de Mestrado apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para a obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

BANCA EXAMINADORA

Profa. Dra. Helena Noronha Cury
Centro Universitário Franciscano - UNIFRA

Profa. Dra Claudia Lisete Oliveira Groenwald
Universidade Luterana do Brasil - ULBRA

.

Prof. Dr. Arno Bayer
Universidade Luterana do Brasil - ULBRA

Canoas, 20 de Novembro de 2012

RESUMO

Diante da percepção da importância do erro como um instrumento que pode viabilizar a construção de conhecimentos, a presente investigação tem como foco investigar e analisar erros cometidos por um grupo de acadêmicos do Curso de Engenharia Civil da Faculdade Presidente Antônio Carlos-*Campus* de Porto Nacional/TOFAPAC, na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. A investigação se coloca em uma perspectiva qualitativa, sendo que a análise dos erros foi realizada com base na tipologia de Movshovitz-Hadar et al. (1987). A metodologia de análise adotada segue as orientações obtidas em Cury (2004). Os erros analisados constam de um Teste Inicial realizado pelos estudantes e das provas institucionais aplicadas normalmente no semestre letivo da unidade (em número de três). Análises realizadas, a partir da produção dos estudantes nos referidos instrumentos, apontam para uma prevalência de erros ligados à linguagem mal interpretada, aliado a definição distorcida de teorema e inferência lógica inválida. Os resultados obtidos, além de indicarem caminhos para a elaboração de possíveis estratégias de ensino, foram capazes de fornecer ao próprio professor, a possibilidade de uma reflexão quanto à metodologia de ensino antes adotada, oportunizando ao educador adotar a análise de erros no processo diário de ensino da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, além das demais disciplinas. Entende-se que a análise de erros pode se constituir em importante instrumento para orientar o professor na sua ação pedagógica no sentido não de evitá-los, mas de utilizá-los como possibilidade de reestruturação de ideias e construção de conhecimentos.

Palavras-chave: Erro em Matemática. Erro Construtivo. Análise de erros e Ensino de Matemática.

ABSTRACT

Given the perceived importance of the error as a tool that can enable the students to construct knowledge, this research focuses on investigating and analyzing errors made by a group of students from the Civil Engineering Course in University President Antonio Carlos Porto Nacional - Campus / TO FAPAC the discipline of Differential and Integral Calculus I. The investigation arises in a qualitative perspective, and the error analysis was based on the typology of Movshovitz-Hadar et al. (1987) which addresses the difficulties associated with the procedures in resolving issues. The analysis methodology used follows the guidelines obtained in Cury (2004). The errors analyzed consist of an initial test performed by students and evidence of institutional normally applied in semester unit (three in number). Analyzes, from the production of students in those instruments, points to a prevalence of errors in language misunderstood, coupled with the misuse of the data and logical inference invalid. The results, besides indicating avenues for the development of a teaching strategy, were able to provide the teacher himself, the possibility of a reflection on the teaching methodology adopted before, giving opportunity educator to adopt the analysis of errors in the process diary teaching of Differential and Integral Calculus I, in addition to other disciplines. It is understood that the error analysis can be an important tool to guide teachers in their pedagogical action in order not to avoid them, but to use them as a possible restructuring of ideals and knowledge construction.

Keywords: Error in Mathematics. Constructive error. Error Analysis and Teaching of Mathematics.

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Cury (2007) considera que a análise de erros pode se constituir em uma abordagem de pesquisa e também em uma metodologia de ensino, se empregada em sala de aula com o objetivo de levar o aluno a questionar suas próprias soluções. Além disso, a autora pondera que, em uma perspectiva pessoal, detectar e avaliar a ocorrência de erros ajuda o professor na sua autoanálise e uma possível correção sobre sua metodologia, ineficiência ou inabilidade para ensinar.

Segundo Pinto (2000), no processo de ensino e aprendizagem, o erro pode contribuir positivamente, desde que seja modificada, pelo educador, a atitude de condenação ao aluno como se esse fosse o único culpado pelo erro. Pondera, ainda, que os erros podem se constituir em caminhos importantes para se inserir novas metodologias no ensino da Matemática. Os erros, se tomados não como uma incapacidade do aluno, mas no contexto de uma visão e postura que os problematize, em que os procedimentos sejam mais valorizados que os resultados, podem se constituir em um caminho para a aprendizagem. Dessa forma, se entende pertinente refletir sobre ideias, concepções e posturas acerca do papel do erro no processo de ensino e aprendizagem e da construção de conhecimentos, investigando e buscando alternativas para o enfrentamento deste.

A autora pondera, ainda, que o homem, por sua natureza, tem errado e continuará errando, porém, é a capacidade de aprender com os erros e com os fracassos que o torna diferente das demais espécies. Nessa perspectiva é posta a questão da pesquisa, a qual norteia a presente investigação: Qual a contribuição da análise dos erros cometidos por estudantes do Curso de Engenharia Civil da FAPAC (Faculdade Presidente Antônio Carlos), para o processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral no referido curso?

Entende-se que a questão apresentada oportuniza o estabelecimento de um espaço de reflexão e discussão, o qual possibilite elucidar aspectos que envolvam o erro na perspectiva escolar, particularmente, no trabalho com o Cálculo Diferencial e Integral em cursos de Engenharias buscando respostas a questionamentos como: Quais os tipos de erros recorrentes no trabalho com os conceitos Cálculo? É viável em uma disciplina de curso superior promover a análise crítica dos erros cometidos? Qual o papel do professor no tratamento dado ao erro dos estudantes?

Assim, considera-se pertinente buscar, na análise da produção dos acadêmicos no trabalho com o Cálculo Diferencial e Integral, a possibilidade de constituir uma metodologia com o intuito de identificar, classificar e analisar os possíveis erros, assim como as dificuldades encontradas na aprendizagem em Matemática.

Nesse contexto, a presente pesquisa tem como objetivo investigar e analisar os erros cometidos pelos acadêmicos do Curso de Engenharia Civil da Faculdade Presidente Antônio Carlos - FAPAC, Campus de Porto Nacional – TO, na resolução de problemas de Cálculo Diferencial e Integral e identificar as dificuldades que os levaram a cometê-los e as possíveis formas de utilizá-los na reconstrução de conhecimentos próprios da disciplina.

Concordando com os autores já mencionados, a análise de erros no processo de ensino e aprendizagem pode se constituir em fonte de descoberta das múltiplas facetas desse processo, de maneira a caracterizar não mais o erro associado ao fracasso, mas sim o erro aliado a novas possibilidades de aprendizagem, de êxito ou de acerto.

Teoricamente a investigação busca respaldo em autores como Cury (2004, 2007), Pinto (2000), Souza (2002), Rico (1995), Radatz (1979, 1980), Borasi (1996), Socas (1997), Movshovitz-Hadar et al. (1987), os quais têm investigado, refletido e teorizado sobre a questão. A discussão teórica é apresentada no primeiro capítulo da presente dissertação.

No segundo capítulo é apresentada a investigação, destacando-se os objetivos, os sujeitos pesquisados, os instrumentos e os procedimentos de coleta de dados. A investigação, de cunho qualitativo, busca na proposta de Cury (2004) os subsídios para os procedimentos referentes à análise de erros, sendo que os erros identificados são categorizados com base na proposta de Movshovitz- Hadar et al. (1987).

Já o terceiro capítulo apresenta, discute e analisa os dados coletados ao longo do processo de investigação.

Por fim, são apresentadas as considerações finais, as quais têm como base as discussões teóricas, as metodológicas e os resultados obtidos a partir do estudo. São feitas considerações sobre a investigação realizada, bem como, reflexões sobre a natureza do trabalho e sobre as dificuldades de realização da pesquisa.

1 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

"A aprendizagem não começa com a ignorância, mas com o erro".

M. Oakesholtt

Os estudos sobre as dificuldades no ensino e na aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral nos cursos superiores, em especial de Engenharia, como são relatados em Cury (2007), e a atenção dada para esta questão se dá, principalmente, em razão do alto nível de reprovação encontrado nesta disciplina (MALTA, 2004). Estas dificuldades remetem à necessidade de uma avaliação criteriosa sobre os reais motivos da sua ocorrência e que são expressas, em parte, nos erros cometidos pelos alunos. Tais erros necessitam ser tratados de maneira a elucidar as ocorrências detectadas.

Assim, segundo Cury (2007), é pertinente considerar a análise de erros como uma linha de pesquisa em caráter de diagnóstico, uma vez que é possível entender como se dá o processo do conhecimento dos alunos através da análise de suas respostas. Assim, o estudo dos erros dos alunos se torna importante no processo de superação dos obstáculos de aprendizagem, já que é a partir da análise de tais erros que se pode diagnosticar e, consequentemente, atuar na correção dos problemas de ensino e aprendizagem encontrados.

Mesmo diante de todo o histórico e do substancial crescimento na produção científica na área de Educação Matemática, Cury (2007) afirma que a Matemática continua, ainda, representando a disciplina com menor índice de aproveitamento, considerando os índices das avaliações nacionais, como, por exemplo, o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB) e avaliações internacionais como, Programme for International Student Assessment (PISA). A identificação e análise dos erros dos alunos podem contribuir na solução dos problemas de aproveitamento escolar, na medida em que se constituem em instrumentos de auxílio e acompanhamento no processo de construção do conhecimento, fornecendo, como consequência, subsídios suficientes e eficazes na promoção das mudanças necessárias para reversão do quadro mencionado.

Nesta ótica, o papel do erro, se tratado de forma adequada, analisado e trabalhado, pode passar a ser protagonista da construção de melhorias do rendimento dos alunos e consequentemente da qualidade do ensino. Assim, a identificação dos erros constitui-se em importante ferramenta para diagnosticar, identificar e corrigir as principais causas das dificuldades surgidas no processo de ensino e aprendizagem. Nesse sentido, Souza (2002) ainda afirma que:

> [...] através da identificação e análise dos erros cometidos pelos alunos, o professor pode planejar uma intervenção adequada no sentido de tornar o erro observável ao aluno, levando-o a tomar consciência do seu erro, oferecendo-lhe condições de refletir e compreender onde e porque errou lutar para superá-lo e retomar o seu processo de construção do conhecimento matemático (SOUZA, 2002, p.12-13).

Na visão da autora, a identificação do erro é considerada como uma ferramenta metodológica de ensino na medida em que contribui para o crescimento intelectual do aluno e auxilia o professor a formular e identificar a melhor forma de atuação, tanto na correção quanto na aplicação de novos conteúdos.

Com o objetivo de melhor apresentar as discussões vindouras, este capítulo foi organizado no intuito de promover a reflexão sobre o significado do erro na construção de uma educação de qualidade, em que serão abordadas as ideias dos principais autores sobre o tema, considerando aspectos históricos referentes à análise de erros e análise das diferentes abordagens sob as quais os erros, na perspectiva educativa, têm sido enfocados. O objetivo é que tais levantamentos forneçam os subsídios suficientes para um melhor entendimento e análise sobre a questão dos erros, desencadeando um pensamento crítico sobre o tema por meio de questionamentos que possam promover mudanças e construir saberes no processo de ensino.

Libâneo (1994) afirma que a qualidade do ensino é inseparável das características individuas de cada aluno, sejam elas econômicas, socioculturais ou psicológicas. O autor afirma que a qualidade sempre está relacionada às coisas, aos processos, aos fenômenos ou às pessoas, o que significa que qualquer programa que vise melhorar a qualidade de ensino deve, prioritariamente, considerar as condições individuais, incluindo a realidade econômica de cada estudante. Em outras palavras, o fracasso escolar não é intrínseco somente a fatores metodológicos ou conceituais de ensino, mas captam fatores externos ao ambiente escolar que contribuem ou prejudicam a aprendizagem. Um exemplo desses fatores são os indicadores sociais, como classe social, condições de habitação, saneamento e saúde.

Pinto (2000) citando Luckesi[1] (1995), Ludke e Mediano[2] (1992), concorda que a análise dos erros deve se inserir numa perspectiva sociológica:

---

[1] LUCKESI, Cipriano Carlos. **Avaliação da Aprendizagem Escolar**: estudos e proposições. São Paulo: Cortez, 1995.
[2] LUDKE, Hermengarda; MEDIANO, Zélia. **O processo de avaliação dentro da escola**. Campinas: Papirus, 1992.

> Nesse sentido, as relações sociais nas quais a aprendizagem se desenvolve desempenham um papel importante, pois muitas falhas não são resultado de uma aprendizagem deficiente, mas da relação social em que esta desenvolve. Libertar um erro do aluno requer não apenas que o professor preste atenção ao erro que o aluno cometeu, mas também ao próprio aluno. Nessa perspectiva, o erro do aluno deve possibilitar a eliminação de toda ordem de coerção e desvalia pelo fracasso em matemática. Os fatores institucionais que afetam as práticas docentes em relação à avaliação. A burocracia interna das escolas pode favorecer muito mais um processo de controle do que um processo de mudança [...] (PINTO, 2000, p.63).

Assim, avaliar a aprendizagem dos estudantes em Matemática pode ser uma tarefa árdua para os profissionais da educação, principalmente, devido à complexidade e multidisciplinaridade própria da educação, em especial em uma disciplina que carrega o estigma de conteúdo difícil de ser assimilado, o que pode ser traduzido por baixo aproveitamento e rendimento, corroborados pelos altos índices de reprovação encontrados desde as séries básicas da educação até o ensino superior.

É notável, dessa forma, que há a necessidade de uma reflexão e propostas de mudanças no processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Matemática com foco, em um primeiro momento, nos agentes envolvidos tais como pais, professores, alunos e toda comunidade escolar, com o objetivo de construir uma identidade para o conhecimento matemático a ser ensinado na escola. Em um segundo momento, paralelo a essa reconstrução de pensamento e atitude, a criação de metodologias de ensino que incluam uma leitura das reais necessidades dos alunos e professores, a construção de saberes aplicados ao cotidiano e o uso de uma linguagem facilitada e atual que contribua com o entendimento dos alunos.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (BRASIL, 2000) ratificam tal pensamento, quando mencionam que:

> A atividade matemática escolar não é "olhar para coisas prontas e definitivas", mas a construção e a apropriação de um conhecimento pelo aluno, que se servirá dele para compreender e transformar sua realidade.
> [...] a aprendizagem em Matemática está ligada à compreensão, isto é, à apreensão do significado; aprender o significado do objeto ou acontecimento pressupõe vê-lo em suas relações como outros objetos e acontecimentos. Assim, o tratamento dos conteúdos em compartimentos estanques e numa rígida sucessão linear deve dar lugar a uma abordagem em que as conexões sejam favorecidas e destacadas. O significado da Matemática para o aluno resulta das conexões que ele estabelece entre ela e as demais disciplinas, entre ela e seu cotidiano e das conexões que ele estabelece entre os diferentes temas matemáticos (BRASIL, 2000, p. 20-21).

Nesse sentido, concorda-se com Cavasotto (2010) quando afirma que o aluno deve representar o principal foco neste processo de transformação, não somente como um receptor de informações, mas sim como protagonista da construção do próprio conhecimento, já que é a partir de suas interpretações e da importância e significado atribuídos a estas que, de fato, se constrói o verdadeiro saber. Para o autor, deve-se ter o cuidado em não apresentar a educação como algo estático e pré-estabelecido, para não se correr o risco de generalizar o conhecimento específico, principalmente em função da diversidade de pensamentos e personalidades. Tal saber deve, então, atender a todas as demandas, mesmo que específicas, mostrando, assim, que a educação sempre evolui de acordo com a evolução e as exigências humanas.

Desse modo, dar prioridade à construção do conhecimento a partir das experiências individuais parece ser uma proposta adequada, já que essas experiências, aliadas a novos conhecimentos, podem acrescentar ao individuo a possibilidade de uma nova visão e interpretação da realidade. Para este processo não há limites, ou seja, o conhecimento é contínuo e enriquecedor na medida da vivência de novas experiências e realidades.

O entendimento apresentado de que as propostas educativas devem considerar as experiências, vivências e manifestações individuais dos estudantes, constituem-se no cenário propício para se tomar a análise dos erros cometidos por esses estudantes como um dos fatores que podem contribuir para a elaboração de propostas e caminhos metodológicos que venham a interferir, de maneira positiva, no seu processo de aprendizagem. Nesse sentido, entende-se ser pertinente um estudo sobre a história da análise de erros na Educação Matemática, o que passa a ser realizado.

1.1 ANÁLISE DE ERROS EM MATEMÁTICA

Autores como Radatz (1979), Borasi (1996), Cury (2007) e Rico (1995) fazem uma retrospectiva analítica de pesquisa em Educação Matemática envolvendo análise de erros. Esses levantamentos datam as primeiras pesquisas sobre essa temática, tanto no exterior como no Brasil.

Conhecer a história da origem e do desenvolvimento dos estudos sobre a análise de erros no trabalho com a Matemática, além de contribuir para a apropriação de tais conhecimentos, possibilita, também, uma reflexão sobre a questão. Essa reflexão leva a questionamentos não só em relação aos aspectos e fatores que envolvem os estudantes, mas, principalmente, sobre a visão que os educadores têm do papel do erro e como este é tratado no processo educativo.

Entende-se que uma compreensão dos erros cometidos pelos estudantes na realização de tarefas matemáticas e dos fatores que os desencadeiam quando colocados sob uma perspectiva que considere os estudos e os conhecimentos já gerados, podem contribuir para a construção de estratégias didáticas que os coloquem como possibilidade de novas aprendizagens e não como atestado de fracasso.

Rico (1995) pondera que erros fazem parte da produção dos estudantes durante sua aprendizagem em Matemática, constituindo-se em dados objetivos passíveis de serem encontrados permanentemente no processo de ensino e aprendizagem da disciplina, convertendo-se em elementos estáveis de tais processos.

O autor apresenta um histórico sobre os antecedentes dos estudos de erros na Alemanha, União Soviética e Estados Unidos, tomando como referência o trabalho de Radatz (1980), indicado, por ele, como clássico.

Destaca, na Alemanha, Weiner como o fundador da investigação didática orientada para o estudo de erros, o qual realizou um trabalho no período entre guerras, alimentado pelo desenvolvimento da psicologia experimental e das técnicas de introspecção. Aponta que, em seu trabalho, Weiner tratou de estabelecer padrões de erros que explicassem os equívocos individuais em todas as matérias e para todos os grupos de idades escolares. Dentro do conceito geral de “incorreto”, estabeleceu a distinção entre equivocado, falseado e errado. Também agrupou os erros em cinco categorias: erros familiares, persistentes, por similaridade, mistos e devidos a situações emocionais.

Rico (1995) aponta, também, na Alemanha, os trabalhos de Kiessling que tratava da análise do que chamava da predisposição ao erro, de Seseman o qual distinguiu três tipos de erros - mecânicos, associativos e funcionais - e propôs fundamentação psicológica para orientar o ensino da Matemática. Somam-se a esses, os trabalhos de Rose, Schlaak, Glück e Pippig, principalmente nos estudos sobre causas dos erros nos diferentes estágios, ou etapas quando da resolução de problemas. Destaca-se o trabalho de Schlaak, o qual faz referência à dificuldade de compreensão dos enunciados matemáticos; enquanto que Glück, assim como outros autores, buscou identificar tipos de erros, entre eles: confusão de sinais em operações, erros de aproximação nas operações, falta de conclusão dos problemas ou resoluções parciais, parte das operações corretas e, por último, erro de transcrição.

Com relação à União Soviética, Rico (1995) aponta que, na década de 60, se consolidou um campo de investigação sobre educação matemática. Entre os estudos realizados estava o estudo sobre análise de erros dos estudantes e as dificuldades individuais de aprendizagem escolar. O autor destaca os estudos de Kuzmitskaya, que se preocupou em identificar diferentes tipos de erros, entre eles: insuficiência de memória de curto prazo, falta de compreensão tanto dos enunciados quanto das condições de desenvolvimento dos problemas, insuficiência de regras verbais para realização dos cálculos e uso incorreto das operações matemáticas.

A tradição investigativa sobre análise de erros em educação matemática nos Estados Unidos inicia, de acordo com Rico (1995), com os trabalhos de Buswell e Judd, os quais buscaram identificar uma multiplicidade de tipos de erros nas quatro operações aritméticas, adotando um método de análise mais completo que incluía, além de exercícios escritos, observações em aula e entrevistas para diagnóstico. Porém, o autor destaca que Thorndike, com sua Psicologia da Aritmética, realizou um dos primeiros trabalhos mais completos sobre determinação de erros.

Aponta, ainda, nos Estados Unidos, o trabalho de Brueckner, cujos objetivos de investigação eram: listar técnicas potencialmente errôneas, determinando a distribuição de frequência dessas técnicas por grupos de idades; analisar dificuldades especiais, em particular as que envolviam operação de divisão e operações com zero; determinar a persistência de técnicas errôneas individuais e classificar e agrupar os erros. Essa corrente de investigação continuou em Engelhard Lankford e Cox . De acordo com o autor, novas correntes surgiram, como o ensino por diagnóstico em Matemática desenvolvida por Ashlock, Reisman, Robitaille e o inglês Bell .

Rico (1995) destaca, também, a escola espanhola com Villarejo e Fernández Huerta, ainda na década de 50. Esses autores direcionaram seus estudos para diagnosticar os erros mais usuais em aritmética escolar, com o objetivo de apresentar bases para o ensino em aritmética, considerando métodos diagnósticos derivados dos erros detectados. Menciona, também, o trabalho de Centeno, o qual aponta a necessidade de interpretar os erros para orientar o processo de ensino.

Ainda considerando uma retrospectiva dos trabalhos sobre análise de erros, Cury (2007) apresenta uma compilação dos principais trabalhos a partir de uma coleta de artigos, teses, dissertações e comunicações em congressos produzidas no exterior e no Brasil por, aproximadamente, 20 anos e que, entende-se, se constitui em uma visão bastante completa e atualizada do estado da arte sobre a questão.

O quadro da Figura 1, reproduzido de Cury (2007), apresenta um apanhado de diversos trabalhos estrangeiros sobre análise de erros em Matemática, destacando o conteúdo abordado, ano de escolaridade ou faixa etária dos participantes, ano de divulgação e país de origem dos autores. Os trabalhos produzidos no Brasil serão apresentados posteriormente.

Figura 1 - Trabalhos sobre erros em Matemática de autores estrangeiros

Autores	País de origem do(s) autor (es) ou dos alunos investigados	Ano de divulgação do trabalho	Ano de escolaridade, curso ou faixa etária dos participantes	Conteúdo abordado
Smith	Estados Unidos	1940	10º ano	Demonstrações de geometria
Hutcherson	Estados Unidos	1975	6º ano	Problemas de aritmética
Kent	Inglaterra	1978	11 a 19 anos	Variado
Radatz	Alemanha	1979	-	Classificação de erros
Clements	Austrália	1980	6º ano	Problemas de aritmética
Bessot	França	1980	6 e 7 anos	Noção de número natural
Movshovitz-Hadar; Inbar e Zaslavsky.	Israel	1986	11º anos	Demonstração de geometria
Galleti	Itália	1989	11 a 14 anos	Geometria plana e propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição
Borasi	Estados Unidos	1989	Curso de formação de professores	Definições de circunferência
Sanchez	Espanha	1990	-	Concepções errôneas
Guillermo	México	1992	14 a 20 anos	Álgebra
Aguilar	México	1994	11 a 13 anos	Razão e proporção
Gómez	Espanha	1995	Curso de formação de professores	Cálculo mental
Esteley; Villarreal	Argentina	1996	Ensino Universitário	Funções, limites, continuidade.
Bin Ali e Tall	Malásia	1996	Não específico	Derivadas e integrais
Mancera	México	1998	Não específico	-
Engler *et. al.*	Argentina	2004	Não específico	Classificação de erros
Pochulu	Argentina	2004	Pré-universitário	Variado
Del Puerto; Minnaard e Seminara.	Argentina	2006	Pré-Universitário e início de curso superior	Álgebra e funções
Shechter	Estados Unidos	2006	Ensino Universitário	Variado

Fonte: Cury (2007, p. 43)

Entre os autores apontados pela autora e apresentados no quadro da Figura 1, destacam-se, aqui, os trabalhos de Radatz (1979), Borasi (1996) e Movshovitz-Hadar et al. (1987).

Radatz (1980) afirma que os erros dos estudantes em Matemática não são meramente resultados de ausência de conhecimentos ou de acidentes situacionais. Considera que a ocorrência desses erros, ou partes deles, também não é em razão da incerteza, da desatenção, ou unicamente das situações condicionais, mas sim, resultado ou fruto da experiência precedente na aula de Matemática.

O autor destacou os erros dos estudantes como casualmente determinados e muito frequentemente sistemáticos e que os mesmos são e serão persistentes por vários anos na escola, a menos que haja uma intervenção pedagógica do professor. Podem ser analisados e descritos como erros técnicos; podem ser derivados, a respeito de suas causas, de determinadas dificuldades experimentadas por estudantes, enquanto recebem e processam a informação no processo de aprendizagem matemática ou dos efeitos da interação das variáveis que agem no ensino de matemática (estudantes, currículo, professores, escola e ambiente, etc.).

Radatz (1980), em uma ampla revisão bibliográfica, classifica os erros a partir dos procedimentos do aluno, propondo cinco categorias:

- erros devido à dificuldade na linguagem: são apresentados na utilização de conceitos e símbolos matemáticos e ao efetuar a passagem da linguagem corrente para linguagem matemática;
- erros devido a dificuldades para obter informação espacial (dificuldade em obter informação a partir de representações gráficas): aparecem na representação espacial de uma situação matemática ou um problema geométrico;
- erros devido a uma aprendizagem deficiente de fatos, habilidades e conceitos prévios (deficiência de pré-requisitos): são os cometidos por deficiência na manipulação de algoritmos, fatos básicos, procedimentos, símbolos e conceitos matemáticos;
- erros devido a associações incorretas ou rigidez de raciocínio: são causados pela falta de flexibilidade no pensamento para adaptar-se a novas situações; compreendem por persistência, erros de associação, de interferência e de assimilação;
- erros devidos à aplicação de regras ou estratégias irrelevantes: são produzidos por aplicação de regras ou estratégias semelhantes em diferentes conteúdos.

Segundo o autor, os erros dos estudantes esclarecem dificuldades individuais e mostram o que o estudante não compreendeu determinados conceitos, técnicas, problemas. A partir da análise desses erros, podem manifestar-se falhas do processo de resolução dos problemas fornecendo informações importantes, que abrangem as atitudes frente a problemas matemáticos. Além disso, a análise de erros ganha importância no que diz respeito às exigências de uma avaliação sobre a metodologia de ensino adotada, o que permite lançar um olhar não só para o estudante, mas, também, sobre o trabalho desenvolvido pelo professor.

Assim, segundo Radatz (1980), torna-se pertinente investigar e analisar os erros cometidos na resolução de questões de Matemática, desde que os mesmos se tornem pontos de pesquisa sobre o processo de ensino e aprendizagem da Matemática, buscando, na análise de erros, uma promissora estratégia de pesquisa para esclarecer perguntas fundamentais no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

Outro trabalho sobre erros foi desenvolvido por Movshovitz- Hadar et al. (1987), a partir da análise de erros cometidos por alunos de Ensino Secundário. Nesse trabalho, os autores propuseram uma classificação dos erros em termos de sua manifestação operacional, ou seja, pela maneira através da qual o erro se manifesta objetivamente na resolução apresentada pelo aluno. Essa análise serviu inicialmente para fazer emergir as categorias e, posteriormente, para refiná-las e validá-las.

O modelo de análise de erros proposto por Movshovitz-Hadar et al. (1987) foi elaborado considerando a análise dos erros apresentados por estudantes de Israel em um exame nacional, aplicado ao final do correspondente Ensino Médio brasileiro (estudantes em torno dos 17 anos). Aproximadamente 20.000 alunos fazem exame de matemática em cada ano. A investigação considerou os exames de dois anos consecutivos, a partir da análise das soluções dadas a 18 itens abertos do teste, os quais cobriam os seguintes tópicos: funções linear e quadrática, equações linear e quadrática, potências e logaritmos, séries aritméticas e geométricas, geometria plana e sólida, estatística elementar, probabilidade e trigonometria.

Ainda sobre o modelo, os autores afirmam que seu desenvolvimento e aplicação podem contribuir com professores e instituições na prevenção e superação de dificuldades e obstáculos no processo de ensino, pois, proporciona o desenvolvimento de habilidades no processo de planejamento de modo que seja possível diminuir os erros cometidos pelos alunos. Além disso, os autores afirmam que os professores podem usar o modelo na identificação das tendências persistentes de cada aluno para cometer determinados tipos de erros em cada conteúdo matemático. Esta ferramenta sugere um plano específico de atuação na correção antecipada da ocorrência dos erros.

Os erros foram classificados por Movshovitz-Hadar et al. (1987) nas seguintes categorias: uso errado dos dados, linguagem mal interpretada, inferência lógica inválida, definição ou teorema distorcido, solução não verificada e erros técnicos. Apresentam-se as seis categorias descritas pelos autores a partir de seus elementos característicos e seguidos por um exemplo, quando possível. Ressalta-se, baseado nos autores, que os elementos característicos não são, necessariamente, independentes. Destaca-se, ainda, que a descrição feita a seguir, bem como os exemplos dados, foram tomados de Movshovitz-Hadar et al (1987).

Uso errado dos dados - esta categoria inclui erros que podem estar relacionados a alguma discrepância entre os dados apresentados no item/problema e como os alunos os trataram. Os principais elementos característicos são:

- designar como dado uma parte da informação que não é declarada e nem segue imediatamente a partir da informação dada. O estudante acrescenta dados estranhos;

- negligenciar alguns dados necessários fornecidos para a solução e compensar a falta de informação, adicionando explicitamente dados irrelevantes;
- declarar explicitamente como exigência (por exemplo, a fim de ser provado, para ser encontrado, ou a ser calculado) algo que não foi exigido no problema;
- atribuir a uma dada informação um significado inconsistente com o texto (por exemplo, utilizar a altura de um triângulo em uma solução de um problema que lida com a mediana);
- impor uma exigência que não está de acordo com a informação dada (por exemplo, forçar as propriedades de uma bissetriz em uma linha arbitrária pelo vértice de um ângulo);
- usar um valor numérico de uma variável para outra variável (por exemplo, usar um dado valor numérico de distância como o valor numérico de velocidade).

Apresenta-se um exemplo tomado de Movshovitz-Hadar et al. (1987), o qual se enquadra na categoria "uso errado dos dados": Dada a série 1, 5, 7, qual número deve ser adicionado a cada um dos três elementos para transformá-la em série geométrica?

Solução incorreta:

$$7 = 1 + (3 - 1)\, d$$

$$6 = 2d$$

$$d = 3$$

O estudante impôs sobre a série dada uma propriedade de uma série aritmética sem verificar o termo médio; negligenciou a informação dada sobre a propriedade da série de destino. Além disso, encontra um número, d, que não era exigido no problema.

Linguagem mal interpretada – esta categoria inclui os erros matemáticos que lidam com uma tradução incorreta de fatos matemáticos descritos em uma linguagem, possivelmente simbólicos. Seus elementos característicos são:

- tradução de uma expressão da linguagem natural, em um termo matemático ou equação, que representa uma relação que não mantém vínculo com o descrito verbalmente;
- a designação de um conceito matemático por um símbolo que, tradicionalmente, designa outro conceito, operando com o símbolo em seu uso convencional;
- incorreta interpretação de símbolos gráficos em termos matemáticos ou vice-versa.

Apresenta-se um exemplo tomado de Movshovitz-Hadar et al. (1987) , o qual destaca a interpretação inadequada do problema: Um barril cheio de vinho pesa **a** kg; o barril vazio pesa **b** kg.

(i) Qual é o peso de **m** barris cheios?

(ii) Qual é o peso de 2 milhões de barris cheios pela metade?

Solução incorreta: um erro típico do item (ii) "2ma/2", no lugar da resposta correta "2m [(a-b/2 +b)]".

Inferência lógica inválida - em geral, esta categoria inclui os erros que lidam com o raciocínio falacioso e não com um conteúdo específico, ou seja, novas informações invalidamente retiradas de uma determinada parte de informação ou de alguma outra anteriormente inferida. Seus elementos característicos são:

- concluir, a partir de uma instrução condicional (se p, então q) seu oposto, seja na sua forma positiva (se q, então p) ou na sua forma contrapositiva (se nem p, então q não);
- na conclusão de uma instrução condicional (se p, então q), e de sua consequente que antecedente p é válido, ou conclusão de uma instrução condicional à negação de seu antecedente (não p) que a negação de seu consequente (não q) é válida;
- concluir que p implica q quando q não segue, necessariamente, a partir de p;
- fazer um salto injustificado em uma inferência lógica, isto é, afirmando que q segue de p sem apresentar a sequência necessária de argumentos que levam de p para q, ou fornecer argumentos errôneos.

Afirmar que um retângulo é quadrado observando apenas os ângulos, sem apresentar argumentos válidos para o comprimento dos seus lados, é um exemplo de erro dessa categoria.

Definição ou teorema distorcido - esta categoria inclui os erros que lidam com uma distorção de um princípio específico e identificável, uma regra, um teorema ou uma definição. Os elementos característicos são:

- aplicação de um teorema fora de suas condições;
- aplicação de uma propriedade distributiva para uma função ou operação não distributiva;
- uma citação imprecisa de uma definição reconhecida, um teorema ou uma fórmula.

Solução não verificada - a principal característica dos erros nesta categoria é que cada passo na realização da atividade é correto; no entanto, o resultado final não é a solução do problema proposto. Deve-se ressaltar que, muitas vezes os alunos não verificam seus resultados. Caso tivesse sido contrastada a solução com o enunciado, o erro poderia ter sido evitado.

Erros técnicos - esta categoria inclui erros relacionados à execução de algoritmos, de procedimentos passo-a-passo, como por exemplo, 60-18=41; que pode ser resultado de distração, por exemplo, 7x8 = 54; erros de extração de dados a partir de tabelas; erros de manipulação de símbolos algébricos elementares, por exemplo, escrevendo A-4. B-4 em vez de (A-4). (B-4), mas procedendo como se os parênteses lá estivessem.

Considerando as categorias destacadas, algumas remetem a problemas observados comumente nas salas de aula como, por exemplo, a linguagem mal interpretada. Considera-se que, efetivamente, uma das grandes dificuldades dos estudantes é a compreensão do que é pedido em uma questão discursiva. Porém, se problemas de linguagem e interpretação existem, inclusive no que se referem à simbolização matemática, é necessário analisar quais são as causas dessas dificuldades relacionadas à leitura e interpretação. Assim, percebe-se que, em qualquer classificação, há muitos elementos que ficam em aberto e que podem gerar pesquisas futuras.

Porém, encontra-se em Cury (2007) um estudo que, além de trazer as investigações precursoras no que se refere à análise de erros, discute a perspectiva da constituição de obstáculos a partir de erros, no âmbito da noção de obstáculo epistemológico proposta por Brousseau (1983). Apresenta, ainda, os trabalhos de Borasi, que buscam estabelecer ambientes de aprendizagem, nos quais o potencial dos erros pode ser aproveitado. A autora destaca a importância da "taxonomia do uso de erros", apresentada por Borasi, a qual considera os objetivos da aprendizagem (remediação, descoberta, pesquisa) e o nível do discurso matemático (realização de tarefa específica, compreensão de conteúdo matemático específico, compreensão sobre a natureza da Matemática).

Borasi (1987, *apud* DALTO, 2007, p.19) afirma que os erros têm se mostrado estimulantes, mesmo nos casos em que se duvida do seu potencial no momento em que se inicia o trabalho com eles. Para que o trabalho com os erros seja satisfatório, é preciso que se escolham erros apropriados à situação e aos objetivos da sua utilização. Além disso, é fundamental que se leve em consideração o interesse e a preparação dos estudantes com os quais a atividade será realizada.

Destaca-se, também, o trabalho de Socas (1997), o qual relaciona os erros com as dificuldades de aprendizagem em Matemática. O autor discute as dificuldades de aprendizagem em Matemática e suas distintas origens, ponderando que as dificuldades se manifestam sob a forma de obstáculos cognitivos e, na prática, na forma de erros.

Socas (1997) considera que os erros têm origens diferentes e podem ser vistos como o resultado da presença de um processo cognitivo inadequado e não apenas como consequência de uma falha de conhecimentos específicos ou de uma distração. Na opinião do autor, os erros de aprendizagem em Matemática se devem a certas dificuldades e podem ser agrupados em três categorias: erros com origem num obstáculo; erros com origem na ausência de significado; e erros com origem em atitudes afetivas e emocionais face à Matemática. Dentro da categoria erros com origem na ausência de significado, Socas (1997) distingue erros de Álgebra com origens na Aritmética; erros de procedimento (incluindo o uso indevido de fórmulas ou procedimentos); e erros de Álgebra devidos às características da linguagem algébrica. O autor considera obstáculos, ausência de sentido e atitudes afetivas e emocionais, não disjuntos, como sendo a melhor perspectiva que lhe permite melhor categorizar a origem dos erros.

No Brasil, pesquisas envolvendo análise de erros, aparecem apenas no final da década de 80. Pinto (2000) confirmou esse fato a partir de uma análise feita sobre o material levantado por Dario Fiorentini, segundo o qual apenas nove trabalhos brasileiros anteriores a 1990 mostravam, de fato, alguma preocupação relacionada aos erros, problemas e dificuldades presentes no processo de ensino e aprendizagem de Matemática.

Com relação à produção de autores brasileiros, Cury (2007) aponta que os primeiros trabalhos nacionais são da década de 80, estendendo-se aos anos 2000, como indicado no quadro da Figura 2.

Figura 2 - Trabalhos sobre erros em Matemática (autores brasileiros)

Autores	**Ano de divulgação do trabalho**	**Estado em que se realizou a pesquisa**	**Série e nível de ensino**	**Conteúdo**
Lopes	1987	SP	EF	Ambientes de "verdades provisórias"
Crepaldi; Wodewotzki	1988	SP	EM	Variado
Cury	1988	RS	ES	Demonstrações de geometria
Guimarães Jr.	1989	RJ	Séries iniciais do EF	Programa para diagnó stico automático de erros em subtração
Moren; David e Machado.	1992	RJ e MG	3a a 6a séries do EF	Sistema de numeração e operação de subtração
Batista	1995	SP	2a a 4ª séries do EF	Operações aritméticas
Pinto	1998	SP	4a série do EF	Problemas de aritmética
Baldino e Cabral	1999	SP	ES	Técnicas de integração
Bathelt	1999	RS	5a série do EF	Ideia de número e operações com frações
Gusmão	2000	BA	ES	Emoções diante do erro

Utsumi	2000	SP	6a a 8a séries do EF	Resolução de problemas algébricos
Ribeiro	2001	SP	8a série do EF	Álgebra
Notari	2002	SP	8a série do EF e 1a série do EM	Frações aritméticas e algébricas
Freitas	2002	SP	1a série do EM	Equações de 1o grau
Milani	2002	SP	ES	Conceitos de cálculo
Souza	2003	PR	6a série do EF	Variado
Valentino; Grando	2004	SP	ES	Álgebra elementar
Allevato	2005	SP	ES	Funções
Silva	2005	PR	4a série do EF	Variado
Perego	2006	PR	8a série do EF	Variado

Onde: EF (Ensino Fundamental), EM (Ensino Médio) e ES (Ensino Superior).

Fonte: Cury (2007, p. 47).

Segundo a análise da autora, todas estas produções possuem pontos em comum, como o foco nas quatro operações ensinadas nas séries iniciais, que tem sido objeto de estudo de vários pesquisadores, além dos conteúdos de álgebra, o que reflete a importância deste conteúdo, principalmente para estudos posteriores como de Cálculo Diferencial e Integral. Outros temas também foram bastante explorados pelos estudiosos tais como geometria plana e funções.

Destaca-se a importância do conhecimento do desenvolvimento dos trabalhos de investigação sobre a análise de erros, bem como da discussão e reflexão sobre os referencias que os orientam, ressaltando que mais importante que detectar e apontar os estudos feitos é apropriar-se das contribuições destes estudos com todos os seus resultados, indicações, incluindo falhas de abordagem, eventuais equívocos e erros de análise, além dos acertos, para que, assim, possam ser construídos caminhos indicativos para a realização de estudos que possam refletir a realidade dos erros em Matemática e, mais do que refletir a realidade, caminhos que contribuam na construção do conhecimento. Do mesmo modo, apontar os erros dos estudantes, tão somente como indicativo de baixo aproveitamento e rendimento, torna-se sem sentido em termos educacionais. É necessário identificar e saber o que fazer com esses erros. Nesse sentido, concorda-se com Cury (2007), quando afirma:

> Efetivamente, detectar os erros dos alunos apenas para conhecê-los, algumas vezes citando-os como "piadas", não os ajudam a se conscientizarem da dificuldade. Acredito ser necessário compreender o que o aluno "sabe", ou melhor, como determinado conhecimento, estabelecido em certo momento da história de vida, está funcionando como obstáculo para a superação da dificuldade e o que suas respostas "decoradas" estão encobrindo em temos de não conhecimento (CURY, 2007, p.48).

Buscando ampliar, no âmbito dessa investigação, os trabalhos nacionais destacados por Cury (2007), buscou-se nos bancos de dados dos Programas de Pós Graduação em

Educação Matemática, Ensino de Ciências e Matemática, Educação e Ensino de Física e Matemática da Universidade Estadual de Londrina (UEL), Universidade Estadual de São Paulo–UNESP (Rio Claro), Centro Universitário Franciscano – UNIFRA (Santa Maria), Pontifícia Universidade do Rio Grande do Sul – PUCRS (Porto Alegre), Universidade Estadual de Maringá – UEM (Maringá), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo - UCSP (São Paulo), trabalhos realizados e publicados após o ano de 2006. Esta busca revelou um conjunto de pesquisas envolvendo análise de erros, as quais passam a ser destacadas.

Viola dos Santos (2007) analisou a produção escrita de 147 estudantes referentes a uma questão aberta comum às três séries avaliadas – 4ª e 8ª séries do Ensino Fundamental e 3ª série do Ensino Médio. Por meio da análise textual discursiva, o autor procurou investigar como os estudantes lidam com a questão, as interpretações que fazem das informações contidas em cada frase do enunciado, as estratégias elaboradas e os procedimentos utilizados, o pensamento e a linguagem algébrica, bem como as características dos problemas que eles constroem a partir do enunciado da questão e os conteúdos escolares que eles mostram saber por meio de sua produção. De acordo com o autor, poucos estudantes utilizaram um conteúdo específico de sua série para resolver o problema envolvido.

Feltes (2007) analisou erros cometidos por alunos de Ensino Fundamental e Médio, ao resolverem testes sobre potenciação, radiciação e equações exponenciais. A autora buscou erros de aprendizagem na resolução de problemas de equações exponenciais, procurando uma ligação entre a falta de compreensão dos conteúdos de potenciação e radiciação, com as dificuldades de aprendizagem de funções e equações exponenciais. Uma dificuldade detectada pela autora está relacionada à resolução de problemas envolvendo as equações exponenciais com base ou expoente negativo.

Lopes (2007) buscou estudar os fatores que colaboram ou dificultam na interpretação e na resolução de problemas escolares de Matemática por alunos de 5ª série e de 8ª série do Ensino Fundamental. A autora tomou como amostra, dez alunos de 5ª série e dez alunos de 8ª série, os quais foram submetidos, individualmente, a uma entrevista clínica, na qual lhes era proposta a resolução de quatro problemas que envolviam conceitos e conhecimentos matemáticos elementares.

Os resultados obtidos pela autora indicam que a complexidade envolvida no ato de resolução de problemas está além da questão da fluência na leitura ou da utilização ou não de estratégias ou conhecimentos conceituais isolados. A compreensão dos enunciados dos problemas e o uso de estratégias ou procedimentos adequados são dependentes de vários fatores, dentre os quais a compreensão do gênero discursivo dos enunciados de problemas escolares de matemática e dos termos ou expressões que neles aparecem, a mobilização de conhecimentos prévios e a retenção ou controle das informações contidas nos enunciados.

Barichello (2008) buscou, a partir de uma concepção interacionista de ensino e aprendizagem, fundamentada nas ideias de Vygotsky, investigar as potencialidades didáticas pedagógicas de uma dinâmica de interação entre professor e aluno, baseada na escrita e orientada pela resolução de problemas, a qual chamou de Dinâmica RCR. Essa dinâmica pode ser sintetizada pela sequência resolução-comentário-resolução, na qual, a cada resolução entregue por um aluno, o professor fazia alguns comentários e a devolvia, para que o aluno continuasse resolvendo.

O autor afirma que a Dinâmica RCR, por proporcionar um contexto no qual professor e aluno (pesquisador e sujeito) podem interagir de maneira bastante objetiva através da escrita, amplia as possibilidades de compreensão da natureza dos erros cometidos pelos alunos quando comparada com os contextos convencionais de interação, como a correção de exercícios em sala de aula, de provas ou de listas de exercícios.

Gil (2008) apresenta um estudo sobre as possíveis razões para as dificuldades apresentadas pelos alunos de 7ª série do Ensino Fundamental no estudo dos conceitos e procedimentos algébricos. A autora realizou observações em sala de aula, aplicação de testes com alunos e entrevistas com alunos e professores. O estudo envolveu uma turma de 7ª série de uma escola da rede privada de ensino, em Porto Alegre/RS, e a amostra foi composta de 32 alunos. A análise foi feita de forma eminentemente qualitativa, buscando compreender as dificuldades encontradas e alternativas capazes de permitir uma melhor compreensão da aprendizagem da Álgebra. Foi constatada, pela autora, que a interpretação de problemas algébricos, que exigem uma tradução da linguagem corrente para a linguagem simbólica, apresentou obstáculos, assim como, a relação entre a Álgebra e a Aritmética.

Paias (2009) realizou pesquisa sobre o erro e sua importância no processo de ensino e aprendizagem, baseado em um estudo diagnóstico a respeito da operação potenciação com alunos da 8ª. Série do Ensino Fundamental e 1ª. Série do Ensino Médio, de uma escola pública da Rede Estadual de Ensino do Estado de São Paulo. Para tal, a autora optou por uma pesquisa descritiva, quanti-qualitativa, com a realização de um diagnóstico sobre os erros dos alunos referentes à operação potenciação. A fundamentação teórica foi apoiada na Teoria Antropológica do Didático de Chevallard[3] (1999), nos Registros de Representação Semiótica

---

[3]CHEVALLARD, Yves. (1999) *L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique*. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, vol. 19, n. 2, p. 221-266.

de Duval[4] (2003) e nos estudos sobre o erro de Cury (2007). O resultado das análises das respostas dos alunos indicou que, grande parte dos alunos não domina a concepção de potenciação, decorrendo disso que muitos entendem a operação potenciação como multiplicação. Assim, vários fatos agravam o erro em relação a esse tópico, sendo que os fatores mais relevantes foram os casos de potência que envolve números inteiros negativos e expoentes fracionários. O *zero* e o *um* também se constituem em grande causa de erros, sobretudo quando são expoentes, pois o aluno não observa a convenção de modo correto.

Vale (2010) analisou os erros cometidos por alunos do 7.º ano de escolaridade, no contexto de ensino-aprendizagem de Álgebra, mais concretamente nos tópicos sequências, regularidades e equações. Investigou até que ponto o *feedback* escrito e o questionamento oral, usados pelo professor, podem contribuir para levar os alunos a perceberem os erros que cometem e a tentarem ultrapassá-los. A autora adota a tipologia de erros, sugerida por Socas (1997), trabalhando com os erros que têm a sua origem em um obstáculo cognitivo, erros que têm a sua origem na ausência de significado e erros que têm a sua origem em atitudes afetivas e emocionais face à Matemática. Destacou que os erros mais frequentes encontrados estavam relacionados à utilização indevida da propriedade distributiva e à utilização do sinal de igual. No entanto, os dispositivos de regulação utilizados pela professora, nomeadamente o "*feedback* escrito", não foram igualmente eficazes, concluindo que o questionamento oral foi o mais eficiente.

Cavassoto (2010) utilizou a análise de erros cometidos pelos alunos na resolução de problemas com conteúdos específicos, relativos ao Cálculo Diferencial e Integral, para buscar compreender as dificuldades na disciplina de Cálculo Diferencial. O autor utilizou como instrumento as avaliações institucionais aplicadas durante o semestre. Em sua conclusão o autor afirma que o maior obstáculo enfrentado pelos educandos, na referida disciplina, não está nos conteúdos específicos do Calculo Diferencial, mas sim nos conhecimentos da Matemática básica.

Bortoli (2011) analisou erros cometidos por alunos de Ensino Superior nos cursos de Administração, Ciências Contábeis, Engenharia Agronômica, Química e Sistemas de Informação, na resolução de testes da disciplina de Pré-Cálculo, e os utilizou para planejar estratégias de ensino que propiciassem uma melhoria de aprendizagem na referida disciplina, bem como nas subsequentes disciplinas matemáticas de cada curso. Para tanto, desenvolveu seu trabalho com 31 estudantes de cursos superiores do Instituto Federal do Paraná (IFPR),

[4]DUVAL, Raymond. Registros de representações semióticas e funcionamento cognitivo da compreensão em matemática. In: MACHADO, S. D. A. (Org.) – **Aprendizagem em Matemática**: registros de representação semiótica. Campinas: Papirus, 2003, p. 11-33.

campus Palmas. Após os resultados de sua pesquisa, o autor elaborou uma sequência didática para auxiliar os estudantes a superarem suas dificuldades em operações algébricas, em especial na redução de termos semelhantes.

Apresenta-se, por fim, o trabalho de Mendonça (2011), cuja pesquisa foi desenvolvida em uma escola pública da rede estadual na cidade Miracema do Tocantins/TO. O autor realizou um estudo de caso sobre o esboço das operações com números reais no primeiro ano do Ensino Médio, com o intuito de verificar os pontos mais críticos na resolução dessas operações. A partir dos resultados, buscou uma maior compreensibilidade e uma melhor estratégia didática para os professores que trabalham na Educação Básica.

As pesquisas apresentadas sobre análise de erros em Matemática evidenciam a preocupação com os erros produzidos por estudantes de diferentes níveis e, em diferentes contextos, sua tipologia, natureza, causas e importância. Desde os trabalhos de Thorndike, nas décadas de 1910 e 1920, os quais estavam ligados à aritmética elementar, buscando identificar e classificar os erros mais comuns na intenção de usá-los como proposta numa sequência pedagógica, as pesquisas têm se caracterizado pela busca da produção de conhecimentos, principalmente sobre a questão dos reflexos sobre os processos de ensino e aprendizagem da Matemática, objetivando a sua qualificação.

1.2 ENSINO-APRENDIZAGEM EM MATEMÁTICA: DIFICULDADES E OBSTÁCULOS

Os erros, na perspectiva do ensino, se inserem na realidade das dificuldades e obstáculos da educação de forma geral, uma vez que a referência é sempre no sentido da necessidade de superação em busca da excelência. Resulta, daí, a importância de uma abordagem que identifique essas dificuldades e obstáculos, de modo que, a partir desta identificação, seja possível elaborar estratégias e perspectivas de atuação.

Nessa linha de pensamento, Souza (2002) afirma que o conhecimento matemático possui peculiaridades próprias que, por vezes, esbarram em dificuldades e obstáculos em relação ao processo de aprendizagem. Identificar e diagnosticar quais são estes empecilhos se constitui em uma poderosa ferramenta metodológica, que deve estar à disposição do corpo docente das instituições de ensino, para que, a partir do reconhecimento dos problemas, possa ser planejada a melhor forma de atuação. Uma leitura precisa sobre os fatores prejudiciais contribui para uma adequada intervenção através de ações pedagógicas que levem em consideração a natureza e a origem de cada situação a ser trabalhada.

Pinto (2000) identifica que os problemas atuais da Matemática sugerem uma reflexão das metodologias aplicadas no passado, para que possam ser visualizadas, nos sistemas avaliativos atualmente desenvolvidos, as falhas que denunciam um conteúdo precário e descontextualizado. A autora aponta como problema a concepção tradicional de ensino e aprendizagem que ainda hoje é praticada nas escolas.

Nessa mesma linha de pensamento, Pinto (1997) aponta que a escola tem errado de três formas diferentes:

> [...] por desconhecimento das características gerais do funcionamento mental humano nas várias fases do desenvolvimento; por desconhecimento dos conteúdos do segmento cultural que contextualiza os seus aprendizes concretos; e por desconhecimento das histórias de vidas próprias a cada um (PINTO, 1997, p. 72).

Já Gusmão (2001) afirma que o sentido de dificuldade no contexto da aprendizagem representa uma falha, que de certa forma originou o não aproveitamento. As causas podem ser diversas, como as de ordem pedagógica, as ligadas a conceitos e metodologias de ensino e, até mesmo, causas de ordem psicológica, que se remetem às dificuldades de aprendizagem por distúrbios; além de causas sociais, incluindo, neste último caso, a forma como o aluno foi educado, o histórico de sua aprendizagem, entre outros.

Souza (2002) aponta, ainda, que os fatores prováveis do insucesso escolar passam pela necessidade de se investigar os conteúdos e os métodos de trabalho. As práticas, experiências e exemplos, levam à observância de que grande parte das dificuldades dos alunos surge em função das dificuldades dos próprios professores, principalmente em compreender e atribuir ao educando um papel de protagonista do próprio conhecimento. Refletir, incentivar e explorar a riqueza de cada aluno, dando autonomia necessária para o desenvolvimento do raciocínio, são possíveis formas de se conseguir tal objetivo. Porém, contrário a isso, a escola insiste na aplicação de exemplos fora do contexto real e exercícios repetitivos, o que leva a dificuldades de aprendizagem, que, por sua vez, têm como consequência, traumas com a disciplina de Matemática, verbalizados nos corredores das escolas por meio de declarações como “eu odeio matemática” ou “não consigo aprender matemática”, as quais passam a ser comuns diante de tais fatos (SOUZA, 2002).

Nesse sentido, pondera-se que na busca da superação das dificuldades apontadas, o processo de ensino da Matemática deve ser pautado em ações que considerem que “ensinar não é transferir conhecimento, é fundamentalmente pensar certo – é uma postura exigente, difícil, às vezes penosa, que temos de assumir diante dos outros e com os outros, em face dos mundos e dos fatos, ante nós mesmos” (FREIRE, 1996, p. 49).

Souza (2002) destaca que Brousseau[5] (1983) a partir das ideias de Bachelard, introduziu uma nova visão sobre a questão dos obstáculos na educação, passando a considerar três tipos de obstáculos: os de origem epistemológica, os quais dizem respeito ao desenvolvimento da própria ciência matemática; os de origem ontogenética, que estão ligados ao desenvolvimento e limitações cognitivas dos indivíduos; e, por último, os de origem didática, que estão relacionados com a metodologia de ensino bem como do projeto didático-pedagógico da instituição de ensino.

O autor pondera que, apesar de parecer contraditório, o obstáculo pode significar a construção válida de um determinado conhecimento. Se há situações que conduzem ao erro, há oportunidade de construção do saber, já que, conforme as ideias, tanto de Bachelard quanto de Brousseau, o erro é um conhecimento que se mostra insuficiente diante de uma nova situação, constituindo-se assim um obstáculo que necessita de retificação (SOUZA, 2002). O autor pondera ainda que:

> Esse ponto de vista nos conduz a uma reflexão epistemológica com implicações didáticas: constatar que os erros podem ser decorrentes de concepções adquiridas anteriormente pressupõe que o próprio processo de ensino pode ser um elemento gerador de erros. Visto assim, o erro pode contribuir positivamente para o processo de ensino e aprendizagem, desde que tenha como proposta a mudança da atitude de condenação do aluno como único culpado pelo erro e seja implementado um tratamento preventivo com relação a eles. Os erros cometidos pelos alunos devem ser vistos como expressão do caráter incompleto de seus conhecimentos e constituem uma oportunidade para o professor ajudá-los a adquirir o conhecimento que lhes falta ou levá-los a reconhecerem por que erraram (SOUZA, 2002, p.44).

Para Pinto (2000) o erro, se submetido à reflexão, leva à concepção de questionamentos de todo o processo de ensino, sendo que estes questionamentos, por sua vez, devem ser capazes de criar estratégias didáticas para a melhoria do ensino.

Diante das ideias expostas, o erro surge não mais como declaração de incompetência ou ignorância, assumindo um papel de protagonista na construção do conhecimento. Desta forma, também é possível afirmar que não irão desaparecer e sempre que forem detectados há possibilidade de novos saberes serem constituídos.

A classificação dada por Brousseau e apontada por Souza (2002) leva o autor a considerar que os obstáculos de origem didática remetem a uma necessidade de identificação da realidade das práticas adotadas no processo de ensino, como forma de corrigir as técnicas

[5]BROUSSEAU, Guy. Les obstacles epistemologiques et les problemes en mathematiques. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 4, n. 2, p. 165-198,1983.

inadequadas. O problema surge porque nem sempre é possível identificá-lo, mas a solução está em provocar situações que induzam e explicitem o erro e assim o surgimento de novos conhecimentos. Conforme pensamento de Brousseau *in* Souza (2002, p. 45): “não haverá boas respostas se não houver boas perguntas”.

1.3 PERSPECTIVA CONSTRUTIVISTA E A VISÃO DO ERRO

Segundo definição de La Taille (1997)

> Construtivismo refere-se a um conjunto de teorias que afirmam que a evolução da inteligência é fruto da interação do sujeito com o seu meio, interação na qual, por meio de um trabalho ativo de ação e reflexão, ele cria ferramentas cada vez mais complexas para conhecer o universo. Portanto, o construtivismo opõe-se à ideia de que o conhecimento é mera cópia dos objetos percebidos ou dos discursos ouvidos; vale dizer que o construtivismo nega que a inteligência seja uma página em branco, na qual as diversas experiências ou lições simplesmente se escrevem e se acumulam linearmente durante a vida. O construtivismo opõe-se também às concepções inatistas, que pensam o desenvolvimento como puro desenrolar de um programa inscrito nos genes. Em resumo, toda perspectiva construtivista aceita a ideia de assimilação; conhecer é dar significado; e aceita também o fato de que é na interação com o meio que as diversas formas de assimilação são criadas pelo sujeito. Nesse sentido, todo construtivismo é necessariamente interacionista (LA TAILLE, 1997, p. 32-33).

Segundo o autor, o ensino pautado no construtivismo favorece a formação do aluno, já que o insere num ambiente de experimentação e trabalho grupal, estimulando assim a descoberta pela dúvida, o raciocínio pela integração experimental, além de contribuir para a integração social, despertando um maior senso de participação e autonomia.

Freire (1996) enfatiza a necessidade de interação construtivista entre os agentes da educação (professor e aluno), afirmando que: “o fundamental é que professor e alunos saibam que a postura deles [...] é dialógica, aberta, curiosa, indagadora e não apassivada, enquanto fala ou enquanto ouve.” (FREIRE, 1996, p. 86). Ou seja, a ótica construtivista, numa perspectiva de realidade, ação e interação, exige uma postura crítica e de iniciativa com o objetivo da melhor aprendizagem (para os alunos) e de melhor ensino (para os professores).

Assim, quando se considera os procedimentos de ensino, no âmbito escolar, a contribuição do erro pode ser avaliada como positiva, na medida em que se tome esse erro como um importante mecanismo na produção do conhecimento. Por outro lado, essa afirmativa só poderá ser concretizada através de ações que levem em consideração tanto o lado de quem ensina quanto de quem aprende.

Nesse sentido, Souza (2002) pondera que os processos que deram origem aos erros devem também ser considerados, uma vez que, na aquisição do conhecimento, a resposta considerada errada pode conter processos de elaboração mais sofisticados do que uma resposta certa. Além disso, "é através do estudo dos processos que deram origem às respostas que se consegue reconhecer e avaliar a complexidade e sofisticação do pensamento" (SOUZA, 2002, p.47). Nessa linha de pensamento, percebe-se que existe uma relação entre os erros cometidos e o processo normal de aquisição do conhecimento.

Nesta abordagem, o erro aparece, de acordo com La Taille (1997), como uma etapa na construção de saberes, sempre de maneira construtiva, através do preenchimento de lacunas na promoção de percepções acertadas acerca de determinados assuntos. No que se refere à visão ou tratamento dado ao erro, o autor afirma que a teoria piagetiana reorganizou o enfoque sobre o erro, pois foram demonstradas sua função e utilidade, passando a ter um novo *status* dentro do enfoque pedagógico e indicando que o erro, ao invés de fechar portas, pode contribuir para abri-las.

La Taille (1997) discute o *erro construtivo*, conceituando-o como aquele em que é possível perceber o desenvolvimento de um cenário propício para o progresso da atividade mental através da formação de novas estruturas cognitivas, ou seja, aqueles que nas situações do dia-a-dia, embora pareçam apenas respostas incorretas, na verdade, significam acertos posteriores, já que representam também a construção de conhecimentos e a ampliação da compreensão sobre determinado fato, aspecto ou questão. Por outro lado, os erros não construtivos podem ser considerados aqueles que não têm relação com a estrutura de criação do conhecimento e, por isso, o ato de errar pode significar somente uma distração ou esquecimento temporário.

Concordando com as ideias de La Taille (1997), considera-se que o erro, dentro do processo de ensino, deve significar um sinal, um indício de uma importante informação dos rumos que se deve tomar, tanto com relação à metodologia aplicada quanto em relação ao desenvolvimento cognitivo do aluno. Nesse contexto, o erro se apresenta como uma ferramenta para reflexão sobre quais as suas verdadeiras fontes e origem, que podem levar a encontrar as formas mais adequadas de corrigi-los. Nesta ótica, o erro apresenta-se como uma ferramenta instrutiva e construtiva, tanto na orientação quanto na correção de dificuldades encontradas nas ações pedagógicas (LA TAILLE, 1997).

Diante dessa discussão, é possível perceber a importância do erro na perspectiva construtivista, apresentada não pela detecção do erro cometido, mas pela forma como pode ser trabalhado. Nesta perspectiva, é necessário levar em conta que o erro só poderá ser considerado construtivo se a ele for atribuído algum significado, caso contrário, será considerado apenas mais um erro sem relação na construção de saberes; ou seja, o erro deve ser considerado uma fonte na tomada de consciência de acordo com a atribuição dada a ele.

Além disso, conforme Pinto (2000), o princípio construtivista do erro se apresenta pelo fato do fazer-se uma oportunidade para que os profissionais da educação, em especial o professor, organizem melhor a sua metodologia de ensino e, assim, sejam capazes de criar situações para que os alunos consigam superar seus erros.

Ainda, segundo a autora, a indicação do erro deve ser feita pelo educador através de uma intervenção eficaz que leve o indivíduo a perceber, através de uma leitura pessoal, o próprio erro e, a partir daí, também seja possível direcionar sua ação com o objetivo de corrigir os entraves detectados. Nesta concepção, é necessário que o professor leve o aluno a realizar conexões entre conhecimento e realidade, de maneira que num efeito de causa e consequência seja possível criar um ambiente propício para a aprendizagem através de descobertas, intervenções, conexões e experimentação. Para tanto, faz-se necessário que o professor, em busca do desenvolvimento dos processos de ensino, tenha conhecimento do nível intelectual e cognitivo dos alunos, para que assim seja possível realizar uma intervenção adequada e eficaz na construção do conhecimento.

Por fim, nessa perspectiva construtivista, o erro é apresentado como um processo ou etapa na construção e aquisição do conhecimento, de forma que, a partir da detecção, e consequente correção desses erros, um novo conhecimento seja construído. E isso sugere um sucessivo e permanente processo na construção dos saberes.

De acordo com Cury (2007), no final da década de 80, fundamentado nas concepções construtivistas, surgem os primeiros textos publicados pela pesquisadora italiana Rafaella Borasi, nos quais a autora propõe que os erros dos alunos consistam em recursos didáticos interessantes e importantes para o processo de ensino e de aprendizagem. Cury (2007) considera que esses textos estejam entre as referências obrigatórias, aqueles que enfocam os erros como construtores de conhecimento. Segundo Cury (2007, p.37), a pesquisadora apresenta atividades em que almeja aproveitar os erros dos alunos em investigações, que abrangem da correção do erro ao seu aprofundamento, buscando encontrar até que ponto, ou em que casos especiais o erro ou uma resposta incorreta podem ser aproveitados.

1.4 O ERRO NO PONTO DE VISTA PEDAGÓGICO

Abordar o papel do erro na visão didático-pedagógica pode constituir-se não somente de um exercício metodológico e de explanação do trabalho, mas também de uma tentativa de ultrapassar a visão do erro como fundamento do fracasso, uma busca de tomar o erro como um processo do êxito e do conhecimento.

Conforme Souza (2002), a partir do tratamento dispensado ao erro é possível identificar o modelo pedagógico adotado. Por exemplo, na visão empirista, os erros aparecem como conotação do fracasso ou, de outra forma, os erros não têm função pedagógica. Assim, o professor, ao detectá-lo, assume que o aluno não foi capaz de assimilar um determinado conteúdo, sem, contudo, procurar identificar os motivos e razões, e, a partir daí, condena e pune o aluno. Dessa forma, perde-se a oportunidade de reflexão sobre o que e onde o aluno errou, impedindo que trilhas sobre o caminho correto sejam construídas.

Ainda nessa perspectiva empirista, a importância do erro relaciona-se mais ao processo avaliativo, no qual sua detecção indica algo condenável, já que o resultado para o empirismo é mais importante que o próprio processo. Nessa visão, o conhecimento não se constrói através de um processo, e sim através de repetição e transmissão. Perde-se, desta forma, a oportunidade de fazer com que o aluno estabeleça conexões entre aquilo que está sendo transmitido e a realidade. Perde-se, também, a oportunidade de possibilitar autonomia para o aluno, inibindo o mesmo a tentar, arriscar e ousar, já que o mesmo aprendeu que o erro é o caminho do fracasso (MACEDO, 1994).

O papel do professor, na perspectiva construtivista, é de fundamental importância, já que é levado a considerar todas as características dos alunos, assumindo o erro não como ponto final, e sim como o início da caminhada de construção de saberes. Pinto (2000) considera o erro como um elemento integrante do processo de construção do conhecimento, não tomado como saberes definitivos e sim provisórios. Pondera que o ato de ensinar não pode ser considerado algo mandatário e de submissão. Educar nesta linha é algo além de instruir; não se constitui, portanto, um fundamento mecânico de respostas automáticas. É necessário levar em consideração as preferências de cada aluno, de modo que estes possam, por sua vez, descobrir o prazer da descoberta e, assim, fazer a conexão de que prazer e conhecimento estão intimamente ligados, o que torna a educação algo agradável tanto para professores quanto para alunos.

Diante desse ideário é necessária muita sensibilidade da equipe pedagógica das instituições de ensino, nas quais o foco da aprendizagem não está em fornecer verdades prontas. A perspectiva construtivista ensina que o foco deve estar na pessoa (o aluno) e a possibilidade de capacitá-lo para o alcance do conhecimento desejado, daí a importância do professor estabelecer não mais uma relação de portador do conhecimento e sim uma relação de orientador, provocador e facilitador de saberes. Além disso, deve-se ter o cuidado com a forma com que cada aluno consegue estabelecer e assimilar aquilo que está sendo proposto como conteúdo. O professor deve, então, ter a sensibilidade com os diferentes ritmos e características de cada aluno, buscando encaminhar ações de diferentes conotações que levem em consideração não somente as facilidades, mas também as dificuldades do estudante.

Nesse sentido Freire (1996) ensina que:

> Saber que devo respeito à autonomia, à dignidade e à identidade do educando e, na prática, procurar a coerência com este saber, me leva inapelavelmente à criação de algumas virtudes ou qualidades sem as quais aquele saber vira inautêntico, palavreado, vazio e inoperante. De nada serve a não ser para irritar o educando e desvalorizar o discurso hipócrita do educador, falar em democracia e liberdade, mas impor ao educando a vontade arrogante do mestre (FREIRE, 1996, p. 52).

Souza (2002), também partilha desta ideia ponderando que:

> [...] a didática empregada não deve ignorar a heterogeneidade dos alunos. Indivíduos diferentes não mobilizam os mesmos recursos para resolver os mesmos problemas, uma vez que o desenvolvimento de cada um acontece em ritmos e trajetórias diferentes. Portanto, a diversidade pode e deve levar a procedimentos de individualização e de diferenciação das tarefas, das avaliações, dos atendimentos, das exigências, não havendo razão para postular um único tipo de ação. Porém, temos que ponderar as condições de trabalho do professor, as dificuldades que eles enfrentam com o efetivo das classes. A sobrecarga de programas, a rigidez dos horários ou outras exigências contribuem para que o ensino diferenciado fique, por vezes, reduzido a apenas um sonho jamais realizável (SOUZA, 2002, p. 56).

Já Perrenoud (1995) conceitua o sentido de diferenciar o ensino:

> É organizar as interações e atividades de modo que cada aluno se defronte constantemente com situações didáticas que lhe sejam as mais fecundas. Isso não significa condenar a uniformidade de conteúdos, visto que pode atingir as mesmas competências por caminhos diversos. A diferenciação não é sinônimo de individualização do ensino. É evidente que não se pode falar de diferenciação sem gestão individualizada do processo de aprendizagem, mas isso não significa que os alunos vão trabalhar individualmente, o que acontece é que o acompanhamento e os percursos são individualizados (PERRENOUD, 1995, p. 28/29).

Nesse contexto, entende-se que os processos de ensino e aprendizagem devem se desenvolver no sentido apontado por Freire (1996). Nele, a aprendizagem ocorre em tal condição que os educandos se transformam em reais sujeitos da *construção e reconstrução* do conhecimento transmitido ao lado dos professores, que estão no patamar de igualdade aos alunos. Nesta ótica, o educador assume um duplo papel num mesmo plano, o primeiro diz respeito ao mérito da transmissão do conhecimento e o segundo à responsabilidade de transmitir tais conhecimentos de forma correta (FREIRE, 1996).

Este cenário é propício para o desenvolvimento de ações didático-pedagógicas que, conforme apontado por Souza (2002), em uma perspectiva construtivista, considere que tanto os acertos quanto os erros devam ser compreendidos conforme a forma a serem trabalhados. No caso da avaliação, se a resposta correta indica o êxito do aluno, a reposta incorreta indica aquilo que precisa ser corrigido, ou seja, é preciso olhar os caminhos que levaram às repostas encontradas, para que assim o sucesso possa ser repetido e os erros corrigidos, sendo necessário ter a consciência de que, neste caso, ambos os caminhos levam ao sucesso. A descoberta desses caminhos só é possível através de intervenções corretas que permitam a compreensão e identificação das lacunas que precisam ser preenchidas, além, é claro, dos outros elementos existentes que impedem o sucesso do aluno, ou seja, o erro constitui-se uma importante fonte de informação no sentido da construção do desenvolvimento cognitivo (SOUZA, 2002).

Neste sentido, é coerente avaliar as causas do erro através de uma visão crítica, por meio da qual o professor deva saber identificar os diferentes tipos de erros cometidos pelos estudantes além de sua origem, de modo que estas informações levem à construção de uma ação pedagógica eficiente e eficaz, que crie um ambiente propício para que o aluno possa obter, assim, o êxito desejado.

Por último, Freire (1996) expõe sua visão sobre o processo de ensino e aprendizagem colocando sempre o ser humano e sua capacidade de aprender e ensinar no ponto mais alto deste processo (*grifos do autor*):

> É neste sentido que ensinar não é transferir conhecimentos e conteúdos, nem *formar* é ação pela qual um sujeito criador dá forma, estilo ou alma a um corpo indeciso ou acomodado. Não há docência sem discência; as duas se explicam e seus sujeitos, apesar das diferenças que os conotam, não se reduzem à condição de objeto um do outro. Quem ensina aprende ao ensinar e quem aprende ensina ao aprender. Por isso é que, do ponto de vista gramatical, o verbo ensinar é um verbo transitivo-relativo. Verbo que pede um objeto *direto – alguma coisa* – e um objeto *indireto – a alguém.* Do ponto de vista democrático em que me situo, mas também do ponto de vista da radicalidade metafísica em que me coloco e de que decorre minha compreensão do homem e da mulher como seres históricos e inacabados e sobre que se funda minha inteligência do processo de conhecer, ensinar é algo mais que um verbo transitivo-relativo. Ensinar inexiste sem aprender e vice-versa; e foi aprendendo socialmente que, historicamente, mulheres e homens descobriram que era possível ensinar. Foi assim, socialmente aprendendo, que ao longo dos tempos mulheres e homens perceberam que era possível – depois, preciso – trabalhar maneiras, caminhos, métodos de ensinar. Aprender precedeu ensinar ou, em outras palavras, ensinar se diluía na experiência realmente fundante de aprender. Não temo dizer que inexiste validade no ensino de que não resulte um aprendizado em que o aprendiz não se tornou capaz de recriar ou de refazer o ensinado, em que o ensinado que não foi aprendido não pode ser realmente aprendido pelo aprendiz (FREIRE, 1996, p.24).

1.5 ANÁLISE DO ERRO NO PROCESSO AVALIATIVO

Se existe a necessidade de considerar o erro como um mecanismo eficiente na construção do conhecimento, pode haver, por outro lado, uma necessidade de igual magnitude de se reavaliar as formas como os erros são detectados, sobretudo, no processo avaliativo (PINTO, 2000). A autora afirma que "Diferente das didáticas tradicionais, em que o erro servia, geralmente, como indicador do fracasso do aluno, nas novas teorias ele apresenta como um reflexo do pensamento do aluno, sendo percebido como manifestação positiva de grande valor" (PINTO, 2000, p.27).

A autora considera, ainda, que numa concepção de avaliação mais preocupada com a formação do aluno, em termos de aprendizagem significativa e duradoura, o erro deixado pelo aluno torna-se uma resposta a ser analisada pelo professor, ou seja, o erro passa a ser um conhecimento, pois ele mostra o caminho do acerto que está ali implícito. Sendo assim, refletir sobre o erro encontrado pode ser mais significante que o acerto, pois este nem sempre reflete, de fato, o conhecimento do aluno sobre determinado assunto.

Desta forma, acredita-se no processo avaliativo com foco não somente nas repostas dos alunos e sim no processo de construção das respostas, de modo que, a partir destas, possam ser construídos diagnósticos cuidadosos que concedam encaminhar e detectar as dificuldades para elaboração de ações em prol do desenvolvimento intelectual dos alunos.

Nesta ótica, Lopes (1990) afirma que se devem criar ambientes que levem os alunos a pensar, indagar, explorar, duvidar, acreditar, criar e construir. Assim, pode se oferecer ao aluno a oportunidade de refletir, bem como analisar, com os colegas e com o professor, suas próprias respostas, considerando os erros como verdades provisórias e, a partir desta verdade, é possível oportunizar ao aluno uma discussão ampla, através de um conjunto de respostas, em que os próprios alunos participem da elaboração das suas "verdades". Essa ideia também é explorada por Borasi (1996), quando a autora propõe ambientes de aprendizagem, nos quais o potencial dos erros pode ser aproveitado.

Já Souza (2002) considera a avaliação sob o ponto de vista cognitivo, explicitando que:

> Entendo a avaliação como instrumento de desenvolvimento cognitivo, como uma atividade de caráter construtivo que permite o desabrochar das potencialidades e como levantamento de hipóteses, deduções e demonstrações e não de verificação de aprendizagem com a finalidade única de medir conhecimentos *adquiridos,* por vezes ilusoriamente, através de memorização pouco duradoura sobre os objetos, fatos, datas, fórmulas, leitura ou qualquer outro assunto. Esse tipo de avaliação requer grau de elaboração e reflexão mínimo e mostra o artificialismo da educação sistemática. Normalmente é traduzida em nota/conceito; os erros dos alunos não são sequer

> discutidos; a metodologia raramente é revista e modificada mesmo diante do fracasso de grande parte das crianças em escolarização e, infelizmente, ainda é predominante nos dias de hoje (SOUZA, 2002, p. 59).

A visão da autora se alinha com a visão construtivista, no sentido de que não é necessário somente conhecer os erros e acertos, e sim conhecer os caminhos que levaram a sua construção. Identificar e registrar os erros constitui somente parte de um processo que deve conter, também, o interpretar, o avaliar, o compreender, o medir, o sentir, o diagnosticar, o levantar hipóteses, já que a compreensão dos erros, em todas as suas variáveis, é que pode determinar a construção de uma ação corretiva eficiente baseada em avaliações não somente descritivas e sim interpretativas.

Nesse sentido, percebe-se que a avaliação constitui-se, também, fonte de aprendizagem, na medida em que proporciona, tanto ao educando quanto ao educador, caminhos que devem ser seguidos, oportunidades de reinvenção, reparação e reflexão. Para o professor, permite evidenciar quais as metodologias estão sendo bem concebidas; quais procedimentos devem ser priorizados e quais devem ser abandonados, qual a melhor forma de abordagem, quais cuidados devem ser dados aos alunos de acordo com suas realidades pessoais, ou seja, o processo avaliativo pode ser considerado uma ação pedagógica de planejamento institucional, na busca da efetivação e concretização do ensino de qualidade.

Segundo a UNESCO (1982), esta atenção especial quanto às formas de avaliação deve ser assegurada principalmente em se considerando que o progresso escolar do aluno é influenciado por diversos fatores, como motivação e interesses pessoais, além da adequação dos estudos à natureza das aptidões de cada um.

É também o que pensa Esteban (2003), sobre a avaliação como prática primordial de investigação e de rompimento de barreiras que existem entre todos os fatores e pessoas incluídas no processo de construção do conhecimento. Para o autor, a aplicação deste modelo propicia um marco de visão e leitura da realidade, de forma que seja possível a identificação de sinais e lacunas que venham a existir e, quando existirem, possam, a partir desta leitura, ser preenchidos e superados, viabilizando a reconstrução do conhecimento, cada um ao seu tempo, caminho e recurso.

Pondera, ainda, ser necessário ao professor-avaliador buscar, no seu exercício cotidiano de avaliar, não somente causas e consequências, mas incluir nesta tarefa uma leitura dos sinais que se expõem a partir das transcrições e verbalizações dos estudantes. Promover, também, investigações minuciosas sobre a natureza de cada reposta encontrada que permitam, assim, dar indícios de todos os elementos que precisam ser trabalhados, não no sentido de desempenho, e sim, no sentido de conceder a autonomia necessária, através de ações pedagógicas baseadas em diagnósticos da realidade para o desenvolvimento cognitivo do aluno.

Assim, na visão do autor, a avaliação dentro do processo de ensino pode se mostrar uma importante ferramenta que levará, sobretudo, à reflexão e à autoanálise sobre como se dá a construção do conhecimento. Neste sentido, como aprimoramento da construção do processo de aprendizagem, é necessário que o aluno tenha a noção verdadeira do crescimento intelectual conseguido e que a forma de certificação desta ocorrência é a realização de uma boa avaliação. Porém, esta discussão não recai sobre a “necessidade” de uma boa nota, ao contrário, é uma análise consciente, por meio da qual se conclui que através de esforços mútuos, é possível conseguir sucesso.

As palavras de Souza (2002) enfatizam a ideia exposta, destacando a participação essencial da avaliação no processo de ensino e aprendizagem. Segundo o autor:

> Entendo que a avaliação não deve ser utilizada como um instrumento que contribua para o processo seletivo da educação, baseada na dicotomia aprovação/reprovação e sim considerada como um dos elementos-chave do processo de ensino e aprendizagem, voltada para detectar e promover a superação das dificuldades do educando, e como orientadora do processo educativo. A reflexão sobre o erro numa dimensão construtiva permite que se estenda um olhar sobre as regularidades vigentes nas práticas avaliativas da escola, pois, em geral, nessas práticas, o professor tende a agir sobre o erro seguindo uma orientação essencialmente empirista, isto é, corretiva. Essa postura corretiva considera o erro do aluno como uma incapacidade sua, uma vez que, se o aluno errou é porque não sabe e, para que aprenda, é preciso que resolva mais exercícios. Nessa concepção, está presente a ideia de que aprendizagem é sinônimo de repetição do que é ensinado. Nesse caso, a capacidade do aluno se restringe a resolver exercícios do mesmo tipo, como se não fosse capaz de transportar o conhecimento adquirido para aplicá-lo em outras situações (SOUZA, 2002, p. 61-62).

A avaliação não representa o resultado final e sim parte de um processo que leva a um produto final que, neste caso, representa a aprendizagem. Em outras palavras, ela é vista como um meio, um caminho, um fio condutor que contribui com o professor tanto na identificação quanto e, principalmente, na correção de possíveis erros que possam ocorrer neste processo construtivo.

Em relação à aprendizagem, Hoffmann (2001) afirma que a avaliação não pode ser considerada como objetivo da verificação e do registro de dados, informações e desempenho educacional. Deve ser vista como uma ferramenta que permite observar, de forma permanente, as manifestações de aprendizagem, de modo que se possa proceder a uma ação educativa que aperfeiçoe os percursos individuais.

A compreensão de que o erro pode ter origem em diversos fatores, como a própria instituição de ensino, a metodologia de trabalho, o currículo, além do esforço do próprio aluno, tem levado a uma nova concepção sobre os processos avaliativos. Neste sentido, a avaliação deve ser considerada um meio pelo qual o educador deve encaminhar as ações propostas rumo à execução dos objetivos educacionais, considerando sempre a capacidade de cada aluno, os processos de assimilação e as dificuldades de cada estudante para que, assim, seja possível uma interferência no sentido de encaminhar tais processos a favor do estabelecimento da aprendizagem.

Freire (1996) menciona sua preocupação com os sistemas avaliativos:

> Os sistemas de avaliação pedagógica dos alunos e de professores vêm se assumindo cada vez mais como discursos verticais, de cima para baixo, mas insistindo em passar por democráticos. A questão que se coloca a nós, enquanto professores e alunos críticos e amorosos da liberdade, não é, naturalmente, ficar contra a avaliação, de resto necessária, mas resistir aos métodos silenciadores com que ela vem sendo, às vezes, realizada. A questão que se coloca a nós é lutar em favor da compreensão e da prática da avaliação enquanto instrumento de apreciação do que fazer de sujeitos críticos a serviço, por isso mesmo, da libertação e não da domesticação. Avaliação em que se estimule o falar *a* como caminho do falar *com* (FREIRE, 1996, p. 116).

Hoffman (2001) também descreve sua preocupação em relação aos métodos de avaliação:

> O que se precisa questionar, no meu entender, são os princípios que fundamentam tais práticas avaliativas, que cada vez mais estreitas e padronizadas, impedem ver e sentir cada sujeito da educação em seu desenvolvimento integral e singular, negando a heterogeneidade que os torna humanos e limitando o acesso à escola apenas aos que se aproximam ou se submetem a expectativas rigidamente determinadas por ela (HOFFMAN, 2001, p.13).

Para ambos os autores, a avaliação deve facilitar a compreensão dos alunos e, para tanto, deve ser construída com base no nível intelectual dos estudantes, com o objetivo principal de que as competências e habilidades sejam desenvolvidas através de mecanismos específicos que contribuam na formação intelectual, social e psicológica de cada individuo.

Considera-se que as reflexões dos diversos autores sobre o processo avaliativo, os objetivos das avaliações e seu papel no processo de ensino e aprendizagem se encaminham para uma valorização da análise de erro. As discussões que tomam como referências as posturas teóricas, atualmente aceitas na Educação de modo geral e na Educação Matemática em particular, convergem para uma visão de erro construtivo que é parte do desenvolvimento cognitivo e do processo de apropriação de conhecimentos, o que evidencia a importância do seu estudo e investigação.

2 SOBRE A INVESTIGAÇÃO

Este capítulo está estruturado de forma a apresentar a investigação como um todo: exposição dos objetivos, metodologia utilizada no estudo, instrumentos, sujeitos e local da investigação, bem como, os procedimentos para análise de dados.

2.1 OBJETIVOS

A presente pesquisa tem como objetivo investigar e analisar os erros cometidos na resolução de problemas da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, dos acadêmicos do Curso de Engenharia Civil da Faculdade Presidente Antônio Carlos - FAPAC, Campus de Porto Nacional – TO, buscando identificar as dificuldades que os levaram a cometê-los. Foram estabelecidos, também, os seguintes objetivos específicos:

- identificar, categorizar e analisar erros cometidos na realização de atividades da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I;
- investigar as dificuldades em Cálculo Diferencial e Integral I que levam os estudantes a cometer erros.

2.2 ASPECTOS METODOLÓGICOS

Cury (2007) recomenda que uma análise qualitativa das respostas dos alunos, com uma discussão aprofundada sobre as dificuldades por eles apresentadas, apoiadas em investigações já realizadas é, talvez, a melhor maneira de aproveitar os erros para questionar os estudantes e auxiliá-los a estabelecer seu conhecimento.

Dessa forma, com o objetivo de contribuir neste processo de reciprocidade intelectual, este estudo segue uma perspectiva qualitativa, buscando identificar, classificar e analisar os erros cometidos por estudantes de um Curso de Engenharia Civil no processo de ensino e aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral I.

Nas palavras de Bogdan e Biklen (1996, p.49) “A abordagem da investigação qualitativa exige que o mundo seja examinado com a ideia de que nada é trivial, que tudo tem potencial para constituir uma pista que permita estabelecer uma compreensão mais esclarecedora do objeto de estudo”.

Assim, com respaldo nas afirmações de Bogdan e Biklen (1996) e ratificando a definição qualitativa do trabalho, busca-se não somente identificar, descrever e classificar os possíveis erros cometidos por esses estudantes, mas pretende-se, entre outros aspectos, descrever os erros cometidos, categorizando-os e analisando suas possíveis origens na busca da compreensão das dificuldades evidenciadas pelos alunos. Busca-se, também, estudar dispositivos de regulação que o professor possa usar na sala de aula para ajudar os alunos a tomarem consciência dos seus erros e a usá-los como fonte de aprendizagem.

Dentro desta perspectiva, optou-se por utilizar o caminho metodológico estabelecido por Cury e Cassol (2004), pelo qual as autoras propõem uma metodologia para análise de erros, tomando como base a análise de conteúdo proposta por Bardin (1979), o qual considera as seguintes etapas: pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados, as quais serão mais bem detalhadas posteriormente.

2.2.1 Local e Sujeitos da Investigação

A presente investigação foi desenvolvida junto a um grupo de 66 acadêmicos, do Curso de Engenharia Civil da FAPAC – Faculdade Presidente Antonio Carlos que, no segundo semestre de 2011, estavam cursando a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. A disciplina tem carga horária de noventa horas aulas no semestre, sendo distribuídas em dezoito encontros semanais de cinco horas aulas. Destaca-se que, ao longo do semestre, são disponibilizadas duas horas aulas semanais de atendimento aos acadêmicos, no turno vespertino, em um dia fixo da semana.

A FAPAC localiza-se na cidade de Porto Nacional, Estado do Tocantins, Região Norte do Brasil. Porto Nacional é um município de, aproximadamente, 46.000 habitantes, de acordo com censo do IBGE (2010), com destaque por ter sempre um firme compromisso com a educação e cultura, mantendo viva sua história, do seu povo e de suas tradições. Hoje, definitivamente, deixou de ser uma cidade de portuenses, para tornar-se uma cidade de toda a humanidade, da qual é considerada Patrimônio Histórico. Com localização privilegiada, atende as cidades próximas, que utilizam seus serviços médicos, odontológicos, comércio em geral e educação, elevando a população para cerca de 200.000 pessoas, consideradas flutuantes.

O ITPAC Porto Nacional Ltda. – Instituto Tocantinense Presidente Antonio Carlos Porto Ltda. é o mantenedor da FAPAC – Faculdade Presidente Antonio Carlos, credenciada Instituição de Ensino Superior, por ato do Chefe do Executivo do Estado do Tocantins, através do Decreto nº. 3.486, de 04/09/2008, publicado no Diário oficial do Estado do Tocantins nº. 2.728, publicado no dia 05/09/2008. Pelo mesmo ato foram transferidos para a FAPAC os cursos de Administração, Arquitetura e Urbanismo, Comunicação Social, Enfermagem, Engenharia Civil, Fisioterapia, Medicina e Odontologia, e, ainda, o descredenciamento da UNIPORTO/IESPEN (revogação do Decreto nº. 3.254/08). O processo originário do credenciamento do ITPAC PORTO NACONAL foi publicado no Diário Oficial nº. 2.722, publicado no dia 28/08/2008.

A efetivação da transferência dos cursos e alunos da UNIPORTO/IESPEN decorreu do Termo de Ajuste de Conduta firmado em 29/02/2008 e devidamente aditado em 25/07/2008, visando garantir a continuidade dos cursos e preservação dos interesses dos alunos. Em 19 de novembro de 2010, através de um acordo de cooperação técnica entre a União, representada pelo Ministério da Educação, por meio da Secretaria de Educação Superior, o Estado do Tocantins, representado pela Secretaria da Educação e Conselho Estadual de Educação e o Ministério Público Federal, representado pela Procuradoria da República no estado do Tocantins, firmaram compromisso de migração para o Sistema Federal de Ensino.

2.2.2 Instrumentos da Investigação

A investigação foi realizada considerando a elaboração e análise de cinco instrumentos de investigação e/ou avaliação: um questionário sociocultural, um Teste Inicial e três avaliações institucionais ocorridas na disciplina durante o semestre, segundo calendário acadêmico e plano de aula do professor, os quais passam a ser descritos.

2.2.2.1 Primeiro instrumento de coleta de dados – Questionário sociocultural

O primeiro instrumento de coleta de dados se constitui em um questionário sócio cultural, apresentado no Apêndice A, para a formação do perfil dos acadêmicos, o qual considera: gênero, idade, tipo de escola de curso de Ensino Médio, tempo de conclusão do Ensino Médio, motivo da escolha do curso, desempenho da aprendizagem em Matemática no Ensino Secundário, carga horária de trabalho semanal (caso trabalhe) e carga horária dedicada ao estudo. Por meio deste inventário, foi possível compor o perfil do grupo investigado.

2.2.2.2 Segundo instrumento de coleta de dados – Teste Inicial (TI)

O segundo instrumento de investigação, apresentado no Apêndice B, se constitui em uma atividade com oito questões abordando conteúdos de Ensino Médio, tais como: conjuntos numéricos, funções, geometria analítica e trigonometria. Esta atividade foi denominada de

Teste Inicial (TI), cujo objetivo foi identificar dificuldades iniciais apresentadas pelos acadêmicos do Curso de Engenharia Civil. Considerou-se pertinente a aplicação do teste no início dos trabalhos da disciplina, na busca de elementos que já, desde o início, evidenciassem possíveis defasagens e dificuldades dos estudantes.

Aliado ao perfil traçado a partir do questionário sociocultural, principalmente ao que se refere à postura dos estudantes em relação às dificuldades que consideram ter em Matemática e sua disponibilidade de tempo para estudo, buscou-se, com a análise do Teste Inicial, estabelecer estratégias para o desenvolvimento da disciplina. Assim, além de buscar dados para a investigação, estas informações se constituíram em importante fonte de conhecimento sobre o grupo de estudantes. Considera-se que muitos problemas que se encontram no desenvolvimento de uma disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, podem ser decorrentes da possível falta de visão sobre a situação dos alunos e deles em relação ao próprio curso. Vale ressaltar, ainda, que a intenção sempre foi a de qualificar, cada vez mais, o trabalho desenvolvido junto aos estudantes, tanto em relação aos conteúdos aplicados como aos aspectos metodológicos.

As questões do teste foram, em sua maioria, sobre funções, por se tratar de assunto que, posteriormente, seria muito utilizado no decorrer da disciplina. Indicam-se, a seguir, competências e habilidades que foram esperadas na resolução dos problemas do teste:

- ler e identificar pontos no plano cartesiano;
- identificar funções polinomiais de 1º e 2º graus representadas por sua lei de formação;
- identificar funções polinomiais de 1º e 2º graus representadas através de seu gráfico cartesiano;
- identificar uma expressão algébrica que representa o comportamento da função;
- determinar domínio, imagem e zeros de funções;
- analisar crescimento, decrescimento e zeros de uma função;
- usar as funções polinomiais de 1º e 2º grau para otimizar situações problemas;
- utilizar os conhecimentos de conjuntos na interpretação e intervenção do real;
- selecionar conjunto de informações sobre fatos reais ou imaginários na resolução de situações problema;
- estabelecer e aplicar as relações trigonométricas.

As competências e habilidades relacionadas ao estudo de funções podem ser agrupadas e apresentadas através da competência expressa por “modelar situações de variação e dependência de grandezas para compreender a realidade e resolver problemas”, segundo aponta o documento do Instituto de Avaliação e Desenvolvimento Educacional – INADE (2011).

Segundo o documento INADE (2011), as representações matemáticas têm uma importância fundamental no raciocínio matemático, em particular, no pensamento algébrico. A modelagem por meio de representações algébricas consiste na possibilidade de o aluno, através de cálculos e observações, validar o modelo, fazer previsões ou manipular a realidade em estudo. Dessa forma, o aluno pode trabalhar com a situação de diversas formas, não só buscando uma solução atual, mas podendo controlar acontecimentos futuros, tendo a criatividade e a curiosidade instigadas o tempo todo.

Ainda, segundo o documento, o processo de modelagem que envolve a formulação de hipóteses e simplificações adequadas na criação de modelos matemáticos algébricos para estudar fenômenos reais pode ser visto como uma alternativa para inserir aplicações da Matemática no currículo escolar. Por exemplo, destaca-se o conteúdo de funções, um conceito matemático basilar e muito utilizado em várias áreas do conhecimento, pois tenta explicar e modelar fenômenos físicos e sociais. Além disso, esse é um dos conceitos que mais se destaca entre outros desenvolvidos na Matemática nos cursos de Engenharia.

Após a aplicação do referido Teste Inicial, foi postado no portal do aluno um material de estudo com a apresentação e discussão de exemplos de erros apresentados por estudantes de da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I de turmas anteriores (Apêndice C), como parte integrante da discussão sobre o tema que perpassou toda a disciplina supracitada.

2.2.2.3 Terceiro instrumento - Avaliação Institucional N1

O terceiro instrumento de investigação, apresentado no Apêndice D, se constitui na primeira Avaliação Institucional (denominada N1), aplicada no dia 5 de setembro de 2011, com os conteúdos de: relações, funções e limites de funções. A avaliação foi aplicada seguindo o calendário acadêmico e a proposta de trabalho da disciplina que, por sua vez, estava entrelaçada com o plano de ensino (Anexo 1).

Novamente, elenca-se um conjunto de competências e habilidades de domínio necessário para a resolução de problemas que envolvem as temáticas constantes do instrumento citado. Destaca-se que nem todas as competências apontadas concorreram para resolução das questões do instrumento:

- resolver problemas com dados apresentados em gráficos;
- ler, interpretar e transcrever da linguagem corrente para a linguagem simbólica e vice-versa;

- analisar o crescimento, o decrescimento e os zeros de uma função;
- identificar uma expressão algébrica que representa o comportamento da função;
- ler e identificar pontos no plano cartesiano;
- determinar domínio, imagem e zeros de funções;
- construir e analisar gráficos de funções;
- analisar informações expressas em gráficos como recurso para a construção de argumentos;
- identificar e analisar valores de variáveis, intervalos de crescimento, decréscimo e taxas de variação em gráficos cartesianos de variável socioeconômica ou técnico-científica;
- utilizar os conhecimentos de limite de uma função para resolver problemas sobre fatos reais ou imaginários na resolução de situações problema;
- estabelecer e aplicar as relações de produtos notáveis e divisão de polinômios para resolver problemas de limite de função;
- identificar a indeterminação de limite de função.

A partir dos erros cometidos pelos estudantes na realização da avaliação N1, foram disponibilizados momentos de discussão na parte final das aulas e também no horário de atendimento aos acadêmicos, que acontecia todas as quartas-feiras, no período vespertino, com duração de duas horas-aulas de cinquenta minutos. Desta forma, buscou-se dar oportunidade aos alunos para que se manifestassem sobre as suas resoluções incorretas, dúvidas e dificuldades. Nesses momentos de avaliação e discussão, as atividades foram focadas em erros cometidos com relação aos conceitos de domínio e imagem de uma função, bem como o comportamento da função quadrática e o cálculo das coordenadas do vértice da função, além de aspectos relacionados às funções circulares e função modular.

2.2.2.4 Quarto instrumento - Avaliação Institucional N2

O quarto instrumento de investigação, apresentado no Apêndice E, se constitui na segunda avaliação institucional (denominada N2), aplicada no dia 17 de outubro de 2011, com duração de três horas e meia, após o desenvolvimento dos conteúdos de funções contínuas e derivadas. Após a realização dessa segunda avaliação e uma análise preliminar dos erros com maior incidência, foi elaborado material postado no portal do aluno (Apêndice F), o qual destacava e discutia os erros cometidos. Como a disciplina é organizada em cinco horas/aula semanais cumpridas em um mesmo turno, foi tomada uma hora aula da primeira aula após aplicação da N2 para discussão dos principais erros cometidos, buscando retomar, a partir da discussão sobre os erros cometidos, ideias, conceitos e procedimentos envolvidos na avaliação.

Por se tratar de um curso de Engenharia Civil, no desenvolvimento do conteúdo e nas avaliações, são apresentadas atividades relacionadas a problemas voltados à construção civil. Assim, as três primeiras questões do instrumento N2 eram problemas que envolviam, além de conhecimentos específicos matemáticos tais como noções de geometria plana, resolução de equações de primeiro grau, sistemas lineares e conceito de derivadas de primeira e segunda ordem, também aplicações de conhecimentos básicos próprios da engenharia. Com relação às três últimas questões, o foco voltou-se para a derivada da função cos(x), bem como para a diferenciação do uso da derivada da função potência e derivada da função composta, conceitos de função contínua e as aplicações das derivadas para esboçar os gráficos de funções, explorando os critérios de primeira e segunda derivada.

Novamente indica-se um número de competências e habilidades para a resolução das questões do instrumento citado:

- modelar e resolver problemas usando representações algébricas e critérios de derivadas;
- modelar situações de variação e dependência de grandezas para compreender a realidade e resolver problemas;
- utilizar o conhecimento geométrico para fazer a leitura da realidade e agir sobre ela;
- resolver problemas que envolvam derivadas das funções trigonométricas, derivadas da função potência e regra da cadeia;
- resolver problemas que envolvam determinação de domínio, imagem, conjunto de intervalos de crescimento e decrescimento, extremos, raízes e sinais de uma função, através de critérios de derivadas.

2.2.2.5 Quinto instrumento – avaliação Institucional N3

O quinto instrumento de investigação denominado N3, realizado no dia 22 de novembro de 2011, com duração de três horas e meia, foi também uma avaliação institucional (Apêndice G), sendo aplicado após as aulas ministradas sobre o conteúdo de Integrais.

Indica-se, a seguir, um conjunto de competências e habilidades necessárias para a resolução das questões do referido instrumento:

- resolver problemas que consistem em reconhecer a integração como processo inverso da diferenciação;
- resolver problemas que envolvam as propriedades da integral indefinida;
- resolver problemas de integrais que envolvam alterações algébricas /trigonométricas ou técnicas de integração;
- produzir e interpretar escritas algébricas, em situações que envolvam generalizações de propriedades, incógnitas, fórmulas, relações numéricas e padrões;
- resolver problemas que envolvam a integração por substituição ou mudança de variável e integração por partes;
- interpretar informações obtidas da leitura de gráficos e tabelas, realizando previsão de tendências, bem como as regras de Simpson e do Trapézio, na resolução de integrais definidas.

Entre o Teste Inicial (TI) e as avaliações institucionais N1, N2 e N3, houve espaço para discussão sobre as respostas encontradas. Esses espaços se organizaram em torno da utilização de, aproximadamente, uma hora aula no início ou no final da aula semanal próxima ao teste e às avaliações e no horário semanal de atendimento aos acadêmicos (duas horas/aula no turno vespertino, às quartas-feiras). De modo geral, a interação facilitada pelo convívio diário entre o professor/pesquisador e os estudantes favoreceu a identificação e acompanhamento de grupos de alunos que vinham apresentando maiores dificuldades. A composição desse grupo foi sendo definida a partir do desenvolvimento das atividades programadas para o semestre e os resultados obtidos no teste e nas avaliações.

Entende-se que, no desenvolvimento da disciplina, a metodologia de investigação entrelaçou-se com a metodologia de trabalho proposta para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. Os resultados advindos das avaliações, em termos de análise dos erros cometidos, converteram-se em elementos que alimentaram o processo de condução da disciplina ao longo do semestre. Buscou-se conhecer os tipos de erros apresentados, localizar suas origens e identificar os principais problemas relacionados aos conteúdos estudados, bem como aspectos da forma de condução do processo de ensino no sentido de replanejá-lo para um melhor aproveitamento dos estudantes.

2.3 PROCEDIMENTOS PARA ANÁLISE DOS DADOS

Bodgan e Biklen (1996) referem-se à análise de dados como sendo o processo de procura e de preparo sistemático das transcrições de entrevistas, de notas de campo e de outros materiais que foram sendo acumulados ao longo da investigação, com o objetivo de aumentar a sua própria compreensão desses mesmos materiais e de permitir apresentar, aos outros, aquilo que foi encontrado ao longo da investigação.

Na presente investigação, para analisar os dados advindos da realização do teste e as avaliações foi empregada a metodologia de análise do conteúdo das respostas, apresentada em Cury e Cassol (2004). A autora propõe uma metodologia para análise de erros tomando como base as etapas da análise de conteúdo proposta por Bardin (1979): pré-análise, exploração do material e tratamento dos resultados.

Assim, seguindo os pressupostos estabelecidos pela autora, na primeira fase, as respostas coletadas foram organizadas, para escaneamento ou digitação, conforme a possibilidade. Para cada questão, as respostas formaram, então, o material sobre o qual foi feita a análise. A seguir, as respostas foram corrigidas para analisar, quantitativamente, o número de acertos totais ou parciais, de erros ou de questões em branco.

A fase de exploração do material envolveu o processo de unitarização e classificação das respostas, no qual o material foi lido mais uma vez para definir as categorias de erro. Nesta pesquisa, os critérios de classificação foram determinados a partir do próprio material em que as respostas semelhantes foram agrupadas.

Já na fase de tratamento dos resultados, as categorias de respostas são descritas por meio de figuras ou tabelas de distribuição de frequências ou com a produção de “um texto-síntese, que permita ao leitor a compreensão do significado da classe, em geral com o apoio de exemplos retirados do próprio corpus” (CURY, 2007, p. 65).

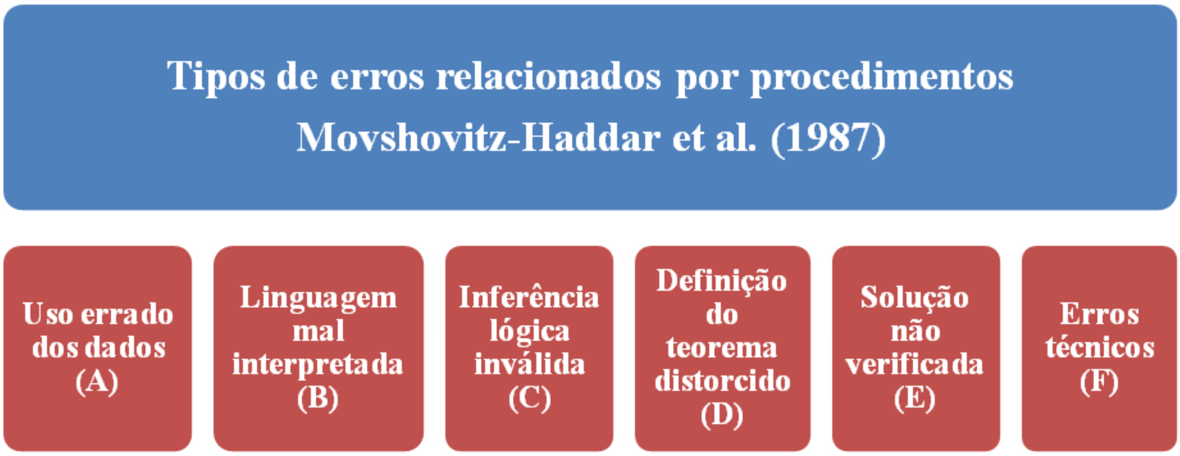
Para identificar o erro, primeiro foram considerados quais conceitos matemáticos eram relevantes ao problema, ou seja, se fez necessário definir quais conhecimentos conceituais e procedimentais deveriam ser de domínio do aluno para que resolvesse a questão.

Acredita-se que categorizar os erros significa primeiro, com base nos conceitos selecionados na etapa de identificação, separá-los em categorias, codificando o tipo de erro cometido. Sendo assim, necessário se fez identificar definições de categorias de erros que mais facilmente se correlacionassem e permitissem atender aos objetivos deste estudo. Assim, no contexto da investigação, a discussão foi encaminhada a partir da classificação de erros proposta por Movshovitz-Hadar et al. (1987).

Motivados por um modelo de classificação empírica para erros de Matemática do Ensino Médio em Israel, conforme já descrito, os autores investigaram dados de estudantes ao responderem um exame abrangente, partindo da suposição básica de que a maioria dos erros cometidos pelos alunos do Ensino Médio não são acidentais e são causados por um processo quase lógico que, de alguma forma, faz sentido para o aluno.

A Figura 3 se constitui em um esquema que apresenta a classificação do modelo proposto por Movshovitz-Hadar et al. (1987), a qual foi utilizada para a identificação e classificação dos erros apresentados pelos acadêmicos investigados no desenvolvimento da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. O esquema apresenta a tipologia de erros do modelo, referentes a erros relacionados por procedimentos. As categorias do modelo foram identificadas pelas letras A, B, C, D, E, F.

Figura 3 - Tipos de erros segundo Movshovitz-Hadar et al.



Fonte: Movshovitz-Haddar et al. (1987).

3 ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Neste capítulo, serão apresentados dados e análises referentes à aplicação do questionário sociocultural, do Teste Inicial TI e das avaliações N1, N2 e N3 realizados pelo grupo de acadêmicos investigados e que cursaram a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, do curso de Engenharia Civil da Faculdade Presidente Antônio Carlos de Porto Nacional – TO (FAPAC-PORTO) no primeiro semestre de 2011. Na análise dos dados, referentes aos erros cometidos pelos estudantes, serão tomadas as questões apresentadas no mencionado teste e nas avaliações, nas quais, o desempenho foi inferior a 60%, média considerada para aprovação na Instituição. Porém, determinados erros que chamaram a atenção, por sua natureza e particularidade, foram também analisados, mesmo quando a questão não estava dentro do percentual de erros estabelecidos para análise.

Ressalta-se que em cada resposta analisada os alunos são indicados pela letra A, seguida de um número para preservar suas identidades. Outro aspecto a ser destacado é que a turma era formada por 66 acadêmicos, porém, nem todos realizaram todas as avaliações, o Teste Inicial ou responderam ao questionário. A cada instrumento analisado será indicado o quantitativo de estudantes que o responderam.

3.1 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DO QUESTIONÁRIO SOCIOCULTURAL

Ao realizar a pesquisa, optou-se por fazer um levantamento das características socioculturais dos indivíduos participantes do estudo. Para tal, foi aplicado um questionário sociocultural (Apêndice A). Por meio desse instrumento, foram identificados pontos importantes para caracterização do grupo, a saber: gênero, idade, tipo de escola onde cursou o Ensino Médio, tipo de curso de ensino médio, tempo de conclusão do Ensino Médio, motivo da escolha do curso (Engenharia Civil), desempenho da aprendizagem em Matemática no ensino secundário, carga horário de trabalho (se houver), carga horária dedicada ao estudo por meio deste questionário foi possível traçar o perfil dos investigados, o qual passa a ser descrito a seguir. Destaca-se que esse perfil foi traçado a partir dos 48 estudantes que responderam ao questionário e realizaram o Teste Inicial, pois estavam presentes no primeiro dia de aula.

Assim, dos 66 acadêmicos matriculados na disciplina, responderam ao Teste Inicial 48, sendo que, desses, 36 são do sexo masculino e 12 são do sexo feminino. A média de idade é de 20 anos. E aproximadamente 60% do grupo (28), cursaram o Ensino Médio em escola pública. Em relação ao tipo de curso concluído no Ensino Médio, a pesquisa revelou que 36 alunos (75% dos investigados) cursaram o Ensino Médio de educação geral e somente 6 se formaram em cursos técnicos, seguidos de 2 que concluíram o Magistério e 4 que estudaram o Ensino Médio pelo sistema de supletivo. Já em relação ao tempo de conclusão do Ensino Médio, verificou-se que 22 dos alunos têm menos de um ano de conclusão, enquanto que 10 alunos têm entre um e três anos.

Quando questionados sobre os motivos da escolha do curso de Engenharia Civil, 20 estudantes manifestaram a ideia de que se identificam com o curso, sendo que, somente 13 já trabalham na área da construção civil e, por isso, escolheram o curso de Engenharia Civil. Além disso, 14 responderam que a opção pelo curso deve-se ao fato da construção civil se encontrar em excelente fase, o que pressupõe retorno rápido do tempo investido e também grande expectativa em relação ao mercado de trabalho futuro.

Os dados evidenciam que 13 acadêmicos já trabalham na área de construção civil. Por outro lado, segundo análise dos questionários, é possível afirmar que grande parte dos estudantes entrevistados está ingressando na área de engenharia, já que 21 destes, atualmente, não trabalham em áreas afins à Engenharia. Além disso, 14 alunos não estão no mercado de trabalho sendo somente estudantes.

Quando solicitados a indicar como consideravam seu aprendizado em Matemática no ensino secundário, as opiniões revelam que, em torno de 67% dos estudantes a consideram satisfatória (bom, muito bom e ótimo) e em torno de 33% declararam que foi insuficiente. Esses dados podem ser observados na Tabela 1.

Tabela 1 - Aproveitamento dos alunos no ensino secundário

Classificação	Número de alunos	Porcentagem
Bom	17	35,42%
Muito Bom	6	12,5%
Ótimo	9	18,75%
Insuficiente	16	33,33%

Fonte: Dados da Pesquisa

Com relação à dedicação aos estudos, 26 alunos, os quais representam 54% dos entrevistados, responderam que dedicam aos estudos somente duas horas semanais, enquanto que 15 alunos afirmaram que estudam entre duas e quatro horas semanais e somente 7 estudam mais que quatro horas por semana.

3.2 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DO TESTE INICIAL (TI)

No curso de Engenharia investigado, a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I começa com o estudo de funções, com foco no comportamento de funções a partir de sua representação gráfica. Assim, as questões do Teste Inicial, em sua maioria, foram voltadas para esse conteúdo, uma vez que também é desenvolvido no Ensino Médio. O estudo de funções é básico para o desenvolvimento do Cálculo Diferencial e Integral e para o estudo de fenômenos relacionados a, praticamente, todas as áreas. Por exemplo, na área de resistência dos materiais, tem-se o estudo da questão a partir dos mais variados gráficos de deformações em função dos esforços; na área de hidráulica, têm-se gráficos padrões para dimensionamento de bombas e perda de cargas; na área de estrutura de aço, madeira e concreto, têm-se diversos gráficos que representam o desempenho de estruturas sujeitas a determinados esforços. Ou seja, há um amplo conjunto de gráficos padrões que o aluno de Engenharia Civil precisa saber interpretar muito bem para seu bom desempenho profissional. Por essas razões, questões envolvendo funções e gráficos foram utilizadas no Teste Inicial, relacionadas, ainda, à necessidade de aplicação de conteúdos contextualizados, com prática a ser aplicada na função futura dos estudantes de Engenharia.

Na Tabela 2, com base na correção e análise do Teste Inicial (Apêndice B) expõe-se um quantitativo dos resultados encontrados. A apresentação desses dados não tem o objetivo de imprimir um papel estatístico à classificação dos erros apresentados pelos alunos, mas, a partir de uma indicação de presença e frequência de certos erros, buscar alternativas de tratamento para os mesmos. Os resultados apontam que, mesmo sendo uma turma de acadêmicos de um curso de Engenharia Civil do segundo período, os quais já cursaram a disciplina de Álgebra Linear e que passaram por um programa de nivelamento com conteúdos de Matemática básica no semestre anterior, os alunos apresentaram grandes dificuldades em resolver determinadas questões, principalmente as que envolviam o conteúdo de trigonometria. Destaca-se, novamente, que foram analisadas, em todos os testes e avaliações as questões que apresentaram um índice de acerto inferior a 60%, que é a média de aprovação na Instituição. Referente ao teste e as demais avaliações optou-se por apresentar os dados utilizando-se as frequências relativas, uma vez quem nem todos os acadêmicos estavam sempre presente em todas as avaliações.

Tabela 2 - Distribuição de acertos e erros do Teste Inicial

Questão	Corretas		Parcialmente corretas		Erradas		Em branco		Total de alunos presentes	Total de alunos ausentes
	no	**%**	**no**	**%**	**no**	**%**	**no**	**%**		
1	45	93,75	0	0	3	6,25	0	0	48	18
2	47	97,92	0	0	1	2,08	0	0	48	18
3	15	**31,25**	8	16,67	19	39,58	6	12,5	48	18
4	30	62,5	2	4,17	12	25	4	8,33	48	18
5	24	**50**	8	16,67	12	25	4	8,33	48	18
6	29	60,41	7	14,58	9	18,75	3	6,25	48	18
7	4	**8,34**	8	16,67	20	41,66	16	33,33	48	18
8	5	**10,42**	0	0	29	60,42	14	29,16	48	18

Fonte: Dados da Pesquisa.

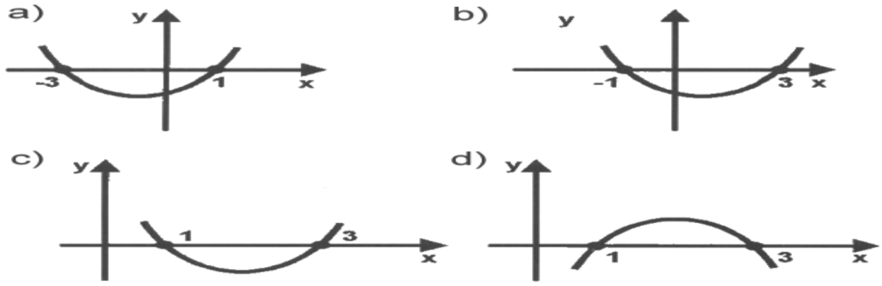
Assim, considerando os dados da Tabela 2, e de acordo com o critério adotado (mínimo de 60% de acertos), foram analisadas as questões 3, 5, 7 e 8 e as soluções apresentadas foram categorizadas conforme a semelhança entre a tipologia de erros já apresentada.

3.2.1 Apresentação e Análise da Questão 3 do Teste Inicial

A questão 3 do Teste Inicial, apresentada na Figura 4, envolve a conversão de uma função quadrática apresentada em linguagem algébrica para a respectiva representação gráfica, o que caracteriza a necessidade dos estudantes de perceberem um mesmo objeto por meio de diferentes formas de representação, conforme já indicado no documento INADE (2011). O conhecimento matemático específico pertinente à questão refere-se à identificação do sinal do parâmetro “a”, coeficiente de x^2, o qual se relaciona com a concavidade da parábola voltada “para baixo”. Como apenas um item apresenta um gráfico com tal característica, o que torna desnecessário aos respondentes lançarem mão de outros conhecimentos (como, por exemplo, a determinação das raízes), considera-se a questão elementar em relação ao grupo respondente.

Figura 4 - Questão 3 do Teste Inicial

A representação gráfica da função $y = -x^2 + 4x - 3$, é (justifique sua resposta):



Fonte: Dados da Pesquisa.

De acordo com os critérios adotados, nesta questão foram analisadas as 27 respostas erradas, ou parcialmente corretas, sendo descartadas as 6 resoluções em branco e as 15 corretas, o que pode ser visto na Figura 5.

Figura 5 - Classificação dos erros cometidos na questão 3 do Teste Inicial

Tipos de erros	Frequências Relativas (%)	Comentários
D	25,0	É verificado que os alunos tentaram chegar a uma das opções de resposta de principalmente a partir do cálculo das raízes da equação, porém utilizaram a relação do sinal do coeficiente “a” com o sentido da concavidade de forma equivocada.
F	31,25	Os alunos fizeram a interpretação correta dos dados, bem como os procedimentos algébricos, porém cometeram, principalmente, erros de sinal, tanto na solução da questão como na utilização da fórmula resolutiva da equação de segundo grau.

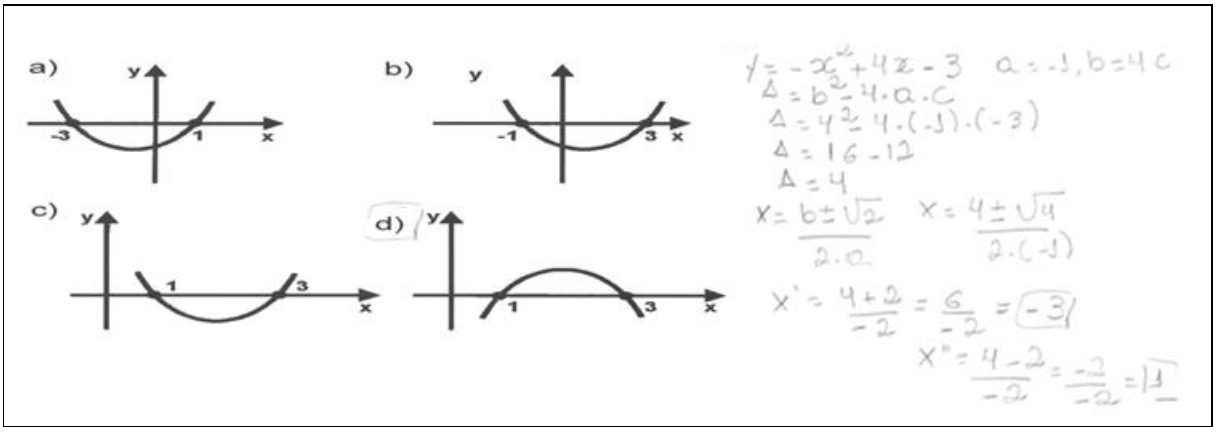
Fonte: Dados da Pesquisa.

Em relação às repostas, 25% dos alunos marcaram a letra C, justificando suas respostas com a afirmação de que “$a < 0$”. As respostas apresentadas indicam que esses estudantes têm conhecimento, em termos teóricos, da necessidade de se analisar o sinal do parâmetro “a” para resolver a questão indicando, inclusive, esse critério em uma linguagem matemática formal ($a < 0$). Porém, conjectura-se que ao indicarem o critério correto marcando a opção errada (letra C), evidenciam que não dominam a teoria (associam $a < 0$ com concavidade voltada para cima) o que coloca esse tipo de solução na categoria D (definição do teorema distorcido) da classificação adotada.

Os demais erros foram classificados como do tipo F (erro técnico) indicando distração (erro de sinal) na realização dos cálculos ou utilização da fórmula resolutiva da equação de 2º grau, já considerando um erro inicial na utilização da fórmula (coeficiente b no lugar de (–b)). O exemplo de solução apresentado na Figura 6 dá indícios de que o aluno sabia o comportamento gráfico da função, marcando a alternativa correta, no entanto, cometeu erro na manipulação da expressão usada para encontrar as raízes da equação, o que o levou a encontrar as raízes erradas, tornando sua resposta incoerente com o cálculo apresentado.

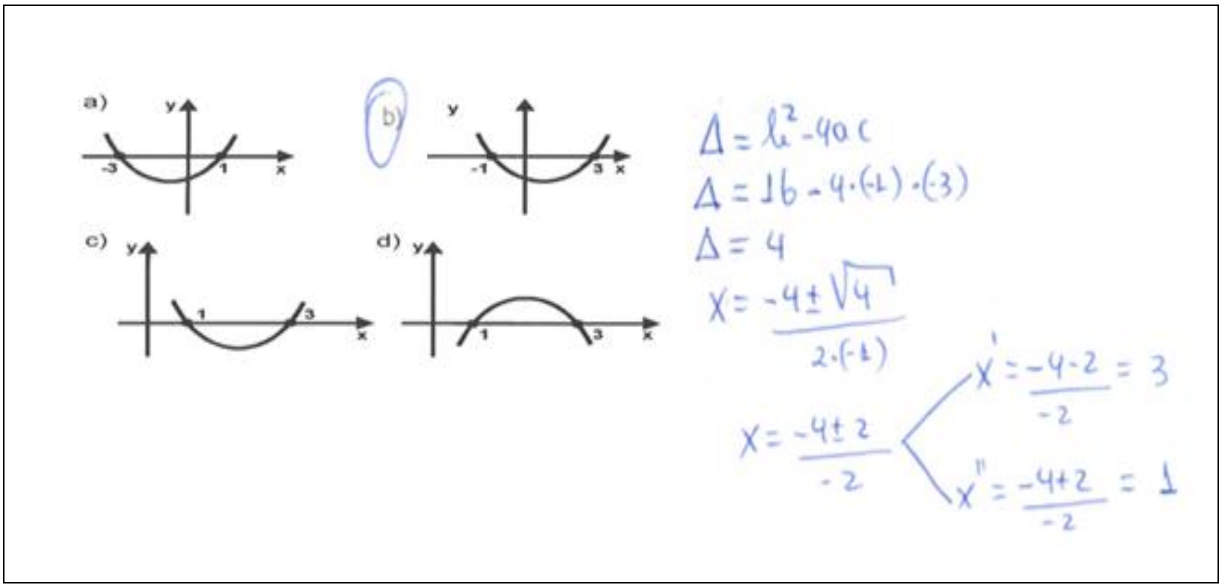
Já no exemplo apresentado na Figura 7, o aluno encontrou de maneira correta as raízes da equação, porém, além de marcar uma opção que apresentava uma raiz diferente da calculada não considerou a relação entre o sinal do coeficiente "a" com a concavidade voltada para baixo da parábola.

Figura 6 - Resolução apresentada pelo aluno A1 na questão 3 do Teste Inicial



Fonte: Dados da Pesquisa.

Figura 7 - Resolução apresentada pelo aluno A2 na questão 3 do Teste Inicial



Fonte: Dados da Pesquisa.

Com relação às dificuldades apresentadas, indicadas na representação gráfica de funções, o documento INADE (2011), sugere como orientações didáticas, incorporar à resolução de problemas sobre funções de 1o e 2o graus a utilização de *softwares*, que permitam a produção de gráficos de funções, enfatizando o trabalho com previsão de resultados e o estabelecimento de conjecturas, a serem verificadas como forma de possibilitar situações que promovam a articulação entre os diferentes tipos de representações.

Nesse sentido, entende-se que a utilização de ferramentas computacionais pode favorecer a manipulação da representação gráfica de maneira mais rápida que a utilização de lápis e papel, permitindo que a acadêmico faça simulações e busque resultados que podem satisfazer os seus objetivos. Dessa forma, a utilização de *software* pode desenvolver a capacidade analítica do estudante em fazer previsões e questionar seus próprios resultados.

3.2.2 Apresentação e Análise da Questão 5 do Teste Inicial

A questão 5 do Teste Inicial, apresentada na figura 8, apresenta uma situação relacionada a um modelo que envolve uma função do 1º grau. A elaboração da questão teve como objetivo acessar a habilidade/competência do educando em:

- ler, interpretar e transcrever da linguagem corrente para a linguagem simbólica e vice-versa;
- resolver problemas que envolvam equações do primeiro grau;
- modelar situações e dependência de grandezas para compreender a realidade e resolver problemas.

Figura 8 - Questão 5 do Teste Inicial

Questão 5: Um estacionamento cobra R$ 7,00 na entrada e mais R$ 0,01 pelo tempo, em minutos, que o automóvel permanece estacionado. Quanto tempo permaneceu no estacionamento um automóvel que teve um custo de R$ 9,55?

Fonte: Dados da Pesquisa.

Vinte estudantes responderam a questão de maneira considerada errada. A Figura 9 apresenta uma classificação dos erros cometidos segundo a categorização utilizada, bem como observações que buscam elucidar e justificar a classificação feita.

Figura 9 - Classificação dos erros cometidos na questão 5 do Teste Inicial

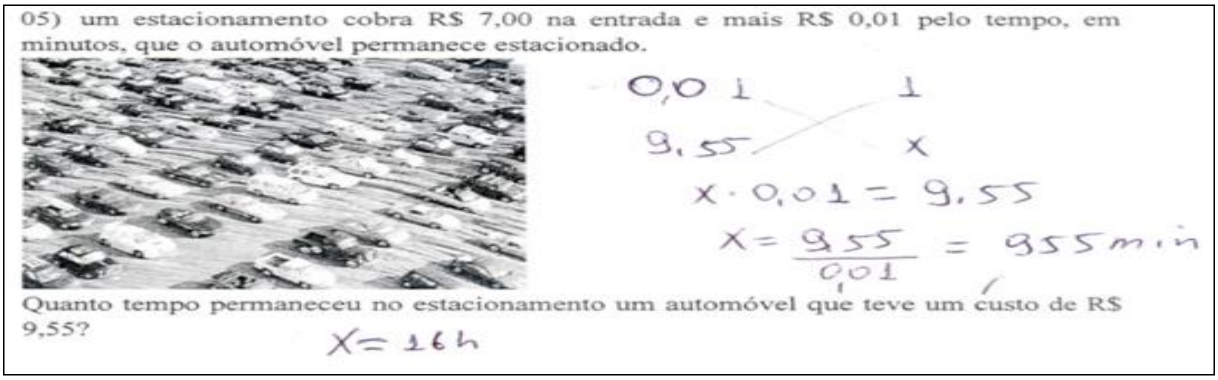
Tipos de erros	**Frequências Relativas (%)**	**Comentários**
B	22,91	Os acadêmicos tiveram dificuldades na interpretação do problema, ou seja, não compreenderam o que foi pedido na questão ou compreenderam em partes. Embora tenham apresentado, também, deficiências nas operações básicas de Matemática, classificados como erros técnicos, considera-se que a deficiência na interpretação dos dados se sobrepõe, optando-se em classificar os erros em código B.
F	16,67	Nesse caso o problema foi estruturado de forma correta, no entanto, são observados os erros de matemática básica como, por exemplo, quando os estudantes consideram 4,25 h o mesmo que 4h e 25 min. Os alunos retiraram todos os dados do problema e os empregaram de maneira correta, chegando a informar, em horas, a resposta correta, mas em minutos errada, caracterizando assim erro técnico. Dois alunos ainda fizeram a interpretação correta dos dados, bem como a manipulação dos procedimentos algébricos, mas responderam 255 horas ao invés de 255 minutos, o que se considerou erro de atenção.
E	2,0	O aluno adotou uma estratégia errada e a desenvolveu corretamente, embora não fosse solução para o problema.

Fonte: Dados da Pesquisa

Para uma melhor compreensão, apresentam-se exemplos de soluções classificadas em B e em F, já que se obteve, nestas classificações, a maior ocorrência de erros.

O exemplo apresentado na Figura 10 relaciona-se à classificação do tipo B. O aluno despreza a entrada (R$ 7,00) e tenta resolver a questão por regra de três. Considerou-se, aqui, que o estudante compreendeu apenas em parte o que estava sendo pedido, uma vez que, desconsiderou parte dos dados (a entrada).

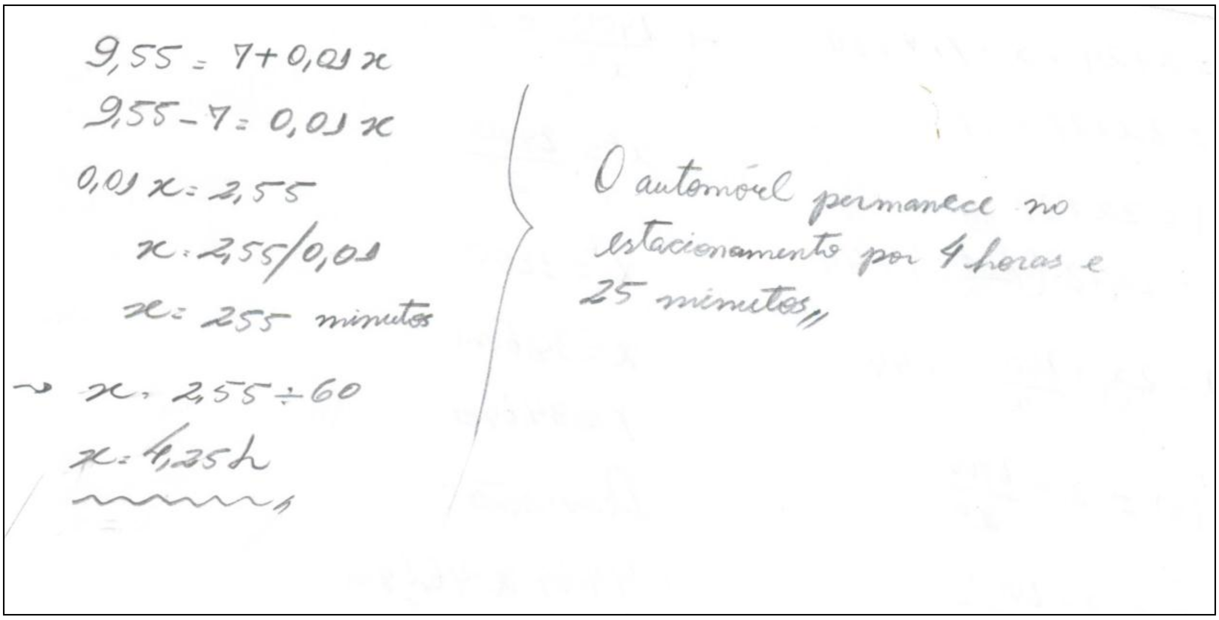
Figura 10 - Resolução apresentada pelo aluno A4 na questão 5 do Teste Inicial



Fonte: Dados da Pesquisa

Já no exemplo, cuja solução é apresentada na Figura 11, o erro ocorreu em relação à transformação de unidade, já que o estudante considerou, inicialmente, 255 minutos como sendo 4,25h, o que está correto. Mas, ainda na mesma questão, estabeleceu 4,25h como sendo 4 horas e 25 minutos quando, na verdade, 4,25 horas corresponde a 4 horas e 15 minutos.

Figura 11 - Resolução apresentada pelo aluno A5 na questão 5 do Teste Inicial



Fonte: Dados da Pesquisa.

Os erros destacados evidenciam que compreender a linguagem matemática e o significado matemático de uma situação apresentada envolve a percepção de que a Matemática tem linguagem própria e as ideias, conceitos e objetos matemáticos devem ser percebidos a partir dessa linguagem. É como aprender a falar, a ler e a se comunicar em outra língua. Comparar a Matemática com a língua materna é fundamental, como diz D'Ambrósio (1986):

> [...] o fato de a matemática ser uma linguagem (mais fina e precisa que a linguagem natural) que permite ao homem comunicar-se sobre fenômenos naturais, consequentemente, ela se desenvolve no curso da história da humanidade desde os "sons" mais elementares, e, portanto intimamente ligada ao contexto sociocultural em que se desenvolve – por isso falamos em matemática grega, matemática hindu, matemática pré-colombiana (D'AMBRÓSIO, 1986, p.35).

3.2.3 Apresentação e Análise da Questão 7 do Teste Inicial

A Figura 12 apresenta a questão 7 do Teste Inicial, a qual aborda um problema clássico da trigonometria no triângulo retângulo. A questão requer do aluno a capacidade de aplicar elementos abstratos da matemática a uma situação real do cotidiano, caracterizando a necessidade do estudante de identificar os dados do problema e usá-los na visualização geométrica da situação exigida. Assim, na resolução dessa questão destacam-se as seguintes competências/habilidades:

- resolver problemas utilizando as relações métricas e trigonometria no triângulo retângulo;

- resolver problemas utilizando o teorema de Pitágoras no cálculo de segmentos associados aos polígonos;
- utilizar o conhecimento geométrico para fazer leitura e a representação da realidade, agindo sobre ela.

Figura 12 - Questão 7 do Teste Inicial

Questão 7: Um topógrafo foi chamado para obter a altura de um edifício. Para fazer isto, ele colocou um teodolito a 200 metros do edifício e mediu um ângulo de 30^0. Sabendo que a luneta do teodolito está a 1,5 metros do solo, pode-se concluir que, dentre os valores adiante, o que melhor aproxima a altura do edifício, em metros, é: a) 115 b) 230 c) 200 d) 170 e) 117

Fonte: Dados da Pesquisa.

A Figura 13 apresenta a classificação e análise dos erros cometidos na solução da questão.

Figura 13 - Classificação dos erros cometidos na questão 7 do Teste Inicial

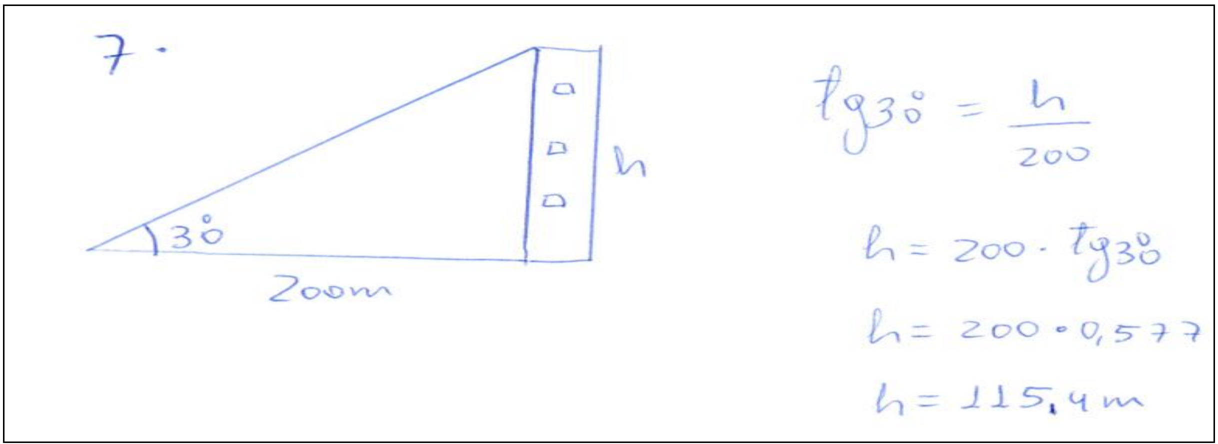
Tipos de erros	**Frequências Relativas (%)**	**Comentários**
-	2,0	Neste caso específico, transcreve-se a fala do aluno justificando, assim, a não classificação do erro: "*Professor, não aprendi direito essa parte de seno, cosseno e tangente no segundo grau, mas acho que a resposta é a letra "E", pois os outros valores estão muito altos para a altura de um prédio. Gostaria que o senhor corrigisse esta questão depois para mim*".
A	10,41	Nesta classe, os alunos retiram os dados da questão, inclusive obervam que a luneta está a 1,5m do chão, mas usam esses dados de maneira errada. Acredita-se que alguns erros poderiam ter sido evitados caso os alunos tivessem feito a representação geométrica da questão.
B	48,0	Observa-se que os alunos não retiraram de forma correta os dados disponibilizados na questão, desconsiderando a altura da luneta. Foi verificado, também, que quatro alunos tentaram chegar a uma das opções de resposta de alguma forma, porém utilizando-se da relação trigonométrica inadequada. Conjetura-se assim que os estudantes interpretaram de forma incorreta a questão.

Fonte: Dados da Pesquisa.

Diante dos erros cometidos, conjectura-se que ocorreram dificuldades relacionadas à interpretação da questão, como, por exemplo, a desconsideração da altura da luneta que estava a 1,5 metros do chão, bem como, erros relacionados à relação trigonométrica adequada para a solução do problema. Porém, destaca-se que a maioria das dificuldades detectadas está relacionada à classificação do tipo B (linguagem mal interpretada).

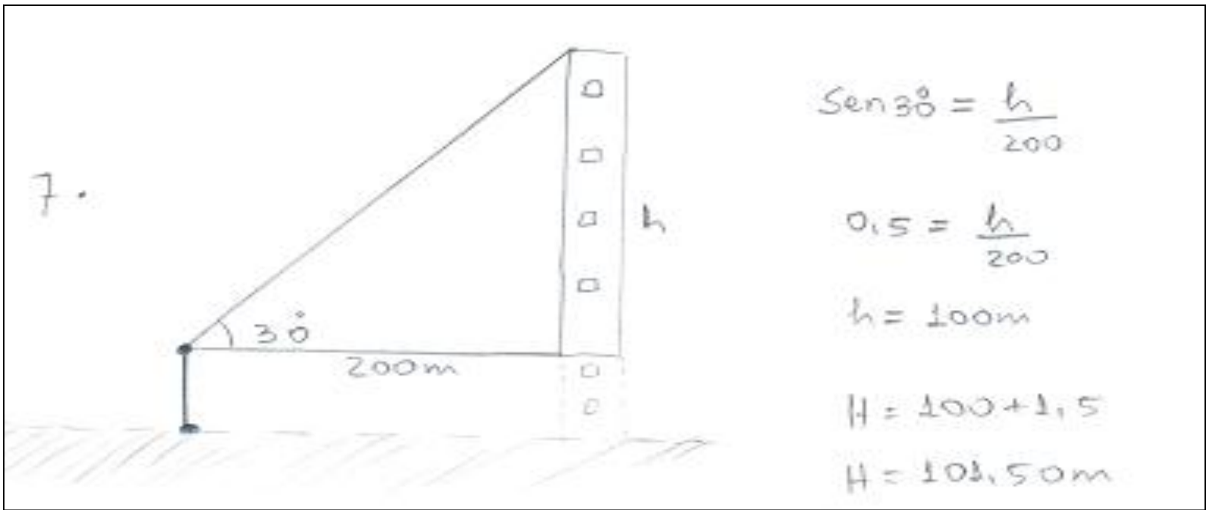
Apresentam-se as soluções de dois alunos para melhor ilustrar a classificação dos erros analisados. No exemplo apresentado na Figura 14, o erro está relacionado à classificação tipo B. O aluno, nesta questão, despreza a altura da luneta, mostrando assim ter interpretado em parte a questão. Já o exemplo apresentado na Figura 15, está relacionado à classificação do tipo A, uma vez que o aluno tenta resolver a questão utilizando uma relação trigonométrica de maneira equivocada, cometendo assim erro de distorção na utilização de definições. Porém, percebe-se que o mesmo retirou os dados do problema, mas utilizou os mesmos de maneira errada.

Figura 14 - Resolução apresentada pelo aluno A6 na questão 7 do Teste Inicial



Fonte: Dados da Pesquisa

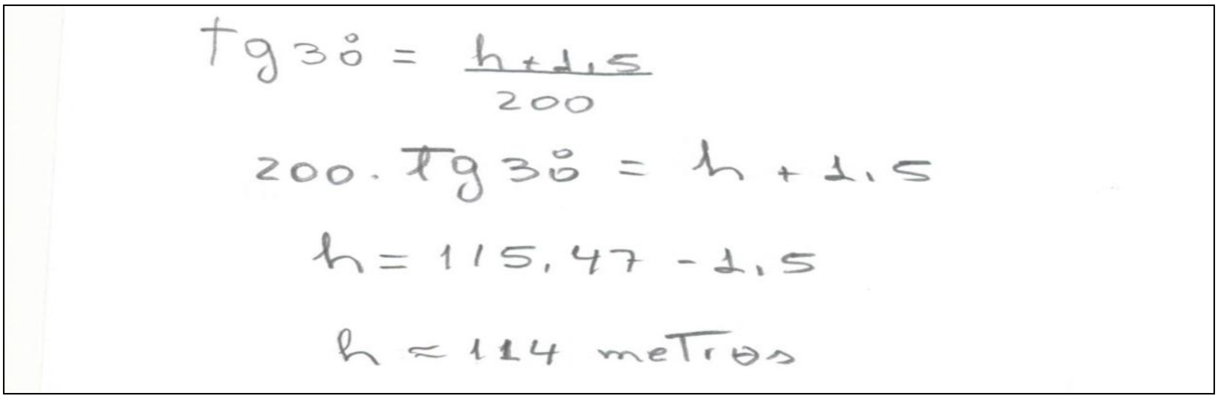
Figura 15 - Resolução apresentada pelo aluno A7 na questão 7 do Teste Inicial



Fonte: Dados da Pesquisa

Apresenta-se, na Figura 16, outro erro classificado como do tipo A, onde o aluno retirou os dados do problema, identificou a relação trigonométrica a ser utilizada, no entanto, utilizou os dados de forma errônea, já que a altura 1,50m deveria ter sido somada somente ao final, após o cálculo da tangente de 30º.

Figura 16 - Resolução apresentada pelo aluno A8 na questão 7 do Teste Inicial



Fonte: Dados da Pesquisa.

Para esta mesma questão, encontrou-se, também, erros relacionados à aplicação somente do Teorema de Pitágoras na resolução do problema, ou seja, escolheram uma estratégia que não é solução para o problema, lançando mão de uma relação bastante conhecida.

3.2.4 Apresentação e Análise da Questão 8 do Teste Inicial

A questão 8 do Teste Inicial, apresentada na Figura 17, foi elaborada no intuito de verificar se o educando possui a percepção que todo triângulo contem três alturas relativas. No caso específico do triângulo retângulo apresentado nessa questão, houve ainda a intensão de despertar no aluno a noção de que no triângulo retângulo existem outras alturas relativas e não somente aquela representada por um de seus catetos.

Assim, para resolução dessa questão, destacam-se as seguintes competências/habilidades:

- resolver problemas utilizando as relações métricas no triângulo retângulo;
- resolver problemas utilizando semelhança de triângulos;
- resolver problemas utilizando o Teorema de Pitágoras no cálculo de segmentos associados aos polígonos.

Figura 17 - Questão 8 do Teste Inicial

Questão 8: Os catetos de um triângulo retângulo medem respectivamente 18 e 24 metros. Calcule a altura relativa à hipotenusa:

a) 20 m b) 30 m c) 14,4 m d) 14 m e) 12 m

Fonte: Dados da Pesquisa.

A Figura 18 apresenta a classificação e análise dos erros cometidos na solução da questão 8 do Teste Inicial.

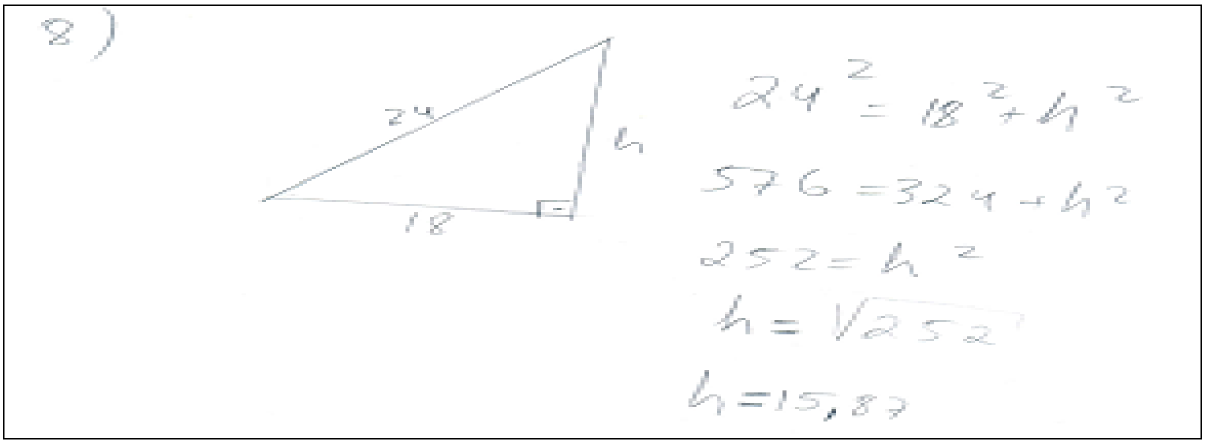
Figura 18 - Classificação dos erros cometidos na questão 8 do Teste Inicial

Tipos de erros	**Frequências Relativas (%)**	**Comentários**
B	45,83	Os erros dessa categoria mostram que os alunos não interpretaram de forma correta a questão, pois encontraram a hipotenusa e não a altura, ou a interpretaram parcialmente, uma vez que não souberam o significado do termo "altura relativa à hipotenusa".
A	10,41	Quanto à resolução da questão, é verificado que os estudantes interpretaram as informações do problema, mas empregaram-nas erroneamente.
E	2,0	Com relação à resposta deste aluno, encontramos erros relacionados a conceitos de geometria e trigonometria, uma vez que o aluno estabeleceu dois valores diferentes para a mesma altura do triângulo. A classificação do erro nesta categoria deve-se ao fato do aluno ter desenvolvido a resolução da questão sem questionar os valores encontrados, chegando assim numa resposta, em termos quantitativos, muito próxima ao valor esperado, caracterizando uma solução não verificada.

Fonte: Dados da Pesquisa.

Os alunos que cometeram erros classificados como do tipo B, marcaram como correta a letra b. A avaliação das repostas permite afirmar que houve, neste caso, dificuldades relacionadas ao entendimento do que estava sendo solicitado na questão, bem como a utilização dos dados de forma incorreta. Conjectura-se que, para esses alunos, existe apenas uma única maneira de representar o triângulo retângulo, tomando a altura como um dos catetos. Também procuram o valor da hipotenusa, que não era o solicitado no problema. Na Figura 19 apresenta-se exemplo de solução de um estudante que utiliza os dados de maneira incorreta, organizando-os de modo a utilizar o Teorema de Pitágoras na solução da questão.

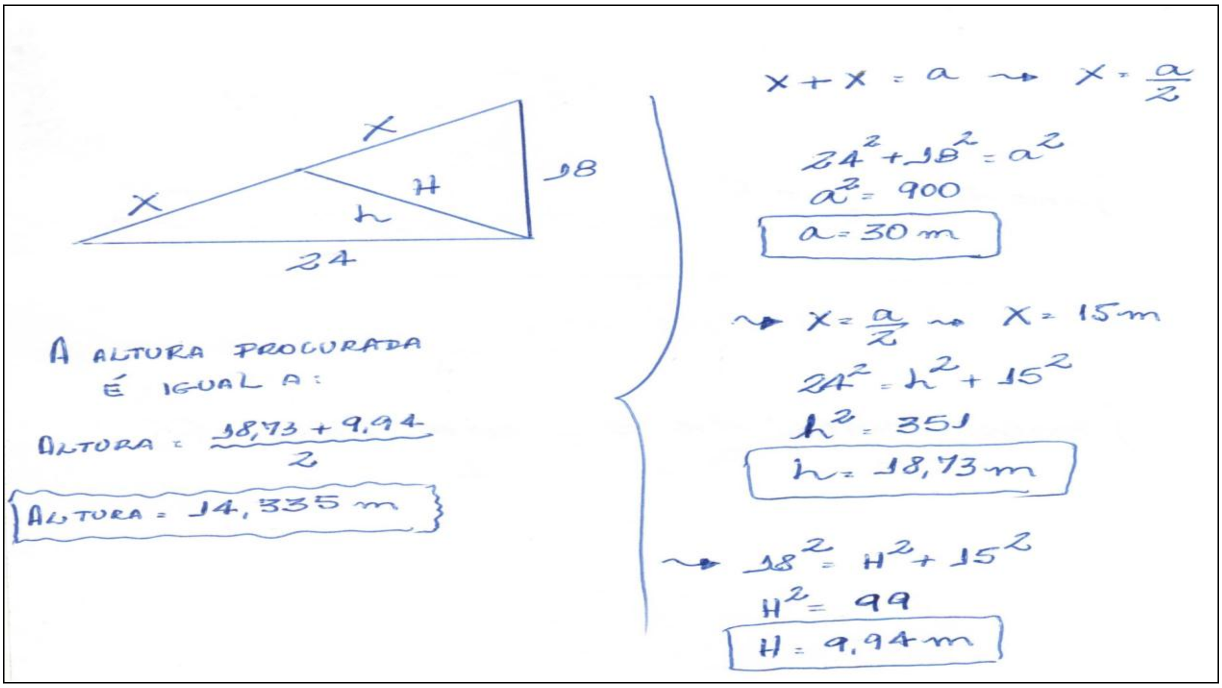
Figura 19 - Resolução apresentada pelo aluno A9 na questão 8 do Teste Inicial



Fonte: Dados da Pesquisa

Na figura 20, apresenta-se um exemplo de erro classificado como do tipo E. Observa-se que, embora o aluno tenha chegado à resposta muito próxima da correta, em termos numéricos, o procedimento de resolução foi incorreto. Assim, entendeu-se como erro do tipo E, já que o aluno adotou uma estratégia errada e chegou a uma resposta muita próxima à correta.

Figura 20 - Resolução apresentada pelo aluno A10 na questão 8 do Teste Inicial



Fonte: Dados da Pesquisa.

A reposta dada pelo estudante indica que ele, primeiramente, encontrou corretamente a hipotenusa do triângulo (30 metros), porém, a seguir, dividiu erroneamente a hipotenusa em duas partes iguais, considerando que se tratava de um triângulo isóscele, o que estava errado. Além disso, considerou que a altura relativa à hipotenusa poderia assumir dois valores diferentes, h= 18,73 metros e H= 9,94 metros. Por último, efetuou a média destes dois valores e, por coincidência, obteve um valor muito próximo à resposta correta do problema (Altura = 14,40 metros). Dessa forma, o erro não foi somente de interpretação dos dados, mas da forma como estes foram utilizados. Embora apresente semelhança com outras categorias, o erro foi classificado como do tipo E, uma vez que o aluno, em sua solução, chegou à resposta certa em termos numéricos, porém, por meio de procedimento errado configurando um erro do tipo E (solução não verificada).

Esta questão foi levada para ser discutida junto aos estudantes em função dos procedimentos adotados pelo aluno e pelo fato da resposta ter se aproximado do resultado correto. Borasi (1996), em sua proposta de ambiente de aprendizagem, propõe que se utilize um determinado erro para questionar se o resultado incorreto pode ser considerado correto, em alguma situação.

Traçando um paralelo entre as orientações didáticas do INADE (2011) e fazendo uma retrospectiva entre as competências/habilidades necessárias para a resolução das questões 7 e 8, percebe-se o quanto é importante o estudo dos conceitos de geometria e trigonometria na carreira profissional de um engenheiro civil, tanto sob ponto de vista prático, quanto em relação aos aspectos instrumentais na organização do pensamento. A orientação espacial, muitas vezes construída a partir de atividades de visualização, desenho e comparação, é imprescindível para o profissional da área de engenharia, sobretudo com relação à ação cotidiana do futuro profissional. Noções simples de medidas, áreas e capacidade devem estar bem solidificadas, de forma a propiciarem um olhar crítico nas diversas situações a serem enfrentadas.

3.3 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DA AVALIAÇÃO INSTITUCIONAL N1

O instrumento aqui analisado faz parte da primeira verificação do aprendizado da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, ou seja, a primeira avaliação institucional (N1), aplicada de acordo com o calendário acadêmico e plano de Ensino da FAPAC. A avaliação foi aplicada no dia 12 de setembro de 2011, na sala onde acontecem as aulas semanais da disciplina, com duração máxima permitida de 3,5 horas. Participaram dessa avaliação 60 acadêmicos.

A Tabela 3 apresenta a distribuição das questões certas e parcialmente certas e erradas, referente ao instrumento N1. Nesse caso, como se tem mais de um item a ser resolvido dentro da mesma questão, optou-se por considerar como parcialmente certos os problemas onde não foram resolvidos todos os itens.

Tabela 3 - Distribuição de acertos e erros da Avaliação Institucional N1

Questão	**Corretas**		**Parcialmente corretas**		**Erradas**		**Em branco**		**Total de alunos presentes**	**Total de alunos ausentes**
	no	**%**	**no**	**%**	**no**	**%**	**no**	**%**		
1	43	71,67	13	21,67	4	6,66	0	0	60	6
2	39	65,0	21	35,0	0	0	0	0	60	6
3	38	63,33	22	36,67	0	0	0	0	60	6
4	41	68,33	19	31,67	0	0	0	0	60	6
5	9	**15**	24	40	4	6,67	23	38,33	60	6
6	25	**41,67**	20	33,33	2	3,33	13	21,67	60	6

Fonte: Dados da Pesquisa

De acordo com a metodologia adotada e com base nos dados da Tabela 3, foram selecionadas as questões 5 e 6, considerando que o número de acertos nas resoluções destes problemas foram inferiores a 60%. As respostas foram categorizadas conforme a semelhança da tipologia de erros exposta na metodologia. Foi incluída na análise a questão três, embora fora do percentual estabelecido para análise, pois possui algumas peculiaridades nas respostas que se considera que merecem ser estudadas.

3.3.1 Apresentação e Análise da Questão 3 da Avaliação N1

A questão 3 da avaliação N1, item a., apresentada na Figura 21, envolve uma função do 2º grau que se apresenta como ferramenta de análise e trabalho em diversas áreas do conhecimento humano, principalmente em situações relacionadas à Física, envolvendo movimento uniformemente variado, lançamento oblíquo etc.; à Biologia, no que se refere ao processo de fotossíntese das plantas; à Administração, Economia e Contabilidade, em funções de custo, receita e lucro; e à Engenharia Civil, objeto de estudo desse trabalho, com diversas aplicações como, por exemplo, a representação gráfica do comportamento de deformações de vigas e lajes, além de construções arquitetônicas com formatos parabólicos.

Essa questão foi elaborada com o objetivo de observar a capacidade do educando em localizar, no plano cartesiano, os pontos ordenados referentes às raízes da função de 2º grau, ao vértice e ao intercepto do gráfico com o eixo das ordenadas. Também, aferir a percepção de simetria e escala quando do esboço do gráfico no plano cartesiano.

A questão 3 da avaliação N1, item b., apresentada também na Figura 21, refere-se à uma função trigonométrica do tipo seno, de importância ímpar no estudo dos triângulos e em modelos matemáticos representativos de fenômenos periódicos como, por exemplo, na área médica, em exames cardiovasculares; na física, em estudos de oscilações e comprimento de ondas; na Engenharia Civil, em mecânica técnica com estudos de deformações dos sistemas de amortecedores e massa-mola.

O item b. da questão 3 exige do aluno o conhecimento trigonométrico do comportamento gráfico da função seno em conjunto com a definição de módulo e de função definida por várias sentenças.

Entende-se que, para desenvolver e obter o resultado considerado correto da questão, o aluno necessita das seguintes competências/habilidades:

- construir e analisar gráficos de funções;
- ler, interpretar e transcrever da linguagem corrente para a linguagem simbólica e vice-versa;
- ler e identificar pontos no plano cartesiano.

Figura 21 - Questão 3 da Avaliação N1

Questão 3: Represente graficamente cada função y = f(x). Determine seu domínio e sua imagem.

a. $y = f(x) = x^2 - 5x + 6$

b. $y = |senx|$

Fonte: Dados da Pesquisa.

Portanto, diante dos requisitos descritos para resolução da questão em estudo apresenta-se, na Figura 22, a análise e avaliação da referida questão.

Figura 22 - Classificação dos erros cometidos na questão 3 da Avaliação Institucional N1

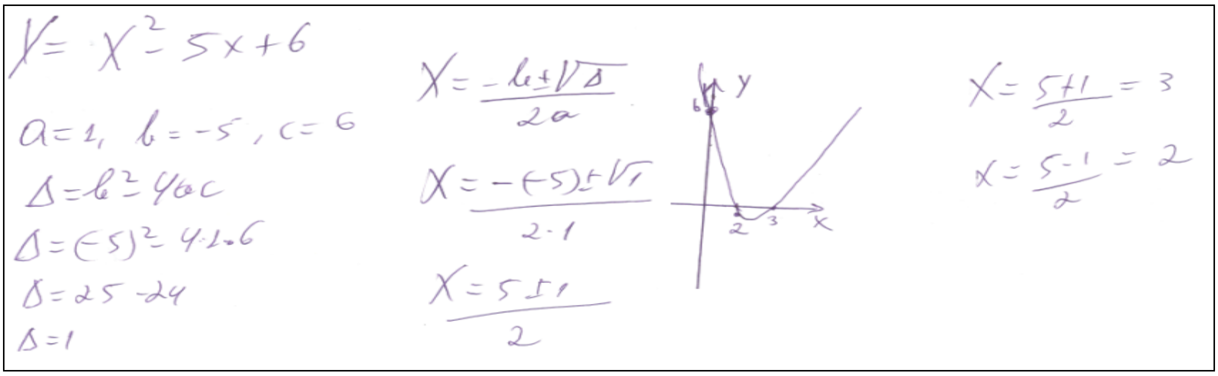
Tipos de erros	**Frequências Relativas (%)**	**Comentários**
F	1,66	O aluno respondeu a letra *a*, apresentando dificuldades de operações básicas da matemática, já que efetuou a operação de subtração antes da multiplicação, um erro considerado grave para um aluno de nível superior. A letra *b foi* deixada em branco.
D	10,0	Os alunos cometeram erros relacionados a falácias, inferências ou informações indevidas, pois ignoraram o módulo e consideraram como imagem todos os números reais, ou seja, erro de definição.
C	8,33	Os alunos mostraram na resolução que conheciam o domínio e a imagem; por outro lado, fizeram analogia com as funções modulares, pois descreveram o comportamento da função através de retas, ou seja, erro de falsa generalização.

A	20	Os alunos responderam corretamente a letra b. Mostraram que conheciam o comportamento do gráfico das funções envolvidas nas questões, traçando corretamente os pontos de intersecção entre os eixos coordenados, mas não informaram o vértice da parábola.

Fonte: Dados da Pesquisa.

O erro de maior frequência, como pode ser visto na Figura 22, corresponde à classificação do tipo A, sendo que a Figura 23 apresenta a solução dada por um estudante e que é foco de análise.

Figura 23 - Resolução apresentada na questão 3 pelo do aluno A1 instrumento N1

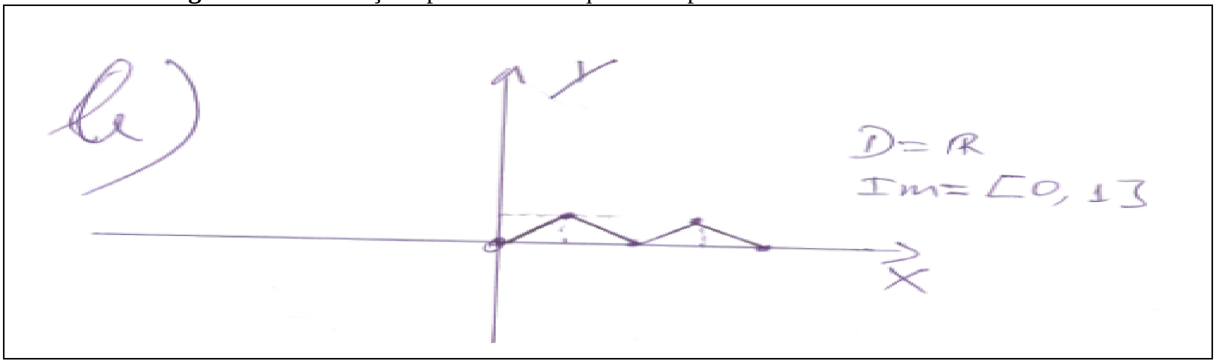


Fonte: Dados da Pesquisa.

Nesta resolução, o aluno mostrou que conhecia o comportamento do gráfico da função, traçando corretamente os pontos de intersecção (2,0), (3,0) (obtidos a partir da determinação das raízes) e (0,6), o qual corresponde à intersecção com o eixo y e refere-se ao termo independente na representação algébrica da função. Além disso, reconheceu corretamente a função como sendo quadrática com concavidade voltada para cima; por outro lado, não determinou as coordenadas do vértice da parábola, o que não permitiu estabelecer o conjunto imagem.

Outro exemplo que merece atenção são os erros do tipo C, exemplo mostrado na Figura 24, onde é possível perceber que o aluno conhece os métodos de resolução e os conceitos de domínio e imagem da função seno e até mesmo o efeito do módulo sobre a função (no âmbito da representação gráfica). No entanto, na parte final, no momento de descrever o comportamento do gráfico, realiza analogia com a função modular, f(x) = $|x|$, ligando os pontos com segmentos de reta.

Figura 24 - Resolução apresentada na questão 3 pelo do aluno A2 instrumento N1



Fonte: Dados da Pesquisa

3.3.2 Apresentação e Análise da Questão 5 da Avaliação N1

A questão 5 da avaliação N1, apresentada na Figura 25, envolve o conceito de limite de uma função que é usado para descrever o comportamento de uma função, à medida que o seu argumento (domínio) se aproxima de um determinado valor. Este conteúdo merece destaque no estudo de Cálculo Diferencial e Integral, uma vez que nem tudo o que realizarmos ocorre no meio físico, sendo necessário introduzir modelos que procuram fazer aproximações sucessivas para inferir sobre o resultado.

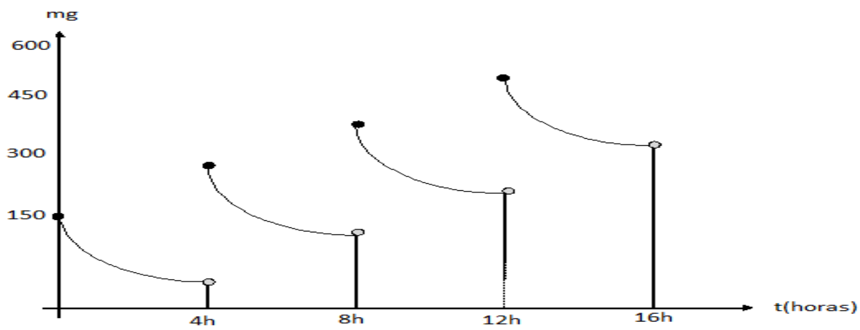
A referida questão foi elaborada com a intenção de verificar o conhecimento matemático dos educandos em analisar o comportamento da função na vizinhança de um determinado valor de sua variável independente (conceito de limite). Para a resolução de maneira correta da questão, destacam-se as seguintes competências/habilidades necessárias:

- ler e identificar pontos no plano cartesiano;
- analisar informações expressas em gráficos, como recursos para a construção de argumentos.
- utilizar os conhecimentos do conceito de limite de uma função para resolver problemas, sobre fatos reais ou imaginários na resolução de situações problema.

Figura 25 - Questão 5 da avaliação N1

Questão 5: Um paciente recebe uma injeção de 150mg de uma droga a cada 4 horas. O gráfico mostra a quantidade f(t) da droga na corrente sanguínea após t horas.

a) Encontre o $\lim_{t\to 12^-} f(t)$ e $\lim_{t\to 12^+} f(t)$
b) Em que situações esses valores encontrados seriam úteis?
c) Explique o significado desses limites laterais.



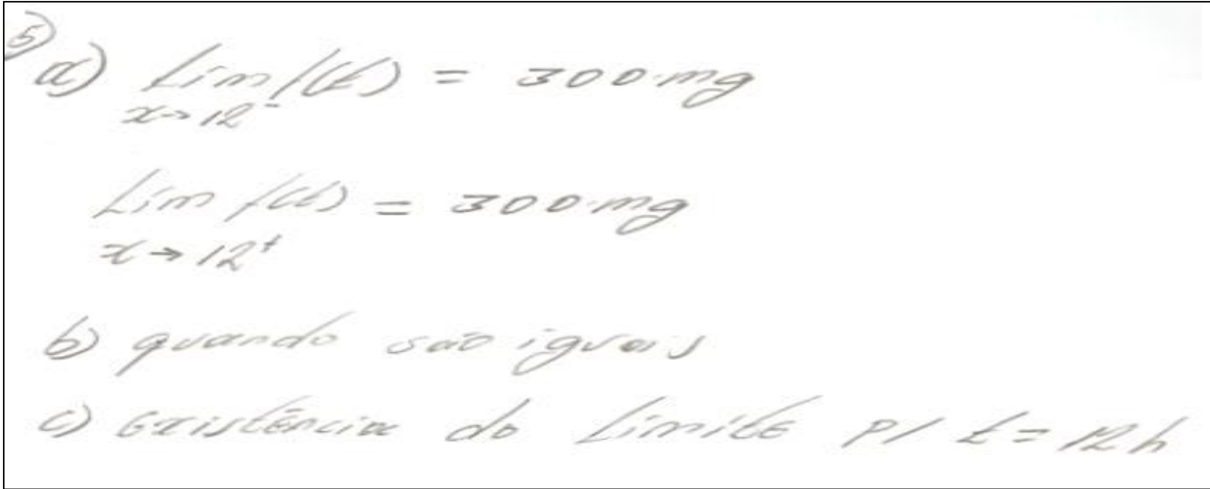
Fonte: Dados da Pesquisa.

As respostas obtidas foram classificadas como do tipo B, já que ocorreram erros relacionados às dificuldades de reconhecer os limites laterais, ou seja, tradução incorreta de situações em linguagens diferentes, associada a problemas com conteúdos básicos da matemática como o desenvolvimento de funções e intervalos de crescimento e, por último, obtivemos erros de interpretação da questão, com respostas parcialmente corretas.

As maiores dificuldades foram percebidas na tentativa de resolução do ítem *a* da questão, principalmente em relação à leitura do gráfico, devido a complexidade dos objetos apresentados, acarrretando erros de interpretação dos limites. Soma-se a isso os problemas relacionados às habilidades de desenvolvimento do conteúdo em estudo, uma vez que questões semelhantes foram trabalhadas previamente em sala de aula.

O exemplo escolhido (Figura 26) retrata a maioria dos erros do exercício em questão, no qual é possível perceber que o aluno não faz a leitura correta do gráfico, bem como não observa os intervalos abertos e fechados. Considera os limites laterais iguais, ignorando o fato de que a aproximação pela esquerda indica um efeito decrescente do medicamento, já a aproximação pela direita indica um aumento da concentração da droga utilizada, ou, em outras palavras, o intervalo da direita informa que o paciente acabara de tomar a medicação e, por isso, há uma alta concentração do medicamento na corrente sanguínea. Por outro lado, a aproximação pela esquerda indica que o efeito (concentração) do medicamento está em seu estágio final.

Figura 26 - Resolução apresentada na questão 5 pelo aluno A3 instrumento N1


5) a) $\lim\limits_{x \to 12^-} f(t) = 300mg$

$\lim\limits_{x \to 12^+} f(t) = 300mg$

b) quando são iguais

c) Existência do limite p/ t=12h

Fonte: Dados da Pesquisa.

3.3.3 Apresentação e Análise da Questão 6 da Avaliação N1

A questão 6 da avaliação N1, itens a. e b., apresentados na Figura 27, envolve, também os conceitos de limites de uma função assim como os apresentados na questão 5, da avaliação N1, porém, agora se procura verificar se, ao identificar uma indeterminação matemática do tipo 0/0, o aluno consegue aplicar estratégias de manipulação algébrica através do produto notável ou divisão de polinômios, tornando assim a questão viável para resolução. As habilidades/competências necessárias para a resolução correta dessa questão são:

- identificar a indeterminação de limites de funções;
- estabelecer e aplicar as relações de produtos notáveis, divisão de polinômios para resolver problemas de limites de função.

Figura 27 - Questão 6

Questão 6: Determine:

a. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$

b. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

Fonte: Dados da Pesquisa.

A Figura 28 apresenta a distribuição e classificação das respostas dadas pelos estudantes na solução dessa questão.

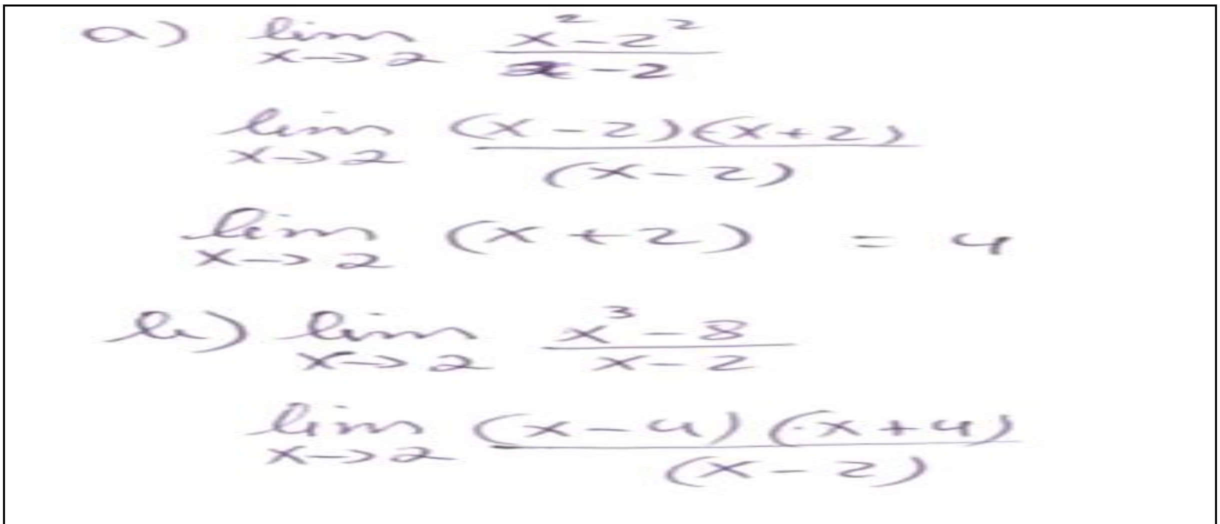
Figura 28 - Classificação dos erros cometidos na questão 6 da Avaliação N1

Tipos de erros	**Frequências Relativas (%)**	**Comentários**
C	36,66	Classificação obtida, devido ao conceito equivocado dos alunos em relação à indeterminação de fração (0/0), e às dificuldades relacionadas à divisão de polinômios. Os estudantes efetuaram corretamente a divisão de polinômios de grau 2; por outro lado, não conseguiram desenvolver os polinômios de grau 3, ou seja, a questão foi resolvida em parte, com interpretação correta dos dados, no entanto, não souberam utilizá-los corretamente, fazendo assim inferências lógicas inválidas.

Fonte: Dados da Pesquisa

A seguir, apresenta-se um exemplo (Figura 29) dos erros cometidos pelos alunos, classificado como do tipo C.

Figura 29 - Resolução apresentada na questão 6 pelo aluno A4 instrumento N1



Fonte: Dados da Pesquisa.

Como pode ser observado na Figura 29, o aluno conseguiu desenvolver de maneira correta o item *a* da questão, no entanto, no desenvolvimento da letra *b*, houve falsa generalização na resposta, pois o estudante aplicou o produto da soma pela diferença nos dois itens resolvidos, o que se considerou como erro do tipo C.

O Instituto de Avaliação e Desenvolvimento Educacional- INADE (2011) afirma que a importância do estudo de funções polinomiais não está restrita às áreas da Matemática, mas também tem sua aplicação em diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, na elaboração de modelos que descrevam algum fenômeno real que, da mesma forma, se faz necessário o conhecimento de tal conteúdo matemático. Esses modelos podem abranger desde assuntos relacionados à saúde e à engenharia até mesmo as pautas relacionadas à economia e agricultura.

3.4 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DA AVALIAÇÃO INSTITUCIONAL N2

Neste tópico, será apresentada a análise relativa ao instrumento N2, o qual se refere à segunda avaliação institucional proposta aos estudantes, aplicada no dia 31/10/2011, com duração de 3,5h. Essa avaliação foi realizada por 62 estudantes.

É preciso ressaltar que, por se tratar de um curso de Engenharia Civil, procurou-se contextualizar o ensino em sala de aula com as ocorrências no dia-a-dia da profissão. Desse modo, as questões apresentadas seguem essa linha de pensamento, com problemas que remetem à realidade da construção civil. Destaca-se, ainda, que as questões envolvem os seguintes conteúdos: noção de geometria plana, interpretação do problema, resolução de equações de primeiro grau, sistemas lineares e conceito de derivadas de primeira e segunda ordem.

A Tabela 4 apresenta a distribuição dos acertos e erros dos acadêmicos na realização dessa avaliação.

Tabela 4 - Distribuição de acertos e erros da Avaliação Institucional N2

Questão	**Corretas**		**Parcialmente corretas**		**Erradas**		**Em branco**		**Total de alunos presentes**	**Total de alunos ausentes**
	no	**%**	**no**	**%**	**no**	**%**	**no**	**%**		
1	26	**41,94**	17	27,42	0	0	19	30,64	62	4
2	2	**3,22**	0	0	4	6,45	56	90,33	62	4
3	39	62,9	0	0	9	14,52	14	22,58	62	4
4	36	**58,08**	0	0	14	22,58	12	19,36	62	4
5	28	**45,16**	8	12,9	2	3,23	24	38,71	62	4
6	38	61,29	2	32,26	4	6,45	0	0	62	4

Fonte: Dados da Pesquisa.

Com base na Tabela 4 e considerando os critérios de seleção adotados, onde somente as questões com nível de acerto abaixo de 60% são tomadas para análise, serão discutidas as questões, 1, 2, 4 e 5. No entanto, levando em consideração os valores percentuais de questões em branco, ou seja, que não tiveram nenhuma resposta, optou-se em não analisar as questões 2 e 5 com 90,33% e 38,71%, respectivamente, de respostas em branco. No caso da questão 5, vale ressaltar que, mesmo não tendo um índice de questões em branco superior ao valor de questões certas, tivemos apenas 2 respostas erradas, correspondendo a 3,23% do valor total.

3.4.1 Apresentação e Análise da Questão 1 da Avaliação N2

A questão 1 da avaliação N2, apresentada na Figura 30, representa uma questão de derivada em que se esperava colocar em prática os conceitos que foram apresentados nas aulas de derivada de uma função. Essa questão, em particular, exige do estudante a percepção prévia de utilização de uma função composta, uma vez que há a necessidade de modelar a função da área do lote em função da área do piso e seus respectivos recuos.

Considera-se que as habilidades/competências necessárias na resolução dessa questão são:

- utilizar o conhecimento geométrico para fazer a leitura da realidade e agir sobre ela;
- modelar e resolver problemas usando representações algébricas e critérios de derivadas;
- modelar situações de variação e dependência de grandezas para compreender a realidade e resolver problemas;
- resolver problemas que envolvam determinação de domínio, imagem, conjunto de intervalos de crescimento e decrescimento, extremos, raízes e sinais de uma função, através de critérios de derivadas.

Figura 30 - Questão 1 da Avaliação N2

Questão 1: Um edifício de um andar, tendo 1200 m^2 de piso, deve ser construído, sendo exigidos recuos de 6 m na frente e de 5 m nas laterais, Quais as dimensões do lote com menor área onde esse edifício possa ser construído?

Fonte: Dados da Pesquisa.

Apresenta-se, na Figura 31, a distribuição e classificação dos erros cometidos na solução da questão.

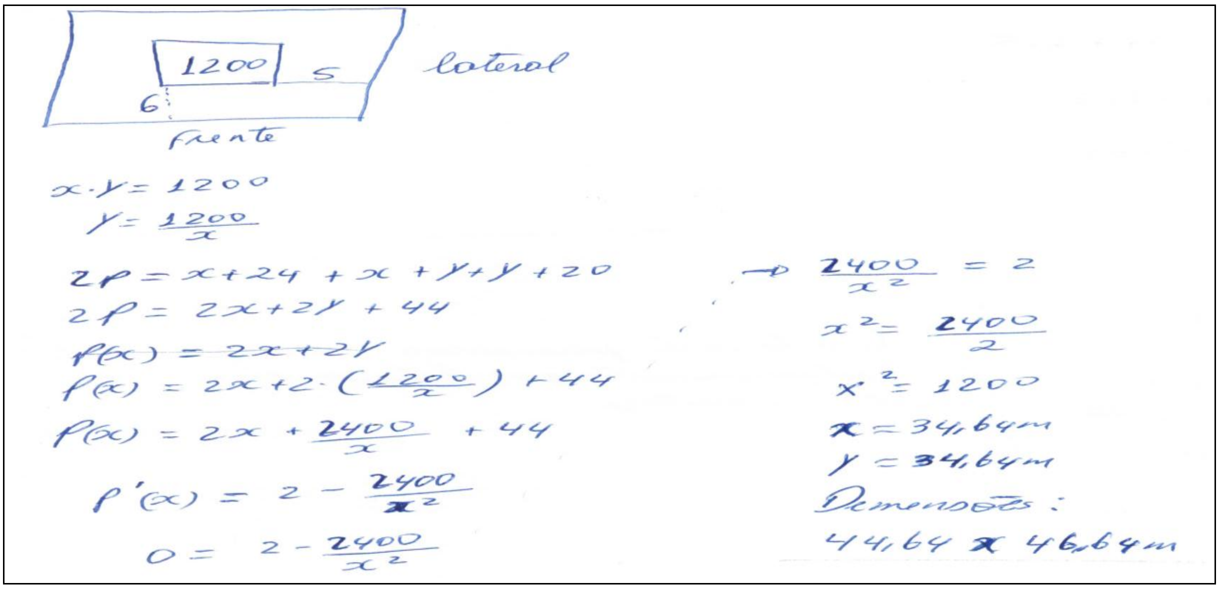
Figura 31 - Classificação dos erros cometidos na questão 1 da Avaliação Institucional N2

Tipos de erros	**Frequências Relativas (%)**	**Comentários**
B	19,35	Os alunos tiveram dificuldades na interpretação do problema bem como na escolha dos dados para uso da regra de derivadas.
A	8,06	Os alunos interpretaram corretamente o exercício, mas não conseguiram aplicar corretamente os procedimentos de derivação.

Fonte: Dados da Pesquisa

Os erros classificados como do tipo B, compreendem problemas relacionados à interpretação da questão. Tais dificuldades podem ser melhores percebidas no exemplo extraído das respostas obtidas e apresentado na Figura 32.

Figura 32 - Resolução apresentada na questão 1 pelo do aluno A5 no instrumento N2



$x \cdot y = 1200$

$y = \frac{1200}{x}$

$2p = x + 24 + x + y + y + 20$

$2p = 2x + 2y + 44$

$f(x) = 2x + 2y$

$f(x) = 2x + 2 \cdot \left(\frac{1200}{x}\right) + 44$

$f(x) = 2x + \frac{2400}{x} + 44$

$f'(x) = 2 - \frac{2400}{x^2}$

$0 = 2 - \frac{2400}{x^2}$

$\rightarrow \frac{2400}{x^2} = 2$

$x^2 = \frac{2400}{2}$

$x^2 = 1200$

$x = 34{,}64m$

$y = 34{,}64m$

Dimensões:

$44{,}64 \times 46{,}64m$

Fonte: Dados da Pesquisa

O erro apresentado, classificado como do tipo B, deu-se em função de que, ao calcular os valores de x e y, o estudante usou o perímetro do lote, quando deveria ter usado a área total, caracterizando, portanto, dificuldade na interpretação do problema com utilização de estratégia equivocada na resolução.

A ideia desta questão era a de que os alunos pudessem aliar o estudo de modelagem e derivadas na resolução de problemas do cotidiano. Perceber que uma determinada grandeza tem sua variação em função de outra e conseguir traduzir isso em uma expressão matemática contribui para o desenvolvimento intelectual do estudante, atribuindo contextos específicos das áreas em estudos.

3.4.2 Apresentação e Análise da Questão 4 da Avaliação N2

A questão 4 da avaliação N2, apresentada na Figura 33, assim como a questão apresentada anteriormente, também representa uma situação de derivada de uma função, na qual, para a obtenção do resultado correto, o aluno deveria dominar o conteúdo de derivada de uma função potência e também o de derivada da função cos(x), de acordo com as seguintes habilidades/competências:

- resolver problemas que envolvam derivadas da função potencia e regra da cadeia.
- resolver problemas que envolvam derivadas das funções trigonométricas;

Figura 33 - Questão 4 da Avaliação N2

Questão 4: Dada a função $f(x) = \cos^2 x$, determinar *f'(x)*

Fonte: Dados da Pesquisa.

A Figura 34 apresenta a classificação dos erros cometidos na solução da questão da Avaliação N2.

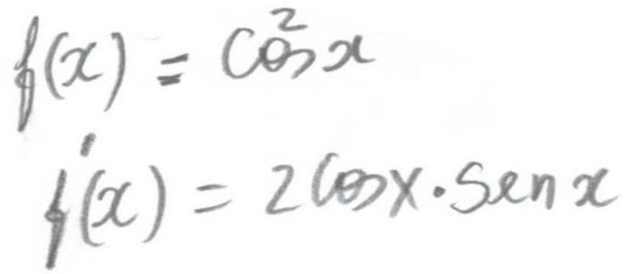
Figura 34 - Classificação dos erros cometidos na questão 4 da Avaliação Institucional N2

Tipos de erros	Frequências Relativas (%)	Comentários
C	9,67	Os alunos mostraram desconhecer o método correto de resolução, através de distorções na utilização da definição de derivadas. Registra-se aqui o desconhecimento quanto ao método correto de resolução e também, devido à falsa generalização, com aplicação incorreta da derivada da função potência, quando na verdade, deveria ter sido aplicada a derivada da função composta.
F	12,90	Dificuldade com relação às derivadas das funções seno e cosseno. Além disso, pode ser considerado também como um erro técnico.

Fonte: Dados da Pesquisa.

O exemplo apresentado na Figura 35 evidencia o que foi classificado como erro da categoria F (erro técnico).

Figura 35 - Resolução apresentada na questão 4 pelo aluno A5 no instrumento N2



Fonte: Dados da Pesquisa

Esta questão foi considerada parcialmente correta, uma vez que o aluno errou o sinal, embora o erro tenha sido em relação ao sinal da derivada da função cosseno, daí a classificação como do tipo F. Conjectura-se que esse erro possa estar relacionado a uma falta de entendimento, em um sentido mais amplo, das relações que se estabelecem entre funções e suas derivadas.

3.5 APRESENTAÇÃO E ANÁLISE DA AVALIAÇÃO INSTITUCIONAL N3

Apresentam-se na Tabela 5 o quantitativo referente aos acertos e erros apresentados na avaliação N3, onde foram trabalhados conteúdos relacionados às integrais de função de uma variável.

Questões da mesma natureza foram desenvolvidas em sala de aula e relacionadas, em sua maioria, ao cálculo de áreas de figuras planas. Sua aplicação deu-se em função da necessidade de se trabalhar conteúdos específicos aplicados a situações da engenharia. Zabala e Antoni (1998) afirmam que conhecer o nível de domínio de uma competência que os alunos adquiriram é uma tarefa bastante complexa, pois implica partir de situações-problemas, as quais simulem contextos reais e disponham de meios de avaliação específicos, para cada um dos componentes da competência.

Tabela 5 - Distribuição de acertos e erros da Avaliação Institucional N3.

Questão	**Corretas**		**Parcialmente corretas**		**Erradas**		**Em branco**		**Total de alunos presentes**	**Total de alunos ausentes**
	no	**%**	**no**	**%**	**no**	**%**	**no**	**%**		
1	44	66,67	22	33,33	0	0	0	0	66	0
2	17	**25,76**	12	18,18	26	39,39	11	16,67	66	0
3	39	**59,09**	8	12,12	10	15,15	9	13,64	66	0
4	40	60,61	14	21,21	8	12,12	4	6,06	66	0
5	46	69,70	15	22,73	0	0	5	30,3	66	0
6	23	**34,85**	32	48,48	7	10,61	4	6,06	66	0
7	48	72,72	18	27,28	0	0	0	0	66	0

Fonte: Dados da Pesquisa.

Os dados apresentados indicam as questões 2, 3 e 6 para análise, uma vez que apresentaram porcentagens de acertos inferiores a 60%.

3.5.1 Apresentação e Análise da Questão 2 da Avaliação N3

A questão 2 da avaliação N3, apresentada na Figura 36, refere-se a uma questão de integral envolvendo a função ln(x), logaritmo natural. Os logaritmos possuem várias aplicações na Matemática e em diversas áreas do conhecimento, como Física, Biologia, Química, Medicina, Geografia, Engenharia entre outras. Na engenharia civil, curso específico desta pesquisa, os logaritmos são bastante utilizados nas disciplinas de Mecânica dos Solos, para caracterização da curva granulométrica, que determina melhor os grãos do solo. Também se apontam aplicações na área de engenharia econômica na parte de orçamentos de obras.

O conhecimento específico pertinente à resolução dessa questão refere-se à identificação do procedimento adequado para a resolução da referida integral, utilizando a integração por partes.

As habilidades/competências para a resolução dessa questão são:

- identificar o método de resolução de integrais;
- resolver problemas que envolvam derivadas de funções logarítmas;
- resolver problemas que envolvam integração por partes.

Com base nas respostas coletadas, os erros da questão 2, apresentada na Figura 36, foram classificados conforme apresentado na Figura 37.

Figura 36 - Questão 2 da Avaliação N3

Questão 2: Determine a primitiva $\int ln(x)dx$

Fonte: Dados da Pesquisa.

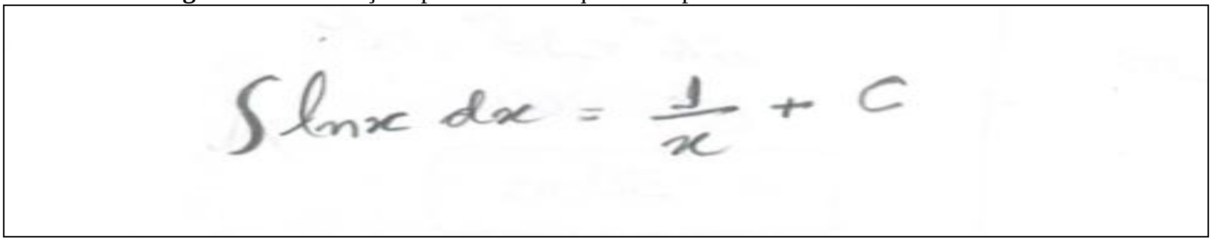
Figura 37 - Classificação dos erros cometidos na questão 2 da Avaliação N3

Tipos de erros	**Frequências Relativas (%)**	**Comentários**
D	33,33	Os alunos mostraram desconhecer o método correto de resolução, cometendo distorções na utilização da definição de derivadas e integrais.
B	6,06	Os erros cometidos foram relacionados à confusão no uso da regra, bem como à interpretação equivocada do problema.
F	3,03	Com relação às respostas destes alunos, encontramos apenas erros técnicos de manipulação algébrica e consequentemente erros nas operações elementares da matemática.

Fonte: Dados da Pesquisa.

Os dados apontam que a maior ocorrência de erros está relacionada com o tipo D, com 22 respostas nesta classificação. Apresenta-se um exemplo dessa classificação de erro na Figura 38.

Figura 38 - Resolução apresentada na questão 2 pelo aluno A25 no instrumento N3



Fonte: Dados da Pesquisa

Esta resolução mostra que o aluno cometeu um equívoco na resolução do problema, confundindo derivada com integral da função; em outras palavras, a resposta dada, $\frac{1}{x}$, corresponde à derivada de $ln x$, e não à integral, o que caracteriza inferência lógica inválida.

3.5.2 Apresentação e Análise da Questão 3 da Avaliação N3

A questão 3, da avaliação N3, apresentada na Figura 39, indica uma questão de integral. A questão foi elaborada com o objetivo de verificar se os alunos reconhecem o método de resolução de integração por substituição que, nesse caso em particular, envolve a derivação das funções trigonométricas sen(x) e cos(x). As habilidades/competências para a resolução correta da questão são:

- identificar o método de resolução de integrais;
- resolver problemas que envolvam derivadas de funções trigonométricas;
- resolver problemas que envolvam integração por substituição.

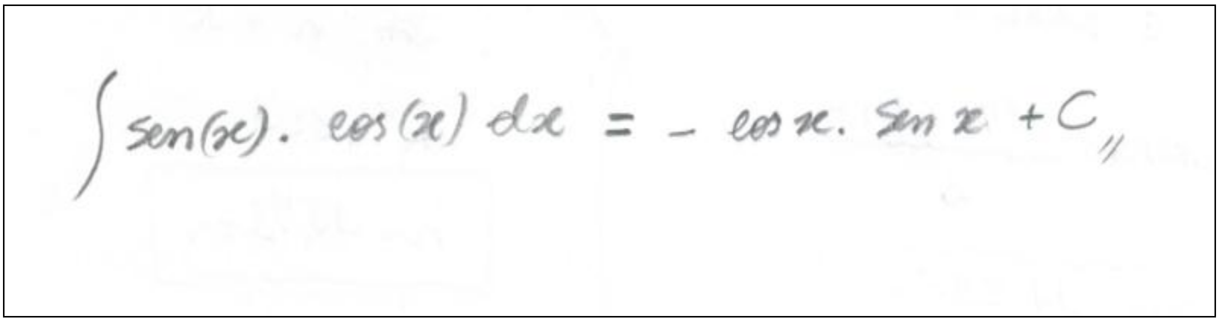
Todos os erros cometidos nas resoluções apresentadas pelos alunos estão relacionados com a classificação do tipo D, onde os alunos mostraram desconhecer o método correto de resolução, com distorções de propriedades na aplicação dos conceitos de integrais. Segue um exemplo (Figura 40), das respostas obtidas:

Figura 39 - Questão 3 da Avaliação N3

Questão 3: Calcule $\int sen(x)cos(x)\, dx$

Fonte: Dados da Pesquisa.

Figura 40 - Resolução apresentada na questão 4 pelo aluno A30 no instrumento N3



Fonte: Dados da Pesquisa.

3.5.3 Apresentação e Análise da Questão 6 da Avaliação N3

A questão 6, da avaliação N3, apresentada na Figura 41, refere-se a uma questão de integral definida da função f(x) = sen(x). Elaborada com o intuito de provocar no aluno um questionamento sobre o comportamento do gráfico da função sen(x) e o resultado da integral defina da referida função. As competências/habilidades necessárias para a resolução correta dessa questão são:

- identificar o método apropriado para a resolução da integral;
- resolver problemas de integrais definidas;
- plotar e analisar o comportamento de funções trigonométricas;
- ler e interpretar informações expressas em gráficos como recurso para construção de argumentos.

Todas as respostas obtidas na questão 6 estão classificadas como do tipo C, com um número de 39 erros. É verificado nas respostas dos estudantes que estes conseguiram construir corretamente o gráfico, no entanto, o erro ocorreu na sua interpretação, gerada pela generalização do cálculo de integral com o cálculo de área. O procedimento correto deveria ter sido a análise do sinal da função seno, admitindo-se posteriormente a possibilidade de tal analogia realizada.

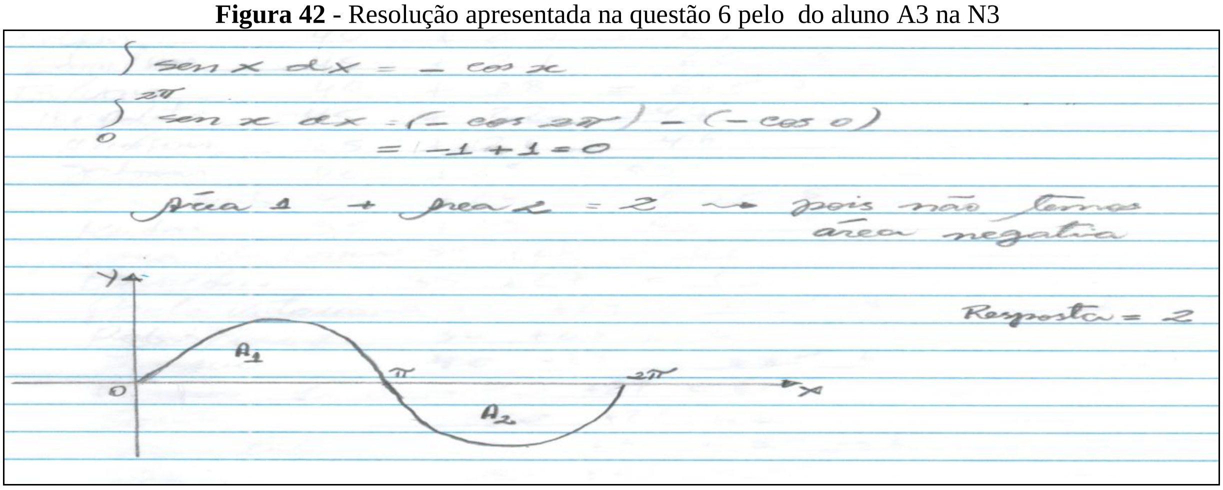
Figura 41 - Questão 6 da Avaliação N3

Questão 6: Calcule $\int_0^{2\pi} sen(x)dx$ e interprete o resultado através da análise do gráfico da função *f(x).*

Sendo *f(x) = sen(x)*

Fonte: Dados da Pesquisa

Figura 42 - Resolução apresentada na questão 6 pelo do aluno A3 na N3



Fonte: Dados da Pesquisa.

3.6 SÍNTESE DA ANÁLISE DOS RESULTADOS

Neste capítulo apresenta-se a síntese da análise dos resultados dos instrumentos de avaliação, considerando os tipos de erros e a sua frequência nas 498 questões consideradas parcialmente corretas ou erradas, de forma que, seja possível compreender e comparar melhor todas as análises realizadas anteriormente.

Conforme a tabela 6 que sintetiza a totalização dos erros por tipologia, os dados demonstram que a maior ocorrência de erros cometidos está relacionada às categorias do tipo B, C e D.

Tabela 6 - Frequência de erros por instrumentos de avaliação

Tipos de Erros	TI			N1			N2			N3			TOTAL	f
	ER	PC	f	ER	PC	f	ER	PC	f	ER	PC	F		
A	6	4	7%	2	20	17%	2	8	17%	11	2	8%	55	11%
B	41	27	46%	4	41	35%	15	4	32%	11	7	11%	150	30%
C	9	6	10%	2	43	35%	3	7	17%	9	44	33%	123	25%
D	6	1	5%	0	10	8%	1	3	7%	8	51	36%	80	16%
E	0	1	1%	1	4	4%	2	1	5%	0	9	6%	18	4%
F	42	4	31%	1	1	2%	10	4	23%	2	8	6%	72	14%
TOTAL	**104**	**43**	100%	**10**	**119**	100%	**33**	**27**	100%	**41**	**121**	100%	**498**	100%

TI: Teste Inicial; N1: Avaliação N1; N2: Avaliação N2; N3: Avaliação N3; f: frequência relativa

ER: Número questões erradas

PC: Número questões parcialmente corretas

Fonte: Dados da Pesquisa

Observa-se com base na tabela acima, que os erros de maior frequência estão categorizados como do tipo B, C e D. Analisando os dados apresentados em relação ao erro Tipo B (linguagem mal interpretada), observa-se a frequência de ocorrência decrescente de 46%, 35%, 32% e 11%, o que evidencia que os estudantes, que ao longo da pesquisa, foram vencendo as dificuldades que os levou a cometê-las. Os resultados neste caso, ratificam o pensamento de Movshovitz-Hadar et al. (1987), onde segundo os autores, o desenvolvimento de habilidades e a frequência de testes propicia aos estudantes, menor tendência de cometer os mesmos erros de um teste anterior. Ainda para os autores, mesmo diante de conteúdos diferentes, ainda é válida esta noção de aperfeiçoamento das habilidades, ainda que sejam aplicados conteúdos diferentes, já que, o que de fato se evolui é a capacidade individual de cada estudante, não importando assim os conteúdos aplicados.

Na análise da evolução dos erros do Tipo C (inferência lógica inválida) e do Tipo D (definição do teorema distorcido), percebe-se que não houve uma tendência para a evolução dos resultados, já que, no caso do erro do tipo C é notória a flutuação dos resultados, tendo um crescimento seguido de queda e novamente um crescimento. Para o erro do tipo D, encontra-se também esta flutuação, com crescimento, seguido de uma leve queda, e por último uma alta crescente chegando a 36% de ocorrência. Entende-se que os resultados, neste caso, podem revelar uma conformidade com o pensamento de Radatz (1980), onde os erros de estudantes de Matemática não decorrem somente da ausência de conhecimento, mas está intrinsicamente relacionado a sentimentos de desatenção, incerteza e outras condições pessoais do estudante, além da didática utilizada pelos professores baseados não somente em apresentar o conteúdo, mas sim, de usá-los de acordo com as necessidades existentes no processo de ensino aprendizagem. Ou seja, mesmo tendo Movshovitz-Hadar et al. (1987), afirmado que, o normal seria uma queda nos percentuais de ocorrência, desde que os erros detectados sejam trabalhados em sala de aula, percebe-se que há outros fatores que devem ser levados em consideração nesta afirmação, que é justamente aquilo que Radatz (1980) chama atenção, que são fatores externos ao ambiente escolar que também devem ser levados em consideração, como ansiedade, o ambiente familiar, fatores socioeconômicos, entre outros.

Para as respostas dos acadêmicos no Teste Inicial (TI), verificam-se erros de prevalência do tipo B (linguagem mal interpretada) totalizando quase metade (46%) dos erros cometidos nesse instrumento de avaliação. Tais erros estão relacionados às dificuldades de interpretação, retirada de dados dos problemas propostos e também da dificuldade em fazer a leitura correta de gráficos e tabelas, assim como dificuldades em interpretar problemas relacionados com conteúdos de trigonometria.

Entende-se que os dados obtidos estão de acordo com Socas (1997) quando o autor aponta que as dificuldades podem ser obstáculos cognitivos gerados pela ausência de prática ou de compreensão, seja dos símbolos ou mesmo da linguagem utilizada na aprendizagem da Matemática, neste caso, especificamente, nas questões dos testes aplicados. Por exemplo, na questão 7 do Teste Inicial, pede-se a altura de um edifício utilizando-se para medição, um teodolito colocado a 200 metros do mesmo, com a luneta do teodolito a 1,5 metros do solo e medindo um ângulo de 30^0. Nesta questão, os alunos apresentaram dificuldades em reconhecer qual o procedimento correto de resolução, uma vez que tentaram resolver com as relações trigonométricas de seno e cosseno de 30^0, e não com a relação de tangente. Além disso, os estudantes apresentaram ainda, mais um erro de interpretação ao não considerar o dado relativo à luneta que se encontrava a 1,5 metros do solo.

Vale destacar, também, na questão 5 deste Teste Inicial, os erros na resolução de uma equação da forma ax = b. Os erros apontados neste caso caracterizaram-se pela dificuldade do aluno em aplicar os conhecimentos do principio multiplicativo, categorizado conforme Movshovitz-Hadar et al. como erros técnicos, ou seja, do tipo F (erros relacionados a execução de algoritmos, de procedimento passo-a-passo), os quais totalizaram a segunda maior incidência de erros de categoria (31%). Destaca-se também na mesma questão 5, situações em que os alunos apresentaram dificuldades em decidir qual operação deveriam realizar a fim de encontrar o valor da incógnita. Considera-se que as repostas das questões do tipo ax=b iguais a x=b-a, permitem afirmar que os alunos ao invés de aplicarem o principio multiplicativo, aplicaram incorretamente o princípio aditivo, podendo caracterizar esse erro como relacionado à dificuldade em reconhecer a notação de ax, como sendo *a* multiplicado por *x*.

Na avaliação institucional N1, prevaleceram os erros relacionados a dificuldades em fazer a correta leitura e interpretação de gráficos de funções, encontrar a equação que regula o comportamento do gráfico da função além de representar corretamente o gráfico de uma função, ou seja, erros do tipo B (linguagem mal interpretada dos dados), totalizando 35% dos erros apresentados. Com o mesmo percentual, o erro do tipo C (inferência lógica inválida) estava relacionado às falsas analogias, como por exemplo, na questão 6 desde instrumento, em que os alunos, para resolver uma questão de limite usaram como referência o resultado do produto da soma pela diferença, $(a-b).(a+b) = a^2 - b^2$, e o aplicaram na resolução de uma questão envolvendo uma equação cúbica $a^3 - b^3$, ou seja erro algébrico na resolução do limite.

Sendo assim, a mensuração de erros decorridos de falsos raciocínios produzidos pelos alunos por não compreenderem o enunciado da questão (linguagem), que posteriormente causa deduções e analogias indevidas, levam a acreditar que as dificuldades estão voltadas, além de outros fatores, também para deficiências de ler e interpretar gráficos e tabelas, bem como dificuldades em aplicar corretamente os tópicos estudados em sala de aula. Nesta linha, o pensamento de Souza (2002), pode contribuir efetivamente no sentido da não ocorrência de erros desse tipo, já que a autora presume que as ações pedagógicas devem ser trabalhadas levando em consideração a natureza e origem de cada dificuldade encontrada no processo de aprendizagem. O primeiro passo é identificar os empecilhos para que as ferramentas metodológicas sejam eficazes e maximizem a aprendizagem dos estudantes. Em outras palavras, a partir da identificação do erro, é necessária uma ação pedagógica, voltada especificamente para o contorno da situação encontrada, e de forma individualizada e coletiva, cada estudante possa assim, superar suas próprias dificuldades.

Com relação à avaliação institucional N2, foram encontrados erros que se relacionam com dificuldades em interpretar os problemas de máximo e mínimo que envolvem a primeira e a segunda derivada e também dificuldades em encontrar a equação pertinente ao problema para, posteriormente, aplicar os conceitos de derivadas. Além disso, foi detectado nas resoluções dos alunos, dificuldades na interpretação de funções definidas por mais de uma sentença, constituindo assim erros do tipo B (linguagem mal interpretada dos dados) com incidência de 32% do total de erros nesse instrumento de avaliação.

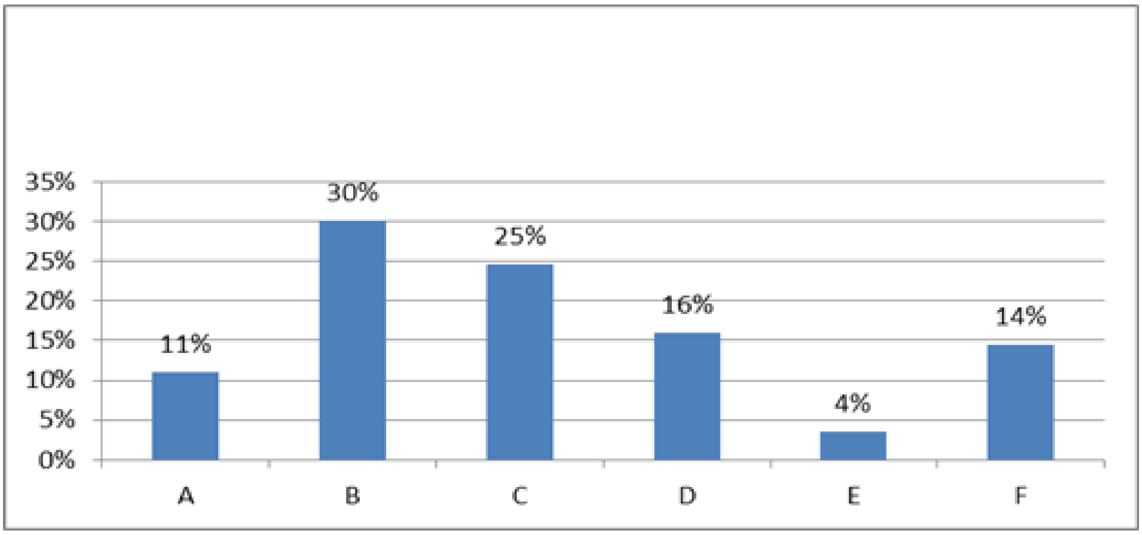
Durante os encontros de atendimento aos alunos, antes e depois da avaliação institucional N2, foram relatadas, como de fato pode ser comprovado nas repostas, dificuldades em interpretar os problemas e posteriormente produzir a função a ser derivada.

Já na avaliação institucional N3, ainda conforme a tabela 6, foram encontrados erros que se relacionam com dificuldades que recaem principalmente na escolha do método correto de resolução das integrais, erros tipo C (inferência lógica inválida) com 33%, erros tipo D (definição do teorema distorcido) com 36% das ocorrências e erros do tipo B (linguagem mal interpretada) com 11%. Através da análise, pode-se afirmar que, o aluno não sabia se resolveria a questão através da integração por partes ou por substituição, aliada também, à aplicação de soluções baseadas em questões semelhantes, sem, contudo, a verificação da possibilidade de tal aplicação.

As categorias de erros encontradas nesta avaliação N3 foram elencadas por Cury (2004) em três categorias: desconhecimento do método de integração, dificuldades na escolha *u* e *dv* (no caso da integração por partes) e erro devido à falsa generalização. Destaca-se, ainda, que um dos maiores problemas encontrados refere-se a compreensão do que é pedido em uma questão discursiva, como por exemplo, na questão 6 da avaliação N3 (figura 41). Os alunos, em sua maioria, conseguiram responder a integral da função f(x) = sen(x), representaram no plano cartesiano o comportamento da função, no entanto, não souberam ler e interpretar o resultado do gráfico que eles mesmos construíram.

Para uma melhor leitura e interpretação dos resultados, além da tabela de distribuição de frequência introduzida anteriormente apresenta-se, na figura 43, uma distribuição geral de frequência por tipo de erro, que se refere às ocorrências de erro por tipo no somatório de todos os instrumentos avaliativos aplicados.

Figura 43 - Mapeamento da Frequência por Tipo de Erro



Fonte: Dados da Pesquisa

Dessa forma, foi constatado, através das análises dos quatro instrumentos de avaliação, que os estudantes pesquisados, apresentam dificuldades em relação às habilidades esperadas para o trabalho com os conceitos de Cálculo Diferencial e Integral I. Conforme ilustrado no gráfico acima, a soma das freqüências dos três tipos de erros mais cometidos resulta em 71%, distribuídos em linguagem mal interpretada (erro tipo B, 30%), inferência lógica inválida (erro tipo C, 25%), aliada à definição distorcida do teorema (erro tipo D, 16%).

Considera-se que as dificuldades dos estudantes estão relacionadas principalmente à interpretação dos dados de um problema, à leitura e interpretação de gráficos e tabelas e ao desenvolvimento de atividades algébricas baseadas em regras e propriedades. Acredita-se, portanto, que a análise e classificação dos erros cometidos pelos estudantes confirmam a necessidade de engajá-los em atividades que propiciem o desenvolvimento de habilidades e competências, de acordo com as deficiências detectadas, possibilitando assim uma adequação recíproca dos alunos, que podem melhorar o seu desempenho em sala de aula, e dos professores, na efetivação de sua própria missão como educador e na busca da prática de um ensino eficiente.

CONCLUSÃO

Considerando o erro como um ato contínuo de ir e vir na formação do educando e na construção do conhecimento escolar é pertinente afirmar que o caminho não é feito somente de acertos, mas também de pequenos e, em algumas vezes, grandes dificuldades e erros.

Acredita-se que com a Matemática não é diferente. Pelo contrário, o erro é uma ocorrência constante em que tanto o educando quanto o professor se veem envolvidos, o que não pode ser traduzido como fracasso, falta de capacidade cognitiva ou falta de compreensão dos conceitos.

As pesquisas realizadas no Brasil e em outros países, destacadas no decorrer deste trabalho, sobre o erro e seu papel no processo de ensino e aprendizagem apontam-no como elemento fundamental e intrínseco no processo de construção do conhecimento.

Nesse sentido, a pesquisa aqui apresentada permitiu perceber a importância e a necessidade de considerar os erros cometidos pelos estudantes como elemento essencial para a retomada de conceitos e procedimentos que não tenham sido dominados total ou parcialmente pelos mesmos. Foi possível perceber a importância dos professores trabalharem as situações em que os erros estão presentes, para que os alunos tenham a possibilidade de perceber os caminhos que os conduzem ao erro e as possíveis soluções que podem ser adotadas, não para sua simples eliminação, mas para o entendimento de suas causas e a retomada dos conceitos estudados e dos problemas a serem resolvidos em uma outra perspectiva.

Entende-se que buscar alternativas para o aluno construir conhecimentos, a partir dos seus erros, em qualquer área ou disciplina, é tarefa diária dos professores em todos os níveis de ensino. Particularmente, em Cálculo Diferencial e Integral, a falta de domínio dos conteúdos de Matemática básica reflete-se diretamente no trabalho em sala de aula. Assim, a motivação norteadora dessa pesquisa centrou-se na ideia de contribuir para uma melhor aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral dos alunos do primeiro ano do curso de Engenharia Civil da FAPAC.

Durante o período de coleta de dados, foi possível perceber as dificuldades dos alunos com relação aos conteúdos matemáticos que são abordados nos níveis fundamental e médio. Em função disso, em um primeiro momento, buscou-se identificar quais eram os erros mais frequentes ocorridos em resoluções de questões básicas, buscando elucidar elucidar os caminhos de resolução adotados pelos estudantes. Paralelo a essa coleta de dados, buscou-se desenvolver, como estratégia de ensino, um conjunto de atividades e discussões de questões envolvendo os erros mais frequentes e incidentes. Tais atividades foram disponibilizadas no portal do aluno e posteriormente discutidas em sala de aula.

Entende-se que, a disponibilização de material no portal do aluno da Instituição ITPAC, a qual alertava os estudantes para possíveis erros cometidos na resolução de atividades na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, se constituiu em ferramenta importante no processo de aprendizagem. No entanto, percebeu-se que somente a percepção do aluno em relação ao erro cometido não é o suficiente para o êxito na superação das dificuldades encontradas. É necessário, também, que o professor explore as situações que levaram os alunos a cometer tais erros, levando-os a explorar as circunstancias em que estas repostas poderiam ser validadas, provocando situações que contribuem para a reformulação de idéias e conceitos, bem como, para a apropriação de novos conhecimentos..

Tais atividades possibilitaram perceber que o trabalho metodológico mais produtivo relacionou-se à análise e discussão junto aos estudantes de casos específicos de erros. Nesses momentos de discussão e reflexão deu-se voz aos estudantes, que puderam expressar suas ideias, modos de pensar, conjecturas e dificuldades. Os momentos em sala de aula e as discussões realizadas no horário de atendimento aos acadêmicos resultaram em significativa oportunidade de entendimento e compreensão, tanto por parte dos estudantes, como por parte do professor pesquisador.

No entanto, destaca-se que esses momentos de discussão e reflexão, onde foi possível perceber situações de reconstrução de ideias e conceitos por parte dos estudantes, não foram elementos investigados. Como o foco era a identificação, classificação e análise de erros, a pesquisa não abrangeu, de forma estruturada, esses momentos (instrumentos de coleta de dados que permitissem identificar e registrar essas situações). Porém, toda essa atividade permitiu ao professor pesquisador perceber que esse contato direto com o aluno, quando se discute sobre uma questão específica, é o momento mais propício para se investigar, ir além da identificação e classificação dos erros cometidos, constatando como o estudante pensa, enfrenta situações e o que os leva a cometer erros. Essa é uma possibilidade de pesquisa para futuros trabalhos.

A investigação também não abrangeu aspectos como crenças, sentimentos e emoções dos estudantes, mas foi possível perceber a presença de muitas crenças e sentimentos negativos em relação ao enfrentamento dos problemas matemáticos, bem como, a possibilidade de cometer erros. Considera-se pertinente, também, para trabalhos futuros, investigar os aspectos que envolvem crenças, emoções e atitudes em relação à Matemática e, particularmente, em relação à possibilidade de cometer erros, como caminho para uma maior compreensão das relações que se estabelecem entre aluno, professor e conhecimento.

Destaca-se, também, que ao longo do trabalho o pesquisador encontrou, em algumas situações, dificuldades no enquadramento do erro em uma categoria específica, já que os limites de uma classificação podia se confundir com outra, além de determinadas situações não se enquadrarem perfeitamente nas tipologias descritas. Além disso, avaliar somente com base na escrita dos alunos pode ter gerado uma avaliação que deixou de abarcar outros elementos que podem influenciar no ato de resolver questões de conhecimentos matemáticos. Pondera-se que avaliar também com base em outros requisitos, como uma entrevista com os estudantes, além da consideração de fatores externos ao ambiente escolar, como fatores psicológicos, fatores socioeconômicos, poderiam contribuir para resultados mais acurados. Muitas vezes, um erro envolve uma multiplicidade de fatores, tornando-se bastante complexo categorizá-lo no âmbito de uma única classificação. Porém, se entende os limites de uma pesquisa e a necessidade de se limitar os aspectos a serem investigados, sendo que as reflexões aqui postas, as quais emergiram da investigação, podem contribuir para trabalhos de investigação futuros.

Acredita-se que os resultados obtidos com a pesquisa, especialmente as reflexões geradas, podem servir de base para futuras propostas de trabalho, as quais considerem os erros cometidos pelos estudantes, como caminho para a construção de conhecimentos. Entende-se que os resultados obtidos, além de sinalizarem oportunidades para a elaboração de estratégias de ensino, foram capazes de fornecer ao próprio professor a possibilidade de uma reflexão quanto à metodologia de ensino adotada, oportunizando ao educador adotar a análise de erros no processo diário de ensino da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, além das demais disciplinas.

Destaca-se, também, que os resultados da investigação foram divulgados para o Colegiado do Curso de Engenharia Civil, bem como para o Núcleo Docente Estruturante-NDE da FAPAC, como forma de contribuir para o aprimoramento do processo de ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral na Instituição.

Assim, considera-se que o educador, sobretudo, o professor de Matemática, em todos os níveis do ensino, deve buscar permanentemente conhecer novas técnicas, metodologias e ferramentas que possam auxiliar no ensino desta disciplina. Do mesmo modo, como se buscam técnicas, recursos e metodologias, é necessário resgatar processos de avaliação que contribuam para o desenvolvimento da aprendizagem do estudante. Nesse contexto, é fundamental um olhar para os erros dos alunos, pois é também por meio destes que os estudantes podem se conscientizar de suas dificuldades. Assim, em conjunto, o professor e o aluno podem buscar formas não só de superá-los, mas de utilizá-los como caminhos para reconstrução do conhecimento.

Por fim, tem-se a certeza que a conclusão do presente trabalho não significa a finalização do processo iniciado com a sua realização. O estudo realizado serviu para transformar em convicção o que, até então, era uma suposição: um olhar investigativo para os erros que os alunos cometem e a análise dos mesmos, no contexto do conteúdo que está sendo trabalhado, pode contribuir de maneira decisiva para uma maior compreensão do processo de apropriação do conhecimento por parte dos estudantes, o que também pode orientar de maneira mais qualificada o trabalho do professor.

Espera-se, com essa investigação, ter contribuído para reflexões e discussões a respeito da análise de erros, bem como sobre o ensino e aprendizagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, para muito além do que foi o aprendizado deste professor investigador.

REFERÊNCIAS

BARDIN, Laurence. **Análise de conteúdo.** Lisboa: Edições 70, 1979.

BARICHELLO, Leonardo. **Análise de resoluções de problemas de cálculo diferencial em um ambiente de interação escrita**. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Instituto de Geociências e Ciências Exatas, UNESP, Rio Claro, 2008.

BOGDAN, Robert; BIKLEN, Sari Knopp. **Investigação Qualitativa em Educação:** uma introdução à teoria e aos métodos. Porto: Porto Editora, 1996.

BORASI, Raffaella. **Reconceiving mathematics Instruction:** a Focus on Errors. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation, 1996. Disponível em <http://books.google.com.br/books > Acesso em: agosto. 2012.

BORTOLI, Marcelo Freitas. **Análise de erros em matemática**: um estudo com alunos de ensino superior. 2011. Dissertação (Mestrado Profissionalizante em Ensino de Física e de Matemática). Centro Universitário Franciscano: Santa Maria, 2011.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais. **Matemática**. Secretaria de Educação Fundamental. 2. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2000.

CAVASOTTO, Marcelo. **Dificuldades na aprendizagem em cálculo**: o que os erros cometidos pelos alunos podem informar. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Faculdade de Física, PUCRS: Porto Alegre, 2010.

CURY, Helena Noronha. **Análise de erros:** o que podemos aprender com as repostas dos alunos. Belo Horizonte: Autêntica, 2007.

__________. **Análise de erros em demonstrações de geometria plana**: um estudo com alunos de 3º grau. 1988. Dissertação (Mestrado em Educação). Faculdade de Educação, Universidade Federal do Rio Grande do Sul: Porto Alegre, 1988.

CURY, Helena Noronha; CASSOL, Mariana. Análise de erros em cálculo: uma pesquisa Para embasar mudanças. **Acta Scientiae**. v.6, n. 1, p.27 - 36, 2004.

D'AMBROSIO, Ubiratan. **Da realidade à ação**: Reflexões sobre educação e matemática. Campinas: UNICAMP, 1986.

DALTO, Jader Otavio. **A produção escrita em matemática**: análise interpretativa da questão discursiva de matemática comum à 8ª série do ensino fundamental e a 3ª série do ensino médio da AVA/2002. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, UEL: Londrina, 2007.

ESTEBAN, Maria Teresa. **Avaliação:** Uma prática em busca de novos sentidos. 4. ed. Rio de Janeiro: DP&A, 2003.

FELTES, Rejane Zeferino. **Análise de erros em potenciação e radiciação**: um estudo com alunos de Ensino Fundamental e Médio. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul: Porto Alegre, 2007.

FREIRE, Paulo. **Pedagogia da Autonomia**: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e Terra, 1996. (Coleção Leitura).

GIL, Katia Henn. **Reflexões sobre as dificuldades dos alunos na aprendizagem de álgebra.** 2008. Dissertação. (Mestrado em Educação em Ciências e Matemática). Faculdade de Física, PUCRS: Porto Alegre, 2008.

GUSMÃO, Bianca Baraúna. **Dificuldade de aprendizagem**: um olhar crítico. Pará: UAM, 2001.

HOFFMANN, Jussara Maria Lerch. **Avaliar para Promover**: As Setas do Caminho. 8. ed. Porto Alegre: Mediação, 2001.

IBGE- **Indicadores.** Disponível em:< http://www.ibge.gov.br >. Acesso em mar. 2010.

INADE – **Sistemas de Resultados**. Disponível em: < http//www.institutoinade.com.br/home/ > Acesso em mar. 2012.

LA TAILE, Yves. O erro na perspectiva piagetiana. In: AQUINO, J. G. (Coord.). **Erro e Fracasso na Escola**: alternativas teóricas e práticas. São Paulo: Summus, 1997. p. 11-24.

LIBÂNEO, José Carlos. **Didática**. São Paulo: Cortez, 1994. (Coleção Magistério: Série Formação do Professor).

LOPES, Antônio José. Erros: mentiras que parecem verdades ou verdades que parecem mentiras. **Cadernos CEM**, v. 2, p. 41-45, 1990. Disponível em <http://www.matematicahoje.com.br > Acesso em ago. 2012.

LOPES, Sílvia Ednaira. **Alunos do ensino fundamental e problemas escolares**: leitura e interpretação de enunciados e procedimentos de resolução. 2007. Dissertação (Mestrado em Educação para a Ciência e o Ensino de Matemática). Universidade Estadual de Maringá: Maringá, 2007.

LÜDKE, Menga; ANDRÉ, Marli Eliza Dalmazo. **Pesquisa em Educação**: abordagens qualitativas. São Paulo: EPU, 1986.

MACEDO, Lino**. Ensaios Construtivistas**. 3. Ed. São Paulo: Casa do Psicólogo, 1994.

MALTA, Laci. Linguagem, leitura e matemática. In: CURY, H. N. (Org.). **Disciplinas matemáticas em cursos superiores**: reflexões, relatos, propostas**.** Porto Alegre: EDIPUCRS, 2004. p.41-62.

MENDONÇA, Paulo Cleber Teixeira. Análise dos erros cometidos nas operações fundamentais com números reais: um estudo de caso. In: ENCONTRO REGIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 9, 2011, Palmas. **Anais...** Palmas: Universidade Federal do Tocantins, 2011.

MOVSHOVITZ-HADAR, Nitsa. et al. An empirical classification model for errors in high school mathematics. **Journal for Research in Mathematics Education**, v.18, n.1, p.3-14, 1987.

PAIAS, Ana Maria. **Diagnóstico dos erros a Operação Potenciação aplicado a alunos dos Ensinos Fundamental e Médio**. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo: São Paulo, 2009.

PERRENOUD, Philippe. **Avaliação**: Da excelência à regulação das aprendizagens – Entre duas lógicas. Tradução: Patrícia Chittoni Ramos. Porto Alegre: Artes médicas, 1995.

PINTO, Heloisa Dantas de Souza. As fontes do erro. In: AQUINO, J. G. (Coord.). **Erro e Fracasso na Escola**: alternativas teóricas e práticas. São Paulo: Summus, 1997. p. 63-72.

PINTO, Neuza Bertoni. **O Erro como Estratégia Didática**: Estudo do erro no ensino da matemática elementar. Campinas-SP: Papirus, 2000.

RADATZ, Hendrik. Error Analysis in Mathematics Education. **Journal for Research in Mathematics Education,** v.10, n.2, p. 163-172, 1979.

RADATZ, Hendrik. Student's Errors in the mathematical learning process: a survey. **For the Learning of Problems**. vol. 10, n. 1, p. 16-20, 1980.

RICO, Luis. Errores y dificuldades em El aprendizaje de lãs matemáticas**.** In: KILPATRICK, J.; GOMES, P.; RICO, L. (Orgs.) **Educación matemática.** Colômbia: Grupo Editorial Iberoamérica, 1995, p. 69-108.

SOCAS, Martín Manuel. Dificultades, obstáculos y errores em El aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. In: RICO, L. et. al. (Coord.). **La educacion matemática em La ensenanza secundaria**. Barcelona: Horsori, 1997, p. 125-154.

SOUZA, Sueli Spolador Simões. **Erros em Matemática**: Um estudo diagnóstico com alunos de 6a série do ensino fundamental. 2002. Dissertação (Mestrado em educação). Universidade Estadual Paulista: Marília, 2002.

UNESCO. **A Educação no Mundo**: Política, Legislação e Administração Educacional. Tradução de Leonor Maria Tanuri. São Paulo: Saraiva, 1982.

VALE, Maria Luísa de Sousa. **O erro como ponte para a aprendizagem em Matemática**: um estudo com alunos do 7.º ano do ensino básico. 2010. Dissertação (Mestrado em Educação). Instituto de Educação da Universidade de Lisboa: Lisboa, 2010.

VIOLA DOS SANTOS, João Ricardo. **O que alunos da escola básica mostram saber por meio de sua produção escrita em matemática**. 2007. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina: Londrina, 2007.

ZABALA, Antoni. **A prática educativa**: como ensinar. Porto Alegre: Artmed, 1998.

APÊNDICES

APÊNDICE A - Questionário Sócio Cultural

FAPAC - Faculdade Presidente Antônio Carlos.
ITPAC-INSTITUTO TOCANTINENSE PRESIDENTE ANTÔNIO CARLOS PORTO LTDA.
Rua 02 Qd 07, S/N – Jardins dos Ypês– Porto Nacional – TO – CEP 77.500-000
Fone: (63) 3363 – 9600 - CNPJ – 10.261. 569/0001 – 64
www.itpacporto.com.br

Questionário Sócio Cultural

Prezado aluno (a):

Estou desenvolvendo uma pesquisa para conhecer as dificuldades dos alunos em resolver problemas de Cálculo Diferencial e Integral. Para isso, preciso da sua cooperação para preencher este questionário e resolver os exercícios propostos.

A resposta a este questionário indica nosso primeiro passo para a coleta dos dados. Não precisa colocar seu nome, apenas um código que deverá se lembrar, para usá-lo novamente em nova oportunidade.

01) Você é do sexo:

a) Masculino
b) Feminino

02) Em que tipo de escola você cursou o ensino médio?

a) Todo em escola publica
b) Todo em escola privada (particular)
c) A maior parte em escola publica
d) A maior parte em escola privada
e) Metade em escola pública e metade em escola particular

03) Que tipo de curso de ensino médio você concluiu?

a) Comum ou de educação geral, no ensino regular
b) Profissionalizante técnico
c) Profissionalizante magistério
d) Supletivo
e) Outro

04) Quanto tempo faz que você concluiu o ensino médio?

a) Menos de um ano
b) Entre um ano e três anos
c) Entre três e cinco anos
d) Entre cinco e dez anos
e) Mais de dez anos

05) Quantos anos você tem?

06) Porque você escolheu fazer este curso?

07) Como você classificaria o seu aprendizado em matemática com relação seu ensino secundário? Justifique sua reposta

a) bom
b) muito bom
c) ótimo
d) regular
e) insuficiente

08) Você estagia? Trabalha na área de construção civil? Se não, informe em que trabalha.

09) Quantas horas você trabalha por semana?

10) Quantas horas por semana você dedica aos estudos?

APÊNDICE B - Teste Inicial

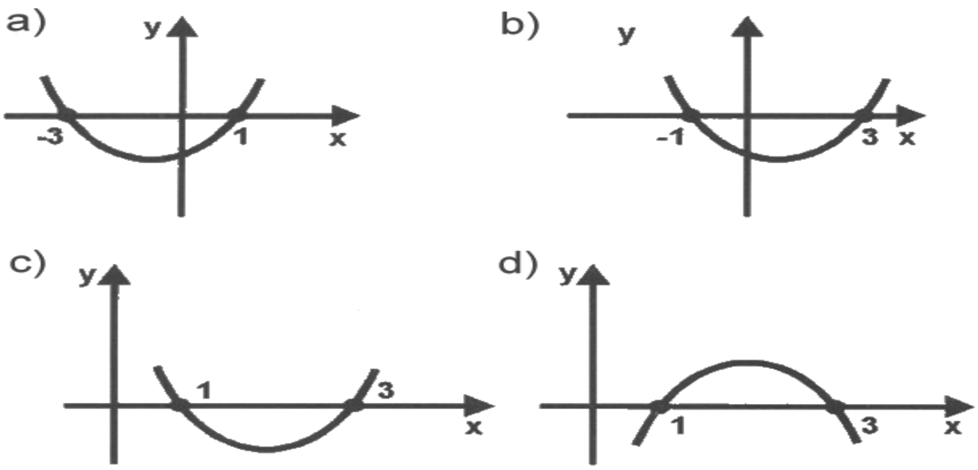
Questão 1: O Gráfico de uma função do 10 grau, nos dá sempre:

a) Parábola b) Uma reta c) Uma hipérbole d) Hipérbole e) N. D.E

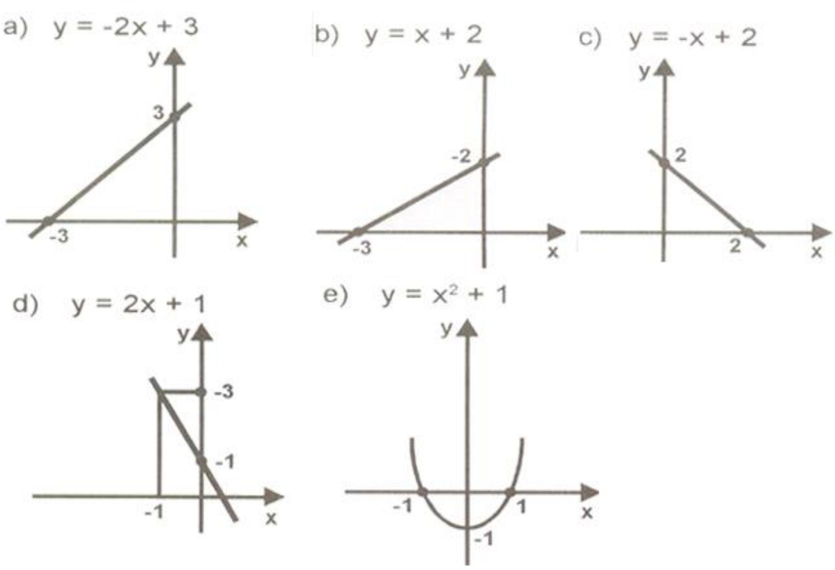
Questão 2: O Gráfico de uma função do 20 grau, nos dá sempre:

a) Parábola b) Uma reta c) Uma hipérbole d) Hipérbole e) N. D.E

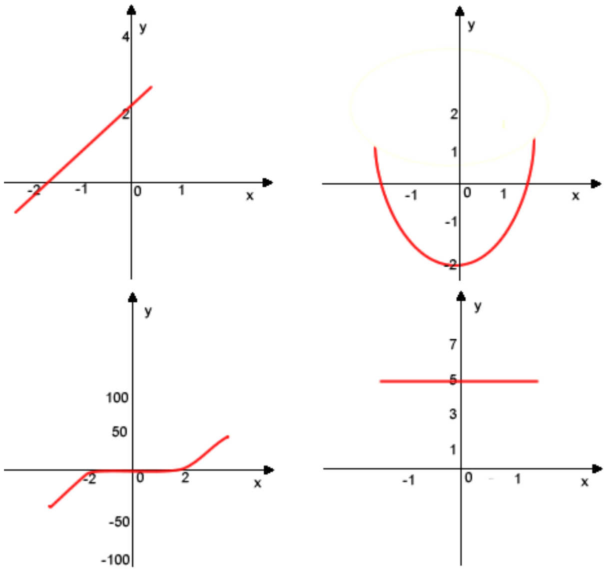
Questão 3: O gráfico de y = -x2 + 4x -3 é:



Questão 4: (CESCEA) Assinale a alternativa em que o gráfico dado corresponde á função dada:



Questão 5: Um estacionamento cobra R$ 7,00 na entrada e mais R$ 0,01 pelo tempo, em minutos, que o automóvel permanece estacionado. Quanto tempo permaneceu no estacionamento um automóvel que teve um custo de R$ 9,55?



Questão 6: Observe os gráficos e os relacione com suas respectivas funções:

a. $f(x) = x^3 - 4$

b. $g(x) = 5$

c. $h(x) = 2x + 3$

d. $t(x) = x^2 - 2$

Questão 7: Um topógrafo foi chamado para obter a altura de um edifício. Para fazer isto, ele colocou um teodolito a 200 metros do edifício e mediu um ângulo de 300. Sabendo que a luneta do teodolito está a 1,5 metros do solo, pode-se concluir que, dentre os valores adiante, o que melhor aproxima a altura do edifício, em metros, é:

a) 115 b) 230 c) 200 d) 170 e) 102

Questão 8: os catetos de um triângulo retângulo medem respectivamente 18m e 24m. Calcule a altura relativa hipotenusa.

a) 20m b) 30m c) 14,40m d) 14m e) 12m

APÊNDICE C - Material deixado no Portal do Aluno

1. **Não confundir** $-|-a|$ **com** $-(-a)$**, pois:** $\begin{cases} -|-a| = -a \\ -(-a) = a \end{cases}$

Exemplo: $-|-5| = -5$ e $-(-5) = +5$

2. **Não confundir** $(-x)^2$ **com** $-x^2$**, pois:** $\begin{cases} (-x)^2 = x^2 \\ -x^2 = -x^2 \end{cases}$

Exemplo: $(-5)^2 = 25$ e $-5^2 = -25$

3. **Não confundir** $\text{I}(x + y) com - x + y$ **. O sinal de menos está negando a adição de x + y que entre parênteses, logo teríamos;** $\text{I}(x + y) = -x - y$

4. **Não confundir** $(x + y)^2 \; com \; x^2 + y^2$ **·, pois** $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$

5. **Não fazer analogia de:**

$(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 \; com \; (x + y)^3 = x^3 + 3xy + y^3$, pois:

$(x + y)^3 = (x + y)^2 . (x + y)$

6. **Não fazer determinadas simplificações como:**

$\frac{3x + 5}{x} = 3 + 5 = 8 \; ou$

$\frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 3x + 3} = \frac{2x + 1}{-3x + 3}$

Devemos lembrar que, para simplificarmos termos do numerador com denominador eles devem se apresentar como fatores e não como parcelas.

Exemplo: $\frac{x^2(x^2 + 2x + 1)}{x^2} = x^2 + 2x + 1$

7. **Não confundir** $\sqrt{x.y} \; com \; \sqrt{x + y} \; .pois \; \sqrt{x.y} = \sqrt{x}.\sqrt{y}$ **e** $\sqrt{x + y} \neq \sqrt{x} + \sqrt{y}$

8. **Não confundir** $|a - b| > c, com \; a < -c + b \; ou \; a > b + c$

Exemplo: $|\mathbf{x} - 4| > 2 \rightarrow \mathbf{x} - 4 < -2$ **ou** $\mathbf{x} - 4 > 2 \; ou \; seja \; x < 2 \; ou \; x > 6$

$mas \; x < 2 \; ou \; x > 6 \neq 2 > x > 6$

9. Tomar cuidado com situações do tipo:

a. $\mathbf{x = \frac{1}{3} + \frac{3}{4} \rightarrow x = \frac{4}{7}}$

b. $\frac{2}{x-1} + \frac{4}{x} = 4$, temos MMC x(x-1). Então:

$\frac{2x + 4(x-1)}{(x-1)x} = 4 \therefore \frac{6x - 4}{(x-1)x} = 4$, o cuidado que estou me referindo é de simplificar o denominador por conta da igualdade e considerar daí em diante somente 6x – 4 = 4.

10. Não confundir a + bc com (a+b)c

11. Não confundir $a^{b^c} com \left(a^b\right)^c$ **·, pois** $2^{3^2} = 2^9 = 512\ e\ (2^3)^2 = 2^6 = 64$

APÊNDICE D - Avaliação Institucional N1

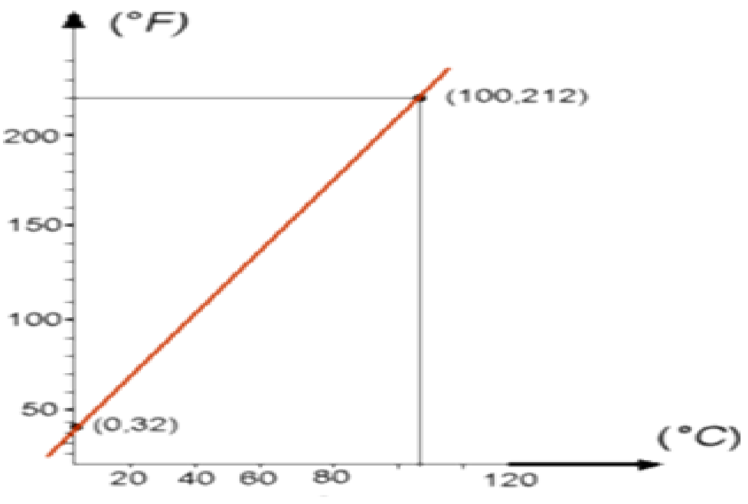
FAPAC - Faculdade Presidente Antônio Carlos INSTITUTO TOCANTINENSE PRESIDENTE ANTÔNIO CARLOS LTDA - **ITPAC-PORTO.**– TO CEP 77-500-000 CNPJ – 10.261. 569/0001 – 64 Fone: 3363-9600	**Avaliações**		
	N1 (x)	N2 ( )	N3 ( )
	2ª Chamada	AE ( )	

Curso: **Engenharia Civil**	Disciplina: **Cálculo I**	Data: **05 de Setembro de 2011**
Código: **54**	Professor: Albano Dias	Valor da Avaliação: 40,0
Aluno (a):	Duração da Avaliação: **3,5h (três horas e meia)**	**Nota:**

Instruções:

- Leia atentamente as questões antes de respondê-las;
- O **aparelho telefônico** deverá permanecer **desligado** durante a avaliação;
- A linguagem padrão é obrigatória;
- Responda as questões com letra legível;
- As **respostas** devem ser completas e acompanhadas de **memória de cálculo compatível**;
- As **respostas** deverão estar **à caneta azul ou preta**;
- **A avaliação é individual.**

Questão 1: 0 gráfico abaixo expressa a temperatura em graus Fahrenheit em função da temperatura em graus Celsius.



a) Encontre a equação que expressa graus Fahrenheit em função dos graus Celsius;

b) Determine o valor no qual as duas temperaturas são as mesmas.

Questão 2: Numa câmara onde se desenvolve um processo químico, um termômetro marca a temperatura *T* no decorrer da experiência. Sendo *t* o tempo passado após o início, que se deu às 12 horas, tem-se $T = 2t^3 - 2t^2 + 18t + 10$**, relação válida no intervalo de tempo** $0 \le t \le 4$**, onde *T* está em graus Celsius, e *t* em horas. Baseando-se no gráfico a seguir, que representa a função acima definida, pede-se:**

a) A máxima temperatura atingida e a hora em que isso ocorreu;

b) A mínima temperatura atingida e a hora em que isso ocorreu;

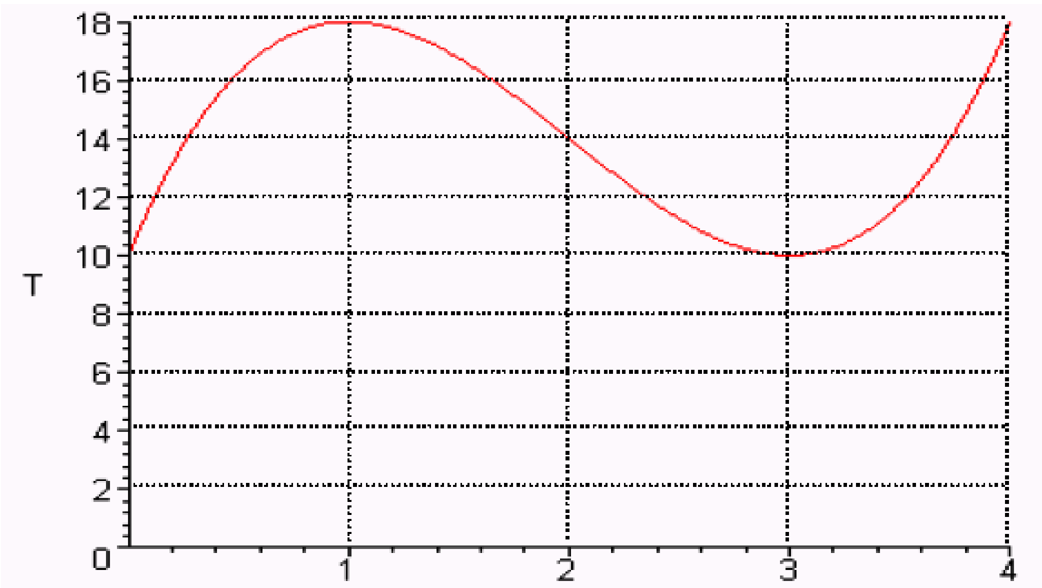
c) Os valores máximos e mínimos da função, bem como os pontos de máximo e de mínimo;

d) Os (maiores) subintervalos de $[0; 4]$ onde a função é crescente e onde a função é decrescente;

e) A temperatura ás 14horas;

f) O numero de vezes que a temperatura atingiu 16^0 e aproximadamente a hora em que isso ocorreu pela primeira vez;

g) Verifica se temperatura às 12h45min foi maior ou menor do que a temperatura às 14h30min.



Questão 3: Represente graficamente cada função y = f(x). Determine seu domínio e sua imagem.

a) y = f(x) = x2 – 5x + 6

b) y = $|senx|$

Questão 4: Relacione adequadamente um gráfico a cada situação relatada:

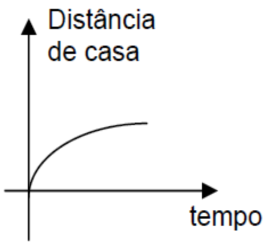
a. Eu tinha acabado de sair de casa, quando percebi que havia esquecido meus livros; então eu voltei para buscá-los;

b. Tudo ia bem até que o pneu furou;

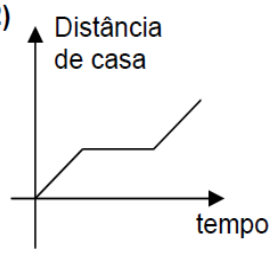
c. Eu iniciei calmamente, mas aumentei a velocidade quando me dei conta que iria me atrasar;

d. Saí de casa, mas comecei a andar mais lentamente para poder apreciar as vitrines das lojas.

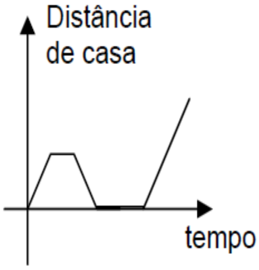
(1)



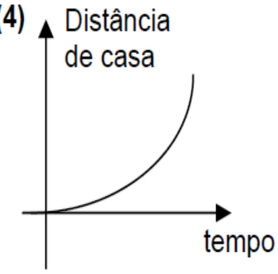
(2)



(3)



(4)

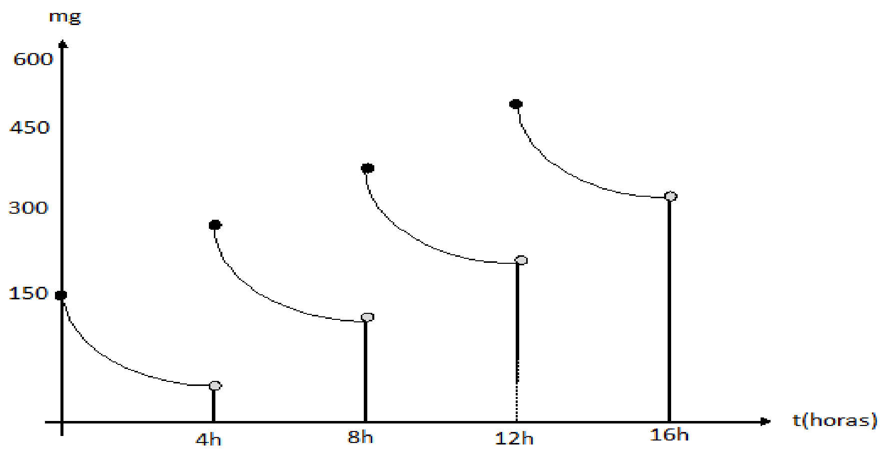


Questão 5: Um paciente recebe uma injeção de 150mg de uma droga a cada 4 horas. O gráfico mostra a quantidade f(t) da droga na corrente sanguínea após t horas.

a) Encontre o $\lim_{t\to 12^-} f(t)$ e $\lim_{t\to 12^+} f(t)$

b) Em que situações esses valores encontrados seriam úteis?

c) Explique o significado desses limites laterais.



Questão 6: Determine:

a. $\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4}{x - 2}$

b. $\lim_{x \to 2} \frac{x^3 - 8}{x - 2}$

APÊNDICE E - Avaliação Institucional N2

FAPAC - Faculdade Presidente Antônio Carlos INSTITUTO TOCANTINENSE PRESIDENTE ANTÔNIO CARLOS LTDA - **ITPAC-PORTO.**– TO CEP 77-500-000 CNPJ – 10.261. 569/0001 – 64 Fone: 3363-9600	**Avaliações** N1 ( ) N2 (X) N3 ( )	2ª Chamada	AE ( )
Curso: **Engenharia Civil**	Disciplina: **Cálculo I**	Data: **17 de Outubro de 2011**	
Código: **54**	Professor: Albano Dias	Valor da Avaliação: 30,0	
Aluno (a):	Duração da Avaliação: **3,5h(três horas e meia)**	**Nota:**	

Instruções:

- Leia atentamente as questões antes de respondê-las;
- O **aparelho telefônico** deverá permanecer **desligado** durante a avaliação;
- A linguagem padrão é obrigatória;
- Responda as questões com letra legível;
- As **respostas** devem ser completas e acompanhadas de **memória de cálculo compatível**;
- As **respostas** deverão estar **à caneta azul ou preta**;
- **A avaliação é individual.**

Questão 1: Um edifício de um andar tendo 1200m2 de piso deve ser construído, sendo exigidos recuos de 6m na frente e no de 5m nas laterais, Quais as dimensões do lote com menor área onde esse edifício possa ser construído?

Questão 2: Uma viga 20m é transportada horizontalmente por uma passagem com 6,5 m de largura, e então, por um corredor com ângulo reto com passagem. Qual deve ser a largura do corredor para que a viga possa passar por essa quina? Despreze a dimensão transversal da viga.

Questão 3: Uma janela em estilo Normando consiste em retângulo com semicírculo sobre ele. Se o perímetro de uma janela Normando for de 12m, determine qual deve ser o raio do semicírculo, tal que a janela deixe passar o máximo de luz.

Questão 4: Dada a função f(x) = $\cos^2 x$ **, determinar** $f(x)'$

Questão 5: Dada a função f(x) = $-x^3 + 6x^2 - 9x + 5$

Questão 6: Dada as funções abaixo determine se ambas são continuas em x =1.

a) $f(x) = 2x + 1$;

b) $f(x) = \begin{cases} 2x + 1 & se\ x \neq 1 \\ 4 & se\ x = 1 \end{cases}$

APÊNDICE F - Material deixado no portal do aluno após aplicação da avaliação Institucional N2

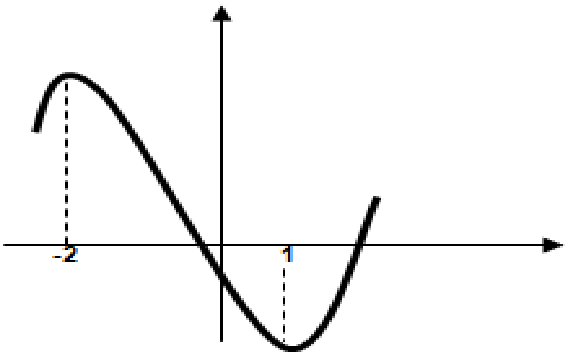
Como os alunos ficam de posse das duas primeiras avaliações, após a aplicação da N2, escolhemos um tempo em nossa primeira aula para discutirmos as questões 2 e 5, para uma melhor compreensão, e também deixamos no portal do aluno mais quatro questões para serem analisadas por eles e discutidas em outro momento.

1. Determine os intervalos em que a função $f(x) = 2x^3 + 3x^2 - 12x - 7$ é crescente, decrescente, determine os extremos relativos e esboce seu gráfico.

a) *R:* x < -2 ou x > 1; *f* é crescente, para -2 < x < 1 *f* é decrescente.

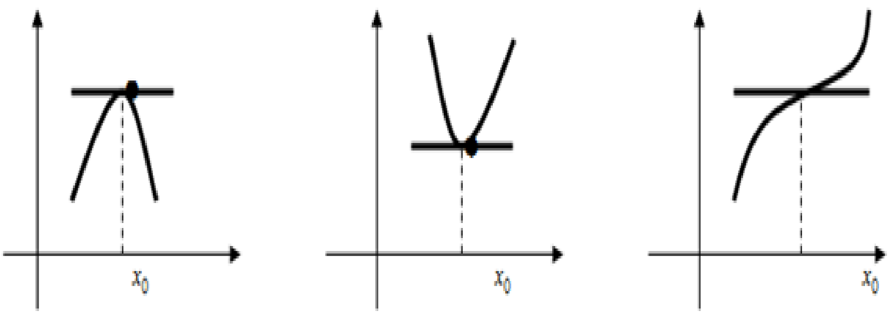
b) x_0 = -2 é abscissa de ponto de máximo (-2; 13)

RESPOSTA: x_0 = -2 é abscissa de pto de mín (1; -14)



Além disso, foram repassadas aos alunos as seguintes informações:

- Se o sinal da derivada for positivo à esquerda do ponto crítico e negativo à direita dela, o ponto é um máximo relativo. (primeiro gráfico)
- Se o sinal da derivada for negativo à esquerda do ponto crítico e positivo à direita dela, o ponto é de máximo relativo. (segundo gráfico).
- Se o sinal da derivada for o mesmo em ambos os lados do ponto crítico, o ponto não é máximo nem mínimo relativo. (terceiro gráfico)



2. **Determine usando a regra de L 'Hospital** $\lim_{x \to 0} \frac{2^x - 3^x}{x}$

3. **Determine a derivada da função f(x) =** $\sqrt{x^2 + 2}$

APÊNDICE G - Avaliação Institucional N3

<table>
<tr><td rowspan="3"></td><td rowspan="3">FAPAC - Faculdade Presidente Antônio Carlos
INSTITUTO TOCANTINENSE PRESIDENTE ANTÔNIO CARLOS LTDA - ITPAC-PORTO.– TO
CEP 77-500-000
CNPJ – 10.261. 569/0001 – 64
Fone: 3363-9600</td><td colspan="3">Avaliações</td></tr>
<tr><td>N1 ( )</td><td>N2 ( )</td><td>N3 (x)</td></tr>
<tr><td>2ª Chamada</td><td colspan="2">AE ( )</td></tr>
</table>

Curso: **Engenharia Civil**	Disciplina: **Cálculo I**	Data: **22 de Dezembro de 2011**
Código: **54**	Professor: Albano Dias	Valor da Avaliação: 30,0
Aluno (a):	Duração da Avaliação: **3,5h (três hora e meia)**	**Nota:**

Instruções:

- Leia atentamente as questões antes de respondê-las;
- O **aparelho telefônico** deverá permanecer **desligado** durante a avaliação;
- A linguagem padrão é obrigatória;
- Responda as questões com letra legível;
- As **respostas** devem ser completas e acompanhadas de **memória de cálculo compatível**;
- As **respostas** deverão estar **à caneta azul ou preta**;
- **A avaliação é individual.**

Questão 1: Determine a integral indefinida $\int \left(\frac{x^2 + 5x + 3}{x^2}\right) dx$

Questão 2 :Determine a primitiva $\int ln x\, dx$

Questão 3:Calcule $\int sen(x).\cos(x)\, dx$

Questão 4:Calcule a integra definida $\int_0^1 2xe^{x^2}\, dx$

Questão 5: Determine $\int \frac{1dx}{\sqrt[3]{x}}$

Questão 6: Calcule $\int_0^{2\pi} sen x dx$ e interprete o resultado, através de analise do gráfico da função $f(x)$.Sendo f(x) = sen(x)

Questão 7: Uma mulher levou 10min para dirigir de sua casa ao supermercado. A cada intervalo de 1min ela olhava o velocímetro e suas leituras são dadas na tabela a seguir, onde v(t) quilômetros por hora foi a leitura t min depois que ela saiu de casa. Use a regra de Simpson para aproximar a distância da casa da mulher ao supermercado.

t	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
v(t)	0	30	33	41	38	32	42	45	41	37	22

ANEXOS

ANEXO A - Plano de Ensino Da Disciplina de Cálculo Diferencial Integral I

FAPAC – Faculdade Presidente Antônio Carlos
ITPAC-INSTITUTO TOCANTINENSE PRESIDENTE ANTÔNIO CARLOS PORTO LTDA
Rua 02, Qd 07 S/Nº Jardim dos Ipês Porto Nacional – TO CEP 77.500-000
Fone: (63) 3363–9600
CNPJ 10.261. 569/0001 – 64

PROGRAMA DE DISCIPLINA

Faculdade: FAPAC - Faculdade Presidente Antônio Carlos		
Curso: Engenharia Civil	**Professor:** Albano Dias Pereira Filho	
Disciplina: Cálculo Diferencial e Integral I	Período: 2º	
Carga Horária: 90	**Semestre:** 2º	**Ano:** 2011

1. Ementa da Disciplina

Funções de uma variável, limite, continuidade, derivadas, integrais indefinidas, integrais definidas e integrações trigonométricas.

2. Contextualização/Justificativa da Importância da Disciplina Para a Formação do Acadêmico

Esta disciplina é básica em todos os currículos dos Cursos de Engenharia Civil. Subsidia a maioria das demais disciplinas, visto que, além de fornecer ferramentas para as aplicações posteriores, tem por objetivo desenvolver o raciocínio lógico do aluno, buscando aplicações práticas em problemas reais. A resolução de problemas tem se mostrado uma metodologia interessante para que o aluno perceba, desde o início do curso, a importância da matemática em sua trajetória profissional. Contribui, por exemplo, dando a base matemática para a resolução de problemas nas disciplinas de Mecânica, Resistência dos Materiais, e Fenômenos de Transportes. Possibilita ao aluno o desenvolvimento de competências e habilidades para aplicar conhecimentos matemáticos, científicos, tecnológicos e instrumentais à Engenharia Civil e desenvolver e/ou utilizar novas ferramentas técnicas.

3. Programa

FUNÇÕES DE UMA VARIÁVEL REAL

FUNÇÕES E LIMITES

- O que é limite, idéia intuitiva de limite
- Definição de limite
- Propriedades de limite
- Limite de uma função polinomial
- Limite da função composta
- Limites infinitos
- Calculo de limites quando o numerador e o denominador tendem a zero
- Limite da função exponencial
- Limites da função logarítma
- Limites trigonométricos fundamentais

CONTINUIDADE

- Derivadas
- Derivadas das funções elementares
- Derivadas fundamentais
- Derivada da soma ou da diferença
- Derivada de um produto de funções derivada de um quociente
- Regra da cadeia
- Derivada da potencia
- Derivada da função exponencial
- Derivada da função logaritima

APLICAÇÕES DA DERIVADA

- Equação da Reta Tangente
- Regra de L'Hospital
- Funções crescentes e decrescentes
- Máximos e mínimos relativos
- Quando a derivada é nula
- Classificação dos pontos em que a derivada é nula
- Problemas sobre máximos e mínimos

INTEGRAIS

- Introdução e conceito das integrais
- Propriedades das integrais
- Calculo de integrais indefinidas
- Aplicações da integral definida;
- Calculo de área e volumes através das integrais
- Técnicas de integração
- Integrais trigonométricas
- Integração Numérica

4. Metodologia/Cronograma de Aulas

Data	Título da Aula	Metodologia	Objetivo
01/08/11	Relação e Introdução ao estudo das funções.	Expositiva com exemplos resolvidos junto aos alunos para compreensão do assunto.	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma variável na resolução de problemas.
08/08/11	Funções: condição de existência, domínio e imagem, valor numérico de uma função e aplicações de funções.	Expositiva com exemplos resolvidos junto aos alunos para compreensão do assunto.	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma variável na resolução de problemas.
15/08/11	Tipos de funções: função constante, função linear, equação da reta e funções restritas. Intersecção entre funções, função quadrática, função exponencial e logarítma.	Expositiva com exemplos resolvidos junto aos alunos para compreensão do assunto.	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma variável na resolução de problemas.
22/08/11	Aplicações das funções do 1º e 2º grau: Receita, Custo e Lucro Total.	Expositiva com exemplos resolvidos junto aos alunos para compreensão do assunto.	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma variável na resolução de problemas.
29/08/11	O que é limite, ideia intuitiva de limite; Definição de limite; Propriedades de limite; Limite de uma função polinomial. Limites trigonométricos e limite da função exponencial.	Expositiva com exemplos resolvidos junto aos alunos para compreensão do assunto.	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma variável na resolução de problemas.
05/09/11	Revisão e primeira avaliação.	Expositiva com exemplos resolvidos junto aos alunos para compreensão do assunto e avaliação individual.	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma variável na resolução de problemas.
12/09/11	Função contínua e **Derivadas:** Introdução e técnicas de derivação.	Expositiva com exemplos resolvidos junto aos alunos para compreensão do assunto.	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma variável na resolução de problemas.
19/09/11	**Derivadas:** Introdução e técnicas de derivação. Equação da Reta Tangente, Reta	Expositiva com exemplos resolvidos junto aos alunos para compreensão do	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma

	Secante e Normal.	assunto.	variável na resolução de problemas.
26/09/11	Regra da cadeia. Regra de L'Hospital Funções crescentes e decrescentes	Expositiva com exemplos resolvidos junto aos alunos para compreensão do assunto	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma variável na resolução de problemas.
03/10/11	Definição: Máximos e mínimos relativos.	Expositiva com exemplos resolvidos junto aos alunos para compreensão do assunto.	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma variável na resolução de problemas.
10/10/11	Problemas sobre máximos e mínimos.	Expositiva com exemplos resolvidos junto aos alunos para compreensão do assunto.	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma variável na resolução de problemas.
15/10/11	Aplicações de máximos e mínimos.	Avaliação Individual.	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma variável na resolução de problemas.
17/10/11	Revisão e segunda Avaliação.	Avaliação Individual.	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma variável na resolução de problemas.
24/10/11	Introdução e conceito das integrais. Propriedades das integrais; Cálculo de integrais indefinidas.	Expositiva com exemplos resolvidos junto aos alunos para compreensão do assunto.	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma variável na resolução de problemas.
31/10/11	Propriedades das integrais; Calculo de integrais indefinidas e Teorema Fundamental do Cálculo.	Expositiva com exemplos resolvidos junto aos alunos para compreensão do assunto.	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma variável na resolução de problemas.
07/11/11	Integração por substituição. Calculo de área e volumes através das integrais.	Expositiva com exemplos resolvidos junto aos alunos para compreensão do assunto.	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma variável na resolução de problemas.
12/11/11	Definição de Integração por partes.	Expositiva com exemplos resolvidos junto aos alunos para compreensão do assunto.	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma variável na resolução de problemas.
19/11/11	Regra de Simpson e Regra do Trapézio.	Expositiva com exemplos resolvidos junto aos alunos para compreensão do assunto.	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma variável na resolução de problemas.
22/11/2011	Revisão e Terceira Avaliação	Expositiva com exemplos resolvidos junto aos alunos para compreensão do assunto e avaliação individual	Capacitar o aluno a usar os conceitos de derivadas e de integral de função de uma variável na resolução de problemas.

5. Avaliação

- Três Avaliações: Com conteúdos Teóricos, não cumulativos, sendo que a primeira avaliação N1, de funções e limites, no dia 05/09/11, valendo um total de 40,0 pontos. As outras nos dias 17/10/11 (N2) valendo 30,0 e a última valendo 30,0 (N3) no dia 22/11/11.
- Prova discursiva de segunda chamada: De acordo com o Regimento da IES será aplicada uma avaliação ao aluno requisitante, no dia 5/12/11, horário e local normal de aula, com conteúdo e valor da avaliação perdida.
- O aluno será aprovado com nota semestral igual ou superior a 60 pontos.
- Exame Especial: De acordo com o Regimento da IES, será aplicada ao aluno requisitante, com média semestral entre 40 e 59 pontos, uma avaliação com conteúdo cumulativo do semestre, no valor de 100 pontos, para substituição de sua média semestral. Na data de 12/12/11, às 19 horas, no mesmo local da aula teórica.

6. Bibliografia Básica

LEITHOLD, Louis et al. **O cálculo com geometria analítica**. 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994. 685 p.v.1

LEITHOLD, Louis; PATARRA, Cyro de Carvalho. **O cálculo com geometria analítica**. 3.ed. São Paulo: Harbra, 1994. 1178 p.v.2

SILVA, Elio Medeiros da; SILVA, Ermes Medeiros da; SILVA, Sebastiao Medeiros da . **Matemática básica para cursos superiores**. São Paulo: Atlas, 2006. 227 p.

7. Bibliografia Complementar

LIPSCHUTZ,Seymour. **Álgebra linear**: teorias e problemas. 3.ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2004. 647 p.

Porto Nacional - TO, 29 de Julho 2011.

Albano Dias Pereira Filho

Coordenador do Curso de Engenharia Civil

ANEXO B - TERMO DE AUTORIZAÇÃO

FAPAC - Faculdade Presidente Antônio Carlos.
ITPAC-INSTITUTO TOCANTINENSE PRESIDENTE ANTÔNIO CARLOS PORTO LTDA.
Rua 02 Qd 07, S/N – Jardins dos Ypês– Porto Nacional – TO – CEP 77.500-000
Fone: (63) 3363 – 9600 - CNPJ – 10.261. 569/0001 – 64
www.itpacporto.com.br

TERMO DE AUTORIZAÇÃO

Eu, professor Dr. Aparecido Osdimir Bertolin, Diretor Acadêmico da Faculdade Presidente Antônio Carlos – FAPAC conheço o projeto de pesquisa intitulado "O Processo de Ensino e Aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral a partir do Estudo dos Erros na Resolução de Problemas dos Estudantes do Curso de Engenharia Civil da Faculdade Presidente Antônio Carlos", a ser desenvolvido por Albano Dias Pereira Filho, aluno do Mestrado Acadêmico em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil-ULBRA, de Canoas, RS, e autorizo seu pleno desenvolvimento neste estabelecimento de ensino. Estou ciente de que serão mantidos em sigilo os dados pessoais dos participantes, bem como os resultados obtidos na pesquisa serão utilizados para alcançar os objetivos do trabalho.

Atenciosamente,

Professor Dr. Aparecido Osdimir Bertolin
Diretor Acadêmico
Faculdade Presidente Antônio Carlos – FAPAC