

**UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE**  
**CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**



**E-LEARNING COM ANÁLISE COMBINATÓRIA**

AGOSTINHO IAQCHAN RYOKITI HOMA

Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Orientadora

Canoas, 2012.

**UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL**  
**PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO**  
**PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM ENSINO DE**  
**CIÊNCIAS E MATEMÁTICA**



**E-LEARNING COM ANÁLISE COMBINATÓRIA**

AGOSTINHO IAQCHAN RYOKITI HOMA

Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald  
Orientadora

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Matemática da Universidade Luterana do Brasil para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Canoas, 2012.

### **Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)**

H763e Homa, Agostinho Iaquan Ryokiti  
E-Learning com Análise Combinatória. / Agostinho Iaquan Ryokiti  
Homa. – Canoas, 2012  
106 f.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) –  
Universidade Luterana do Brasil, 2012.  
Orientação: Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald  
Inclui anexos.

1. Educação – matemática - ensino. 2. Educação - tecnologias.  
3. Matemática – análise combinatória. 4. SCORM. I. Groenwald,  
Claudia Lisete Oliveira. II. Título.

CDU 372.851.91

Bibliotecária Responsável: Ana Lígia Trindade CRB/10-1235

## **DEDICATÓRIA**

À minha mãe que infelizmente não  
pôde presenciar essa realização.

## RESUMO

A facilidade de acesso aos computadores e à Internet tem mudado as características de interação do ser humano com o mundo. Nesse período de informatização massiva, onde várias atividades têm migrado para o digital, a aprendizagem eletrônica é uma das possibilidades para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem no meio computacional. Esse trabalho investigou como implementar um *e-learning* com o tema Análise Combinatória, baseada no padrão SCORM, de maneira que o aluno tenha a liberdade de estudo e a possibilidade de escolha entre recursos metodológicos diferenciados. Nesse sentido, o objetivo geral foi investigar o desenvolvimento de uma sequência didática em formato eletrônico, com o conteúdo matemático de Análise Combinatória, utilizando recursos metodológicos diferenciados, possibilitando gerar cenários diferenciados e individualizados de navegação. A metodologia de investigação consistiu no desenvolvimento de um *e-learning*, na plataforma ILIAS, e de um experimento com 7 alunos do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Luterana do Brasil, no Rio Grande do Sul, com os conceitos do Princípio Fundamental da Contagem, Permutação Simples, Arranjo Simples e Combinação Simples, com diferentes apresentações didáticas, utilizando vinte objetos de aprendizagem. Para o desenvolvimento da sequência didática utilizou-se, além dos dezessete objetos de aprendizagem desenvolvidos para a sequência, três objetos da Rede Internacional Virtual de Educação (RIVED) e os seguintes recursos tecnológicos: Lousa interativa; Vídeo tutorial; Teste Adaptativo Computacional (iQuiz/iQuizcreate); Ferramenta de autoria *Reload*; plataforma eletrônica de aprendizagem ILIAS. O *e-learning* proporcionou, aos alunos, a escolha entre os diferentes objetos multimidiáticos, possibilitando a continuação na sequência ou a revisão do conteúdo já estudado, valorizando a autoavaliação, e o acompanhamento da sua aprendizagem, através de um Teste Adaptativo Computacional. A coleta de dados foi realizada através das observações do pesquisador e das informações armazenadas no banco de dados da plataforma de aprendizagem utilizada no experimento. A análise dos dados foi realizada segundo as categorias: plataforma de aprendizagem, sequência didática e sequência de navegação dos estudantes. Os resultados apontam, em virtude dos objetivos investigados, que a pesquisa cumpriu seus propósitos, apresentando um *e-learning* em uma proposta concreta de trabalho que valoriza a autoavaliação do aluno, com um tema matemático relevante à formação do pensamento formal, a Análise Combinatória.

**Palavras-chave:** Tecnologias na Educação. Educação Matemática. Análise Combinatória. SCORM.

## **ABSTRACT**

The ease of access to computers and the Internet changed the characteristics of human interaction with the world. In this period of massive computerization, where various activities have migrated to digital, electronic learning is one of the possibilities for development of teaching and learning in the computer. This study investigated how to implement an e-learning with the Combinatorics, based on SCORM standard, where the student has the freedom to study and choice between different methodological resources. Therefore, the main aim was to investigate the development of a didactic sequence in an electronic format, with the mathematical contents of Combinatorics, by making use of different methodological resources, generating individualized navigation scenarios possible. The research methodology consisted of developing an e-learning program, at ILIAS platform, and an experiment with 7 students from the Mathematics Undergraduate Course, at the Universidade Luterana do Brasil, Rio Grande do Sul, with the concepts of Enumeration, Permutation, and Combination in different didactic presentations, using twenty learning objects. For the development of didactic sequence was used seventeen developed learning objects, three objects of the International Network of Virtual Education (RIVED) and the technological resources: interactive whiteboard, video lectures, Computer Adaptive Test (iQuiz / iQuizcreate); Reload authoring tool; electronic learning platform ILIAS. The e-learning program granted, to the student, the choice between different multimedia objects to enable the follow-up continuation or the revision of contents which had already been studied, and to value student self-assessment as well, and the monitoring of students' learning, through an Computer Adaptive Test. The data analysis was performed according to the categories: learning platform, didactic sequence and students' navigation sequence. Data findings show, according to the objectives investigated, that the research fulfilled its purpose, by presenting an e-learning program within a concrete work proposal which enhances student self-assessment, with a mathematical theme relevant to the formation of formal thinking - Combinatorics.

**Key-words:** Technology in Education. Mathematics Education. Combinatorial Analysis. SCORM.

## LISTA DE FIGURAS

|   |    |
|---|----|
| Figura 1 - Objeto de aprendizagem para Combinação Simples .....   | 18 |
| Figura 2 - SCORM no contexto de e-learning.....   | 20 |
| Figura 3 – Relacionamento entre as entidades componentes do SCORM .....   | 22 |
| Figura 4 - Árvore de atividades e objetivos associados.....   | 24 |
| Figura 5 - Árvore de atividades com as declarações dos objetivos locais e globais .....                             | 25 |
| Figura 6 - Árvore com regras de rollup. ....  | 26 |
| Figura 7 - Distribuição da população de acordo com suas habilidades de uma população.....                           | 30 |
| Figura 8 - Gráfico para itens com dificuldade de nível 3 e curvas de discriminação distintas                        | 33 |
| Figura 9 - Probabilidade de acerto para a diferença entre dificuldade e competência .....                           | 36 |
| Figura 10 - Gráfico das CCI para as discriminações 0,5; 0,7 e 1,0. ....   | 37 |
| Figura 11 - Gráfico da CCI para um item de múltipla escolha com $p=0,2$ e discriminação do item de 0,7. ....        | 38 |
| Figura 12 - Diagrama com as quatro operações básicas em Análise Combinatória.....                                   | 51 |
| Figura 13 - Fórmulas para problemas de colocações simples .....   | 53 |
| Figura 14 - Equivalência entre os problemas de <i>colocação em casas</i> e os de <i>partição</i> .....              | 54 |
| Figura 15 - Lousa Interativa .....  | 57 |
| Figura 16 - Documento XML de duas questões para o iQuiz .....   | 59 |
| Figura 17 - iQuiz apresentando uma questão com imagem auxiliar e resposta discreta .....                            | 60 |
| Figura 18 - Tela do iQuizcreate para uma pergunta com resposta discreta.....  | 62 |
| Figura 19 - Tela do <i>Reload</i> com o Princípio Fundamental da Contagem e atividades associadas em destaque. .... | 64 |
| Figura 20 - Organização dos objetos de aprendizagem.....  | 67 |
| Figura 21 - Organização dos módulos de aprendizagem.....  | 68 |
| Figura 22 - <i>Template</i> gráfico utilizado para desenvolvimento dos objetos de aprendizagem..                    | 69 |
| Figura 23 - Estrutura básica dos objetos de aprendizagem .....  | 70 |

|   |    |
|---|----|
| Figura 24 - Organização do módulo o Princípio fundamental da Contagem .....           | 71 |
| Figura 25 - Tela da atividade interativa para o problema gerador das bandeiras.....   | 72 |
| Figura 26 - Vídeo tutorial com a explicação da solução do problema das bandeiras..... | 73 |
| Figura 27 - Problema do objeto de aprendizagem alternativo.....                       | 74 |
| Figura 28 - Material de apoio com o conteúdo de Conjuntos Numéricos.....              | 74 |
| Figura 29 - Material de apoio com a operação de Fatorial.....                         | 75 |
| Figura 30 - Estrutura de apresentação para a Permutação Simples.....                  | 75 |
| Figura 31 - Problema gerador da Permutação Simples .....                              | 76 |
| Figura 32 - Vídeo tutorial do primeiro problema gerador.....                          | 76 |
| Figura 33 - Problema gerador da Permutação .....                                      | 77 |
| Figura 34 - Construção da árvore de possibilidades.....                               | 78 |
| Figura 35 - Construção de agrupamentos de elementos geométricos .....                 | 78 |
| Figura 36 - Problema de formação de anagramas do objeto RIVED .....                   | 79 |
| Figura 37 - Problema de organização de livros do objeto RIVED.....                    | 79 |
| Figura 38 - Estrutura do módulo de Arranjo Simples .....                              | 80 |
| Figura 39 - Problema gerador do conceito de Arranjo Simples .....                     | 81 |
| Figura 40 - Vídeo tutorial do segundo problema gerador .....                          | 81 |
| Figura 41 - Construção da árvore de possibilidades.....                               | 82 |
| Figura 42 - Construção de agrupamentos de elementos geométricos .....                 | 82 |
| Figura 43 - Problema de senhas do objeto RIVED .....                                  | 83 |
| Figura 44 - Problema das placas do objeto RIVED.....                                  | 83 |
| Figura 45 - Estrutura do módulo de Combinação Simples.....                            | 84 |
| Figura 46 - Problema gerador de Combinação Simples .....                              | 85 |
| Figura 47 - Vídeo tutorial associado .....  | 85 |
| Figura 48 - Atividade de Combinação Simples com objetos geométricos.....              | 86 |
| Figura 49 - Material de apoio do conteúdo de Combinação Simples.....                  | 86 |
| Figura 50 - Problema da quina do objeto RIVED .....                                   | 87 |
| Figura 51 - Problema de duplas do objeto RIVED.....                                   | 87 |
| Figura 52 - Tela do ILIAS, com a apresentação do <i>e-learning</i> .....              | 89 |
| Figura 53 - Exemplo de <i>status</i> das atividades. ....                             | 90 |
| Figura 54 - Atividade com objetos geométricos.....                                    | 91 |
| Figura 55 - Diagramas de navegação dos alunos .....                                   | 96 |



## LISTA DE TABELAS

|   |    |
|---|----|
| Tabela 1 - Resposta de um teste fictício .....  | 34 |
| Tabela 2 - Técnica da Diagonalização.....   | 34 |
| Tabela 3 - Dificuldades dos alunos no conteúdo de Análise Combinatória apontadas pelo estudo..... | 43 |
| Tabela 4 - Apresenta a escala de dificuldades dos tipos de problemas de Permutação. ....          | 43 |
| Tabela 5 - Apresenta a escala de dificuldades dos tipos de problemas de Arranjo.....              | 44 |
| Tabela 6 - Apresenta a escala de dificuldades dos tipos de problemas de Combinação. ....          | 44 |
| Tabela 7 - Scores das avaliações dos alunos .....   | 92 |
| Tabela 8 - Último Acesso e Número de Tentativas ao curso .....                                    | 93 |
| Tabela 9 - Informações de acesso do Aluno2 ao curso .....   | 94 |
| Tabela 10 - Consolidação dos tempos do último acesso às atividades.....                           | 95 |

## SUMÁRIO

|  |    |
|--|----|
| INTRODUÇÃO.....  | 12 |
| 1 PRESSUPOSTOS METODOLÓGICOS .....                         | 14 |
| 1.1 TEMA DA INVESTIGAÇÃO .....                             | 14 |
| 1.2 PROBLEMA DE INVESTIGAÇÃO .....                         | 14 |
| 1.3 OBJETIVOS .....  | 14 |
| 1.3.1 Objetivo Geral .....                                 | 15 |
| 1.3.2 Objetivos Específicos .....                          | 15 |
| 1.4 METODOLOGIA DA PESQUISA .....                          | 15 |
| 2 REFERENCIAL TEÓRICO .....                                | 19 |
| 2.1 SCORM – Sharable Content Object Reference Model .....  | 19 |
| 2.1.1 Portabilidade do Conteúdo .....                      | 20 |
| 2.1.2 Granularidade .....                                  | 21 |
| 2.1.3 Interoperabilidade .....                             | 21 |
| 2.1.4 Pacote de ensino baseado no SCORM.....               | 22 |
| 2.1.5 Regras de apresentação de conteúdos .....            | 23 |
| 2.2 TESTES ADAPTATIVOS .....                               | 28 |
| 2.3 TEORIA DE RESPOSTA AO ITEM.....                        | 31 |
| 2.3.1 Discriminação do item .....                          | 32 |
| 2.3.2 Diferencial do item .....                            | 35 |
| 2.3.3 Modelos probabilísticos da TRI.....                  | 36 |
| 2.4 TESTE ADAPTATIVO COMPUTACIONAL.....                    | 39 |
| 2.4.1 Seleção adaptativa .....                             | 40 |
| 2.4.2 Critérios de parada e estimativa da habilidade ..... | 41 |

|       |   |     |
|-------|---|-----|
| 2.4.3 | Dificuldade dos itens em Análise Combinatória .....         | 42  |
| 2.5   | ANÁLISE COMBINATÓRIA .....                                  | 45  |
| 2.5.1 | Problemas Combinatórios.....                                | 47  |
| 2.5.2 | Organização dos conteúdos .....                             | 54  |
| 3     | RECURSOS TECNOLÓGICOS UTILIZADOS NO <i>E-LEARNING</i> ..... | 56  |
| 3.1   | LOUSA INTERATIVA.....                                       | 56  |
| 3.2   | VÍDEOS TUTORIAIS.....                                       | 57  |
| 3.3   | TESTE ADAPTATIVO COMPUTACIONAL.....                         | 58  |
| 3.4   | RELOAD - FERRAMENTAS DE AUTORIA .....                       | 63  |
| 3.5   | PLATAFORMA ELETRÔNICA DE APRENDIZAGEM ILIAS .....           | 64  |
| 3.6   | MATERIAL DE APOIO RIVED .....                               | 65  |
| 4     | SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM O CONTEÚDO ANÁLISE COMBINATÓRIA ...  | 67  |
| 4.1   | ORGANIZAÇÃO DO E-LEARNING COM ANÁLISE COMBINATÓRIA.....     | 68  |
| 4.2   | TEMPLATE DOS OBJETOS DE APRENDIZAGEM .....                  | 68  |
| 4.3   | OBJETOS DE APRENDIZAGEM DESENVOLVIDOS .....                 | 69  |
| 4.3.1 | Princípio Fundamental da Contagem.....                      | 71  |
| 4.3.2 | Permutação Simples.....                                     | 75  |
| 4.3.3 | Arranjo Simples .....                                       | 80  |
| 4.3.4 | Combinação Simples .....                                    | 83  |
| 5     | A EXPERIÊNCIA .....   | 88  |
| 5.1   | ANÁLISE DOS RESULTADOS .....                                | 88  |
| 5.1.1 | Plataforma de Aprendizagem .....                            | 88  |
| 5.1.2 | Sequência Didática com Análise Combinatória .....           | 91  |
| 5.1.3 | Sequência de navegação dos estudantes .....                 | 93  |
|       | CONCLUSÃO.....  | 98  |
|       | REFERÊNCIAS .....   | 100 |
|       | APÊNDICES .....   | 104 |
|       | APÊNDICE 1 .....  | 105 |
|       | APÊNDICE 2 .....  | 105 |

## INTRODUÇÃO

A complexidade da sociedade em que vivemos requer novas formas de pensar, sendo necessário desenvolver competências no indivíduo para lidar com as tecnologias da informação e a crescente informatização em todas as áreas do conhecimento e das relações humanas. Nesse contexto, é fundamental a organização do pensamento matemático, que inclui, por um lado, pensamento sobre tópicos matemáticos e, por outro lado, processos avançados do pensamento, como abstração, justificção, visualização, estimacção e raciocínio sobre hipóteses (CANTORAL et al., 2000).

Além disso, o desafio de quem educa é descobrir maneiras diferentes de ensinar a mesma coisa, já que os estudantes têm ritmos e históricos variados (GROSSI, 2008). Além de questionar a abordagem do conteúdo, deve despertar a curiosidade do aluno e demonstrar a utilização do mesmo em diferentes situações da vida real. Historicamente o sistema educacional é projetado igualmente para todos os estudantes, em um contexto organizacional definido, ao qual o estudante deve se adaptar (GROSSI, 2008).

O *e-learning*<sup>1</sup> pode ser uma alternativa, um dos caminhos para amenizar essa situação, ao ser utilizado como um recurso didático de sala de aula com a presença do professor e dos alunos em um ambiente colaborativo/cooperativo informatizado, podendo ser denominado, segundo Heinze (2008), como *b-learning*<sup>2</sup>.

A vantagem do uso de uma sequência didática em uma plataforma eletrônica de aprendizagem é a possibilidade da utilização de diferentes recursos áudio visuais, como vídeo exemplos, textos, imagens, animações, softwares educativos, ou seja, um conteúdo visual de maior qualidade em relação ao uso do quadro e giz. Assim, nesse ambiente informatizado de aprendizagem, os alunos desenvolvem suas atividades de acordo com seu ritmo de

---

<sup>1</sup> *Eletronic learning* - Nesse trabalho, será utilizado para denominar os recursos eletrônicos utilizados que auxiliem e dêem suporte ao processo de aprendizagem.

<sup>2</sup> *Blended learning* - aprendizagem realizada através da combinação da aprendizagem presencial e o *e-learning*.

aprendizagem, onde lhes serão apresentados os conteúdos através de diferentes recursos metodológicos, necessários ao desenvolvimento das competências matemáticas e conforme suas escolhas, preferências e desempenho.

Essa investigação busca alternativas para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem, em Matemática, de acordo com o ritmo de cada estudante proporcionando alternativas à sua forma de aprendizagem, favorecendo suas preferências por determinados recursos didáticos (leitura, desafios, resolução de problemas, situações do cotidiano) que se adequem ao conteúdo da sequência didática. Durante a sequência o estudante poderá optar entre diferentes formatos de hipermídia, possibilitando a escolha pela continuação na sequência ou a revisão do conteúdo através de materiais de apoio com abordagens diferenciadas.

Esse trabalho foi desenvolvido como uma expansão dos trabalhos de conclusão do curso de Matemática Bacharelado em Matemática (HOMA, 2008), no qual foi desenvolvido um *e-learning*, com o conteúdo de Análise Combinatória, segundo o padrão SCORM (*Sharable Content Object Reference Model*) com uma sequência de apresentação multicaminhos<sup>3</sup> controlada pela plataforma de aprendizagem. O objetivo desse trabalho foi desenvolver uma apresentação multicaminhos, com o conteúdo de Análise Combinatória, oportunizando ao aluno a autoavaliação e permitindo, quando necessário, o acesso a outros materiais de apoio antes deste se submeter à avaliação.

Para melhor organização, este trabalho está dividido em cinco capítulos, onde são apresentados os pressupostos metodológicos, a revisão de literatura sobre o padrão SCORM, os Testes Adaptativos Computacionais e o tema Análise Combinatória. Após são descritos os recursos tecnológicos utilizados para o desenvolvimento desse trabalho, finalizando com a experiência e a análise dos dados.

Espera-se que esta investigação possa contribuir para uma discussão e reflexão sobre o processo de ensino e aprendizagem com uso das TIC e o padrão SCORM, no desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

---

<sup>3</sup> Multicaminhos são as sequências de navegação do aluno, por diferentes objetos de aprendizagem, que geram diferentes cenários de aprendizagem.

## 1 PRESSUPOSTOS METODOLÓGICOS

Nesta seção apresentam-se os itens da pesquisa relacionados ao tema escolhido, a problemática, os objetivos da investigação, a metodologia utilizada na obtenção dos resultados e a experiência realizada com alunos do curso de Licenciatura em Matemática, da Universidade Luterana do Brasil - ULBRA, campus Canoas.

### TEMA DA INVESTIGAÇÃO

O tema dessa investigação foi o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem da Matemática, com o tema Análise Combinatória, em um ambiente informatizado, de acordo com o modo de navegação, desempenho e preferências do estudante.

### PROBLEMA DE INVESTIGAÇÃO

A facilidade de acesso aos computadores e à Internet tem mudado as características de interação do ser humano com o mundo. Nesse período de informatização massiva, onde várias atividades têm migrado para o digital, a aprendizagem eletrônica é uma das possibilidades para o desenvolvimento do processo de ensino e aprendizagem no meio computacional. Os sistemas educacionais na *WEB* apresentam bons resultados com alunos motivados e/ou predispostos ao uso da mesma; contudo, em situações em que faltam conceitos prévios, há pouca motivação, ou com grupos heterogêneos, como é o caso do Ensino Médio, as atividades eletrônicas para uso escolar, com exposição do conteúdo de forma sequencial e em formato único, não alcançam os resultados desejados (GROENWALD et al, 2009).

Nesse sentido a pergunta dessa investigação é: como implementar um e-learning com o tema Análise Combinatória, baseada no padrão SCORM, de maneira que o aluno tenha a liberdade de estudo e a possibilidade de escolha entre recursos metodológicos diferenciados.

### OBJETIVOS

Para o desenvolvimento dessa investigação foram traçados o objetivo geral e os objetivos específicos explicitados a seguir.

### 1.1.1 Objetivo Geral

O objetivo geral desse trabalho é investigar o desenvolvimento de uma sequência didática em formato eletrônico, com o conteúdo de Análise Combinatória, com recursos metodológicos diferenciados, gerando cenários diferenciados e individualizados de navegação.

### 1.1.2 Objetivos Específicos

Para alcançar o objetivo geral foram delineados os seguintes objetivos específicos:

- investigar o desenvolvimento de uma sequência didática, com o conteúdo de Análise Combinatória do Ensino Médio, em conformidade com o padrão SCORM;
- implementar<sup>4</sup> a sequência didática desenvolvida em uma plataforma de aprendizagem eletrônica com avaliações através de testes adaptativos;
- investigar os multicaminhos, compostos por recursos com formatos diferenciados de apresentação;
- investigar os cenários de apresentação, com objetos de aprendizagem, dos conceitos de Análise Combinatória dentro do padrão SCORM;
- implementar uma experiência com a sequência didática desenvolvida, com os conteúdos de Análise Combinatória, do Ensino Médio, para avaliação dos multicaminhos, de acordo com as preferências de navegação e do desempenho de cada estudante.

#### METODOLOGIA DA PESQUISA

Essa investigação foi realizada com as seguintes ações:

- pesquisa bibliográfica com os temas ensino eletrônico, SCORM, plataformas eletrônicas de aprendizagem, testes adaptativos computacionais, processo de ensino e aprendizagem com o conteúdo de Análise Combinatória;
- investigação da integração e utilização de testes adaptativos ao padrão SCORM para o desenvolvimento do *design* de apresentação dos conceitos de Análise Combinatória para o Ensino Médio;
- desenvolvimento do *design* de apresentação dos conceitos de Análise Combinatória, no padrão SCORM;
- estudo de uma plataforma de aprendizagem em conformidade com o padrão SCORM;

---

<sup>4</sup> Implementar está sendo utilizado no sentido de desenvolver, aplicar e avaliar.

- implementação de uma experiência, em uma plataforma de aprendizagem, visando validar as regras de apresentação dos conceitos de Análise Combinatória, desenvolvidas através da análise do comportamento de navegação do estudante e do seu desempenho na sequência didática.

A experiência foi realizada com 7 alunos, do Curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Luterana do Brasil (ULBRA), matriculados na disciplina de Estágio em Matemática II, disciplina que desenvolve esse conteúdo. Nesta pesquisa os alunos foram identificados como Aluno1, Aluno2, Aluno3, Aluno4, Aluno5, Aluno6 e Aluno7.

O trabalho foi desenvolvido na sala de Tecnologias para a aprendizagem (sala 227, do prédio 014, do PPGECIM), com 7 notebooks, em uma *intranet*, na plataforma de aprendizagem ILIAS com suporte ao SCORM. Foram realizadas sessões de estudo com 8h/a presenciais e, em média, 8h/a não presenciais para o desenvolvimento da sequência didática, de acordo com o ritmo e o desempenho dos alunos que participaram da experiência.

Os dados foram coletados através dos seguintes instrumentos:

- ficha de observação, com observação direta do pesquisador, durante a implementação da experiência (Apêndice 1);
- análise do banco de dados da plataforma de aprendizagem utilizada (plataforma de aprendizagem ILIAS, <http://matematica.ulbra.br/ilias>);
- entrevista com os alunos participantes do experimento, sobre a sequência didática desenvolvida.

A análise dos dados foi realizada através das seguintes categorias:

- plataforma de aprendizagem (se todas as etapas da sequência foram apresentadas aos estudantes conforme definido nas regras do pacote SCORM).
- sequência didática com Análise Combinatória (verificar se as interatividades propostas, nos objetos de aprendizagem oferecidos na sequência, tiveram uma interface amigável e intuitiva, se os estudantes consideraram o material gráfico adequado e se atendeu a proposta didática da sequência);
- sequência de navegação dos estudantes (cenários gerados pelos estudantes durante o experimento);

A sequência didática foi desenvolvida no padrão SCORM, que define como adequado para uma sequência, a composição por pequenos módulos (granularidade) autônomos, ou seja, que contenham um conceito completo. A escolha, neste trabalho foi por uma sequência de apresentação em quatro unidades de estudo com uma avaliação cada, na forma de um teste



adaptativo computacional, permitindo ao aluno o acompanhamento da sua aprendizagem durante o desenvolvimento da mesma.

Na elaboração do material instrucional foram desenvolvidos objetos de aprendizagem, em conformidade com o padrão SCORM, sem dependência entre eles e com o desenvolvimento de toda a ideia do conceito estudado. Foram desenvolvidos os seguintes módulos: Princípio Fundamental da Contagem; Permutação Simples; Arranjo Simples; Combinação Simples.

Para o Princípio Fundamental da Contagem foram desenvolvidos três objetos de aprendizagem com o conteúdo, um de Conjuntos Numéricos e um com a operação de Fatorial. Nesse módulo optou-se por não apresentar um teste adaptativo, permitindo ao aluno continuar seus estudos sem se autoavaliar.

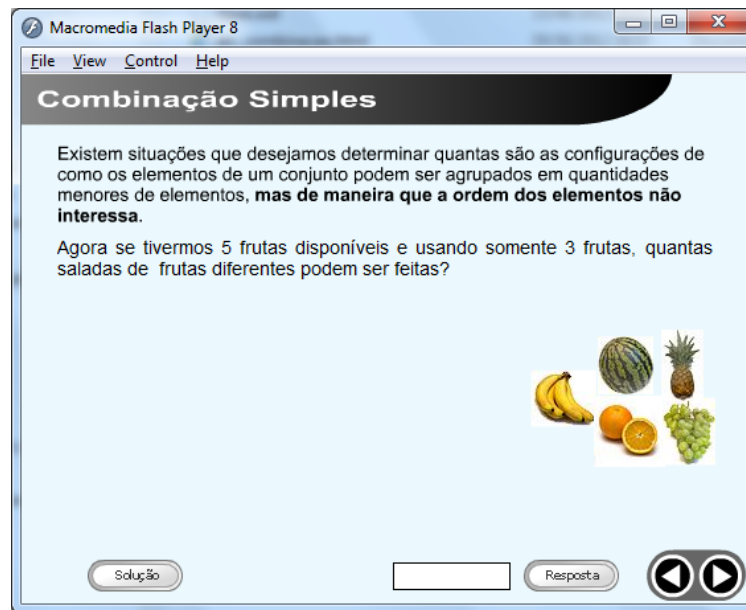
Para os conceitos de Permutação Simples, Arranjo Simples e Combinação Simples foram desenvolvidos três objetos de aprendizagem para cada conceito, apresentando, ao término de cada módulo de estudo, uma avaliação através de um teste adaptativo computacional.

Em todos os módulos apresentaram-se os objetos de aprendizagem, com a seguinte estrutura didática:

- material instrucional principal, composto por problemas geradores do cotidiano, fundamentados em Godino, Batanero e Pelayo (1996), atividades interativas, vídeos tutoriais com as respostas dos problemas, e orientação para resolução da atividade;
- material de apoio, composto por atividades que auxiliem na construção dos conceitos com objetos geométricos;
- material de apoio para os estudantes que apresentam dificuldades na compreensão dos conceitos;
- material de apoio da Rede Internacional Virtual de Educação (RIVED) com problemas geradores e atividades interativas.

Nessa pesquisa foram desenvolvidos, em *Flash*, dezessete objetos de aprendizagem, sendo cinco para o Princípio Fundamental da Contagem, três para a Permutação Simples; três para Arranjo Simples; três para Combinação Simples; e três Testes Adaptativos. Na Figura 1 apresenta-se um exemplo de um objeto de aprendizagem do módulo de Combinação Simples.

Figura 1 - Objeto de aprendizagem para Combinação Simples



A sequência didática, com os conteúdos de Análise Combinatória, foi desenvolvida com os seguintes recursos tecnológicos: Lousa interativa; Vídeo tutorial; Teste Adaptativo Computacional (iQuiz/iQuizcreate); Ferramenta de autoria *Reload*; Plataforma eletrônica de aprendizagem ILIAS; e objetos de aprendizagem da RIVED com os conceitos de Análise Combinatória.

O Teste Adaptativo Computacional foi construído atendendo os requisitos de seleção do item, segundo a Teoria de Resposta ao item, critério de parada definido pelo erro padrão e baixo desvio de estimativa da habilidade. Para atender as definições do padrão SCORM, o iQuiz tem seu banco de questões em XML<sup>5</sup> (arquivo texto com portabilidade). Foram elaborados três bancos de dados com questões para os conceitos de Permutação Simples, Arranjo Simples e Combinação Simples. Foram estipulados cinco níveis para a estimativa da habilidade dos estudantes. Para isso foram identificados cinco níveis de dificuldade, de 1 a 5, sendo 5 a maior dificuldade, conforme pesquisa por Homa (2011). Para os testes foi considerada a habilidade três como a habilidade inicial do respondente.

Toda a sequência didática eletrônica desenvolvida, foi implementada na Plataforma ILIAS. A escolha por esta plataforma seguiu os critérios de ser uma plataforma de uso livre e estar em conformidade com o padrão SCORM 2004.

---

<sup>5</sup> Extensible Markup Language (XML) é um conjunto de regras de codificação de documentos em formato de máquina. Isto é definido nas especificações do XML 1.0 desenvolvido pela W3C e várias outras especificações relacionadas, todas de padrões abertos.

## 2 REFERENCIAL TEÓRICO

Apresenta-se o referencial teórico com os seguintes temas: SCORM, Testes Adaptativos, Teoria de Resposta ao Item, Teste Adaptativo Computacional e Análise Combinatória.

### SCORM – SHARABLE CONTENT OBJECT REFERENCE MODEL

O SCORM<sup>6</sup> é o resultado da especificação e padronização baseada no trabalho de entidades normativas, podendo ser identificada como a união das melhores práticas e padrões existentes em *e-learning*<sup>7</sup> anteriores ao seu surgimento; padrões que continuam sendo aprimorados pelos seus criadores que colaboram com o *ADL Initiative*<sup>8</sup>. O SCORM 2004 4rd *Edition* é a edição mais atual e sua aderência por parte dos desenvolvedores de sistemas está aumentando em relação à versão anterior, de 2002, que já está bem difundida.

As entidades fundamentais que especificaram e contribuem continuamente para o SCORM são a *Alliance of Remote Instructional Authoring & Distribution Networks for Europe (ARIADNE)* (<http://www.ariadne-eu.org/>), *Aviation Industry CBT Committee (AICC)* (<http://www.aicc.org/>), *Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE)*, *Learning Technology Standards Committee (LTSC)* (<http://ieeeltsc.org/>) e o *IMS Global Learning Consortium, Inc.* (<http://www.imsglobal.org/>).

O SCORM é um documento técnico que define as regras de apresentação objetos de aprendizagem permitindo a elaboração de sequências didáticas diferenciadas e de acordo com o desempenho do aluno durante a apresentação da sequência.

O SCORM não foi desenvolvido diretamente para os *designers* de conteúdos instrucionais, pois não define como criar lógicas instrucionais ou melhores práticas de ensino. As definições se restringem aos diversos pontos de análise e escolhas possíveis para determinar o comportamento da plataforma relativo à sequência de apresentação dos conteúdos ao aluno. A adoção de um padrão para as regras de apresentação de conteúdos permite que os mesmos possam ser reutilizados facilitando a criação de sequências didáticas, diminuindo o trabalho intelectual e aumentando a produtividade.

---

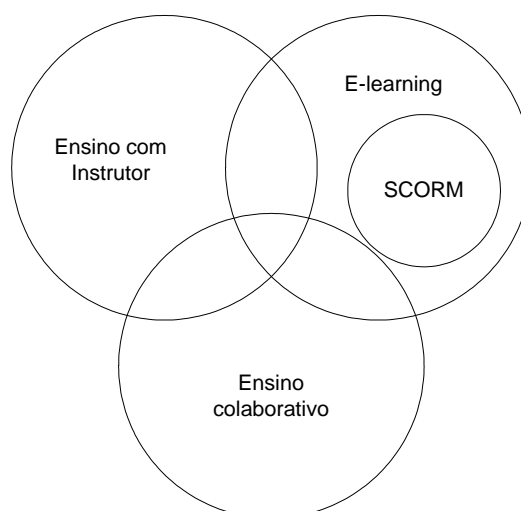
<sup>6</sup> Pelo SCORM ser um padrão de caráter técnico, todo o referencial do item 2.1 é baseado nos três manuais *Content Aggregation Model*, *Run-Time Environment* e *Sequencing and Navigation*.

<sup>7</sup> *E-learning, Eletronic Learning*: Aprendizagem eletrônica, que neste trabalho é considerada toda atividade realizada através de um recurso computacional.

<sup>8</sup> *ADL Initiative - Advanced Distributed Learning Initiative*: Departamento criado pelo Departamento de Defesa dos Estados Unidos (DoD) e o Escritório de Política de Ciência e Tecnologia da Casa Branca (OSTP) para a padronização do *e-learning*.

Dentro das atividades de ensino aprendizagem o *e-learning* é uma parte complementar, a Figura 2 apresenta, segundo Rehak (2004), o SCORM como componente do contexto de *e-learning*.

Figura 2 - SCORM no contexto de e-learning.



Fonte: Adaptado de Rehak (2004).

Os objetivos básicos para o desenvolvimento do modelo de referência foram a portabilidade do conteúdo, a granularidade e a interoperabilidade que são detalhados a seguir.

### 2.1.1 Portabilidade do Conteúdo

Uma das premissas básicas, a portabilidade, estabelece que os conteúdos devem ser criados independente de qualquer plataforma, para tanto é especificado a utilização do *HTML*<sup>9</sup> como referência ao conteúdo dentro do documento SCORM (*imsmanifest.xml*) com as definições do *e-learning*.

A característica de portabilidade permite que os conteúdos criados possam ser importados por qualquer plataforma, em conformidade com o padrão SCORM, e que terão sempre o mesmo comportamento na sequência de apresentação dos conteúdos, garantindo a ideia do objetivo instrucional proposto pelo criador.

Além da independência da plataforma é importante que, no desenvolvimento dos

---

<sup>9</sup>HTML (acrônimo para a expressão inglesa *HyperText Markup Language*, que significa *Linguagem de Marcação de Hipertexto*) é uma linguagem de marcação utilizada para produzir páginas na Web. A tecnologia é fruto da união dos padrões HyTime e SGML. Documentos HTML podem ser interpretados por navegadores WEB.

objetos de aprendizagem, não sejam inseridas referências a *links* externos pois não há garantia de que toda e qualquer instituição possua acesso aos *links*, uma vez que as estações dos alunos podem ter limitações não permitindo o acesso às informações referenciadas, e conseqüentemente afetando a lógica de aprendizagem proposta.

### 2.1.2 Granularidade

A característica de granularidade faz com que um conteúdo apresente a ideia de ensino toda dentro de si, e que possa ser utilizada independente de um contexto, permitindo a composição de uma ideia maior, através do agrupamento de diversos destes. A vantagem dessas composições é a economia intelectual na criação de ideias instrucionais extensas. A princípio há uma intensa demanda de trabalho intelectual no desenvolvimento dos conteúdos, mas após a criação e disponibilidade em uma biblioteca, a reutilização permite uma economia no tempo na criação de ideias maiores.

A ideia de conhecimento atômico, com agrupamentos moleculares é uma analogia bem cabível quando se fala de granularidade. As construções de Lego<sup>®</sup> também são análogas ao conceito de granularidade (HODGINS, 2000), pequenas ideias, como os blocos Lego<sup>®</sup>, são dispostos em construções, de acordo com as vontades e objetivos do construtor, compondo uma ideia maior, podendo se tornarem paredes, recintos ou castelos.

O menor item definido pelo SCORM é o SCO, que deve seguir as regras de inicialização e término do mesmo para que o plataforma eletrônica de aprendizagem ou LMS (*Learning Management System*<sup>10</sup>) possa saber que o aluno iniciou e terminou determinado conteúdo podendo então fazer a entrega de novo conteúdo de acordo com a lógica instrucional determinada pelo instrutor.

### 2.1.3 Interoperabilidade

A interoperabilidade está ligada à característica de granularidade e portabilidade, ou seja, o conteúdo pode ser importado por qualquer LMS em conformidade com o padrão SCORM, garantindo assim a interoperabilidade entre o mesmo e a plataforma utilizada.

São consideradas como características da interoperabilidade a:

- reutilização – flexibilidade na incorporação de componentes de instrução em múltiplas

---

<sup>10</sup> LMS – são sistemas que gerenciam a apresentação dos objetos de aprendizagem aos alunos de acordo com as regras estabelecidas pelo designer instrucional, também são denominadas como plataformas eletrônicas de aprendizagem.

aplicações e contextos, ou seja, consiste em possibilitar a reutilização do curso ou objeto de aprendizagem, na mesma ou em outra composição instrucional;

- capacidade de gestão – possibilidade da ferramenta instrucional em localizar a informação apropriada quer sobre o conteúdo, quer sobre o estudante;
- acessibilidade – possibilidade do estudante acessar o conteúdo adequado, no nível apropriado e sempre da mesma forma. Essa característica definiu o navegador Web como ferramenta de entrega dos conteúdos;
- durabilidade – capacidade de conservação frente às evoluções tecnológicas sem que seja necessário redesenhar, reconfigurar e ou reprogramar, protegendo o investimento intelectual.

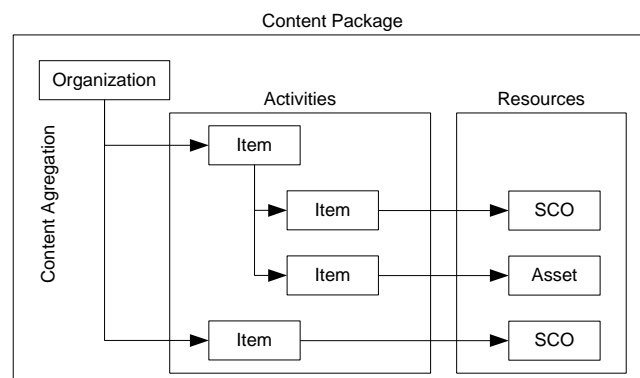
#### 2.1.4 Pacote de ensino baseado no SCORM

Uma ideia instrucional, baseada no padrão SCORM, segue a dinâmica de agrupamento de conteúdos regidos por regras de apresentação segundo o objetivo instrucional planejado pelo instrutor e criador do pacote.

O pacote de conteúdos é definido em um documento técnico em formato *XML* denominado *imsmanifest.xml*. Tal documento tem um formato bem específico, contendo toda a descrição e, dentro de um contexto de ensino aprendizagem, a lógica da sequência de apresentação desejada, funcionando também como um inventário dos conteúdos componentes.

A Figura 3 apresenta, em linhas gerais, as relações entre as denominações internas ao documento.

Figura 3 – Relacionamento entre as entidades componentes do SCORM



Fonte: Adaptado do manual SCORM RUN-TIME ENVIROMENT

A estrutura do pacote SCORM é uma árvore tendo a *Organization* como nó raiz e as *Activities* como nós filhos, que por sua vez tem *Itens* como seus filhos. *Itens* podem ter outros *itens* como filhos, mas somente os *itens* folha tem associado um *Resource*, que é o objeto de aprendizagem podendo ser um SCO ou um Asset que faz referência a um conteúdo HTML.

Um SCO é um *Asset* com interatividade, ou seja, com as regras definidas de inicialização e término, sendo considerada pelo SCORM como a menor unidade. Um *Asset puro* é usado quando é necessária a apresentação de um conteúdo que o LMS não precisa saber se o mesmo foi entregue ao aluno, assim como não interfere no poder de decisão de entrega do próximo conteúdo, geralmente é usado na apresentação de imagens, mapas, diagramas, informativos ou vídeos como um conteúdo não rastreável.

As *Activities* ou atividades é o que o estudante faz durante o progresso dentro da unidade de instrução. O SCORM não define uma nomenclatura, podendo ser analogamente associado a um capítulo, módulo e etc. Uma atividade pode ser composta de outras atividades, sendo assim denominada de Cluster. Somente as atividades folhas têm, pelo menos, um recurso (*resource*) associado (SCO).

*Organization* é a entidade lógica abstrata que contém a organização das atividades e, define a intenção de uso através das unidades de instrução, dispostas em uma estrutura de árvore ou hierarquia, com os relacionamentos e a intenção de sequência das atividades.

O LMS tem que se comportar conforme a intenção do instrutor, definidas pelas regras de sequenciamento, e fazer a entrega dos conteúdos associados às atividades no devido tempo.

### **2.1.5 Regras de apresentação de conteúdos**

As regras de decisão em que o LMS se baseia para a entrega de um conteúdo são definidas no documento SCORM, o *imsmanifest.xml*, pela chave *Sequencing* e suas subchaves *Control Mode*, *Objectives*, *Rollup Rules* e *Sequencing Rules* de cada atividade.

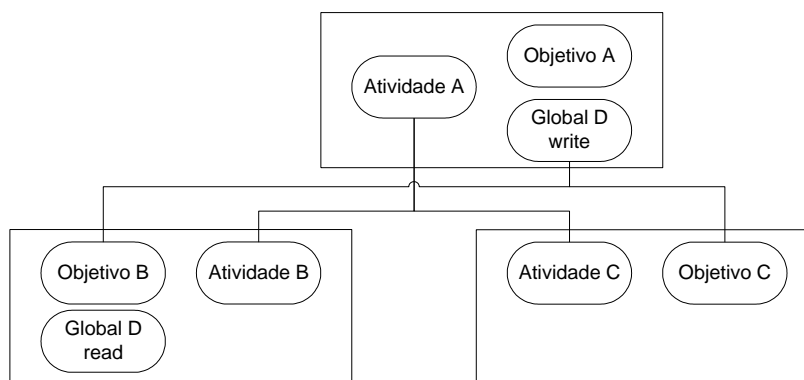
Na chave *Control Mode* é definido o comportamento do LMS, ou seja, se o LMS fará um controle inteligente do fluxo de apresentação dos conteúdos segundo regras definidas, ou se é permitida a escolha do conteúdo por parte do aluno.

Independente do modo de comportamento do LMS, também são definidas as permissões de apresentação de conteúdos anteriores, o uso das informações de progresso e objetivo para a composição de regras de sequência de apresentação, e a permissão de término do curso durante a execução da atividade corrente.

A chave *Objectives* faz a declaração de quais objetivos são associados à atividade corrente, dessa maneira há uma árvore de objetivos associada à árvore de atividades, mas distinta em seus relacionamentos, ou seja, cada atividade tem um objetivo primário local e, se necessário, vários globais compartilhados com outras atividades.

A Figura 4 mostra uma árvore de atividades e uma árvore de objetivos sobreposta. As informações são as usadas para validação das regras de sequência, nesse caso o *status* de A será atualizado (*write*) em seu objetivo primário A e global D, com isso as regras de sequência de B podem ler (*read*) as informações de *status* (*satisfied*, *objectiveStatusKnown*) e de valores (*objectiveMeasureKnown*, *objectiveMeasureGreaterThan*, *objectiveMeasureLessThan*) para uma tomada de decisão e ação. A atividade C usa somente as informações do objetivo C, ou seja, suas próprias informações.

Figura 4 - Árvore de atividades e objetivos associados.



Fonte: Adaptado do manual SCORM SEQUENCING AND NAVIGATION.

Uma atividade sempre poderá ler e escrever o *status* de seu objetivo primário, caso o mesmo não esteja associado a um global e, quando associado a um objetivo global, é necessário que se faça a declaração da relação entre os objetivos, pois um global pode ter seu *status* lido por várias atividades, mas somente uma única atividade terá direitos de alterar o seu *status*.

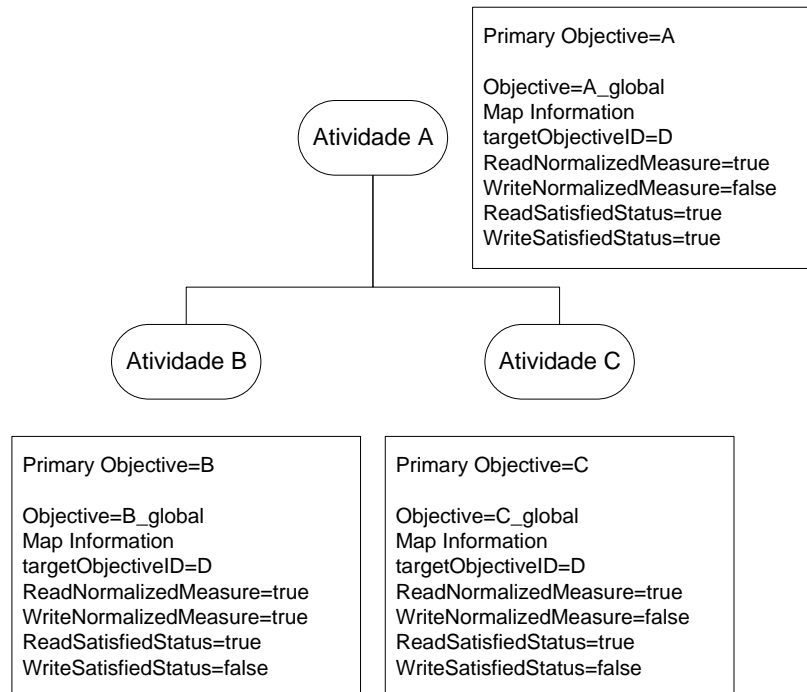
A condição de satisfeito pode ser associada às informações de completo, incompleto ou ser associado a um valor, neste caso é necessário a declaração do valor mínimo para que a atividade seja considerada satisfeita. Geralmente as atividades com parâmetros de valor mínimo estão relacionadas ao acompanhamento da aprendizagem dos alunos.

A Figura 5 apresenta uma árvore de atividades e os objetivos associados semelhante a da Figura 4, mas com os valores da chave *objectives*. A árvore define que a atividade A pode ler e escrever o *status*, mas consegue somente ler o valor de *measure* do global D, a



atividade B pode ler e escrever o valor de *measure*, mas somente ler o *status* de D, e a atividade C somente pode ler o *status* e o valor de *measure* de D.

Figura 5 - Árvore de atividades com as declarações dos objetivos locais e globais



Fonte: Adaptado do manual SCORM SEQUENCING AND NAVIGATION.

Desse modo pode ser implementada uma regra de apresentação para a atividade C, baseada na informação de B que atualiza o objetivo global D, por exemplo, se a atividade B for uma avaliação que atualiza um valor associado ao desempenho do aluno no objetivo global D, a atividade C poderá ler esse valor e tomar a decisão de ser apresentada ou não, de acordo com a regra estabelecida pelo desenvolvedor da sequência. O uso dos objetivos globais é útil para na troca de informações entre as atividades para a tomada de decisões.

As atividades *clusters*, por não terem recursos associados para atualizar as informações de *status* e progresso, utilizam-se de regras para valorar as informações provenientes dos objetivos filhos associados à atividade *cluster*.

Como a lógica de apresentação de conteúdos é descrita em forma de árvore com nós pais e filhos, onde somente os nós folhas tem um recurso associado, existe um mecanismo de atualização do *status* e do progresso das atividades, denominado como *rollup rules*, para que as informações dos nós filhos valorem o *status* e o progresso dos nós pais.

As regras de *rollup* de uma atividade definem se os *status* de satisfeito e completo farão parte do *status* da atividade pai, assim como o peso dessa informação, podendo uma

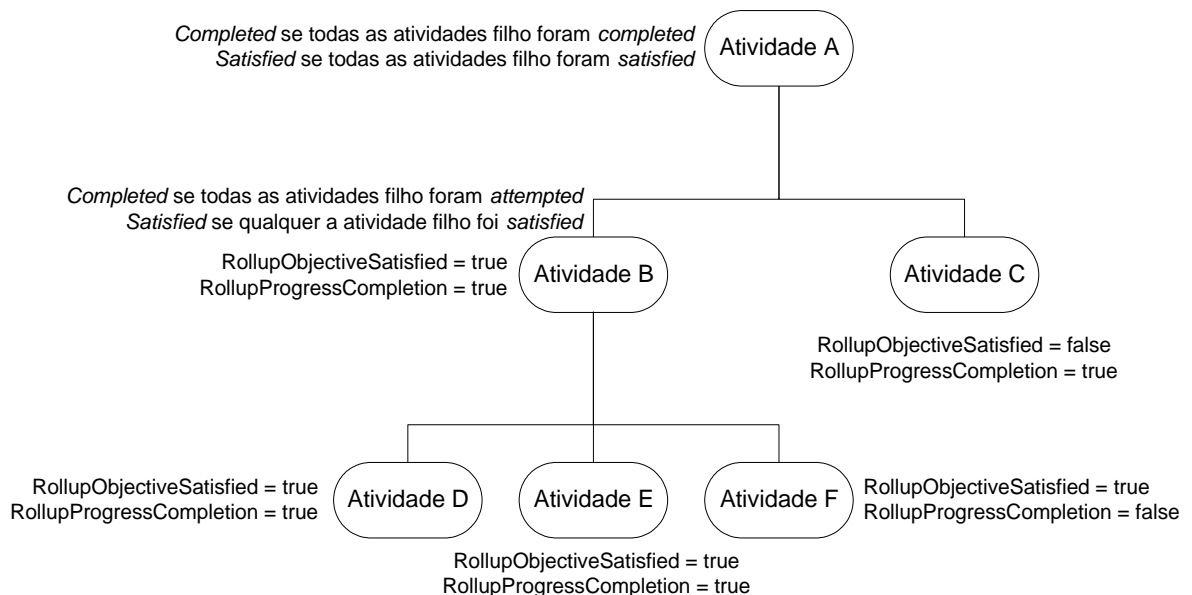
atividade pai ter atividades filhos com pesos distintos para a composição do seu percentual de progresso.

As regras de *rollup* também definem como essa composição pode ser feita, ou seja, o *rollup* pode ocorrer quando todas, ou uma, ou um número mínimo, ou um determinado percentual de atividades filhos tiverem seus status definidos.

A definição do *status* das atividades ocorre de acordo com as *Rollup Conditions* que são baseadas nas informações dos objetivos locais, como: satisfeito, completo, *status* conhecido, progresso da atividades, valor mínimo, atividade tentada, limite de tentativas excedido. Sob tais condições o *status* da atividade pode ser valorado como satisfeito ou não satisfeito, completo ou incompleto.

A Figura 6 mostra uma árvore de atividades com um cenário de *rollup*, com regras de *status* e progresso para as atividades *cluster* e regras de bloqueio de *rollup* de atividades filhos. O *status* de completo para a atividade B depende da informação de completo de D e E, mas para B ficar satisfeito, é necessário que qualquer uma das atividades, ou D, ou E, ou F, esteja satisfeita; para a atividade A ter o *status* de completo é preciso que B e C estejam completos mas, para A satisfeito basta que somente B esteja satisfeito, pois C não contribui para o *status* de satisfeito de A.

Figura 6 - Árvore com regras de rollup.



Fonte: Adaptado do manual SCORM SEQUENCING AND NAVIGATION.

A regra de *limitConditions* permite a imposição de limites na execução das atividades. A estrutura da chave tem as seguintes sub-chaves: *AttemptLimit* = inteiro positivo: indica o número de tentativas permitidas para a entrega das atividades. Se não definido, não há limite de tentativas; *AttemptAbsoluteDurationLimit* = duração em segundos: indica o valor máximo em segundos que uma atividade pode durar.

Em uma atividade configurada para que o LMS controle o fluxo de apresentação de conteúdos, é necessário que sejam definidas as *sequencing rules*. Existem três tipos de regras de sequência, as que atuam antes da apresentação da atividade, *preCondition rules*, as que finalizam a atividade, *exitCondition rules*, e as que são validadas após o término da atividade, *posCondition rules*.

As *preCondition rules*, *exitCondition rules* e *posCondition rules* usam o mesmo mecanismo de condições que as *rule conditions*, analisando os *status* e os objetivos da atividade associada, mas se diferenciam pelas ações a serem tomadas. As *preCondition rules* tem como ações a possibilidade de pular a atividade corrente, desabilitar a apresentação e *rollup*, ocultar a atividade do menu de seleção e parar a apresentação automática.

As *exitCondition rules* possuem uma ação única de finalizar a atividade corrente após a requisição de saída vinda de uma atividade filho.

As *posCondition rules* por serem validadas após o término das atividade, possuem as ações específicas de finalizar a atividade pai ou todas as atividades terminando o curso, repetir a atividade corrente, repetir todo o curso, encaminhar uma solicitação de navegação para a próxima atividade, ou para a anterior.

Neste trabalho foi desenvolvida uma sequência de apresentação onde o aluno estuda os conceitos da Análise Combinatória nas atividades principais e, se achar necessário, poderá acessar materiais de apoio complementares, antes de fazer a avaliação correspondente ao módulo estudado.

Este modelo de sequência permite uma autoavaliação por parte do aluno em relação à competência a ser desenvolvida e, se o mesmo julgar necessário, permite o estudo de mais de uma atividade para a construção do conceito, acessando os materiais de apoio. Dessa maneira cada aluno tem uma sequência de apresentação diferenciada, denominada como multicaminhos (GROENWALD; ZOCH; HOMA, 2008).

## TESTES ADAPTATIVOS

As avaliações e testes são recursos didáticos usados para atender as necessidades de acompanhamento da aprendizagem. Como os fins educativos consistem, essencialmente, em determinar as mudanças qualitativas por que passam os aprendizes, em termos de aquisição de aprendizagens, podemos garantir, portanto, que a avaliação da aprendizagem é o processo de determinar em que medida ou grau se conseguem tais mudanças, possibilitando, assim, um juízo de valor acerca da qualidade dessas supostas mudanças (ANDRIOLA, 2008).

No meio digital são denominados Testes Computacionais (*Computer Tests* CT / TC) as avaliações nas quais um sistema computacional apresenta uma sequência de questões e analisa as respostas automaticamente, fornecendo um *status* de aprovação ou um *score* ao final do mesmo. Atualmente, diversas plataformas eletrônicas de aprendizagem têm inseridos módulos de testes em sua configuração padrão, como o *Moodle*, *ILIAS* e outros.

Segundo Baker (2001), Costa (2009), Santos, Ribeiro, Guedes e Martins (2002) os TC apresentam vantagens como:

- possibilidade de acompanhamento do tempo dispendido pelo respondente, tanto para o teste em um todo, como para o desenvolvimento do raciocínio para solucionar cada questão;
- flexibilidade de aplicação dos testes, permitindo que cada respondente seja submetido à avaliação de acordo com seu desenvolvimento dentro de uma sequência didática, não sendo necessário esperar pelos demais para uma aplicação sincronizada dos testes;
- agilidade na correção, com a possibilidade de obtenção do *score* imediatamente após o término do mesmo;
- aplicação em larga escala.

As desvantagens, segundo Costa (2009), no uso dos TC são os custos de implementação e manutenção, pois para garantir vantagens como a apresentação assíncrona de avaliações, o banco de questões requer um grande número de itens<sup>11</sup>, evitando que se obtenha vantagem com a troca de informações com outro respondente que já tenha feito o teste. Há também a necessidade de atualizações de questões contextualizadas à realidade social vigente, e inclusões para compensar as retiradas de itens com uma maior frequência de apresentação que as torna conhecidas ao grupo de respondentes.

Em um teste de papel e caneta, as questões são apresentadas simultaneamente, ou

---

<sup>11</sup> Neste trabalho denomina-se como item a questão de um teste.

seja, todas as questões estão na folha ou caderno e são entregues ao mesmo tempo, ficando ao critério do respondente a escolha da sequência dos itens a serem respondidos. Nos TC as questões são apresentadas uma a uma em uma sequência determinada pelo sistema, sendo necessário que seja respondido o item apresentado para que o sistema possa apresentar o próximo, não sendo permitido adiantar ou retroceder na sequência de apresentação.

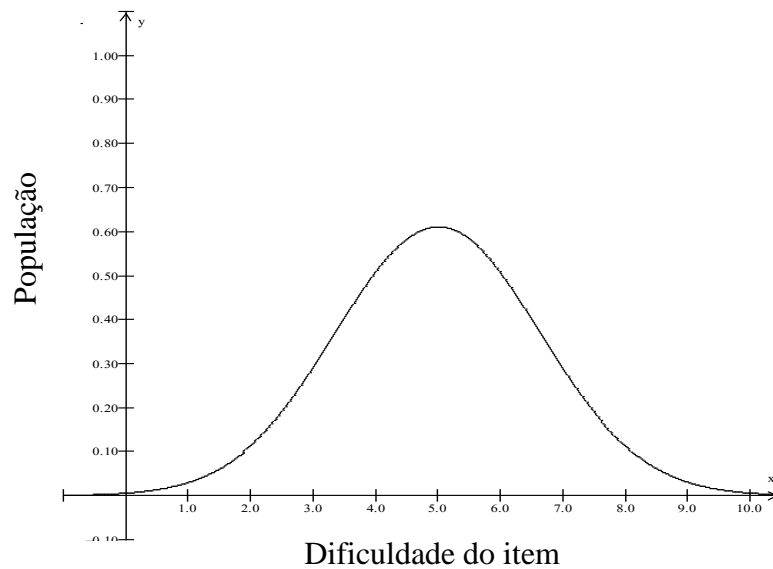
Geralmente os testes de lápis e papel assim como alguns computacionais, seguem a Teoria Clássica do Teste (TCT), na qual o item é a unidade de medida para a estimativa das habilidades do respondente, ou seja, o *score* é dado pela quantidade de itens respondidos corretamente, independente do grau de dificuldade do mesmo.

É importante salientar que a apresentação dos itens em um TC convencional pode ter sua sequência de apresentação arbitrada pelo *designer* instrucional que planeja a atividade, ou uma sequência de apresentação aleatória, ou uma apresentação vinculada às regras específicas estabelecidas pelo sistema.

Plataformas de aprendizagem eletrônica ou LMS, com os TC integrados ao seu sistema, permitem o uso dos resultados dos testes para a composição de regras de decisão para a apresentação das atividades de aprendizagem que o sistema fornecerá para cada aluno e pode, de acordo com o grau de complexidade, conferir certo grau de inteligência artificial ao sistema.

A variedade de itens, com graus distintos de dificuldade em um teste de lápis e papel, segundo o modelo da TCT, segue uma distribuição normal como apresentado no gráfico da Figura 7, acompanhando a distribuição por habilidades ou competências de uma população de estudantes em situações convencionais de aprendizagem, ou seja, as populações com competências de grau baixo e alto são menores que as populações de grau médio (BAKER, 2001). Segundo Costa (2009), a população com habilidades medianas são melhor avaliadas, pois há uma quantidade maior de itens compatíveis com suas características, enquanto as populações nos extremos da escala têm suas habilidades estimadas com uma menor precisão.

Figura 7 - Distribuição da população de acordo com suas habilidades de uma população.



Fonte: Adaptado de Baker (2001).

Uma distribuição uniforme de itens, com diferentes graus de dificuldade, elevaria a quantidade de questões a serem submetidas a um grupo, podendo surgir variáveis externas, como o cansaço ou frustração, influenciando nos resultados. Como a preocupação na estimativa das habilidades e competências se concentra na parte central da escala, dado que a população dos extremos é pequena, a quantidade de itens, em relação ao grau de dificuldade, segue uma distribuição normal, procedimento esse adotado para minimizar o número de questões a que o grupo de respondentes é submetido (BAKER, 2001).

Considerando a resposta a um item como sendo dicotômica, sendo considerada certa ou errada, para a mensuração de uma habilidade ou competência torna-se necessário que os itens sejam considerados como unidades de medida única e que respeitem uma mesma referência. Tal unidade de medida é incompatível, considerando que os itens de avaliação têm dificuldades de resolução diferenciadas (STEVENS apud CHACHAMOVICH 2007).

Segundo Baker (2001), as habilidades, competências e inteligências são consideradas pela Psicologia como variáveis latentes, não visíveis, ou seja, são abstratas, portanto não são passíveis de uma medição direta, como peso e altura que são conceitos de dimensões físicas.

Nesse sentido, os testes que se fundamentam em um *score* bruto, nos quais os resultados dependem do conjunto de itens que compõem o instrumento de medida, ou seja, as análises e interpretações estão associadas à prova como um todo, característica principal da TCT, torna inviável a comparação entre indivíduos que não foram submetidos aos mesmos

testes (ANDRADE, TAVARES e VALLE, 2000), não sendo a melhor alternativa para identificar habilidades e competências. Uma estimativa mais eficiente pode ser conseguida quando se apresentam questões compatíveis com os respondentes. Dessa forma, o modelo probabilístico da Teoria de Resposta ao Item (TRI) apresenta-se como uma alternativa mais eficaz para a identificação das competências no campo que se deseja avaliar.

Testes em lápis e papel baseados na TRI demandam um trabalho estatístico, cruzando os resultados dos testes e a população submetida ao mesmo, para a identificação dos itens pertinentes a cada indivíduo, estabelecendo a relação entre as escalas de dificuldade do item e a de habilidades dos respondentes, como mostram os trabalhos de Marques (2008) e Chachamovich (2007).

O desenvolvimento de TC capazes de identificar qualitativamente as habilidades e competências, fundamentado na TRI, levou aos denominados Testes Adaptativos Computacionais (TAC). A característica de adaptabilidade é a capacidade de apresentação dos itens de acordo com as competências do respondente, identificadas interativamente durante o teste, fazendo com que se apresentem o mínimo de itens possíveis. A otimização na identificação das habilidades de um indivíduo, requer que não seja somente apresentada uma quantidade menor de itens, mas também a apresentação de itens que forneçam informações relevantes à avaliação.

Um Teste Adaptativo Computacional, além de todas as características de um TC, deve ter capacidade de utilizar itens com um alto valor agregado de informação, isto é, apresentar questões com um nível de dificuldade compatível com as habilidades do respondente, pois questões com um nível de dificuldade inferior, assim como questões com um nível superior às habilidades do respondente têm, respectivamente, um alta e uma baixa probabilidade de acerto agregando pouca informação (BAKER, 2001; COSTA, 2009).

A seguir, apresenta-se uma introdução à TRI e uma explanação dos conceitos que a embasam, seguido dos conceitos de um TAC.

#### TEORIA DE RESPOSTA AO ITEM

Pela impossibilidade de medição direta, desenvolveram-se modernas Técnicas de Psicometria que levaram às definições de mensuração, escala, ordenação e classificação das medidas de variáveis latentes (TENANT, 2004; PALLANT E TENANT, 2007; CICHETTI et al, 2006 apud CHACHAMOVICH 2007).

A Teoria de Rasch tem grande destaque na Psicometria, pois proporciona a derivação

de medidas quantitativas, intervalares e aditivas ao colocar itens e respondentes em uma mesma escala (HAMBLETON E SWAMINATHAN, 1984).

Um teste segundo a TRI é composto de um banco de questões com diferentes níveis de dificuldades, ou seja, é composto de um conjunto de itens que sejam capazes de identificar os diferentes graus de habilidades desenvolvidas durante a aprendizagem e que não favoreçam determinados grupos etnosociais, essas características dos itens são denominadas como “discriminação do item” e “diferencial do item” respectivamente.

A seguir apresentam-se, com detalhes, as definições dos conceitos de “discriminação do item” e “diferencial do item”.

### **2.1.6 Discriminação do item**

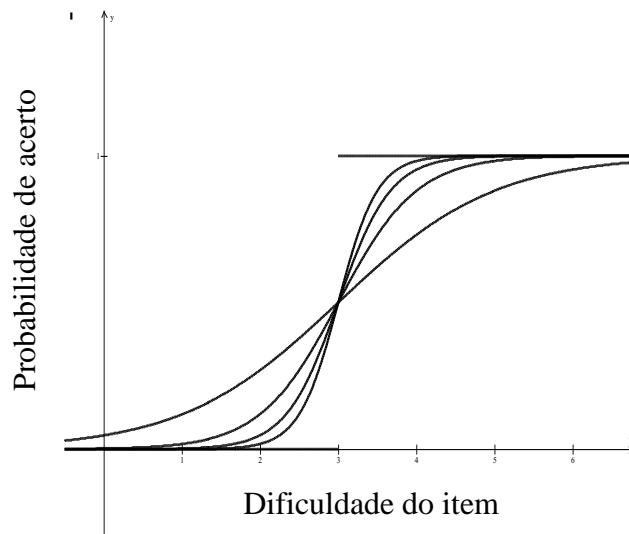
O uso de um item para avaliação pressupõe que a dificuldade é o indexador para escala de habilidades. Considerando que, um respondente com uma habilidade inferior à dificuldade do item terá uma probabilidade pequena de acerto e um com habilidade superior, uma alta probabilidade, um respondente com habilidade correspondente à dificuldade do item tem uma probabilidade de acerto próximo de 0,5 (BAKER, 2001).

Considerando a relação entre as escalas de habilidades e dificuldades, o nível de dificuldade de um determinado item estará localizado em algum ponto correspondente na escala de habilidades, e a propriedade de um item em identificar um nível de habilidade com probabilidade de acerto alto, de um nível imediatamente anterior com uma baixa probabilidade, é denominado discriminação do item.

Um item ideal teria uma probabilidade de acerto igual a zero para um respondente com uma habilidade inferior, e probabilidade de acerto 1.0 para uma igual ou superior à dificuldade do item. O gráfico, da Figura 8, apresenta quatro curvas características do item (CCI) com diferentes graus de discriminação, ou declividades de 0,5; 0,6; 0,7 e a curva ideal, para uma habilidade de 3 em uma escala de 6 níveis. Quanto maior a declividade da curva de discriminação, melhor a discriminação do item para uma dada habilidade e maior a precisão da estimativa da mesma.



Figura 8 - Gráfico para itens com dificuldade de nível 3 e curvas de discriminação distintas



Fonte: Adaptado de Baker (2001).

A discriminação do item pode ser entendida como parâmetro proporcional à derivada da tangente da curva no ponto de inflexão, onde a probabilidade é de 0,5 (ANDRADE, TAVARES e VALLE, 2000). Para itens de dificuldades diferentes, as curvas de discriminação estão transladadas de forma que o ponto de inflexão da curva corresponda à coordenada dada pela dificuldade do item, cuja probabilidade é de 0,5.

Para estimar a curva de discriminação do item são utilizadas técnicas estatísticas, cruzando as respostas dos itens com grupos de respondentes. Em análises de bancos de questões pequenos, é possível o uso da técnica da diagonalização, na qual uma terceira variável é aferida indiretamente a partir da concatenação de duas variáveis conhecidas, como proposto pela Teoria da Mensuração Conjunta de Luce e Turckey (CHACHAMOVICH, 2007). Dessa maneira é possível que sejam relacionadas as questões por nível de dificuldade e estimativas de habilidades, estabelecendo uma ordenação entre as dificuldades do banco de questões e as habilidades do grupo de respondentes. Também é possível identificar os itens sem capacidade de discriminação. A Tabela 1 apresenta os dados de um teste fictício.

Tabela 1 - Resposta de um teste fictício

| Item Respondente | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| A                | - | x | x | - | x | x | - | - | x |
| B                | - | x | x | - | x | x | - | x | x |
| C                | - | - | x | - | - | x | - | x | - |
| D                | x | x | x | x | x | x | x | - | x |
| E                | - | - | x | - | - | x | - | - | x |
| F                | x | x | x | x | x | x | x | - | x |
| G                | - | x | x | - | x | x | x | x | x |

Fonte: Adaptado de Costa (2009).

Ordenando-se as colunas das questões, com a maior quantidade de acertos, obtêm-se a escala de dificuldade do item e, ao ordenarem-se as linhas, com a maior quantidade de acertos, se determina a escala de habilidades dos respondentes. A Tabela 2 apresenta a aplicação do método da diagonalização do teste.

Tabela 2 - Técnica da Diagonalização

| Item Respondente | 3 | 6 | 9 | 2 | 5 | 7 | 8 | 1 | 4 |
|------------------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| C                | x | x | - | - | - | - | x | - | - |
| E                | x | x | x | - | - | - | - | - | - |
| A                | x | x | x | x | x | - | - | - | - |
| B                | x | x | x | x | x | - | x | - | - |
| G                | x | x | x | x | x | x | x | - | - |
| F                | x | x | x | x | x | x | - | x | x |
| D                | x | x | x | x | x | x | - | x | x |

Fonte: Adaptado de Costa (2009).

Identifica-se que todos os respondentes acertaram os itens três e seis, logo os mesmos não discriminam nenhuma diferença de habilidades, pelo menos entre o grupo de respondentes do exemplo. Nesses casos deve-se levar em consideração que se pode estar trabalhando com respondentes no extremo superior da escala, devendo ser realizado um estudo desses casos, antes do descarte dos itens.

O item 8 não pode ser devidamente categorizado e deve ser descartado, pois não apresenta uma coerência em relação à escala de habilidades estimadas, ou seja, não possui um ponto de discriminação, porque foi respondido de forma oscilante, por mais de uma categoria de habilidades.

A característica de discriminação do item tem importância, em alguns dos modelos probabilísticos da TRI, como um coeficiente multiplicador da diferença entre dificuldade do item e competência do respondente mas, mesmo mal dimensionado, não leva a uma estimação incorreta das habilidades e competências, podendo incorrer somente em apresentações de uma quantidade desnecessárias de itens. Diferente da outra característica, o diferencial do item, que pode favorecer, ou não, o acerto por parte do respondente e levar, respectivamente, a uma superestimação, ou subestimação, das competências do respondente.

### **2.1.7 Diferencial do item**

Uma avaliação não deve ser passível de ser influenciada por grupos específicos de respondentes, ou seja, a probabilidade de acerto dos itens deve ser a mesma, independente de sexo, grupo socioeconômico, ou qualquer outra característica que diferencie os respondentes (SOARES e GAMERMAN, GONÇALVES, 2007), além da habilidade no campo de conhecimento que se deseja avaliar.

Um item de avaliação deve, essencialmente, ser unidimensional, ou seja, avaliar uma única variável latente, para que a probabilidade não seja influenciada por uma variável latente que não seja a que se deseja estimar (BAKER, 2001).

São necessários cuidados para que termos técnicos ou comuns para determinados grupos não sejam empregados. Por exemplo, um exercício cujo enunciado seja: “sabendo que o pistão de um motor a combustão tem um excursionamento máximo de 5 cm, e que o mesmo está 1cm abaixo da altura máxima, qual é o ângulo do virabrequim? Considere 0° quando o pistão estiver na altura máxima”. O que deveria ser um item para avaliação do conceito de Trigonometria, torna-se um de Mecânica Automotiva, pois utiliza termos técnicos que somente profissionais e conhecedores do tema compreendem os termos envolvidos.

Para identificar essa propriedade, análises estatísticas ou métodos, como a técnica de diagonalização, devem ser realizadas com base nas características dos respondentes. Nestes casos a curva de discriminação do item sofre uma translação quando analisado para um determinado grupo, com uma característica de distinção dos demais.

Além do uso de termos desconhecidos, a motivação e o interesse também devem ser considerados. Por exemplo, enunciados com alusão a assuntos exclusivamente femininos podem levar respondentes do sexo masculino a responderem sem interesse ou atenção, diminuindo a probabilidade de acerto por falta de engajamento.

A inconsistência na estimativa da habilidade, para um determinado item, é um dos

indícios de um item com diferencial, logo, não deve ser utilizada, devendo ser excluída do banco de questões. Como apresentado, na Tabela 2, o item 8 gerou uma informação contraditória, porque os respondentes mais habilidosos erraram e os respondentes menos habilidosos acertaram. Verifica-se, então, que há necessidade de cuidados especiais com a escolha dos itens que compõem um banco de questões de um teste adaptativo, pois os mesmos podem gerar distorções na avaliação.

Dessa maneira o banco de questões deve, preferencialmente, ser composto de itens com altos índices de discriminação e baixo diferencial do item.

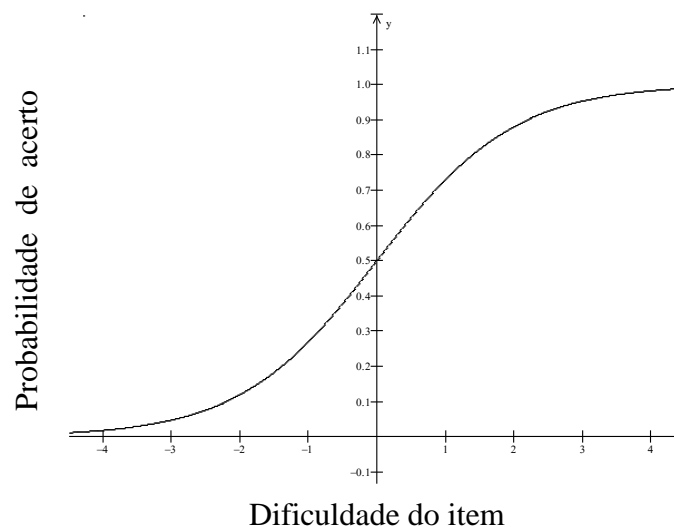
### 2.1.8 Modelos probabilísticos da TRI

Na Teoria de Rasch, apresentada por Baker (2001), a probabilidade de acerto  $P$  de um determinado item, com uma dificuldade  $d$ , por um respondente, com uma competência ou habilidade  $\theta$ , é dada por:  $P = \frac{1}{1+e^{-(\theta-d)}}$ .

Esse modelo é baseado somente na dificuldade do item e verifica-se que para a situação na qual a habilidade do respondente e a dificuldade do item têm a mesma grandeza, dentro de uma mesma escala, a probabilidade de acerto é 0,5.

A Figura 9 apresenta o gráfico das probabilidades em função da diferença entre a habilidade e a dificuldade do item, gerando uma função ogiva normal.

Figura 9 - Probabilidade de acerto para a diferença entre dificuldade e competência



Fonte: Adaptado de Baker (2001).

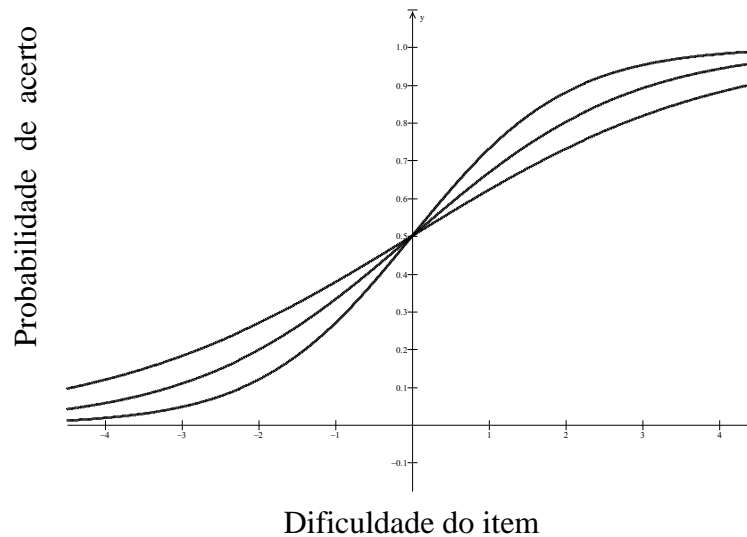
Para a diferença entre habilidades e dificuldades limitada entre  $[-3, +3]$ , as probabilidades de acerto ficam entre 0,05 e 0,95 que, para efeitos práticos, são considerados suficientes para a estimativa de habilidades mínima e máxima respectivamente, considerando zero (0) um valor mediano.

Com as pesquisas em Psicometria, o modelo de Rasch foi aprimorado para o denominado modelo probabilístico de dois parâmetros que, além da dificuldade do item, considera também o parâmetro de discriminação do item, ou a declividade da curva de discriminação e denominado por  $c$ , logo o modelo probabilístico fica determinado por

$$P = \frac{1}{1+e^{-c(\theta-d)}}.$$

Ao considerar a discriminação da questão, a função ogiva normal sofre uma atenuação na declividade, no ponto central. Na Figura 10 são apresentadas as curvas características do item, da menor para a maior declividade, para os valores de 0,5; 0,7 e 1,0 respectivamente.

Figura 10 - Gráfico das CCI para as discriminações 0,5; 0,7 e 1,0.



Fonte: Adaptado de Baker (2001).

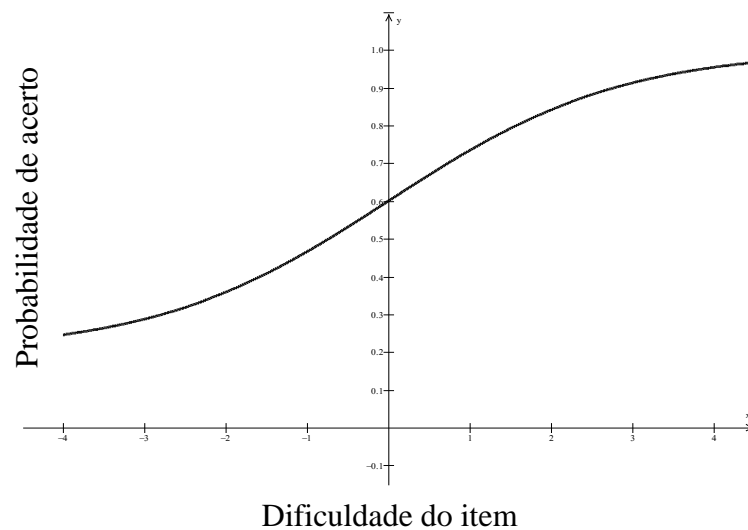
Para as diferenças entre a habilidade do respondente e a dificuldade do item em um intervalo de  $[-3, 3]$ , a curva de 0,7 de discriminação gera probabilidades aceitáveis de 0,1 a 0,9. Para efeitos práticos itens com fatores inferiores a 0,7 devem ser desconsiderados, pois não agregam precisão às estimativas de habilidade.

Os modelos probabilísticos da TRI de um e dois parâmetros consideram a habilidade do respondente como único fator para a resolução do item, mas em sistemas de TC é comum o uso de testes de múltipla escolha com somente uma resposta correta, logo, considerando o acerto casual, a probabilidade de acerto por um respondente sem habilidades ou competências para um dado teste será de  $p$ , para  $p = \frac{1}{n}$ , onde  $n$  é o número de opções disponíveis.

Para o caso de um modelo de três parâmetros, com  $c = 0,7$  e  $n = 5$ , logo com  $p = 0,2$ , a probabilidade deixa de ser uma função ogiva normal, pois a probabilidade de acerto  $P$ , por menor que seja a habilidade do respondente, será aproximadamente  $\frac{1}{n}$ , conforme apresentado na Figura 11. O modelo de três parâmetros é dado por:

$$P = p + (1 - p) \frac{1}{1 + e^{-c(\theta - d)}}$$

Figura 11 - Gráfico da CCI para um item de múltipla escolha com  $p=0,2$  e discriminação do item de  $0,7$ .



Fonte: Adaptado de Baker (2001).

Os modelos de um e dois parâmetros são utilizados para a estimativa da probabilidade de acerto, em questões com respostas descritivas nas quais a possibilidade de acerto casual é quase nula.

#### 2.1.8.1 Banco de questões

Nos três modelos probabilísticos da TRI, de acordo com a teoria de Rasch, o parâmetro  $d$ , ou dificuldade do item, é a base da estimativa das habilidades. Logo, é essencial,

para estimativas mais precisas, a utilização de itens com níveis de dificuldades distintos, com baixo diferencial e alto fator de discriminação.

Na construção do banco de questões, para um teste adaptativo, destacam-se como elementos principais: um número suficiente de questões nos diversos níveis a serem discriminados, a qualidade das questões ou o diferencial do item, que é a capacidade da questão manter sua função ou nível de dificuldade independentemente das características étnico sociais dos indivíduos e a pré-testagem, ou seja, a comprovação dos parâmetros discriminatórios das questões entre outros.

O número de questões por nível de dificuldade deve ser tal que não haja a possibilidade de apresentação de um mesmo item para um mesmo respondente durante um teste. Levando também em consideração que um teste pode ser apresentado a um grupo de respondentes de maneira que possa haver a troca de informações entre os integrantes, a quantidade de questões deve ser suficiente para que a probabilidade de apresentação de uma mesma questão para o mesmo grupo seja pequena. Em 2011 (BRASIL, 2011) o Inep tinha cerca de 10 mil questões no Banco Nacional de Itens (BNI) do Enem, que utiliza a TRI para avaliar a habilidade dos estudantes. A meta é chegar a 100 mil para poder implementar um TAC a nível nacional.

#### TESTE ADAPTATIVO COMPUTACIONAL

Um teste adaptativo computacional (TAC) é um teste ótimo, pois cada questão apresentada, escolhida no banco de questões, é adequada à habilidade do respondente, e nenhuma questão do teste é irrelevante (SANDS e WATERS, 1997). Ao contrário dos testes de papel e caneta, cada estudante recebe um teste com questões diferentes e de tamanhos variados, produzindo uma medição mais precisa da proficiência e com uma redução do tamanho do teste em torno de 50% (WAINER, 2000).

Um TAC tem como objetivo estimar o conhecimento ou a proficiência de um indivíduo, em uma determinada área de conhecimento (COSTA, 2009). Ainda, segundo a autora a característica de adaptabilidade imita o que um examinador em um teste oral faria, mudando o nível de dificuldade de acordo com o conhecimento apresentado pelo respondente durante uma avaliação, mas para seleção adaptativa das questões é preciso, em substituição a um examinador humano, um sistema informatizado que imite a inteligência necessária através de um algoritmo de seleção.

Em um TAC há dois elementos principais, um banco de questões e um algoritmo de

seleção adaptativa de questões. As questões do banco de dados devem ser discriminatórias, em relação à proficiência, e o princípio básico do algoritmo de seleção é apresentar questões cuja probabilidade de acerto, pelo examinado, seja de 50%.

Para a medição das habilidades do indivíduo, a escala a ser considerada tem que ser compatível com a escala de níveis de dificuldade das questões. Por exemplo, se o objetivo é determinar as habilidades em uma escala de 5 níveis é necessário que se tenha disponível no banco de questões itens com 5 níveis de dificuldade.

Para o caso de testes computacionais, com conteúdos de Matemática, há a possibilidade de trabalhar com mais de um modelo probabilístico, pois problemas com soluções numéricas exatas usadas em testes com resposta descritiva, permite o uso do modelo de dois parâmetros, pois não há o fator de acerto casual. Em testes de múltiplas opções, o modelo de três parâmetros, é o mais adequado, pois leva em consideração a probabilidade de acerto casual pelo respondente com habilidade inadequada à dificuldade do item.

### 2.1.9 Seleção adaptativa

O critério de máxima informação esperada é um dos procedimentos bayesianos usados para seleção das questões, pois se utiliza de um modelo estatístico preditivo baseado na informação observada de todas as questões administradas anteriormente e não somente na questão anterior (COSTA, 2009).

Diferente do raciocínio lógico, o raciocínio probabilístico considera a incerteza, sendo possível a tomada de decisões racionais, mesmo sem informação suficiente para uma prova ou certeza.

A escolha de um item para apresentação também pode ser, segundo Baker (2001), feita pela estimativa da proficiência do respondente para o próximo item, que também considera os itens anteriores, usando o procedimento iterativo de máxima verossimilhança

dado por  $\theta_{s+1} = \theta_s + \frac{\sum_{i=1}^n a_i [u_i - P_i(\theta_s)]}{\sum_{i=1}^n a_i^2 P_i(\theta_s) Q_i(\theta_s)}$ , ou seja,  $\theta_{s+1} = \theta_s + \Delta\theta_s$  onde:

$\theta_{s+1}$  é a estimativa da habilidade do respondente para o próximo item;

$\theta_s$  é estimativa da habilidade do respondente para o item atual para  $s$  interações;

$a_i$  é o fator de discriminação do item  $i$ ,  $i = 1, 2, 3 \dots n$ ;

$u_i$  é a resposta do respondente para o item  $i$ , sendo considerado 1 para uma resposta certa e 0 para uma resposta errada;

$P_i(\theta_s)$  é a probabilidade de acerto do item  $i$  considerando o respectivo  $a_i$  do item e a



estimativa da habilidade  $\theta$  com  $s$  interações, sendo determinado pelos modelos de Rasch;

$Q_i(\theta_s)$  é a probabilidade de erro do item  $i$  dado por,  $1 - P_i(\theta_s)$ .

$\Delta\theta_s$  é o fator de correção da estimativa da habilidade do respondente para  $s$  interações e dado pela divisão dos somatórios,  $\frac{\sum_{i=1}^n a_i[u_i - P_i(\theta_s)]}{\sum_{i=1}^n a_i^2 P_i(\theta_s) Q_i(\theta_s)}$ .

No modelo interativo de máxima verossimilhança as escalas de dificuldade do item e habilidade do respondente tem o valor zero como ponto médio, representando uma dificuldade mediana do item, assim como, a habilidade do avaliado.

A seleção adaptativa requer que um agente de decisão tenha preferências dentre as possíveis ações a serem tomadas, sendo essas representadas pela utilidade da decisão. Para a seleção adaptativa a utilidade da decisão está na escolha dos itens que forneçam informações relevantes sobre a habilidade do respondente, ou seja, com dificuldades compatíveis com as estimativas da habilidade do respondente, determinadas interativamente durante o teste.

Dessa maneira o procedimento interativo de máxima verossimilhança, que estima a habilidade do respondente com base nas respostas dos itens já apresentados, pode ser usado como referência para a escolha do próximo item, logo, um algoritmo de seleção tem duas possíveis ações preditivas dado o evento atual,  $\theta_{s+1} < \theta_s$  ou  $\theta_{s+1} > \theta_s$ , que é apresentar um item de dificuldade respectivamente inferior ou superior até que seja atendido o critério de parada que finaliza o teste.

### 2.1.10 Critérios de parada e estimativa da habilidade

Um teste computacional deve finalizar a apresentação dos itens ao respondente segundo um critério de parada. Assim com em um teste lápis e papel, um TC, segundo a TCT, tem um número fixo de itens a serem respondidos, sendo finalizado ao término da apresentação do último item. No caso de um TAC, com base na TRI, o fim do teste ocorre quando o sistema estima a habilidade do respondente com a maior precisão possível.

Segundo Baker (2001), o erro padrão (EP) na estimativa da habilidade fornece uma indicação da precisão estimada. O erro padrão é uma variação de valores em torno do parâmetro de habilidade do respondente podendo ser computada usando a equação  $EP =$

$$\frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 P(\theta) Q(\theta)}}.$$

Segundo Costa (2009) o critério de parada, que define quando o TAC finaliza o teste, pode ser determinado por um valor de corte, caso o objetivo do teste seja classificatório ou,

quando usado para estimar a proficiência em um determinado campo de conhecimento, por satisfação do nível do erro padrão ou, de acordo com Baker (2001), quando se tem uma baixa estimativa do erro padrão.

Um algoritmo para a escolha do grau de dificuldade dos itens, com base na estimativa de habilidade por verossimilhança, tem um comportamento oscilante no início, estabilizando com a apresentação de mais itens, ou seja, o fator de correção diminui no decorrer do teste podendo, também, ser usado como referência para definição do critério de parada.

Em um TAC é possível estabelecer o critério de parada quando a variação na estimativa da habilidade do respondente se reduz, ou seja, quando temos um baixo fator de correção associado a um erro padrão (EP) pequeno, conseguido com a apresentação de quantidade suficiente de itens para que o EP diminua.

A estimativa da habilidade do respondente é determinada pelo procedimento de máxima verossimilhança, dado pelo valor da dificuldade do próximo item,  $\theta_{s+1}$ , quando o critério de parada é satisfeito.

### **2.1.11 Dificuldade dos itens em Análise Combinatória**

Uma pesquisa realizada por Homa (2011) durante o V Congresso Internacional de Ensino de Matemática (V CIEM), ocorrido em de outubro de 2010, na ULBRA, com 289 professores de diversos níveis de ensino e alunos de Matemática do Ensino Superior, fez uma classificação, estabelecendo uma relação entre os tipos de problemas combinatórios apresentados nos livros didáticos do Ensino Médio e o grau de dificuldade para a solução dos mesmos.

Batanero, Godino e Pelayo (1996) consideram que, sendo os professores os gestores dos sistemas didáticos, é do máximo interesse a difusão das investigações realizadas sobre o pensamento dos professores sobre a Matemática e temas específicos, assim como as dificuldades que percebem em seus alunos, conforme explicitado a seguir.

As dificuldades apontadas pelos professores, Tabela 3, apontam a interpretação dos problemas de Análise Combinatória como a maior dificuldade dos alunos no estudo do conteúdo, seguido da identificação do tipo de agrupamento. Estudos como os de Hadar e Hadass (1981) também apontam a identificação do conjunto de eventos e a construção de um método sistemático para a análise do problema, ou seja, a interpretação como sendo a maior dificuldade para a solução de problemas combinatórios.

Tabela 3 - Dificuldades dos alunos no conteúdo de Análise Combinatória apontadas pelo estudo

| Número de vezes que lecionou Análise Combinatória | Nº de Participantes | Dificuldades com o conteúdo de Análise Combinatória |               |                              |                     |
|---|---------------------|---|---------------|------------------------------|---------------------|
|   |                     | Cálculo   | Interpretação | Identificação do agrupamento | Nenhuma dificuldade |
| Uma   | 34                  | 3   | 31            | 17                           | 2                   |
| Duas  | 28                  | 5   | 23            | 21                           | -                   |
| Três a cinco                                      | 38                  | 2   | 36            | 22                           | 1                   |
| Seis ou mais                                      | 42                  | 5   | 42            | 23                           | -                   |

Fonte: Homa (2010).

A seguir são apresentados os problemas de Permutação Simples, Arranjo Simples e Combinação Simples com suas respectivas escalas de dificuldade variando de 1 a 5 sendo 1 para os de menor dificuldade e 5 para os de maior dificuldade.

A Tabela 4 apresenta os tipos de problemas de Permutação e a escala de dificuldades associada.

Tabela 4 - Apresenta a escala de dificuldades dos tipos de problemas de Permutação.

| Tipos de problemas       | Exemplo  | Dificuldade |
|--------------------------|--|-------------|
| Permutação Simples       | De quantos modos 6 pessoas podem se sentar em 6 cadeiras, em fila?   | 1           |
| Permutação condicional 1 | Quantos anagramas da palavra FILTRO começam por consoantes?  | 2           |
| Permutação condicional 2 | Quantos anagramas da palavra CABIDE começam por consoantes e terminam com vogais?  | 2           |
| Permutação condicional 3 | Dos anagramas da palavra PREGOS, quantas tem as letras PRE juntas, nesta ordem ?   | 3           |
| Permutação condicional 4 | De quantas maneiras podemos formar uma fila com 6 crianças, sendo 3 irmãos e 3 amigos, sendo que os 3 irmãos não se separam?   | 3           |
| Permutação condicional 5 | De quantas maneiras podemos formar uma fila com 6 crianças, sendo 3 meninas e 3 meninos, sendo a fila sempre começa com as meninas?  | 4           |
| Permutação condicional 6 | De quantas maneiras podemos formar uma fila com 3 famílias de 3 pessoas cada, sendo que os integrantes das famílias não se separam?  | 4           |
| Permutação condicional 7 | De quantas maneiras podemos formar uma fila com 3 meninos e 3 meninas, sendo que a fila sempre começa com pelo menos uma menia e termina com pelo menos um menino?                     | 5           |
| Permutação condicional 8 | Considere os números obtidos do número 12345 efetuando-se todas as permutações de seus algarismos. Colocando esses números em ordem crescente, qual o lugar ocupado pelo número 43521? | 5           |

Fonte: Homa (2010).

A Tabela 5 apresenta os tipos de questões de Arranjo e a escala de dificuldades associada.

Tabela 5 - Apresenta a escala de dificuldades dos tipos de problemas de Arranjo.

| Tipos de problemas     | Exemplo  | Dificuldade |
|------------------------|--|-------------|
| Arranjo Simples        | De quantos modos 6 pessoas podem ocupar um sofá de 3 lugares?  | 1           |
| Arranjo condicional 1  | Considerando os algarismos de 0 a 9, quantos números de 4 algarismos distintos podem ser formados, de forma que o algarismo menos significativo seja o número 1? (ex: XXX1)  | 2           |
| Arranjo condicional 2  | Considerando os algarismos de 0 a 9, quantos números com final 123 e de 5 algarismos distintos podem ser formados? (ex: XX123)   | 2           |
| Arranjo condicional 3  | Considerando os algarismos de 0 a 9, quantos números de 4 algarismos distintos podem ser formados, de forma que o algarismo mais significativo seja ímpar? (ex: 3XXX)  | 3           |
| Arranjo condicional 4  | Qual a quantidade de números inteiros positivos menores que 1000 e que têm algarismos distintos?   | 3           |
| Arranjo condicional 5  | Considerando os algarismos de 1 a 9, quantos números de 5 algarismos distintos podem ser formados, com de forma tal que os 2 algarismos mais significativos sejam ímpares? (ex: 31XXX)   | 4           |
| Arranjo condicional 6  | Um automóvel comporta dois passageiros na frente e três, atrás. Calcule o número de alternativas distintas para lotar o automóvel com pessoas escolhidas dentre sete, de modo que uma dessas pessoas nunca ocupe um lugar na frente. | 4           |
| Arranjo condicional 7  | Considerando os algarismos de 1 a 9, quantos números de 5 algarismos distintos podem ser formados, com 3 algarismos pares juntos e 2 ímpares juntos?   | 4           |
| Arranjo condicional 8  | Considerando os algarismos de 1 a 9, quantos números pares de 5 algarismos distintos podem ser formados, sendo que os mesmos devem iniciar com um algarismo ímpar. (ex: 3XXX2; 5XXX4)  | 5           |
| Arranjo condicional 9  | Considerando os algarismos de 1 a 9, quantos números de 5 algarismos distintos podem ser formados, e que contenham a sequência 45 (ex: XX45X; X45XX) ?   | 5           |
| Arranjo condicional 10 | Considerando os algarismos de 0 a 9, quantos números de 4 algarismos distintos, maiores que 6.000 e divisíveis por 5 podem ser formados ?  | 5           |

Fonte: Homa (2010).

A Tabela 6 apresenta os tipos de questões de Combinação e a escala de dificuldades associadas.

Tabela 6 - Apresenta a escala de dificuldades dos tipos de problemas de Combinação.

| Tipos de problemas       | Exemplos   | Dificuldade |
|--------------------------|--|-------------|
| Combinação Simples       | Quantos grupos de 4 estudantes podemos formar com 10 estudantes?   | 1           |
| Combinação condicional 1 | Com 6 rapazes e 6 moças, quantos quartetos diferentes podemos formar, tendo em cada uma delas 2 moças e 2 rapazes?   | 2           |
| Combinação condicional 2 | Com 6 rapazes e 6 moças, quantas comissões de 5 pessoas podemos formar, tendo em cada uma delas pelo menos 3 moças?  | 3           |
| Combinação condicional 3 | Com 2 goleiros que só jogam nessa posição e 7 jogadores que não jogam no gol, o número de times de futebol de salão que podem ser formados, sabendo que um time é composto de 5 jogadores, sendo um deles o goleiro, é:        | 3           |
| Combinação condicional 4 | Considerando os algarismos de 1 a 9, quantos números de 4 algarismos distintos podem ser formados, considerando que os algarismos tem que ficar dispostos em ordem crescente do mais significativo para o menos significativo? | 4           |
| Combinação condicional 5 | Marcam-se 5 pontos sobre uma reta $r$ e 8 pontos sobre uma reta $s$ paralela a $r$ . Quantos triângulos existem com vértices em 3 desses 13 pontos?  | 5           |

Fonte: Homa (2010).

Os tipos de problemas identificados foram utilizados para a construção do banco de questões, para as avaliações dos conceitos de Análise Combinatória, durante a sequência de apresentação desenvolvida.

#### ANÁLISE COMBINATÓRIA

Segundo Ribnikov (1988) a Análise Combinatória estuda os conjuntos discretos e as configurações que podem ser obtidas a partir dos seus elementos, mediante certas transformações que causam mudanças na estrutura ou na composição dos mesmos. De maneira geral, pode-se dizer que é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações entre conjuntos discretos.

As configurações obtidas pela reorganização dos elementos de um conjunto discreto se diferenciam basicamente entre dois tipos de agrupamentos: um que considera a ordem e a natureza dos elementos dentro do agrupamento e o outro no qual a ordem dos elementos é irrelevante.

Segundo Roa e Pelayo (2001) a Análise Combinatória é uma das áreas fundamentais da Matemática Discreta e da Probabilidade. Atualmente, possui amplo campo de aplicação com investigação ativa e numerosas aplicações teóricas e práticas em Geologia, Química, Gestão Empresarial, Informática e Engenharia (ALMEIDA; FERREIRA, 2010). Na Matemática, a Análise Combinatória é aplicada na teoria das Probabilidades, no desenvolvimento do Binômio de Newton (MACHADO, 1986), em processos Estocásticos Discretos, na teoria da Comunicação, em Lógica e teoria de Autômatos, nas Ciências da Computação e Matemática recreativa (BATANERO, GODINO, PELAYO, 1996).

Historicamente o principal estímulo aos estudos e desenvolvimento da Análise Combinatória foi a necessidade de calcular o número de possibilidades existentes nos denominados jogos de azar. Esses estudos foram iniciados já no século XVI, pelo matemático italiano Niccollo Fontana (1499-1557), conhecido como Tartaglia, depois vieram os franceses Pierre de Fermat (1601-1661) e Blaise Pascal (1623-1662).

Para Batanero, Godino e Pelayo (1996) a Análise Combinatória é um componente essencial da Matemática Discreta e, como tal, tem um importante papel na Matemática escolar. Também afirmam que, além da sua importância no desenvolvimento da ideia de probabilidade, a capacidade combinatória é um componente fundamental do pensamento formal.

Dentre as razões para o ensino da Análise Combinatória, descritas por Kapur (1970), destacam-se as oportunidades proporcionadas pelos problemas combinatórios como:

- os conceitos de contagem, a Modelagem Matemática, a possibilidade de conjecturar, contando sem contar através de generalizações, as otimizações;
- as aplicações nos campos das Ciências;

- o desenvolvimento de conceitos de relações, funções, classes de equivalência, isomorfismo;
- ajuda no desenvolvimento do pensamento combinatório que examina todas as possibilidades, enumera e encontra a melhor solução e, pelo planejamento adequado, trabalha com problemas que não dependem de cálculos complicados, permitindo que seja apresentado nos diversos níveis escolares.

A escolha desse tema, para o desenvolvimento desta pesquisa, se justifica por ser um assunto que apresenta grandes dificuldades para os alunos do Ensino Médio (MUNSIGNATTI Jr., 2010) e, segundo esse autor, no estudo desse assunto o principal é o raciocínio, pois saber apenas fórmulas de Arranjo e Combinação, entre outras, não é suficiente. A grande vantagem desse conteúdo é estimular a capacidade de abstração do estudante para resolver problemas, sendo possível desenvolver atividades contextualizadas socioculturalmente, aproximando-o da realidade, permitindo vivenciar situações próximas, que lhe possibilitam reconhecer a diversidade a qual o cerca e reconhecer-se como indivíduo capaz de ler e atuar nessa realidade, competência proposta pelo PCN+, Ensino Médio (BRASIL, 2002). Segundo Morgado et al. (1991), a solução de um problema combinatório exige, quase sempre, engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema.

Segundo os PCN+ (BRASIL, 2002) as habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer previsões com base numa amostra de população, aplicar as ideias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento e tornaram-se bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, instrumentos tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isto mostra como é importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, Estatística e Probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais Ciências e áreas. Os conceitos matemáticos que dizem respeito a conjuntos finitos de dados ganham também papel de destaque para as Ciências Humanas e para o cidadão comum, que se vê imerso numa enorme quantidade de informações de natureza estatística ou probabilística.

A proposta do NCTM<sup>12</sup> (NCTM, 1989) coloca o raciocínio combinatório como uma ferramenta útil, sendo a base da Matemática Discreta, reforçando a necessidade do ensino da Análise Combinatória.

### 2.1.12 Problemas Combinatórios

O estudo formal e rigoroso da Análise Combinatória requer o conhecimento de vários conceitos de álgebra abstrata, dentre os quais:

- conjunto, subconjunto e operações entre subconjuntos de um dado conjunto; conjunto de partes e partição de um conjunto;
- produto cartesiano de conjuntos;
- relação binária; propriedades de equivalência; relação de ordem; grafos associados a relações binárias;
- correspondências e aplicações: injetiva, sobrejetiva e bijetiva;
- cardinalidade de um conjunto; equipotência.

Para atividades direcionadas ao Ensino Médio, segundo Batanero, Godino e Pelayo (1996), não é necessário o uso explícito de tais conceitos, podendo ser apresentadas somente as operações de subconjuntos que formulam as regras da soma, do produto e do quociente que embasam respectivamente o Princípio Aditivo, o Princípio Multiplicativo e a Combinação como a razão entre o número de Arranjos e as Permutações.

- Regra da soma: Se  $S$  é um conjunto finito e  $S = \cup_{i \in I} A_i$ , onde  $A_i$  é um subconjunto de  $S$  para todo  $i \in I$  então:  $card(S) \leq \sum_{i \in I} card(A_i)$ , onde para o caso de todos os  $A_i$  serem disjuntos, verifica-se a igualdade dos termos.
- Regra do produto: Se  $A_1, A_2, \dots, A_n$  são conjuntos finitos, a cardinalidade do produto cartesiano é dado por:  $card(A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n) = \prod_{i=1}^n card(A_i)$
- Regra do quociente: Se  $S$  é um conjunto finito de cardinalidade  $n$ , e existe uma relação de equivalência cujas classes de equivalência têm todas a mesma cardinalidade  $r$ , o número de classes é  $\frac{n}{r}$ .

Na introdução à Análise Combinatória, segundo Batanero, Godino e Pelayo (1996), devem ser abordados diversos tipos de problemas combinatórios, dadas certas condições, de modo que o número de possibilidades não seja elevado, possibilitando a solução através da

---

<sup>12</sup> *National Council of Teachers of Mathematics* – Conselho Nacional (Norte Americano) de professores de Matemática.

enumeração sistemática de todos os agrupamentos possíveis. Após o desenvolvimento da capacidade de solução desses problemas, explora-se a capacidade de compreensão dos algoritmos para geração sistemática de todas as soluções e assim deduzir as respectivas fórmulas de contagem.

Os mesmos autores afirmam também que o uso da recursividade e indução permite ao aluno contar sem contar, determinando o número de possibilidades ou eventos de uma situação que se apresente, sendo particularmente útil na solução de problemas com um elevado número de agrupamentos. A recursividade, como um método geral de resolução de problemas, implica na identificação de um processo ou procedimento que invoca a ele mesmo, sendo necessário, então, a redução do problema apresentado em um menor que se repita nele mesmo.

O processo de indução para generalizar um processo recursivo garante a validade do mesmo em um contexto de infinitos objetos ou eventos. A operação fatorial definida como  $F(n) = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ n \cdot F(n - 1), & n > 1 \end{cases}$  pode ser desenvolvida na construção do conceito de Permutação Simples onde  $P(n) = F(n)$ , sendo um exercício do pensamento lógico formal no uso da recursão e indução.

Para o desenvolvimento do pensamento combinatório recursivo através da solução de problemas, como Permutações e Arranjos apresentados ao Ensino Médio, com um número fixo e finito de elementos, Batanero, Godino e Pelayo (1996) identificam os seguintes processos:

- formação efetiva, ou enumeração completa, dos agrupamentos para um número pequeno de objetos;
- descrição do processo de construção de todos os agrupamentos;
- demonstração lógica do processo utilizado, para garantir que não falta nenhum agrupamento.

As estratégias para a solução de problemas combinatórios segundo as investigações de Piaget e Inhelder apud Batanero, Godino e Pelayo (1996) variam de acordo com os estágios definidos por Piaget, como sendo I, II e III. Caracterizados pelas idades, o estágio I é até os 7 anos, o II, dos 8 aos 11 anos e o III após os 11 anos.

Os mesmos autores identificam que inicialmente (estágio I) a estratégia de enumeração consiste na escolha ao acaso dos elementos repetindo agrupamentos, depois (estágio II) são realizadas tentativas sem reutilizar elementos, a seguir, começam os



procedimentos algorítmicos na busca de uma solução sistemática, evoluindo para a fixação de elementos, mas com algoritmos deficientes, até finalmente (estágio III) chegar a uma estratégia algorítmica completa, com a fixação de um elemento pivô de maneira cíclica sistemática e completa, formando todos os casos possíveis.

A dificuldade na construção de um modelo sistemático de enumeração está diretamente ligada ao completo entendimento do problema, pois mesmo tendo o conhecimento dos tipos de agrupamentos básicos e suas fórmulas, a falta de compreensão do problema leva ao uso incorreto dos modelos matemáticos básicos (fórmulas matemáticas).

Dentre as dificuldades típicas associadas à compreensão dos problemas combinatórios, segundo Hadar e Hadass (1981), está o não reconhecimento do conjunto correto de eventos desejados no problema. O uso de notação inapropriada que represente toda a informação e as condições do problema também geram outras dificuldades, associações com a variável  $x$  para a quantidade de eventos, dando um caráter algébrico na busca da solução, ou mesmo, variáveis indexadas como  $x_0 = 0$ ,  $x_1 = 1$ , e  $x_n = n$ , para representar as quantidades de elementos, ao contrário da utilização de  $n$ , levando a uma complexidade maior, que impede o completo entendimento do problema. Em alguns casos o entendimento acaba sendo compreendido como um conjunto de enunciados particulares e não, como um problema com parâmetro variável. Outra dificuldade é a capacidade de generalização, onde por vezes, mesmo sendo capaz de resolver para casos particulares de  $n$ , o aluno é incapaz de generalizar a solução.

A classificação do tipo de problema a ser tratado facilita na compreensão do mesmo e na identificação do método a ser utilizado para solucioná-lo. Diferente da tipificação pela dificuldade (HOMA, 2011) relacionada à solução dos problemas, Batanero, Godino e Pelayo (1996) classificam os principais tipos de problemas, abordados nos estudos de Análise Combinatória, diferenciando-os nas seguintes categorias:

- de existência, onde se comprova a existência, ou não, de um determinado tipo de estrutura. Ex: O problema dos matrimônios: Ana conhece André, Jose e Carlos; Beatriz conhece Jose e Carlos; Carmem conhece Carlos, Antonio e Julio; Daniela conhece André e Jose; Elisa conhece Carlos, Jose e André; Leticia conhece Antonio, João e Francisco. É possível achar um marido para cada moça entre os rapazes que elas conhecem?
- de enumeração, onde são enumerados ou listados os elementos que possuem determinada propriedade. Ex: Temos que escolher as cores de uma bandeira para um novo país. A bandeira tem 2 faixas de cores distintas que devem ser escolhidas entre as cores: azul,

vermelho e amarelo. Para escolher qual bandeira é a mais bonita, faça a todas as bandeiras possíveis;

- de contagem, onde é determinado o número de elementos que possuem uma ou várias propriedades. Ex: O dominó tem 2 tipos de peças, as peças duplas, os dois lados tem números iguais, e as ordinárias, os dois lados tem números diferentes. Quantas peças ordinárias tem a soma dos seus lados igual a seis?
- de classificação, onde, devido a inviabilidade de contagem, é feita uma classificação mediante relações apropriadas. Ex: Quantos inteiros entre 0 e 1000 não são divisíveis por 2 e 3?
- de otimização, quando é possível associar uma função ao conjunto solução, a qual induz no conjunto uma ordem total, podendo então considerar as noções de máximo e mínimo. Ex: Na informática, problemas como o algoritmo de busca linear em uma lista ordenada com  $n$  elementos, executa  $n$  operações de comparação entre os elementos da lista e o elemento procurado. A otimização ao problema através de uma *busca binária*, executa para o pior caso,  $\lfloor \log_2 n \rfloor + 1$  operações, ou seja, tem uma complexidade computacional  $O(\log_2 n)$ , que é bem inferior a complexidade  $O(n)$  da busca linear.

A classificação dos problemas em Análise Combinatória é um facilitador, pois a compreensão do tipo de problema ajuda na escolha da estratégia mais apropriada a ser utilizada na resolução do mesmo.

Para os problemas de contagem, Dubois (1984) apud Batanero, Godino e Pelayo (1996) propõe três estratégias:

- *seleção de uma amostra* a partir de um conjunto de objetos - dado um conjunto de  $n$  elementos distintos, são feitos agrupamentos de  $r$  elementos selecionados;
- *colocação de objetos em casas* - dado um conjunto de  $n$  elementos distintos, são selecionados  $r$  elementos que são distribuídos em  $k$  posições ou casas;
- *partição de um conjunto* de objetos em subconjuntos – dado um conjunto de  $n$  elementos distintos, são selecionados  $r$  elementos que são distribuídos em  $k$  posições ou casas, considerando-se os elementos nas casas como subconjuntos ordenados tem-se cada distribuição como uma partição ordenada de elementos distintos em subconjuntos ordenados.

A distinção entre os modelos estratégicos é essencial do ponto de vista matemático, pois os objetos e representações dos problemas são distintos e estão diretamente associados aos procedimentos e técnicas a serem empregados na solução dos problemas. A seguir são

apresentadas as etapas descritas por Batanero, Godino e Pelayo (1996), subsequentes à identificação da estratégia a ser usada.

Para a estratégia de *seleção da amostra*, a próxima etapa consiste em identificar certas características do problema, logo, para um dado conjunto de  $n$  objetos distintos ao se tomar duas amostras, deve-se verificar se há necessidade de levar em consideração a ordem dos elementos para distinguir uma amostra de outra, se os elementos são diferentes ou se alguns são iguais e, se a amostra tem elementos repetidos. Dessa maneira, da combinação dessas características, tem-se os quatro tipos de agrupamentos básicos estudados na Análise Combinatória, apresentados na Figura 12.

Figura 12 - Diagrama com as quatro operações básicas em Análise Combinatória

|         |              |               |            |
|---------|--------------|---------------|------------|
| Amostra | Ordenada     | sem repetição | $A(n, p)$  |
|         |              | com repetição | $AR(n, p)$ |
|         | Não Ordenada | sem repetição | $C(n, p)$  |
|         |              | com repetição | $CR(n, p)$ |

Fonte: Adaptado de Batanero, Godino e Pelayo (1996).

As representações simbólicas do diagrama são:

- $A(n, p)$ , Arranjo simples cuja fórmula é dada por,  $A(n, p) = \frac{n!}{(n-p)!}$ , o conceito de Arranjo simples expressa a ideia de  $n$  elementos distintos agrupados em subconjuntos com  $p$  elementos distintos arranjados em inúmeras ordens diferentes;
- $AR(n, p)$ , Arranjo com repetição cuja fórmula é dada por,  $AR(n, p) = n^p$ , o conceito de Arranjo com repetição expressa a ideia de  $n$  elementos distintos agrupados em subconjuntos com  $p$  elementos distintos, ou não, arranjados em inúmeras ordens diferentes;
- $C(n, p)$ , Combinação simples cuja fórmula é dada por,  $C(n, p) = \frac{n!}{(n-p)!p!}$ , o conceito de Combinação simples expressa a ideia de  $n$  elementos distintos agrupados em subconjuntos com  $p$  elementos distintos de maneira que a ordem dos elementos não importa, ou seja, subconjuntos com os os mesmos elementos em ordem diferente, é considerado o mesmo agrupamento,

- $CR(n, p)$  , Combinação com repetição cuja fórmula é dada por,  $CR(n, p) = C(n + p - 1, p)$ , o conceito de Combinação com repetição expressa a ideia de  $n$  elementos distintos agrupados em subconjuntos com  $p$  elementos distintos, ou não, de maneira que a ordem dos elementos não importa.

Nas estratégias de *colocação em casas ou posições e particionamento* é preciso distinguir se os objetos são iguais ou distintos, se as casas ou subconjuntos são distintas ou não, se é considerada a ordem de colocação dos objetos nas casas, se é permitido mais de um elemento em cada casa e, se é permitido que existam casas vazias. Considerando a ordem, a natureza dos objetos e das casas, são definidos seis tipos de problemas, associados às quatro condições de colocações injetivas, sobrejetivas, bijetivas e quaisquer, inclusive casas vazias.

Outras etapas são a identificação dos valores dos parâmetros envolvidos como o número de objetos, subconjuntos, o tamanho do conjunto universo e amostras, a formação dos agrupamentos solicitados ou de contagem das mesmas, para solução direta por meio das fórmulas. Na Figura 13 são apresentados os 24 modelos de colocação simples em casas e as fórmulas para o cálculo do número de soluções dos problemas.

Figura 13 - Fórmulas para problemas de colocações simples

| Colocação    | Elementos | Casas ou posições | Tipo        | Fórmula               |
|--------------|-----------|-------------------|-------------|-----------------------|
| Ordenada     | Distintos | Distintas         | Injetiva    | $A(n, p)$             |
|              |           |                   | Sobrejetiva | $p! \binom{p-1}{n-1}$ |
|              |           |                   | Bijetiva    | $P(n)$                |
|              |           |                   | Qualquer    | $p! (CR(n, p))$       |
|              |           | Iguais            | Injetiva    | 1                     |
|              |           |                   | Sobrejetiva | $L(n, p)$             |
|              |           |                   | Bijetiva    | 1                     |
|              |           |                   | Qualquer    | $V(n, p)$             |
| Não ordenada | Distintos | Distintas         | Injetiva    | $A(n, p)$             |
|              |           |                   | Sobrejetiva | $n! S(n, p)$          |
|              |           |                   | Bijetiva    | $P(n)$                |
|              |           |                   | Qualquer    | $AR(n, p)$            |
|              |           | Iguais            | Injetiva    | 1                     |
|              |           |                   | Sobrejetiva | $S(n, p)$             |
|              |           |                   | Bijetiva    | 1                     |
|              |           |                   | Qualquer    | $\sum (n, p)$         |
|              | Iguais    | Distintas         | Injetiva    | $C(n, p)$             |
|              |           |                   | Sobrejetiva | $\binom{p-1}{n-1}$    |
|              |           |                   | Bijetiva    | 1                     |
|              |           |                   | Qualquer    | $CR(n, p)$            |
|              |           | Iguais            | Injetiva    | 1                     |
|              |           |                   | Sobrejetiva | $PE(n, p)$            |
|              |           |                   | Bijetiva    | 1                     |
|              |           |                   | Qualquer    | $\prod (n, p)$        |

Fonte: Adaptado de Godino, Batanero e Pelayo (1996).

As representações simbólicas do diagrama são:

- $\binom{p-1}{n-1} = C_{(n-1, p-1)}$ , número de combinações de  $(n-1)$  objetos tomados  $p-1$  a  $p-1$ ;
- $L(n, p) = \frac{p!}{n!} \binom{p-1}{n-1}$ , números de Lah;
- $S(n, p) = \frac{1}{n!} \sum_{p_1 + \dots + p_n = p, p_i \geq 1} \left( \frac{p!}{p_1! p_2! \dots p_n!} \right)$ , números de Stirling de segundo tipo;
- $V(n, p) = \sum_{k=1}^n L(k, p)$ , número de colocações ordenadas quaisquer, de  $p$  objetos distintos em  $n$  casas iguais;
- $\sum(n, p) = \sum_{k=1}^n S(k, p)$ , número de colocações não ordenadas quaisquer, de  $p$  objetos distintos, em  $n$  casas iguais;
- $PE(n, p) = PE(n-1, p-1) + PE(n, p-n)$ , para  $p > n > 1$  e  $PE(1, p) = PE(n, n) = 1$ , com  $p, n \geq 1$ , número de colocações de objetos iguais em casas iguais, obtido de forma recorrente;
- $\prod(n, p) = \sum_{k=1}^n PE(k, p)$ , número de colocações quaisquer de  $p$  objetos iguais em  $n$  casas iguais.

Considerando as colocações de objetos em casas, os agrupamentos serão subconjuntos de todas as soluções possíveis, e analisando um determinado agrupamento em uma casa ou posição tal que os elementos tenham determinada propriedade ou característica, pode-se considerar que o agrupamento é uma partição do conjunto das possibilidades, logo os problemas de *partição em subconjuntos* podem ser tratados como problemas de *colocação em casas*. Dubois apud Batanero, Godino e Pelayo (1996) estabelece uma equivalência entre os problemas de *colocação em casas* e os de *partição* apresentados na Figura 14.

Figura 14 - Equivalência entre os problemas de *colocação em casas* e os de *partição*

| <b>Colocações de objetos em casas ou posições</b> | <b>Partições</b>  |
|---|---|
| ordenadas   | subconjuntos ordenados  |
| não ordenadas                                     | subconjuntos não ordenados                                      |
| de objetos distintos                              | de objetos distintos  |
| de objetos iguais                                 | de objetos iguais   |
| casas ou posições distintas                       | partições ordenadas   |
| casas ou posições iguais                          | partições não ordenadas   |
| injetivas   | em subconjuntos vazios ou com somente um objeto                 |
| sobrejetivas                                      | em subconjuntos não vazios                                      |
| bijetivas   | em subconjuntos com somente um objeto                           |
| qualquer  | em subconjuntos com mais de um objeto e com subconjuntos vazios |

Fonte: Adaptado de Godino, Batanero e Pelayo (1996).

Fazendo uso das correspondências entre os tipos de problemas é possível fazer uso das mesmas estratégias de solução, permitindo o cálculo através dos 24 modelos utilizados para a *colocação de objetos em casas*.

A estratégia para solução de problemas, com condições específicas, consiste na identificação e decomposição em partes menores com sua devida categorização para uso das fórmulas combinadas.

Nesse trabalho foram abordados os principais conceitos combinatórios: Princípio Fundamental da Contagem, Permutação Simples, Arranjo Simples e Combinação Simples.

### **2.1.13 Organização dos conteúdos**

Segundo Fischbein e Gazit apud Batanero, Godino e Pelayo (1996), o conceito do Princípio Fundamental da Contagem ou Arranjos com e sem repetição de elementos pode ser

explorado com o uso de números, letras e figuras geométricas. Em seus estudos 80% dos alunos, nas idades de 10 a 15 anos, construíram a árvore de possibilidades sem nenhum tipo de ajuda. Uma vez que seja introduzido o Princípio Fundamental da Contagem é aconselhável a introdução do conceito de Permutações Simples, cuja solução consiste na mudança da ordem dos elementos, e a estratégia para a dedução da fórmula e sua conexão com a Árvore de Possibilidades.

Os mesmos autores identificaram que os alunos têm maiores dificuldades para os conceitos de Permutação e Arranjo com repetição, seguido de Arranjos e Combinações Simples. Quanto à natureza dos objetos a serem manipulados, após os alunos estarem acostumados a operar mentalmente com números e letras, é possível fazer uso de objetos como bandeiras e comissões.

Em síntese, a organização de uma sequência didática com o conteúdo de Análise Combinatória, segundo Batanero, Godino e Pelayo (1996), levando em conta as diversas categorias de problemas e as possíveis estratégias a serem usadas, deve iniciar-se por situações introdutórias aos conceitos combinatórios, onde seja possível a enumeração sistemática de todas as configurações com um número de possibilidades não elevado. A partir da capacitação em resolver tais problemas é possível a compreensão dos algoritmos de geração sistemática de todas as possibilidades.

Deste modo a sequência desenvolvida introduz os conceitos da Análise Combinatória através de situações problema com as atividades sugeridas pelos estudos de Batanero, Godino e Pelayo (1996). Também são disponibilizados objetos de aprendizagem com atividades para a realização de agrupamentos com objetos geométricos e outros com material mais explicativo com a apresentação formal dos conceitos e suas fórmulas para cálculo do número de agrupamentos para os principais problemas combinatórios. O acompanhamento da aprendizagem é realizado por Testes Adaptativos Computacionais que apresentam questões com níveis de dificuldade compatíveis com o perfil do aluno estimando as habilidades desenvolvidas durante a realização do *e-learning*.

### 3 RECURSOS TECNOLÓGICOS UTILIZADOS NO E-LEARNING

Para o desenvolvimento da sequência didática eletrônica, de Análise Combinatória, foram utilizados os seguintes recursos tecnológicos: a Lousa Interativa, os Vídeos Tutoriais, o *Reload* para o pacote SCORM, a plataforma eletrônica de apresentação ILIAS, o Teste Adaptativo Computacional (iQui / iQuizcreate), os objetos didáticos da RIVED e objetos de aprendizagem desenvolvidos pelo autor.

Os objetos de aprendizagem, com a apresentação do conteúdo de Análise Combinatória, foram desenvolvidos em *flash* e os vídeos tutoriais em *flash* vídeo. Recursos auxiliares como a Lousa Interativa e o iQuizCreate foram desenvolvidos, respectivamente, para a criação dos vídeos tutoriais e o *XML* do banco de questões.

A seguir apresentam-se, com detalhes, os recursos utilizados.

#### LOUSA INTERATIVA

Desenvolvido em *Adobe Flash*<sup>13</sup> e programação *Actionscript 2.0*, a Lousa Interativa foi idealizada para possibilitar a manipulação dos objetos propostos nos problemas combinatórios durante as filmagens dos vídeos tutoriais, mas sua aplicação não se restringe somente a este fim, podendo ser utilizado em aulas presenciais para demonstrar construções de agrupamentos.

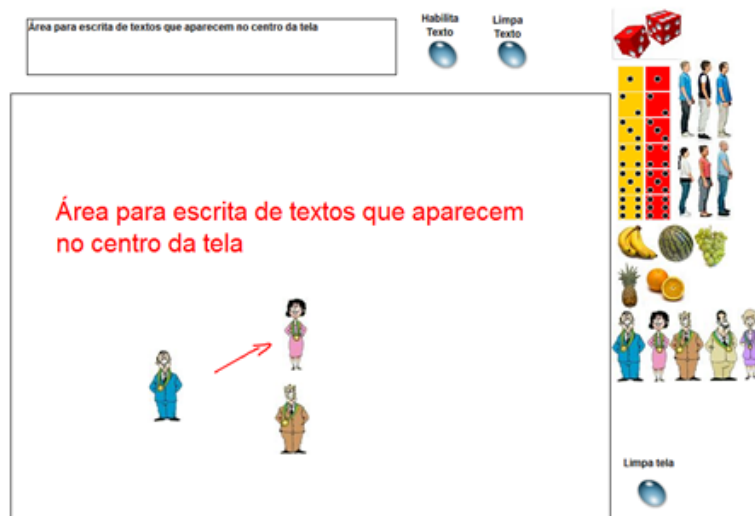
A Figura 15 apresenta a Lousa Interativa com seus objetos manipuláveis a esquerda, juntamente com o botão de limpeza de tela, no topo tem-se a caixa de textos auxiliar e os botões de Habilita e Limpa, que tem respectivamente a função de mostrar e limpar o texto da caixa auxiliar no centro da tela de trabalho. A tela de trabalho tem um tamanho de 500 x 700 *pixels* e permite desenho ou a escrita a mão livre com dispositivos auxiliares como *mouse*, caneta em mesa digitalizadora ou caneta em tela sensível ao toque. Para os trabalhos foi usado um *notebook HP Pavilion tx2000* com caneta e tela sensível ao toque (*touch screen*).

---

<sup>13</sup> Adobe Flash é uma aplicação multimídia usada para adicionar animações, vídeo e interatividade em páginas WEB.



Figura 15 - Lousa Interativa



Fonte: A pesquisa

A manipulação dos objetos é realizada pelas ações arrastar, soltar e apagar. Para a seleção é necessário um clic no objeto, que adere ao ponteiro do mouse, podendo ser movimentado livremente por toda a tela, com outro clic o objeto é fixado na posição em que se encontra. A ferramenta faz o controle permitindo que o objeto seja posicionado somente na área útil de trabalho. Para a exclusão de um objeto utilizado, basta que seja dado um clic no mesmo. A atividade de desenho ou escrita, para o mouse, consiste em segurar o botão da esquerda e arrastar, fazendo o traçado na área de trabalho, com canetas em mesas digitalizadoras ou telas sensíveis ao toque, é necessário somente que seja feito o posicionamento da caneta na respectiva área e iniciar o traçado. Para apagar todos os objetos assim como a escrita usa-se o botão Limpa Tela a direita.

O texto auxiliar é particularmente útil em vídeos tutoriais, pois permite a escrita prévia dos textos para depois apresentá-los na área de trabalho. O botão “Limpa texto” atua somente nos textos e não nos objetos ou escrita, permitindo a troca dos textos sem que se perca os objetos manipulados na área de trabalho.

A lousa interativa encontra-se disponível para uso em <http://matematica.ulbra.br/math/flash>.

#### VÍDEOS TUTORIAIS

Os vídeos tutoriais foram desenvolvidos como material de apoio na compreensão da solução dos problemas geradores, apresentados nos objetos de aprendizagem desenvolvidos

com o conteúdo de Análise Combinatória.

Similar aos vídeos produzidos por Salman Khan da *Khan Academy* (<http://www.khanacademy.org/>), os tutoriais desenvolvidos são bem específicos na solução do problema relacionando, por isso não são apresentados como objetos de aprendizagem independentes, mas como parte integrante do mesmo.

Criados a partir da Lousa Interativa, os vídeos tutoriais não tem a intenção de apresentar o conteúdo de Análise Combinatória, ficando restrito à apresentação da solução do problema associado. A demonstração é realizada pela manipulação dos objetos descritos no problema ou através de desenhos e diagramas, associados a textos ou áudios, com explicações pormenorizadas das ações e suas associações com o problema proposto. O vídeo foi gerado por *software* específico, o *Camtasia*, que faz a captura da tela durante a demonstração da solução, e a edição dos vídeos. A ferramenta possui funcionalidades como inserção de áudio e legenda que permitiu uma melhora na qualidade dos vídeos, pois a narrativa durante a manipulação dos objetos é imprecisa. A inserção a posterior permitiu um melhor controle da fala, permitindo maior clareza nas ideias e demonstrações.

Para a gravação dos áudios foi usado um microfone *dinâmico cardioide*, *Leson SM57*, em substituição ao de eletreto embutido no computador, que pelas suas características e sensibilidade capturava muitos dos sons ambientes, gerando uma gravação com ruído de fundo e de qualidade inferior ao desejado. O uso de um microfone semiprofissional, que pela sua característica cardioide captura somente os sons frontais ao microfone, melhorou consideravelmente a qualidade do áudio com a diminuição dos agudos, incremento dos graves e diminuição do ruído de fundo.

#### TESTE ADAPTATIVO COMPUTACIONAL

Para o acompanhamento da aprendizagem foi desenvolvido um TAC, o *iQuiz*, que atende as principais características descrita no padrão SCORM, a portabilidade e a interoperabilidade. Para tal, foi adotado o padrão *XML*, seguindo uma ontologia própria, mas flexível e expansível. A portabilidade do *XML* atende as definições do SCORM, pois sendo um arquivo de texto, o mesmo pode ser incluído no Pacote de Conteúdos, e ser importado por qualquer plataforma em conformidade com o padrão.

O *XML* define que um bloco de informações contém um item, seus atributos e suas subchaves com os dados relacionados às mesmas. A Figura 16 apresenta a estrutura do arquivo *XML* com os dois modos de apresentação disponíveis nessa versão, resposta com

múltiplas opções de escolha e resposta discreta. Por ser um arquivo texto, para a inclusão/exclusão de questões, basta incluir/excluir o bloco de chave *Question* e suas subchaves.

Figura 16 - Documento XML de duas questões para o iQuiz

```

- <Quiz version="1.0" Content="Descricao do conteudo desta prova" release="1.0" entity="Entidade
responsavel pelo conteudo">
- <Header>Header Reserved</Header>
- <Questions level="1.0" timelimit="99:99" Content="Descricao do conteudo deste Nivel">
- <Question id="1" level="1.0" mod="objective" timelimit="99:99" Content="Descricao do conteudo desta
pergunta">
- <Text>Em um colégio existem 7 portas. Calcule o número de maneiras de esse colégio estar
aberto.</Text>
- <Answers>
- <Answer right="false">128</Answer>
- <Answer right="true">127</Answer>
- <Answer right="false">64</ Answer >
- <Answer right="false">62</Answer>
- <Answer right="false">216</Answer>
- </Answers>
- <Textwrong>2.2.2.2.2.2 = 128 total de possibilidades, mas uma das possibilidades é todas as portas
estarem fechadas, por isso a resposta é 128 -1= 127</Textwrong>
- <Image>../portas.jpg</Image>
- </Question>
- <Question id="2" level="2.0" mod="value" timelimit="99:99" Content="Descricao do conteudo desta
pergunta">
- <Text>Com os algarismos 2, 3, 4, 5, 6 e 8, quantos números ímpares de 4 algarismos podemos
formar?</Text>
- <Answers>
- <Answer right="true">432</Answer>
- </Answers>
- <Textwrong>6.6.6.2 = 432 números, pois para ser ímpar só pode ter 3 ou 5 como último
dígito</Textwrong>
- <Image></Image>
- </Question>
- </Questions>
- </Quiz>

```

Fonte: A pesquisa

Para uma questão é necessário definir o nível de dificuldade no atributo *level*, que deve ser um número inteiro entre 1.0 e 5.0, e um tempo limite para responder a questão, no atributo *timelimit* entre 00:00 e 99:99 min. Atualmente o teste não considera o tempo limite de resposta, mas o banco de questões pode ser construído com essa informação, para uso desse controle nas próximas versões. As diretrizes para as futuras implementações considera o valor

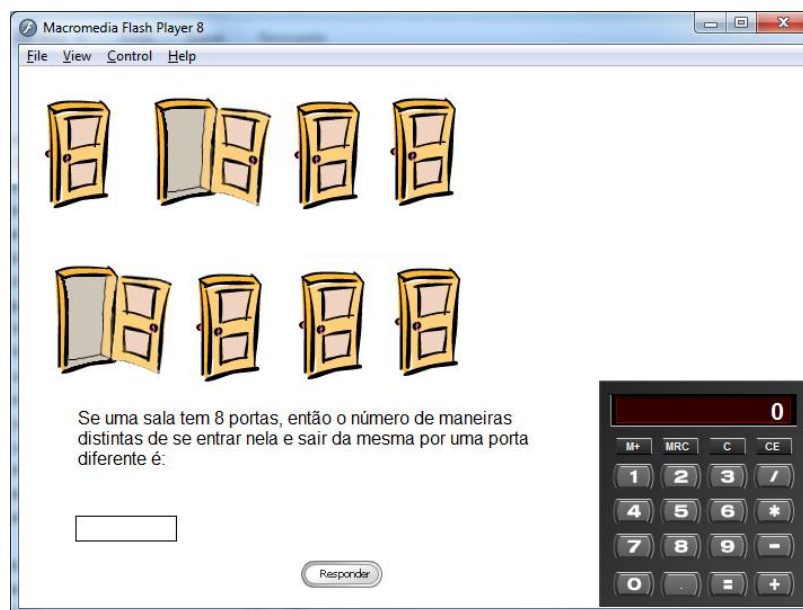
99:99 como uma questão sem limite de tempo para resposta, para os valores inferiores a 99:99 o TAC considerará a questão como errada caso o tempo limite seja excedido.

O enunciado da questão deve ser inserido na subchave *Text* e o texto auxiliar na chave *Textwrong*. O texto auxiliar é apresentado ao aluno, quando o TAC é iniciado em modo exercício, e o mesmo responder incorretamente à questão. Caso a questão possua uma imagem auxiliar para o enunciado, uma referência com o diretório relativo e o nome da imagem deve ser informado na chave *Image*.

As imagens auxiliares (gráficos, diagramas, etc...) são automaticamente redimensionadas e apresentadas em uma resolução de 400 x 300 *pixels*, sendo necessários cuidados para que textos, inclusos nos gráficos, não fiquem ilegíveis quando forem redimensionados para resolução menor do que a original. A Figura 17 apresenta uma questão com imagem auxiliar e resposta discreta.

As respostas devem ser inseridas na subchave *Answers*, e nas subchaves *Answer*. As respostas erradas devem ter o atributo *right=false*, e a resposta certa deve ter o atributo *right=true*.

Figura 17 - iQuiz apresentando uma questão com imagem auxiliar e resposta discreta



Fonte: A pesquisa

O iQuiz foi desenvolvido em *Adobe Flash* e programação *actionscript 2.0*. A escolha pelo desenvolvimento em *Flash* foi devido ao suporte gráfico e a característica de seus conteúdos não ser editáveis, isto é, seu programa não pode ser alterado, preservando o

trabalho intelectual, assim como evita fraudes por parte dos respondentes, caso os mesmos tentem usar de técnicas de programação reversa para tentar burlar o teste.

O algoritmo, adotado para a escolha do item, realiza o procedimento de máxima verossimilhança e determina a dificuldade do próximo item a ser apresentado ( $d_{s+1}$ ), de acordo com a TRI, a habilidade e a dificuldade devem estar em uma mesma escala, logo a estimativa da habilidade é dada pela associação direta com o valor da dificuldade.

O procedimento iterativo de máxima verossimilhança que estima a habilidade do respondente para o próximo item é dado por  $\theta_{s+1} = \theta_s + \Delta\theta_s = \theta_s + \frac{\sum_{i=1}^n c_i [u_i - P_i(\theta_s)]}{\sum_{i=1}^n c_i^2 P_i(\theta_s) Q_i(\theta_s)}$ , onde:

$\theta_{s+1}$  é a estimativa da habilidade do respondente para o próximo item;

$\theta_s$  é estimativa da habilidade do respondente para o item atual para  $s$  interações;

$c_i$  é o fator de discriminação do item  $i$ ,  $i = 1, 2, 3 \dots n$ ;

$u_i$  é a resposta do respondente para o item  $i$ , sendo considerado 1 para uma resposta certa e 0 para uma resposta errada;

$P_i(\theta_s)$  é a probabilidade de acerto do item  $i$  considerando o respectivo  $a_i$  do item e a estimativa da habilidade  $\theta$  com  $s$  interações, sendo determinado pelos modelos de Rasch;

$Q_i(\theta_s)$  é a probabilidade de erro do item  $i$  dado por  $1 - P_i(\theta_s)$ .

$\Delta\theta_s$  é o fator de correção da estimativa da habilidade do respondente para  $s$  interações e dado pela divisão dos somatórios,  $\frac{\sum_{i=1}^n c_i [u_i - P_i(\theta_s)]}{\sum_{i=1}^n c_i^2 P_i(\theta_s) Q_i(\theta_s)}$ .

A probabilidade de acerto do item seguiu, nesse trabalho, o modelo de dois parâmetros,  $P = \frac{1}{1 + e^{-c(\theta-d)}}$  pois o banco foi construído somente com respostas discretas para as questões.

Para a pesquisa foi gerado um banco de questões com dificuldades entre um e cinco, sendo a dificuldade três, considerada mediana. O parâmetro de discriminação do item foi considerado com valor unitário,  $c = 1$ , dessa maneira o modelo probabilístico para questões discretas considera somente a dificuldade do item ( $\theta$ ). Por ser composto somente de respostas discretas a probabilidade de resposta casual é desconsiderada.

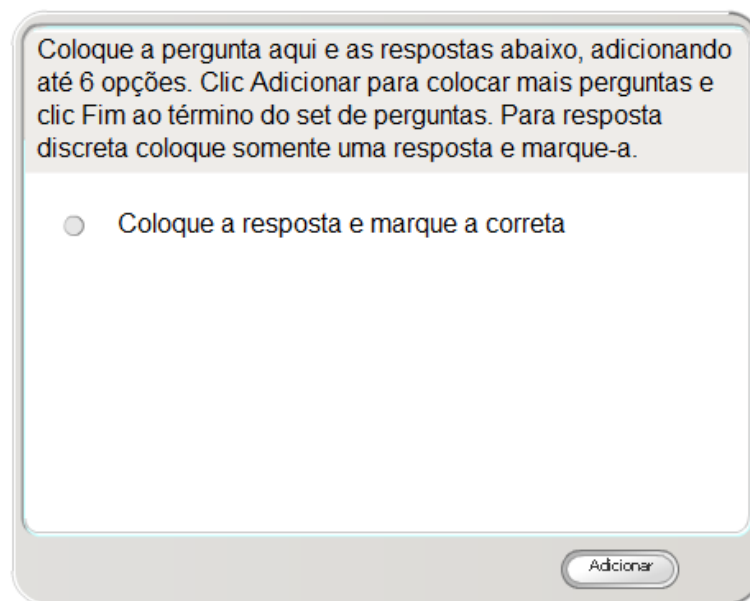
O término do TAC ocorre quando o fator de correção for tão pequeno que o valor da estimativa da habilidade do respondente ( $\theta$ ) se estabiliza obtendo-se um determinado grau de certeza na estimativa, ou seja, um Erro Padrão (EP) pequeno.

O erro padrão (EP) é computado pela equação  $EP = \frac{1}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 P(\theta) Q(\theta)}}$ .

Para o critério de parada foram definidos,  $\Delta\theta \leq 0,009$  e  $EP \leq 0,9$ , como parâmetros de satisfação para que o TAC interrompa a apresentação dos itens.

Como ferramenta auxiliar foi desenvolvido, em conjunto com o iQuiz, o iQuizcreate para facilitar a geração do arquivo *XML* do banco de questões. A Figura 18, apresenta a tela do iQuizcreate com a introdução de uma questão de resposta discreta. Para que haja uma efetiva utilização dos recursos computacionais, ferramentas auxiliares de autoria devem ser disponibilizadas para professores na forma de aplicativos que facilitem os trabalhos dos mesmos na criação das suas sequências didáticas, possibilitando uma efetiva aplicação dos trabalhos em estudo.

Figura 18 - Tela do iQuizcreate para uma pergunta com resposta discreta.



Coloque a pergunta aqui e as respostas abaixo, adicionando até 6 opções. Clic Adicionar para colocar mais perguntas e clic Fim ao término do set de perguntas. Para resposta discreta coloque somente uma resposta e marque-a.

- Coloque a resposta e marque a correta

Adicionar

Fonte: A pesquisa

## RELOAD - FERRAMENTAS DE AUTORIA

Sob o JISC<sup>14</sup> Exchange for Learning Programme (X4L), o projeto RELOAD desenvolve ferramentas baseadas em especificações técnicas para aprendizagem e é gerenciado pela Bolton University, do Reino Unido. O objetivo primário do projeto é facilitar a criação, o compartilhamento e reutilização de objetos de aprendizagens e serviços.

Do pacote de *softwares* disponíveis, neste trabalho, foi utilizado o editor *Clássic Reload* como ferramenta de autoria para construção do pacote SCORM de acordo com *design* instrucional investigado.

O *Reload* é uma ferramenta de autoria que permite que o designer instrucional do *e-learning* configure as regras de decisão, que o LMS se baseia, para apresentação dos objetos de aprendizagem, definidas no documento SCORM, nomeado de *imsmanifest.xml*.

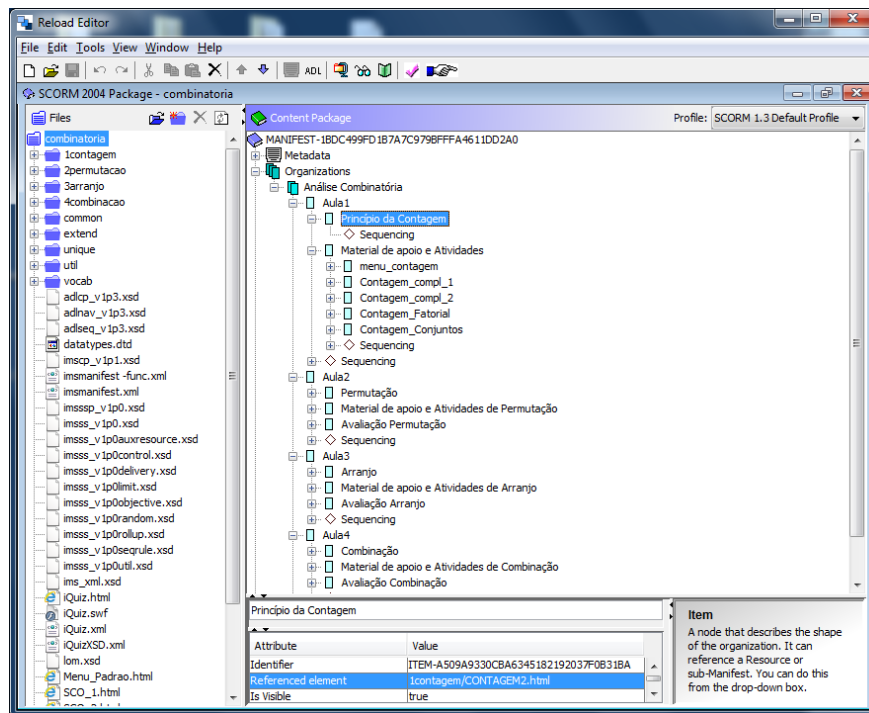
A lógica da sequência de apresentação dos objetos de aprendizagem, de modo que a mesma seja compatível com a sequência didática planejada, é configurada pela chave *Sequencing* e suas subchaves *Control Mode*, *Objectives*, *Rollup Rules* e *Sequencing Rules* das atividades componentes.

Na figura 19 apresenta-se a tela do *software* com o *e-learning* desenvolvido, em destaque tem-se o nó do Princípio Fundamental da Contagem e seus itens associados. O item *Princípio da Contagem* tem associado o arquivo *html* que faz a chamada do *flash* desenvolvido com o conteúdo do Princípio Fundamental da Contagem e o item *Material de apoio e atividades*, composto de cinco subitens, tem associado cinco *html* que fazem as chamadas para os respectivos arquivos *flash* com as atividades de apoio. Os demais módulos, além dos objetos didáticos, têm associados os itens de *Avaliação* que apresenta o Teste Adaptativo Computacional, para acompanhamento da aprendizagem dos respectivos conteúdos.

---

<sup>14</sup> Joint Information Systems Committee – comitê do Reino Unido composto de especialistas em tecnologias digitais da informação para educação e pesquisa.

Figura 19 - Tela do *Reload* com o Princípio Fundamental da Contagem e atividades associadas em destaque.



Fonte: A pesquisa

#### PLATAFORMA ELETRÔNICA DE APRENDIZAGEM ILIAS

A plataforma *ILIAS* (em alemão *Integriertes Lern-, Informations- und Arbeitskooperations-System* ou Aprendizagem Integrada, Informação e Sistema de trabalho cooperativo e Informação) é um LMS *open source*, baseado na *web* que gerencia conteúdos de aprendizagem (incluindo o SCORM 2004) e ferramentas de colaboração, avaliação e testes. O sistema é publicado sob a *GNU General Public License*<sup>15</sup> e roda em qualquer servidor que suporta a linguagem PHP<sup>16</sup> e base de dados MySQL<sup>17</sup>.

Desenvolvido desde 1997 pelo projeto VIRTUS (Virtuelle Universitätssysteme), na Cologne University, o LMS, pelo crescente interesse das universidades, foi então rebatizado, em 2000, para *ILIAS* e foi a primeira plataforma *open source*, sob os termos *GNU General Public License*, em conformidade com o SCORM 1.2, em 2004, e com o SCORM 2004, em 2007.

A plataforma *ILIAS* foi desenvolvida para ser um ambiente de aprendizagem *online*

<sup>15</sup> *GNU General Public Licenses* é um termo utilizado para designar programas que podem ser livremente distribuídos e sem necessidade de pagamentos pelo programa ou seu uso.

<sup>16</sup> PHP é uma linguagem de programação para servidores WEB.

<sup>17</sup> MySQL é uma base de dados relacional *open source*, sob os termos *GNU General Public Licenses*.



com ferramentas integradas, ampliando a ideia da aprendizagem vinculada a cursos, podendo ser considerada como uma biblioteca de materiais de aprendizagem, permitindo que seus conteúdos possam ser acessados por usuários cadastrados ou não, de acordo com a configuração do conteúdo inserido.

Relativo aos conteúdos, no padrão SCORM, a ferramenta apresenta uma interface simples e funcional, com opções para inclusão, gerenciamento dos arquivos componentes do pacote, configuração de comportamento dos cursos e uma interface para acesso às informações das atividades realizadas pelos alunos durante suas atividades.

A plataforma ILIAS disponibiliza ferramentas para administração e acompanhamento das atividades dos alunos durante os estudos. O SCORM define, no manual técnico *RUN-TIME ENVIROMENT* (ADLNET, 2011), todos os modos de comportamento do LMS, para a apresentação dos objetos de aprendizagem aos estudantes, os direitos de acesso e as informações mínimas que devem ser fornecidas ao designer instrucional ou administrador do *e-learning* ativo.

As informações que um LMS deve armazenar e informar são:

- *Learner Attempt* – informação referente ao número acumulado de tentativas do estudante para a realização das atividades do *e-learning*,
- *Learner Session* – tempo ininterrupto de acesso da última sessão à atividade,
- *Communication Session* – a conexão entre uma atividade e interface do LMS de atualização do *status*,
- *Login Session* – período de tempo da última sessão do aluno.

#### MATERIAL DE APOIO RIVED

Os materiais de apoio estão disponíveis para o aluno como objetos de aprendizagem auxiliares e/ou complementares para a aprendizagem dos conteúdos de Análise Combinatória. Para os conceitos de Permutação Simples, Arranjo Simples e Combinação Simples, além dos produzidos pelo autor, foram disponibilizados materiais da RIVED, um programa da Secretaria de Educação a Distância (SEED), que tem por objetivo a produção e a publicação na *WEB*, para acesso gratuito, de conteúdos pedagógicos digitais, na forma de objetos de aprendizagem que primam por estimular o raciocínio e o pensamento crítico dos alunos, associando o potencial da informática às abordagens pedagógicas.

Os objetos de aprendizagem com os conteúdos de Permutação Simples, Arranjo Simples e combinação Simples, foram desenvolvidos em um trabalho conjunto entre a

Universidade Federal de Santa Maria e o Centro Universitário Franciscano sob a Coordenação Geral da Prof<sup>ª</sup>. Solange Binoto Fagan e Coordenação Pedagógica das Prof<sup>ª</sup>s. Carmen Vieira Martins, Prof<sup>ª</sup>. Eleni Bisognin e Prof<sup>ª</sup>. Vanilde Bisognin, estando disponíveis em <http://rived.mec.gov.br>.

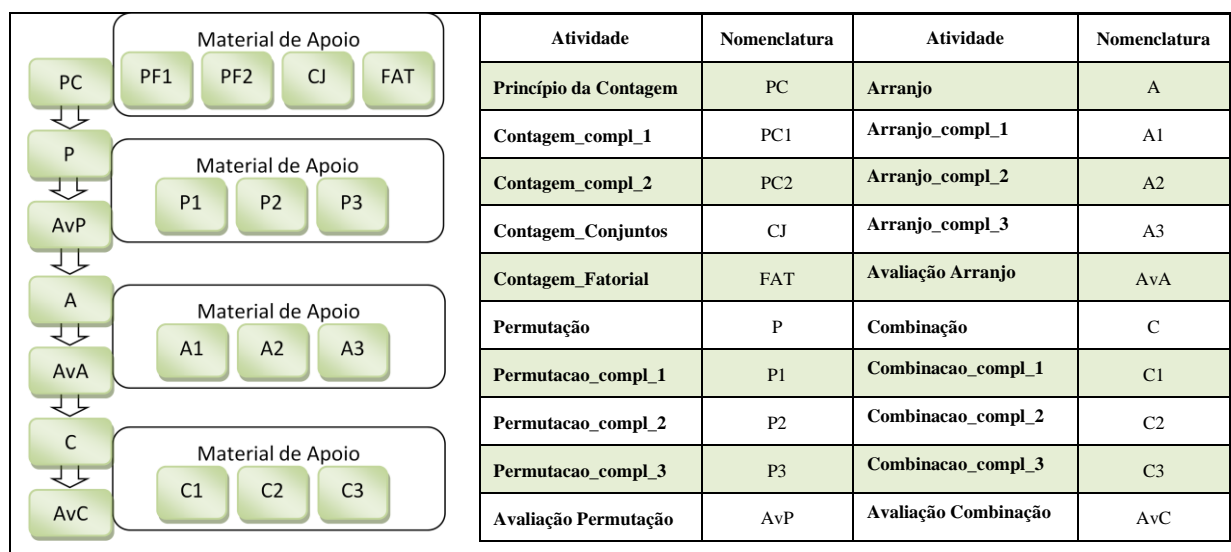
#### 4 SEQUÊNCIA DIDÁTICA COM O CONTEÚDO DE ANÁLISE COMBINATÓRIA

A sequência do *e-learnig* foi organizada em quatro módulos, o primeiro com o Princípio Fundamental da Contagem, o segundo com o conceito de Permutação Simples, seguindo de Arranjo Simples e Combinação Simples. O acompanhamento da aprendizagem é realizado ao final de cada módulo através de um Teste Adaptativo Computacional que é apresentado ao aluno quando o mesmo está seguro para submeter-se à avaliação, exceto no módulo do Princípio Fundamental da Contagem que não possui um teste associado.

Ao final do teste, a interface informa ao aluno a estimativa da sua habilidade baseada na Teoria de Resposta ao Item. Adotou-se a linha de corte da habilidade em 3, dentro de uma escala de 1 a 5, ou seja, a atividade avaliação é considerada *satisfeita* para um valor igual ou superior a 3.

Na Figura 20 apresenta-se a organização dos módulos de estudo e os objetos de aprendizagem para a sequência didática com o conteúdo de Análise Combinatória.

Figura 20 - Organização dos objetos de aprendizagem.



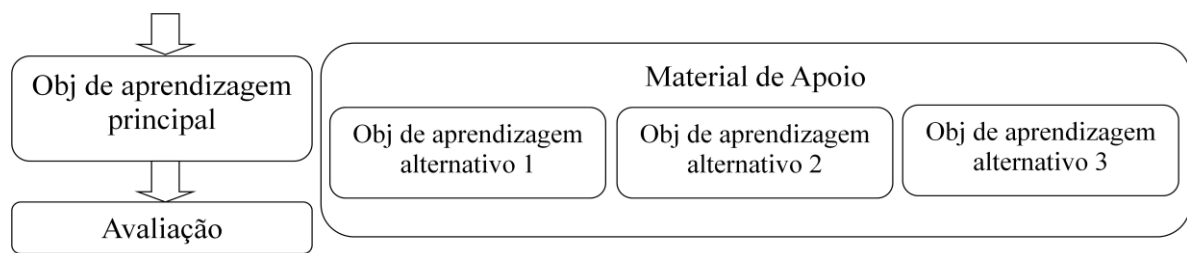
Fonte: A pesquisa

Para essa sequência didática foram utilizados vinte objetos de aprendizagem, três objetos de uso público da iniciativa RIVED e dezessete desenvolvidos pelo autor, abordando os principais conceitos da Análise Combinatória: o Princípio Fundamental da Contagem, Permutação Simples, Arranjo Simples e Combinação Simples. Também foram desenvolvidos mais dois objetos auxiliares usados indiretamente no desenvolvimento da sequência, a *Lousa Interativa*, para a construção dos vídeos tutoriais, e o *iQuizCreate*, para a geração do arquivo XML dos bancos de questões.

### ORGANIZAÇÃO DO E-LEARNING COM ANÁLISE COMBINATÓRIA

Os módulos de estudo foram organizados de acordo com a Figura 21, exceto para o Princípio Fundamental da Contagem que não tem disponível uma avaliação. Os módulos apresentam um objeto de aprendizagem denominado como principal, e outros objetos com abordagens diferenciadas para a aprendizagem do conceito estudado e disponibilizados como materiais de apoio, para que o aluno, quando julgar necessário, possa acessá-los.

Figura 21 - Organização dos módulos de aprendizagem



Fonte: A pesquisa

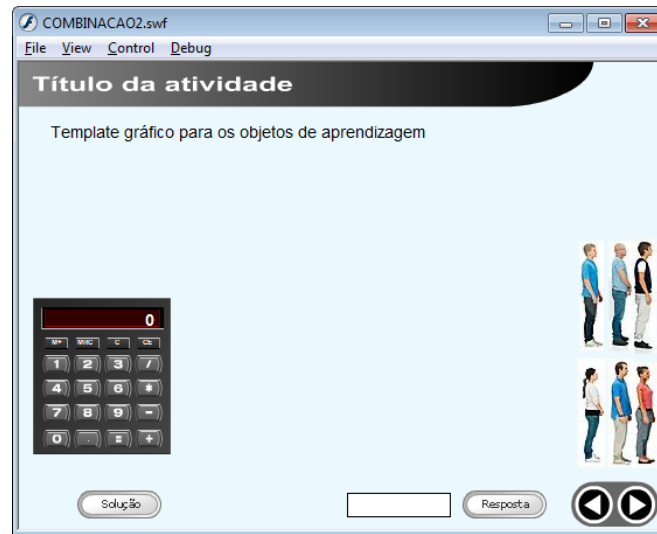
Os objetos de aprendizagem principais, assim como os da RIVED (alternativos 1 e 3), foram desenvolvidos para que aluno construa os conceitos, com a apresentação de situações problema associados a atividades de manipulação de objetos virtuais.

Os objetos de aprendizagem principais são baseados nas atividades descritas por Batanero, Godino e Pelayo (1996), com a apresentação de problemas combinatórios. Os objetos, denominados como alternativo 1, apresentam atividades interativas para a construção de agrupamentos usando objetos geométricos e análise dos mesmos para o entendimento dos conceitos envolvidos. Os objetos (alternativo 2) são materiais mais explicativos, com a apresentação de problemas e soluções através de matrizes e árvores de possibilidades, visando os alunos que necessitam de recuperação dos conceitos já estudados.

### TEMPLATE DOS OBJETOS DE APRENDIZAGEM

Os objetos de aprendizagem, desenvolvidos pelo autor, foram concebidos com base em um *template* (modelo gráfico), conforme Figura 22, com funções básicas comuns a todos. O *template* tem um fundo azul por ser menos cansativo aos olhos que o fundo branco e menos contrastante que o fundo preto, todas as páginas possuem botões de navegação para paginação do material apresentado e, ao final, um botão de término associado a uma função em *javascript* que informa ao *LMS* que a atividade está completa. As páginas foram elaboradas sem o uso de conteúdos maiores que a área de tela, evitando o uso de rolagens para leitura e mantendo a informação necessária integralmente na tela facilitando a visualização.

Figura 22 - *Template* gráfico utilizado para desenvolvimento dos objetos de aprendizagem



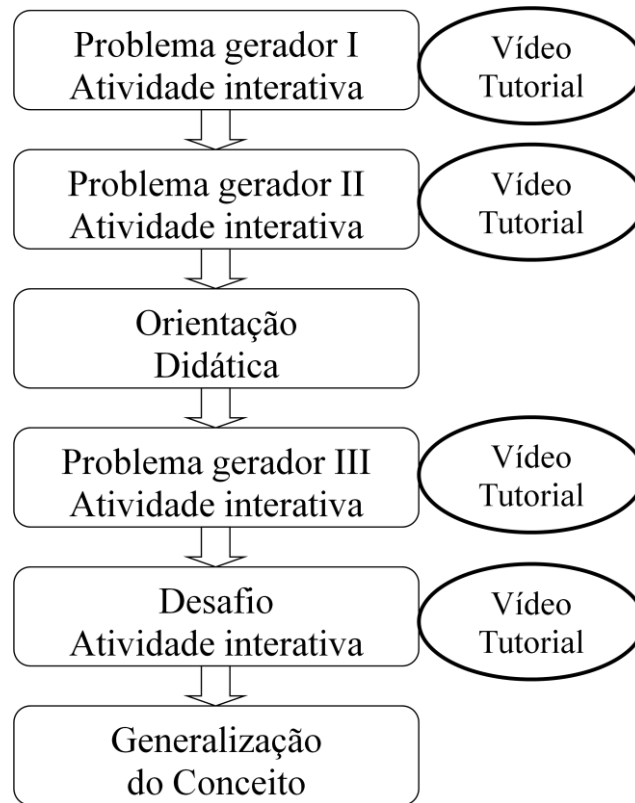
Fonte: A pesquisa

#### OBJETOS DE APRENDIZAGEM DESENVOLVIDOS

Os objetos de aprendizagem, denominados como principais, foram elaborados com a apresentação de situações problema associados à atividades interativas possibilitando a manipulação dos objetos, seguindo as recomendações de Batanero, Godino e Pelayo (1996). Na Figura 23 é apresentada a estrutura básica dos objetos de aprendizagem desenvolvidos.

O primeiro problema, denominado problema gerador, apresenta o conceito a ser estudado, propondo uma situação com uma solução enumerável, e uma atividade interativa, com a manipulação de objetos virtuais para a construção dos agrupamentos. A construção dos agrupamentos pelas atividades interativas tem a intenção de, através da visualização, facilitar na generalização para a enumeração das soluções.

Figura 23 - Estrutura básica dos objetos de aprendizagem



Fonte: A pesquisa

Na sequência é apresentado um segundo problema gerador, com um número maior de agrupamentos, aumentando a dificuldade na solução, associado a uma atividade interativa para a construção dos agrupamentos pela manipulação dos objetos virtuais. A apresentação do problema ampliado tem a intenção de proporcionar situações de maneira que, pela visualização, o aluno busque a generalização, até desenvolver a competência de, segundo Batanero, Godino e Pelayo (1996), contar sem contar.

Após a apresentação do primeiro problema e sua variante é apresentado uma orientação didática do conceito seguido de um desafio, um problema com maior grau de dificuldade e por fim a generalização do conceito combinatório.

Em todos os problemas propostos nos principais objetos de aprendizagem, o aluno tem a possibilidade de, caso sinta necessidade, acessar um vídeo tutorial, com a explicação da solução do problema proposto. Nos vídeos tutoriais são apresentadas as construções dos agrupamentos, árvores de possibilidades, diagramas, desenhos e explanações, por legendas ou áudio, usando o Princípio Fundamental da Contagem, de maneira que o aluno possa desenvolver a capacidade de generalizar soluções para os problemas combinatórios.

Os objetos de aprendizagem, utilizando elementos geométricos, apresentam

atividades com a enumeração das possibilidades através da construção de agrupamentos e contagem das situações para diferentes quantidades de elementos, permitindo que o aluno generalize a lei de formação.

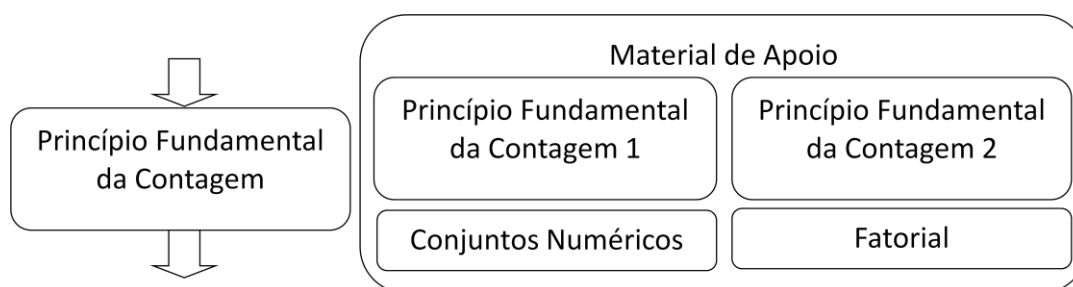
A apresentação de caráter explicativo, como os materiais de apoio 2, apresentam as árvores e matrizes de possibilidades para o entendimento dos conceitos básicos da Análise Combinatória, dando ênfase na recuperação dos conceitos apresentados.

A seguir apresentam-se as atividades instrucionais utilizadas na sequência para os conceitos: Princípio Fundamental da Contagem, Permutação Simples, Arranjo Simples e Combinação Simples.

#### 4.1.1 Princípio Fundamental da Contagem

Para o Princípio Fundamental da Contagem apresenta-se um problema de agrupamento com repetição de elementos, de maneira que a solução seja obtida mediante uma sequência de multiplicações repetidas. Segundo Fischbein e Gazit citado por Batanero, Godino e Pelayo (1996), uma vez introduzido o princípio da contagem com e sem a repetição de elementos é possível apresentar os demais problemas combinatórios, começando pela Permutação. As atividades estão organizadas conforme Figura 24, com a apresentação do objeto de aprendizagem principal e os demais disponíveis como material de apoio.

Figura 24 - Organização do módulo o Princípio fundamental da Contagem



Fonte: A pesquisa

Como sugerido por Fischbein e Gazit apud Batanero, Godino e Pelayo (1996), para o Princípio Fundamental da Contagem organizou-se a sequência primeiramente com um problema gerador na forma de um Arranjo com Repetição com objetos numéricos com o seguinte enunciado:

- Um determinado odômetro (como o medidor de quilometragem dos carros) tem um mostrador de 3 dígitos. Considerando os números com zeros a esquerda, quantos números

diferentes de 3 dígitos podem ser gerados usando os dígitos de 0 a 9 nesse determinado odômetro?

Na sequência são apresentados dois problemas condicionais com repetição de elementos, um que exclui os números de um e dois dígitos, e o outro que restringe os números disponíveis para os agrupamentos. Os problemas têm, respectivamente, os seguintes enunciados:

- Quantos "números" de 3 dígitos podem ser gerados usando os dígitos de 0 a 9?
- Agora, se pudesse ser usado somente os dígitos 1, 2 e 3 quantos números diferentes poderiam ser construídos?

Para o segundo grupo de problemas geradores são apresentadas as seguintes situações:

- Um colégio tem 5 equipes que querem montar bandeiras com 3 faixas para identificarem-se durante as competições. O colégio dispõe de tecidos de 3 cores diferentes: AZUL, AMARELA e VERDE. Quantas bandeiras de 3 faixas distintas, isto é, sem que se repitam as cores, podem ser feitas?
- Com 3 cores conseguimos fazer 6 bandeiras diferentes que são suficientes para as 5 equipes. Agora determine quantas bandeiras diferentes de 3 listas podem ser feitas com 4 cores.

Estes problemas, diferente dos anteriores, introduzem a ideia da condição de agrupamentos com elementos distintos, ou seja, sem repetição de elementos. A Figura 25 apresenta a tela da atividade interativa para o problema das bandeiras.

Figura 25 - Tela da atividade interativa para o problema gerador das bandeiras.



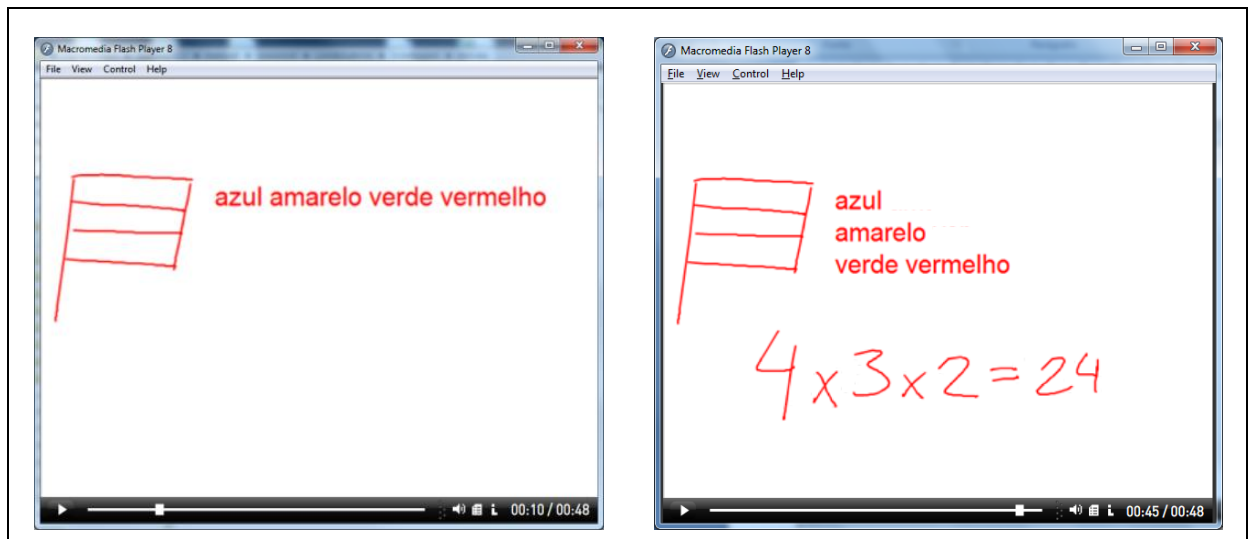
Fonte: A pesquisa



Para a construção das soluções possíveis, o aluno deve clicar na cor desejada, posicionar a mesma em uma área livre na tela de interação e clicar novamente para fixar a faixa no lugar desejado. Caso seja feita uma construção equivocada, basta clicar na faixa errada para que ela seja excluída da tela.

Para responder aos problemas geradores, um valor, no caso um número inteiro, deve ser informado na caixa de texto na parte inferior da tela, e a seguir, deve ser pressionado o botão *Resposta*. Caso a resposta seja incorreta, uma informação auxiliar é apresentada no lugar do enunciado. Se necessário, o vídeo tutorial com a solução do problema é apresentado ao clicar no botão *Solução*. Na Figura 26 apresenta-se uma sequência de telas do vídeo tutorial, feito com explicações em áudio, para o problema das bandeiras.

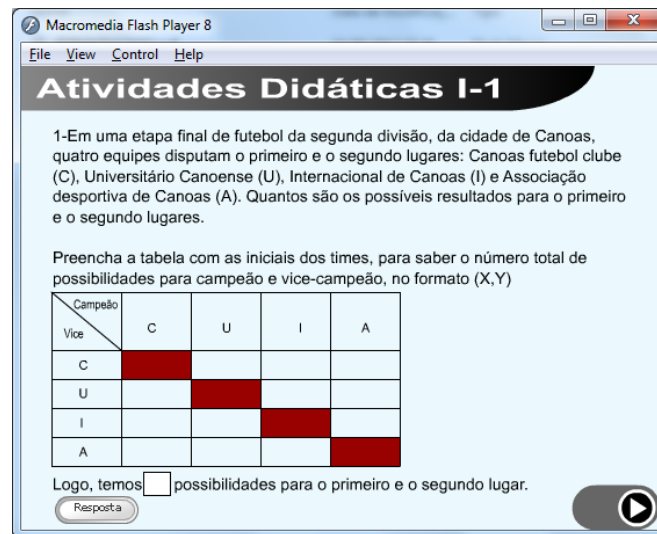
Figura 26 - Vídeo tutorial com a explicação da solução do problema das bandeiras



Fonte: A pesquisa

Para o conteúdo do Princípio Fundamental da Contagem tem-se disponíveis mais dois objetos de aprendizagem na forma de material de apoio que trabalham com construções tabulares e árvores de possibilidades em problemas com um menor grau de dificuldade, como apresentado na Figura 27.

Figura 27 - Problema do objeto de aprendizagem alternativo



**Atividades Didáticas I-1**

1-Em uma etapa final de futebol da segunda divisão, da cidade de Canoas, quatro equipes disputam o primeiro e o segundo lugares: Canoas futebol clube (C), Universitário Canoense (U), Internacional de Canoas (I) e Associação desportiva de Canoas (A). Quantos são os possíveis resultados para o primeiro e o segundo lugares.

Preencha a tabela com as iniciais dos times, para saber o número total de possibilidades para campeão e vice-campeão, no formato (X,Y)

| Campeão \ Vice | C | U | I | A |
|----------------|---|---|---|---|
| C              |   |   |   |   |
| U              |   |   |   |   |
| I              |   |   |   |   |
| A              |   |   |   |   |

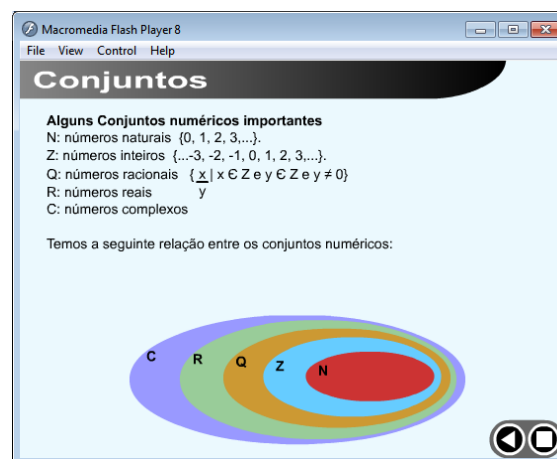
Logo, temos  possibilidades para o primeiro e o segundo lugar.

Resposta

Fonte: A pesquisa

Além dos materiais com o Princípio Fundamental da Contagem, foram disponibilizados na forma de materiais de apoio, para que o aluno possa estudar caso seja necessário, o conceito dos principais Conjuntos Numéricos, suas definições (Figuras 28) e a operação de Fatorial (Figura 29), suas simplificações e a associação com o princípio multiplicativo.

Figura 28 - Material de apoio com o conteúdo de Conjuntos Numéricos



**Conjuntos**

**Alguns Conjuntos numéricos importantes**

N: números naturais  $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

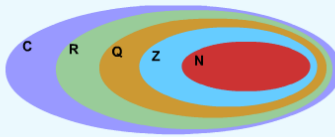
Z: números inteiros  $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ .

Q: números racionais  $\{\frac{x}{y} \mid x \in \mathbb{Z} \text{ e } y \in \mathbb{Z} \text{ e } y \neq 0\}$

R: números reais

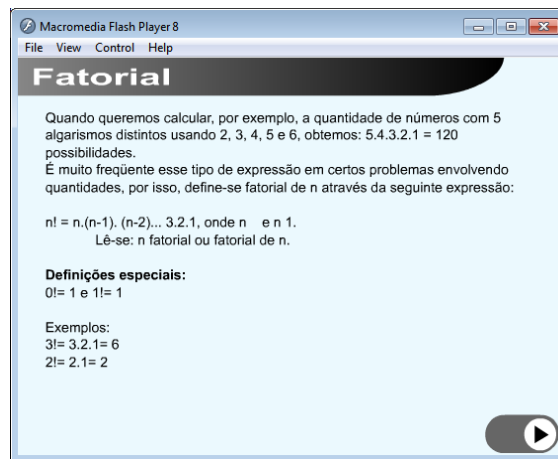
C: números complexos

Temos a seguinte relação entre os conjuntos numéricos:



Fonte: A pesquisa

Figura 29 - Material de apoio com a operação de Fatorial



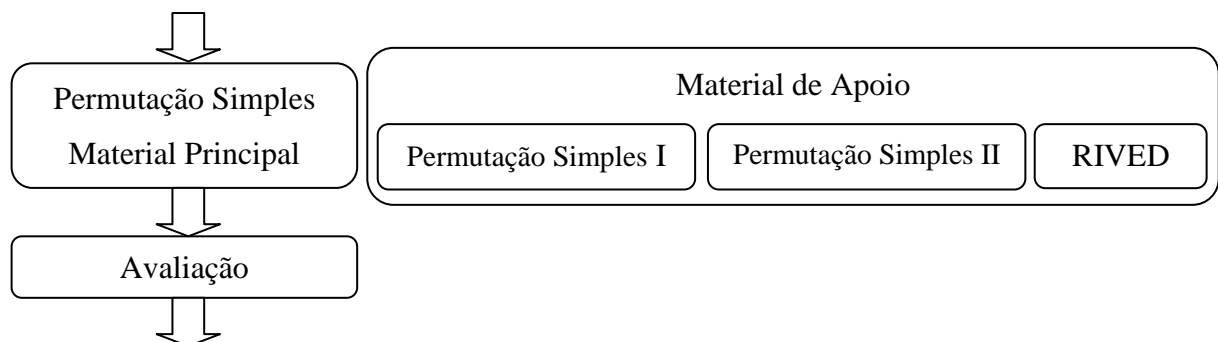
Fonte: A pesquisa

#### 4.1.2 Permutação Simples

Para o conceito de Permutação são apresentados como problemas geradores, duas situações de agrupamentos ordenados, questionando de quantas maneiras, as pessoas de um grupo, podem ser dispostas em uma fila, seguido de um problema de construção de anagramas, e de um desafio com um problema combinatório mais elaborado.

A Figura 30 apresenta a estrutura da sequência de apresentação para o conceito de Permutação Simples. Os materiais de apoio, com apresentações metodológicas diferenciadas, estão disponíveis para o aluno, que pode acessá-los ou não, de acordo com a percepção sobre sua própria aprendizagem.

Figura 30 - Estrutura de apresentação para a Permutação Simples



Fonte: A pesquisa

Os dois primeiros problemas geradores são:

- De quantas maneiras André, Carlos e Luis podem se organizar para formar uma fila?

- Se Jorge se juntar ao grupo, de quantas maneiras André, Carlos, Luis e Jorge podem se organizar para formar uma fila ?

A Figura 31 apresenta a tela do segundo problema gerador e a tela de interação associada. Para a manipulação dos objetos é usado a mesma interação de clicar, arrastar e soltar, como nas demais atividades.

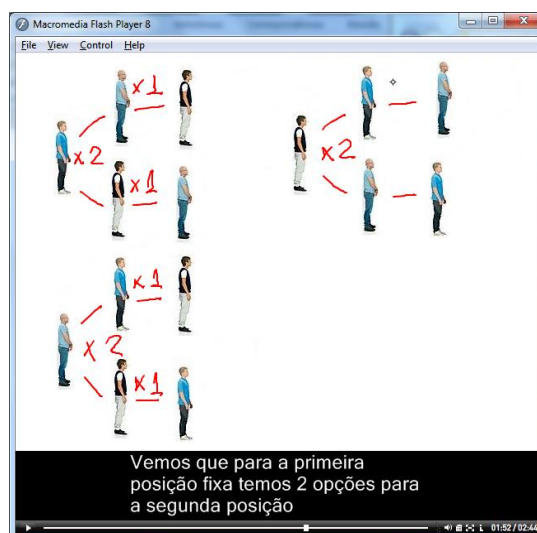
Figura 31 - Problema gerador da Permutação Simples



Fonte: A pesquisa

O vídeo tutorial do primeiro problema, Figura 32, demonstra a construção da árvore de possibilidades para a solução do primeiro problema, com o recurso de legendas explicativas.

Figura 32 - Vídeo tutorial do primeiro problema gerador

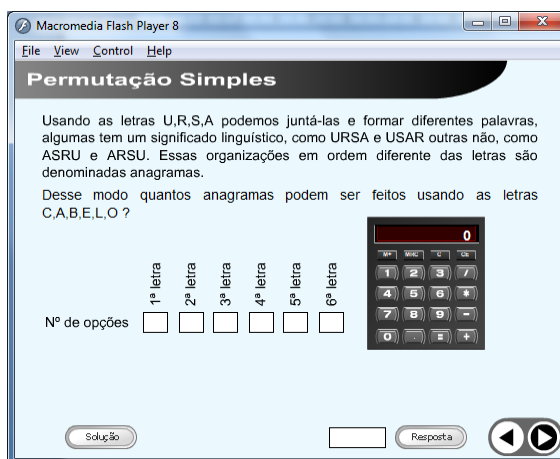


Fonte: A pesquisa

O terceiro problema gerador, Figura 23, apresenta um problema de anagrama com seis letras que, pela dificuldade de construção de todas as soluções possíveis, tem a intenção

de fazer com que o aluno tente a solução pela generalização, retomando a competência de contar sem contar. Uma calculadora é fornecida como ferramenta de apoio para auxiliar nos cálculos das possíveis soluções.

Figura 33 - Problema gerador da Permutação



Fonte: A pesquisa

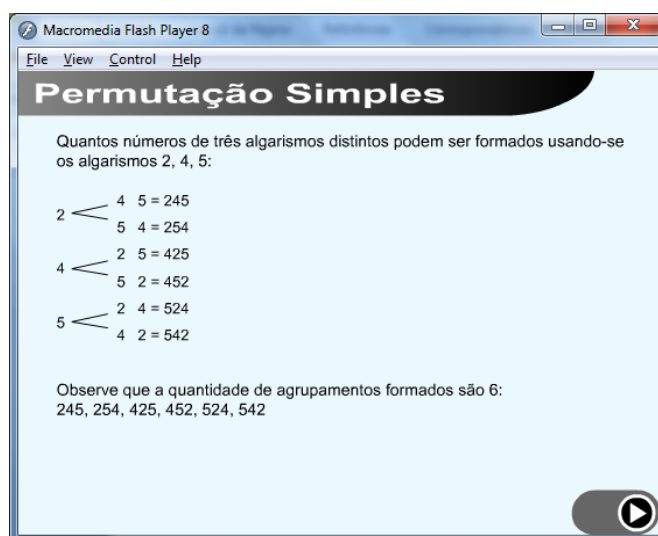
Como desafio é proposto o seguinte problema combinatório:

- De quantas maneiras podemos formar uma fila com 5 pessoas sendo que João e Maria são namorados e não se separam? Atenção que mesmo estando juntos, a ordem João e Maria é diferente de Maria e João.

O problema desafio, além de abordar o conceito de Permutação, tem a dificuldade adicional dada pela situação condicional do casal, de maneira que o aluno não fica preso à uma aplicação de fórmula ou padronização no modo de solucionar o problema, sendo necessário a partição do problema, cuja solução é dada pelo produto de duas permutações.

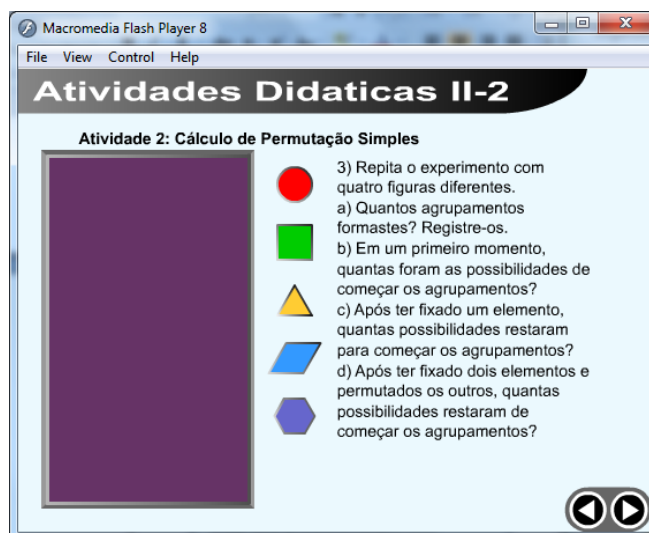
Como material de apoio estão disponíveis mais três objetos de aprendizagem, um com um material mais explicativo, que aborda a construção de árvores de possibilidades (Figura 34), um com atividades de construção de agrupamentos de elementos geométricos (Figura 35), e um objeto da iniciativa RIVED.

Figura 34 - Construção da árvore de possibilidades



Fonte: A pesquisa

Figura 35 - Construção de agrupamentos de elementos geométricos



Fonte: A pesquisa

O objeto de aprendizagem RIVED, com o conceito de Permutação, apresenta um problema de construção de anagramas (Figura 36) e um de organização de livros em uma estante (Figura 37). Os dois problemas são compostos de uma atividade interativa com a manipulação de objetos virtuais com uma ótima produção gráfica.

A interface dos objetos RIVED possui um menu no rodapé com os botões *Ajuda*, com instruções para a atividade, *Definição*, que apresenta a definição do conceito e a fórmula para o cálculo de uma Permutação Simples, *Atividades* com acesso rápido aos problemas e atividades, *Teste seus conhecimentos* que disponibiliza duas questões para verificar a compreensão do conceito de Permutação e *Calculadora* que ativa na tela uma calculadora.

Figura 36 - Problema de formação de anagramas do objeto RIVED



Fonte: RIVED

Figura 37 - Problema de organização de livros do objeto RIVED

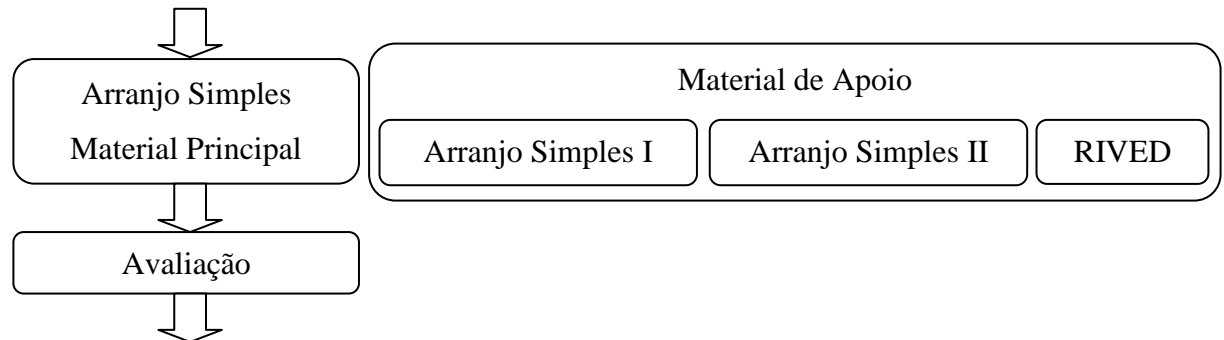


Fonte: RIVED

### 4.1.3 Arranjo Simples

O módulo de Arranjo Simples é organizado com os objetos de aprendizagem de acordo com a estrutura apresentada na Figura 38.

Figura 38 - Estrutura do módulo de Arranjo Simples



Fonte: A pesquisa

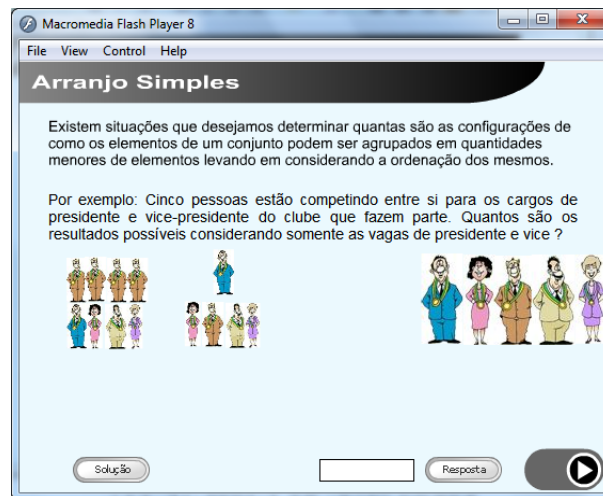
Para a o conceito de Arranjo Simples são apresentados como problemas geradores os seguintes problemas de contagem:

- Cinco pessoas estão competindo entre si para os cargos de presidente e vice-presidente do clube que fazem parte. Quantos são os resultados possíveis considerando somente as vagas de presidente e vice?
- Se a eleição incluir mais um cargo, quantos seriam os resultados possíveis para ocupar as vagas de presidente, vice e tesoureiro?

Os problemas combinatórios propostos permitem a contagem após a enumeração de todas as possibilidades, dado o pequeno número de soluções. Na Figura 39 é apresentado o primeiro problema gerador. Na área de interação, o aluno pode manipular os personagens para a construção dos agrupamentos, com a intenção de facilitar a visualização e ajudar na generalização do problema.



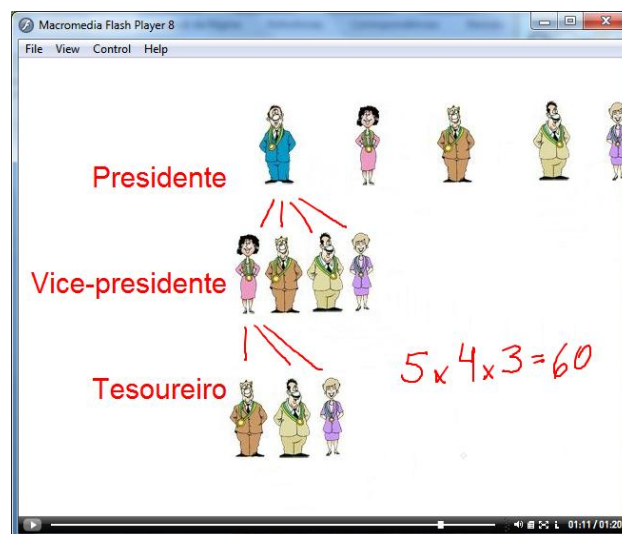
Figura 39 - Problema gerador do conceito de Arranjo Simples



Fonte: A pesquisa

Como recurso secundário, o aluno tem disponível o vídeo tutorial, Figura 40, que apresenta a solução do problema pela construção, com narrativa, da árvore de possibilidades.

Figura 40 - Vídeo tutorial do segundo problema gerador



Fonte: A pesquisa

O próximo problema gerador e o problema desafio têm os respectivos enunciados:

- Pensando assim, se em um país fictício as placas dos veículos são formadas por 2 letras (das 26 disponíveis) e 3 números (0-9), sendo que a placa terá letras e números distintos, ou seja, em uma mesma placa não haverá letras ou números repetidos, quantas placas podem ser feitas?
- De quantas maneiras diferentes 8 (OITO) pessoas podem ocupar um carro (levando em conta a posição da pessoa no carro) com 5 lugares, sendo que somente 3 delas dirigem?

Os problemas, também de contagem, elevam o grau de dificuldade, por utilizarem um conjunto maior de elementos que dificulta a enumeração para posterior contagem, além de ambos os problemas serem do tipo compostos, cuja solução é dada pelo princípio multiplicativo associado ao arranjo simples.

Como material de apoio, para o conceito de arranjo, estão disponíveis mais três objetos de aprendizagem, um com atividades geradoras de árvores de possibilidades, Figura 41, outra com atividades de agrupamentos de elementos geométricos, Figura 42, e um objeto de aprendizagem da iniciativa RIVED.

Figura 41 - Construção da árvore de possibilidades

Macromedia Flash Player 8

File View Control Help

## Arranjo Simples

Quantos números de dois algarismos distintos podem ser formados utilizando elementos do conjunto {1, 2, 3}?

Solução: Inicialmente, vamos usar a árvore de possibilidades

```

1  < 2 = 12
    < 3 = 13

2  < 1 = 21
    < 3 = 23

3  < 1 = 31
    < 2 = 32
  
```

Temos o conjunto {12, 13, 21, 23, 31, 32}, ou seja, existem 6 números distintos que podem ser formados utilizando elementos do conjunto {1, 2, 3}

Fonte: A pesquisa

Figura 42 - Construção de agrupamentos de elementos geométricos

Macromedia Flash Player 8

File View Control Help

## Atividades Didáticas II-2

### Atividade 3: Cálculo de Arranjo Simples

**Observações:**

- Arranjos simples diferem pela ordem, não podem repetir elementos.
- Desenhe todos os arranjos formados no decorrer desta atividade.

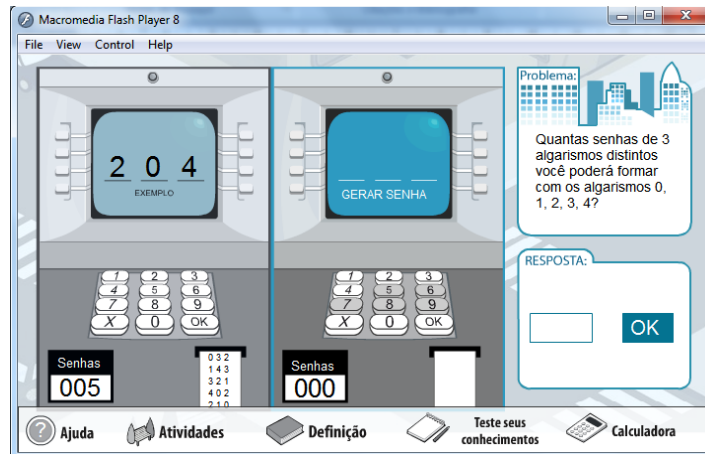
1) Tome dois elementos distintos e forme todos os arranjos possíveis de:

- Um elemento. Quantos formastes?
- Dois elementos. Quantos formastes?

Fonte: A pesquisa

O objeto de aprendizagem da iniciativa RIVED, apresenta dois problemas de contagem. Um dos problemas pede o número de senhas possíveis, Figura 43, para três algarismos distintos dentre um conjunto de quatro, com uma atividade interativa para enumeração das senhas possíveis. O outro problema, Figura 44, pede a contagem do número de placas de automóveis, considerando somente a parte numérica da placa.

Figura 43 - Problema de senhas do objeto RIVED



Fonte: RIVED

Figura 44 - Problema das placas do objeto RIVED

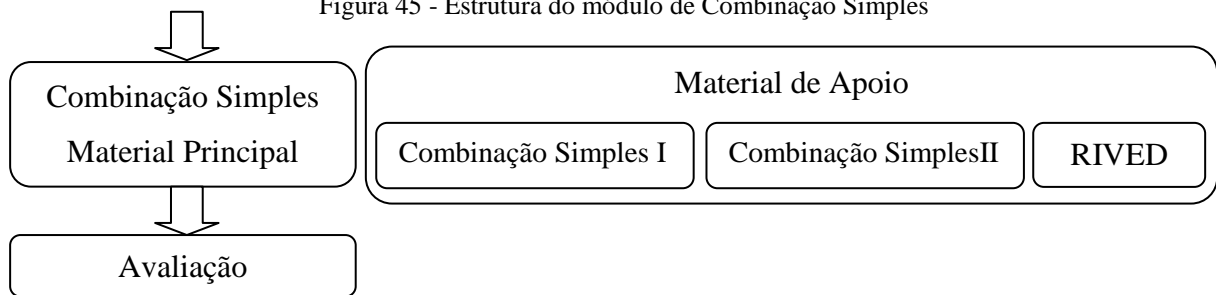


Fonte: RIVED

#### 4.1.4 Combinação Simples

Similar às estruturas dos demais conceitos apresentados, a estrutura do módulo para o conceito de Combinação Simples, está organizado de acordo com a Figura 45, é composto de quatro objetos de aprendizagem, três desenvolvidos pelo autor e um da iniciativa RIVED.

Figura 45 - Estrutura do módulo de Combinação Simples



Fonte: A pesquisa

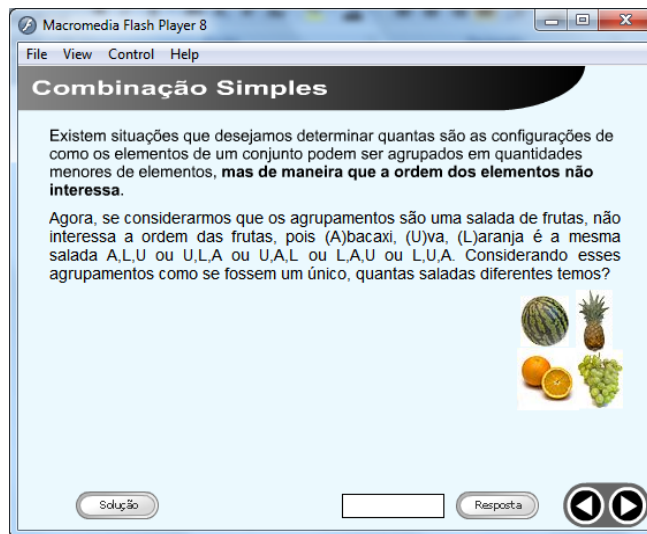
Os dois primeiros problemas geradores para o conteúdo de Combinação Simples apresentados no material principal tem os respectivos enunciados:

- Se temos 4 frutas diferentes em quantos grupos de 3 podemos arranjá-las? (Clic arraste e monte as configurações possíveis). Agora, se considerarmos que os agrupamentos são uma salada de frutas, não interessa a ordem das frutas, pois (A) abacaxi, (U) uva, (L) laranja é a mesma salada: A,L,U ou U,L,A ou U,A,L ou L,A,U ou L,U,A. Considerando esses agrupamentos como se fossem um único, quantas saladas diferentes são possíveis?
- Agora se tivermos 5 frutas disponíveis e usando somente 3 frutas, quantas saladas de frutas diferentes podem ser feitas?

O primeiro problema é apresentado em duas partes, na primeira o aluno é levado a construir todos os agrupamentos considerando a ordem dos elementos e a seguir, a contar como um único agrupamento todos os agrupamentos decorrentes da permutação dos mesmos elementos, ou seja, o conceito de Combinação Simples visto como um Arranjo Simples dividido por uma Permutação Simples. O problema é expandido com o aumento do número de elementos do agrupamento no segundo problema gerador para a generalização da solução do problema de Combinação Simples.

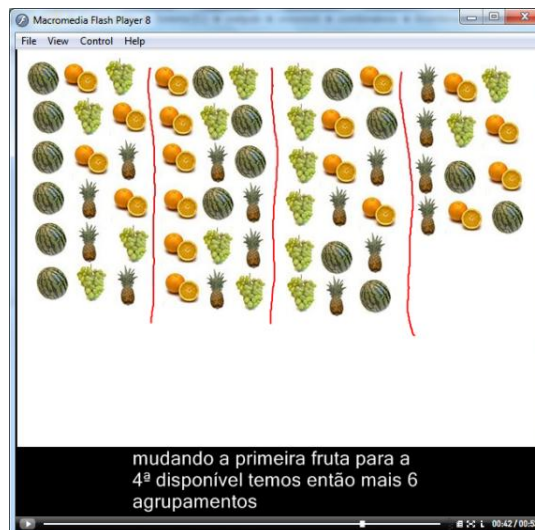
Na Figura 46 é apresentada a tela de interação do primeiro problema com a atividade de manipulação dos objetos virtuais para a construção dos agrupamentos e na Figura 47 uma captura de tela do vídeo tutorial associado ao problema.

Figura 46 - Problema gerador de Combinação Simples



Fonte: A pesquisa

Figura 47 - Vídeo tutorial associado



Fonte: A pesquisa

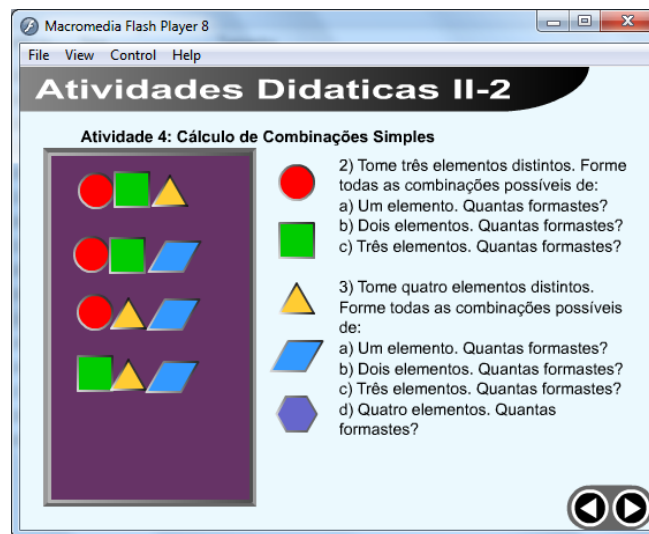
Para o terceiro problema gerador e para o desafio, são apresentados os problemas com os respectivos enunciados:

- Seis pessoas precisam atravessar um rio. No barco cabem quatro pessoas, de quantas maneiras diferentes pode ser feita a primeira travessia considerando que o barco vai cheio?
- Existem 8 candidatas, 4 homens e 4 mulheres, para formar um grupo de trabalho de 4 pessoas. Considerando que será formado um único grupo com 2 homens e 2 mulheres, de quantas maneiras esse grupo pode ser formado?

Como material de apoio estão disponíveis objetos de aprendizagem com diferentes abordagens metodológicas para o conceito de Combinação Simples. Na Figura 48 é

apresentada a atividade de construção de agrupamentos com elementos geométricos.

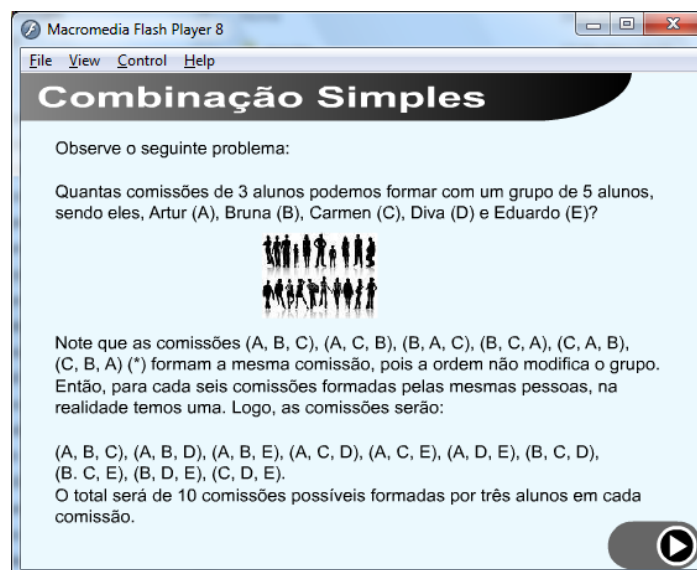
Figura 48 - Atividade de Combinação Simples com objetos geométricos



Fonte: A pesquisa

Além das atividades propostas para a construção do conceito de combinação, o objeto de aprendizagem (Combinação 2), apresenta o conceito de combinação de maneira mais explicativa com a construção de comissões (Figura 49) e apresentação das demonstrações para as fórmulas de Combinação Simples, decorrentes da razão entre um Arranjo Simples e uma Permutação Simples.

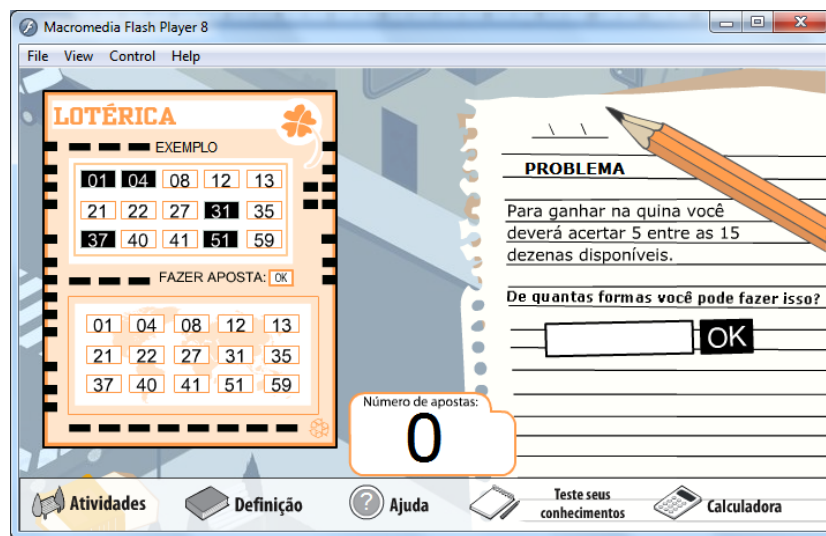
Figura 49 - Material de apoio do conteúdo de Combinação Simples.



Fonte: A pesquisa

Nas Figuras 50 e 51 são apresentados respectivamente os problemas do jogo da quina e da formação de ciclistas, do objeto de aprendizagem RIVED, com o conteúdo de Combinação Simples. No jogo da quina o aluno deve compor os agrupamentos de cinco elementos dentre os quinze disponíveis, pela grande quantidade de soluções o aluno é obrigado a generalizar para conseguir solucionar o problema. No problema das duplas de ciclistas, o número de soluções não é grande, mas por não ser possível representá-las na área destinada pela atividade, o aluno também é levado a generalizar para poder solucionar o problema.

Figura 50 - Problema da quina do objeto RIVED



Fonte: RIVED

Figura 51 - Problema de duplas do objeto RIVED



Fonte: RIVED

## 5 A EXPERIÊNCIA

A experiência foi realizada com 7 alunos da disciplina de Estágio em Matemática II, disciplina que desenvolve esse conteúdo, do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Luterana do Brasil. O experimento foi realizado no mês de junho, em aulas presenciais, 6 horas, com a mediação do professor e, em média, 8 horas aulas não presenciais.

A parte presencial do experimento foi realizada na sala de Tecnologias para a Aprendizagem do PPGEICIM, sala 227 do prédio 014 da ULBRA.

### ANÁLISE DOS RESULTADOS

Os dados para análise são provenientes da observação direta do pesquisador e do banco de dados da plataforma ILIAS que armazenou as informações das atividades dos alunos durante o experimento.

Para a validação da plataforma ILIAS foram coletadas informações com a observação dos alunos durante a parte presencial do curso sendo analisados aspectos como o comportamento da plataforma na apresentação do material e as interações dos alunos com a mesma. Para a validação da sequência didática e de navegação foram analisados os dados armazenados pela plataforma, disponíveis no menu de rastreamento do *e-learning*. Para a sequência de navegação foram analisadas as atividades acessadas pelos alunos e para a didática foi realizada uma análise mais detalhada através de ferramentas apropriadas de consulta a base de dados, e não disponíveis na plataforma, para verificar os *scores* dos alunos nos testes realizados.

As categorias de análise foram: plataforma de aprendizagem; sequência didática com Análise Combinatória; sequência de navegação dos estudantes.

#### 5.1.1 Plataforma de Aprendizagem

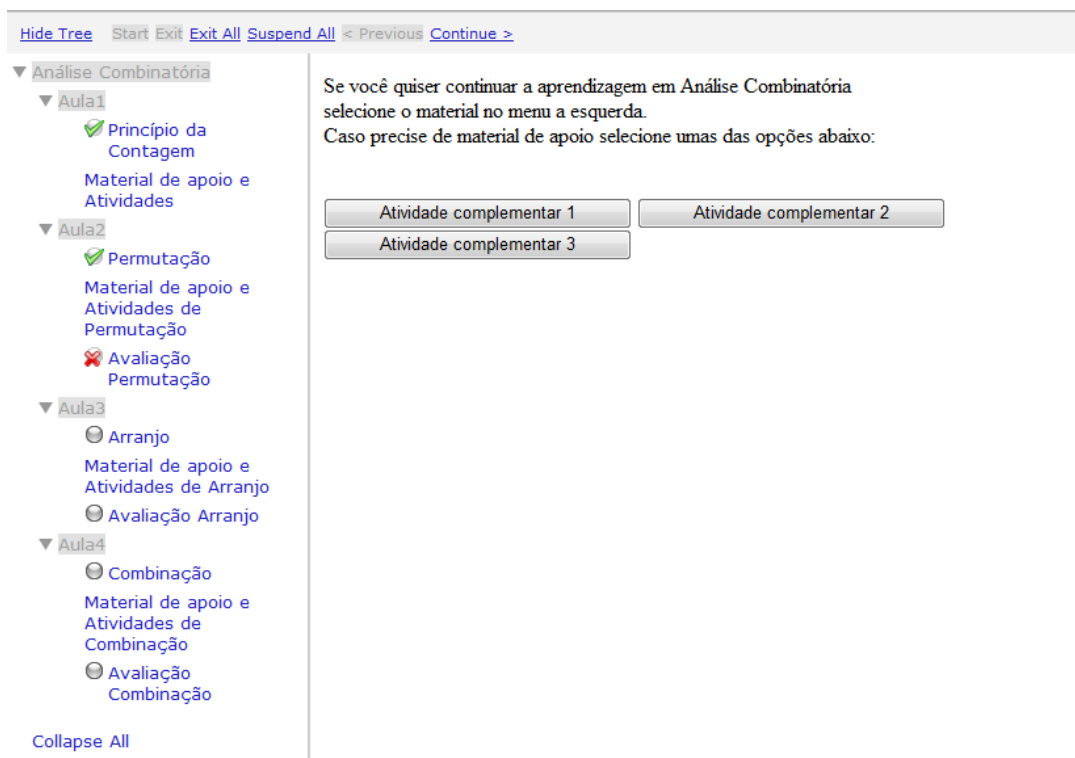
Para a validação da sequência de navegação foi analisado o comportamento da plataforma ILIAS, em relação à apresentação dos objetos de aprendizagem, durante as atividades presenciais, com o acompanhamento do pesquisador e do professor da disciplina, no desenvolvimento das atividades dos alunos durante o curso.

Observou-se que os alunos não tiveram nenhuma dificuldade de acesso à plataforma, bem como, com a navegação entre os menus apresentados pelo LMS. Segundo os alunos a interface foi bem intuitiva, e seus menus funcionais, permitindo o acesso direto à atividade proposta e o início do curso sem maiores explicações.



A tela de apresentação do curso (Figura 52) foi considerada agradável ao estudo com as opções de navegação entre as atividades de fácil acesso, conforme o menu superior.

Figura 52 - Tela do ILIAS, com a apresentação do *e-learning*



Fonte: A pesquisa

Os alunos pediram informações somente para a interrupção do curso, durante o intervalo das aulas, sendo necessária a intervenção do professor para esclarecimento da opção de suspender as atividades, *Suspend All*. Pelas características da plataforma, com os *status* possíveis de *completo* e *não completo*, foi informado aos alunos que a suspensão da atividade antes de seu término, acarretaria no *status* de *não completo*, logo, seria melhor finalizá-la antes da suspensão, mas que os mesmos poderiam retomá-la iniciando novamente o módulo apresentado sem nenhuma consequência ao andamento do curso, ficando à sua escolha a opção desejada. Também foi recomendado que o navegador não fosse fechado, pois o LMS consideraria a atividade em execução como *não completa*, sendo necessário finalizar a mesma no botão *término*, apresentado na última página do material para o mesmo fosse considerado como *completo*.

Durante o desenvolvimento do experimento foi monitorado a apresentação das atividades, que ocorreram de acordo com as regras programadas no pacote SCORM.

Foi identificado um problema, durante os testes anteriores ao experimento, relativo à

mudança do *status* para *completo* das atividades. Esse problema foi contornado com a atribuição de um *score*, possibilitando ao aluno o acompanhamento das atividades completas diretamente pela interface de apresentação.

A Figura 53 apresenta um exemplo de *status*, na plataforma ILIAS, das atividades de um aluno fictício, com a marcação cinza para *não executada*, em verde para *satisfeita*, amarela para *iniciada*, mas *não finalizada*, laranja para *em execução*, e vermelho para *não satisfeita*.

Figura 53 - Exemplo de *status* das atividades.

The screenshot shows the ILIAS interface. On the left is a navigation tree under 'Análise Combinatória' with sub-items 'Aula1' through 'Aula4'. 'Aula4' is expanded to show 'Combinação' (highlighted in orange), 'Material de apoio e Atividades de Combinação', and 'Avaliação Combinação'. The main content area displays the lesson 'Combinação Simples' with the following text:

Existem situações que desejamos determinar quantas são as configurações de como os elementos de um conjunto podem ser agrupados em quantidades menores de elementos.

Por exemplo: Se temos 4 frutas diferentes em quantos grupos de 3 podemos arranja-las? (Clic arraste e monte as configurações possíveis)

Below the text is an image of various fruits: a watermelon, a pineapple, two oranges, and a bunch of grapes. At the bottom of the interface, there is a 'Solução' button, a text input field, a 'Resposta' button, and a play button.

Fonte: A pesquisa

A configuração de autocadastro e liberação das atividades para usuários visitantes é um diferencial da plataforma, permitindo a liberação do curso sem maiores gerenciamentos por parte do administrador ou professor, possibilitando a disponibilidade do curso sem a necessidade de cadastramento prévio dos usuários, assim como, a liberação do curso para os usuários.

A plataforma ILIAS atendeu todos os requisitos do SCORM quanto à apresentação do curso e rastreamento das informações dos alunos. Informações adicionais como tempo acumulado do aluno para as atividades estão em processo de implementação pelos desenvolvedores do ILIAS que possibilitarão análises mais detalhadas dos tempos necessários para a aprendizagem dos conceitos. Nesse sentido, pode-se afirmar que a mesma é adequada

para apresentação de outros cursos no padrão SCORM.

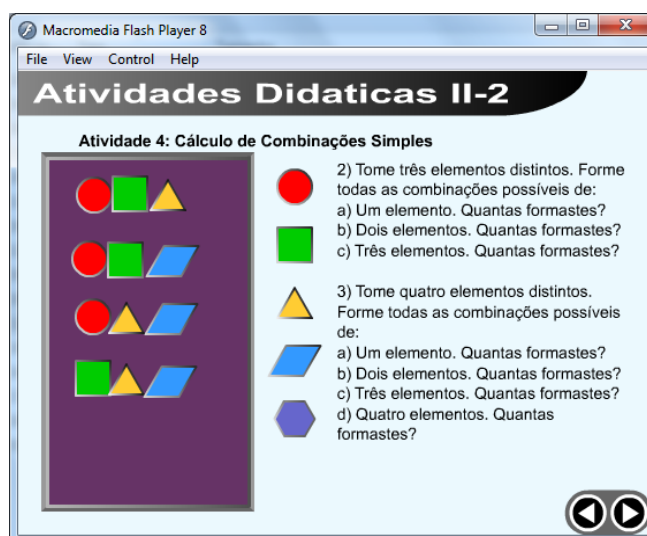
### 5.1.2 Sequência Didática com Análise Combinatória

A sequência didática desenvolvida seguiu as indicações de Godino, Batanero e Pelayo (1996) indicando o início das atividades pelo Princípio Fundamental da Contagem e a construção de árvores de possibilidades, seguindo em um segundo momento para os conceitos de Permutação Simples, depois Arranjo Simples e Combinação Simples.

Também, seguiu as indicações dos autores citados, na elaboração dos problemas geradores, que recomendam o uso de agrupamentos com números e letras e, em um segundo momento, o uso de comissões e confecção de bandeiras.

Fischbein e Cols apud Batanero, Godino e Pelayo (1996) utilizaram em seus estudos, além de números e letras, objetos geométricos, servindo como referência para o desenvolvimento dos objetos de aprendizagem e as atividades de construção de agrupamentos (Figura 54).

Figura 54 - Atividade com objetos geométricos



Fonte: A pesquisa

Durante o experimento observou-se que os alunos não apresentaram dificuldades na interpretação das atividades, não sendo necessária a intervenção do professor. Ao serem questionados sobre interface de apresentação do conteúdo matemático, todos os alunos afirmaram que as atividades estavam adequadas e de fácil interpretação. Afirmaram, também, que os botões de interação e navegação funcionaram adequadamente em toda a sequência desenvolvida.

Os alunos 3 e 4 afirmaram que ao acessarem os vídeos tutoriais, preferiram os com

áudio, pois ficou difícil ler e observar a realização dos agrupamentos, sendo necessário repassar os vídeos mais de uma vez, indicando que o uso de áudio é mais adequado para a aprendizagem, desde que seja feito uso de fones de ouvido durante as aulas presenciais.

Em relação ao TAC, 5 alunos relataram que as avaliações do conteúdo de Combinação Simples apresentaram questões iniciais consideradas, por eles, com nível de dificuldade elevada.

Através de ferramenta apropriada para consulta à base dados, foram coletados dados referentes aos *scores* das avaliações, sendo apresentados na Tabela 7.

Tabela 7 - *Scores* das avaliações dos alunos

| Avaliações |            |         |            |
|------------|------------|---------|------------|
| Nome       | Permutação | Arranjo | Combinação |
| Aluno1     | 4          | 4       | 3          |
| Aluno2     | 3          | 3       | 3          |
| Aluno3     | 3          | 4       | 3          |
| Aluno4     | 4          | 4       | 3          |
| Aluno5     | 3          | 3       | 2          |
| Aluno6     | 3          | 3       | 3          |
| Aluno7     | 4          | 3       | 2          |

Fonte: A pesquisa

Identificou-se que, para a avaliação de Permutação Simples, os alunos tiveram um *score* oscilando entre 3 e 4, característica presente no Arranjo Simples, mas para o conteúdo de Combinação Simples a maioria (5 alunos) tiveram seu *score* no valor mínimo, e dois alunos ficaram abaixo do valor mínimo.

Considerando que o nível de dificuldade três tem suas soluções obtidas pela decomposição em problemas menores de Combinação Simples e aplicação do Princípio Fundamental da Contagem, as análises indicam que o módulo para a aprendizagem do conteúdo de Combinação Simples, pode ser expandindo para abordar situações mais elaboradas, com ênfase na decomposição dos problemas em situações menores, em função do nível mínimo exigido ou, reconsiderar o valor para o nível dois, caso este seja considerado como a habilidade mínima desejada para o conceito de Combinação Simples.

Os enunciados e respectivas soluções para os problemas condicionais com nível de dificuldade três são apresentados a seguir:

- “Com 6 rapazes e 6 moças, quantas comissões de 5 pessoas podemos formar, tendo em cada uma delas pelo menos 3 moças?”. A estratégia para a solução consiste na soma das soluções de comissões compostas por  $1M+5R$ ,  $2M+4R$ ,  $3M+3R$ , para M as moças e R os rapazes, sendo que os agrupamentos são obtidos pelo produto das Combinações Simples, considerando somente as moças ou só os rapazes, dado por:  $1M=C(6,1)$ ,  $2M=C(6,2)$ ,  $3M=C(6,3)$ ,  $3R=C(6,3)$ ,  $4R=C(6,4)$  e  $5R=C(6,5)$ .
- “Com 2 goleiros que só jogam nessa posição e 7 jogadores que não jogam no gol, o número de times de futebol de salão que podem ser formados, sabendo que um time é composto de 5 jogadores, sendo um deles o goleiro, é?”. A solução para o problema é dado pela composição do Princípio Fundamental da Contagem e de uma Combinação Simples, ou seja, o produto da combinação dos 2 goleiros tomados 1 a 1 e a combinação dos 7 jogadores tomados 5 a 5.

Para os objetivos traçados para o conteúdo de Combinação Simples desenvolvido neste trabalho, o autor pretende futuramente desenvolver mais objetos de aprendizagem com a abordagem de estratégias para a identificação de situações com solução através do particionamento e tratamento como problemas menores.

### 5.1.3 Sequência de navegação dos estudantes

Através da interface de rastreamento do curso, na plataforma ILIAS, foi possível acompanhar as atividades acessadas pelos alunos, assim como, o *status* de aprovação ou não das avaliações de cada módulo.

Para acesso aos dados, de acompanhamento do aluno, foi utilizada a função *Tracking Data*, na tela de administração de cursos, com as informações do último acesso e número de vezes que o mesmo acessou o respectivo curso, *Learner Attempt*, conforme a Tabela 8.

Tabela 8 - Último Acesso e Número de Tentativas ao curso

| <i>Tracking Items</i> |                       |                  |
|-----------------------|-----------------------|------------------|
| Nome                  | Último acesso         | Nº de Tentativas |
| Aluno1                | 18 de Jun 2012, 12:09 | 9                |
| Aluno2                | 08 de Jul 2012, 09:47 | 7                |
| Aluno3                | 25 de Jun 2012, 13:43 | 11               |
| Aluno4                | 18 de Jun 2012, 15:46 | 11               |
| Aluno5                | 02 de Jul 2012, 12:58 | 7                |
| Aluno6                | 02 de Jul 2012, 12:29 | 7                |
| Aluno7                | 27 de Jun 2012, 10:29 | 9                |

Fonte: A pesquisa

Na mesma tela foi possível acessar informações detalhadas sobre o aluno em um

determinado curso, bastando clicar no nome a ser analisado. No detalhamento a ferramenta informa quais atividades foram acessadas e o tempo dispendido pelo usuário em cada uma delas, durante o último acesso de cada atividade.

Os dados para um dos participantes, denominado como *Aluno2*, e apresentado na Tabela 8, informa que o participante acessou o curso 7 vezes.

A Tabela 9 apresenta os tempos para as atividades do *Aluno2*. Para a atividade *menu* os tempos foram da ordem de segundos, pois é o tempo necessário para escolher, ou não, uma das atividades complementares. Como as atividades *menu* não tem um objetivo instrucional, as mesmas não são monitoradas em seu status de satisfeito (*passed*), motivo pelo qual a ferramenta retorna o status como desconhecido (*unknown*).

Tabela 9 - Informações de acesso do Aluno2 ao curso

| <b>Aluno2</b>         |               |             |
|-----------------------|---------------|-------------|
| <i>Title</i>          | <i>Status</i> | <i>Time</i> |
| Princípio da Contagem | passed        | 5 minutes   |
| menu_contagem         | unknown       | 7 seconds   |
| Contagem_compl_2      | passed        | 3 minutes   |
| Contagem_Fatorial     | passed        | 5 minutes   |
| Contagem_Conjuntos    | passed        | 38 seconds  |
| Permutação            | passed        | 14 minutes  |
| menu_permutacao       | unknown       | 2 seconds   |
| Permutacao_compl_1    | passed        | 6 minutes   |
| Avaliação Permutação  | passed        | 11 minutes  |
| Arranjo               | passed        | 22 seconds  |
| menu_arranjo          | unknown       | 3 seconds   |
| Arranjo_compl_1       | passed        | 2 minutes   |
| Avaliação Arranjo     | passed        | 16 minutes  |
| Combinação            | passed        | 46 seconds  |
| menu_combinacao       | unknown       | 4 seconds   |
| Avaliação Combinação  | passed        | 14 minutes  |

Fonte: A pesquisa

Pela característica da ferramenta de administração, que monitora e armazena o último tempo de acesso do aluno à atividade, e não o tempo acumulado durante os acessos, alguns dos tempos apresentam-se abaixo do esperado pela ação do aluno, que, por revisar o conteúdo, em seu acesso posterior ao primeiro, terminou por não dispendir muito tempo nas atividades.

Os dados de acesso dos estudantes participantes do experimento, relativos ao *e-*

*learning*, são apresentados, na Tabela 10, de forma consolidada com a informação dos tempos dispendidos pelos alunos, em seu último acesso, para cada uma das interações. As atividades não acessadas são representadas como células em branco. Por não agregarem maiores informações as atividades *menu* foram retiradas da apresentação dos dados coletados e consolidados.

Tabela 10 - Consolidação dos tempos do último acesso às atividades

|                       | Aluno 1  | Aluno 2  | Aluno 3  | Aluno 4 | Aluno 5  | Aluno 6  | Aluno 7  |
|-----------------------|----------|----------|----------|---------|----------|----------|----------|
| Princípio da Contagem | 26M44.9S | 5M5.8S   | 17M4.2S  | 9M12.6S | 23M3.8S  | 16M6.8S  | 9M1S     |
| Contagem_compl_1      |          |          | 2M15.2S  |         | 1M13.8S  | 18M44.5S | 12M32S   |
| Contagem_compl_2      |          | 3M41.2S  | 7M17.5S  |         | 16.5S    |          | 3M32.1S  |
| Contagem_Conjuntos    | 14M29.3S | 38.8S    | 3M7S     |         |          | 4M47.9S  | 2M25.8S  |
| Contagem_Fatorial     |          | 5M3.9S   | 5M16.1S  |         |          |          | 13M5S    |
| Permutação            | 11M1.9S  | 14M51.1S | 12M36.7S | 2.4S    | 22M31.7S |          | 7M38.5S  |
| Permutacao_compl_1    | 4M51.5S  | 6.5S     | 1M52.4S  | 5M52.6S | 3M0.4S   |          | 1M43.2S  |
| Permutacao_compl_2    |          |          |          |         |          |          |          |
| Permutacao_compl_3    |          |          |          |         |          |          |          |
| Avaliação Permutação  | 21M23.4S | 11M24S   | 13M19.3S | 21M6.6S | 24M4.7S  | 21M45.5S | 12M19.1S |
| Arranjo               | 19M1.6S  | 22.9S    | 3M48.6S  | 2.1S    | 14M1.5S  |          | 25.4S    |
| Arranjo_compl_1       |          | 2M40.7S  | 5M9.3S   | 5M27.3S |          |          | 3M31.4S  |
| Arranjo_compl_2       |          |          |          |         |          |          |          |
| Arranjo_compl_3       |          |          |          |         |          |          |          |
| Avaliação Arranjo     | 18M5.9S  | 16M42.6S | 18M1.1S  | 28M7S   | 17M5.5S  | 22M44.5S | 16M23S   |
| Combinação            | 17M4S    | 46.6S    | 19M10.4S | 4.3S    | 12M5.6S  | 19M32S   | 17M40.8S |
| Combinacao_compl_1    |          |          | 23M26.5S | 10.1S   |          | 21M17.8S | 7M28.2S  |
| Combinacao_compl_2    | 5M3.8S   |          | 11.3S    | 5.1S    |          | 11M20S   |          |
| Combinacao_compl_3    |          |          | 1M59.9S  | 4.1S    |          |          |          |
| Avaliação Combinação  | 23M6.9S  | 14M11.7S | 24M9.3S  | 26M4S   | 27M5.8S  | 28M43S   | 19M18.6S |

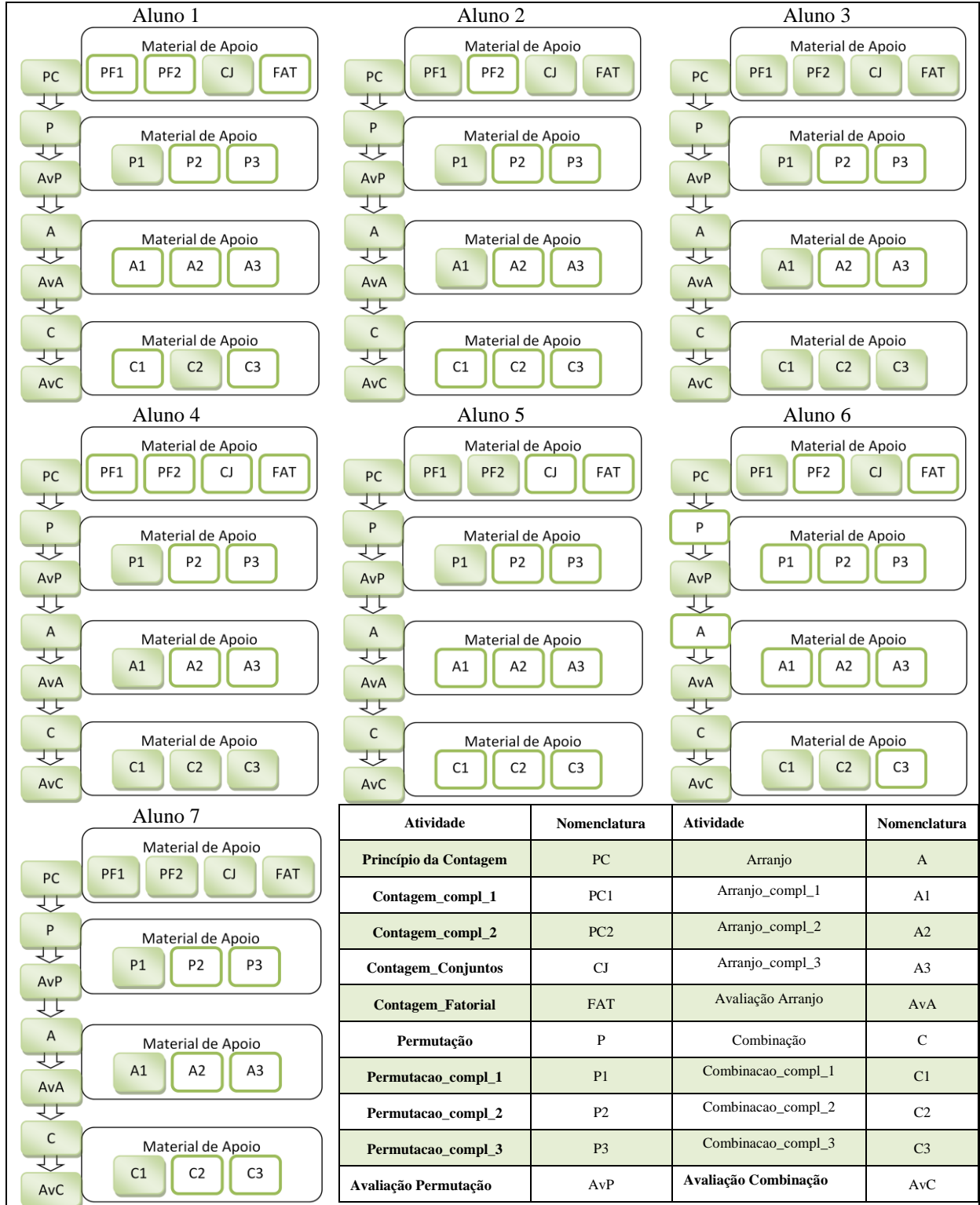
Fonte: A pesquisa

Analisando os dados de rastreamento dos alunos, verifica-se que os mesmos não acessaram todas as atividades disponíveis no curso de Análise Combinatória. A navegação diferenciada entre as atividades demonstra a ideia de multicaminhos como uma sequência individualizada de estudo.

O acesso mais numeroso às atividades complementares realizadas pelos alunos 3 e 7, assim como seus *scores* nas avaliações, demonstram que os mesmos tem um perfil de aprendizagem diferenciado dos demais alunos. O Aluno 6 não acessou nenhum dos objetos dos conteúdos de Permutação e Arranjo Simples, mas teve uma navegação mais intensa para a Combinação Simples. Os tempos de avaliação do Aluno 2 sugerem conhecimentos prévios dos conteúdos, assim como sua sequência de navegação.

Para melhor visualização das seqüências de navegação, desenvolvidos pelos alunos no experimento, apresenta-se a Figura 55.

Figura 55 - Diagramas de navegação dos alunos



Fonte: A pesquisa



Na Figura 55 os objetos acessados pelos alunos durante seus estudos estão marcados na cor verde, e os não acessados em branco. A maioria dos alunos acessou os objetos de aprendizagem complementares, antes dos testes, demonstrando que a oportunidade para autoavaliação prévia a submissão aos testes, pode ser uma alternativa à sequência linear de apresentação de conteúdos, controlados pelas plataformas eletrônicas de aprendizagem, que avaliam o aluno logo após o término do módulo de estudos.

## CONCLUSÃO

Este trabalho objetivou investigar uma alternativa à apresentação sequencial linear de conteúdos através do desenvolvimento de uma sequência didática valorizando a autoavaliação através de um *e-learning* que permita ao aluno a escolha dos objetos de estudo de acordo com a percepção sobre sua própria aprendizagem, permitindo desta maneira que cada aluno tenha uma sequência diferenciada de navegação entre os objetos de aprendizagem disponíveis. A apresentação dos materiais de estudo através de diferentes formas midiáticas, tem a intenção de proporcionar alternativas para a aprendizagem dos alunos, de acordo com suas preferências e necessidades educativas.

O uso de Testes Adaptativos Computacionais na sequência desenvolvida também é um diferencial do acompanhamento da aprendizagem do estudante que, na maioria das vezes é baseada na Teoria Clássica do Teste e infere as habilidades do aluno pelo número de acertos, não considerando a dificuldade das questões apresentadas. Nesta investigação o uso dos Testes Adaptativos Computacionais permitiu estimar as competências e habilidades dos alunos durante o seu processo de aprendizagem.

A escolha, por parte do aluno, do momento que o mesmo se submeterá ao teste, também valoriza a autoavaliação, proporcionando a possibilidade de visitar os materiais de estudo a qualquer momento dando maior segurança e confiança ao aluno permitindo uma melhor estimativa das habilidades desenvolvidas.

Os estudos da sequência de apresentação do *e-learning* demonstram que os alunos navegaram por diferentes objetos de aprendizagem, ou seja, realizaram uma sequência individualizada de estudos. A ideia dos multicaminhos permitiu ao aluno a aprendizagem de acordo com suas necessidades e capacidades de aprendizagem.

Optou-se pelo desenvolvimento do *e-learning* com o conteúdo matemático de Análise Combinatória considerando que a capacidade combinatória segundo Inherlder e Piaget apud Batanero, Godino e Pelayo (1996), é uma parte fundamental do pensamento

formal, pois constitui uma condição prévia para a elaboração da lógica proposicional e, também pelas dificuldades que os alunos enfrentam no estudo da mesma.

A apresentação dos conteúdos de Análise Combinatória com atividades interativas e a manipulação de objetos virtuais contextualizadas em problemas combinatórios, como os sugeridos por Batanero, Godino e Pelayo, foram, de acordo com os estudantes, relevantes na aprendizagem dos conceitos, assim como o uso dos objetos de aprendizagem com diferentes abordagens na apresentação dos conteúdos.

O uso dos recursos computacionais como as atividades interativas e os vídeos tutoriais, legendados e com suporte de áudio, foram considerados atraentes pelos alunos e servirão de referência para o desenvolvimento de novos objetos de aprendizagem, em outros conteúdos matemáticos.

Os estudos, com a adoção do padrão SCORM, tiveram a intenção de realizar uma proposta concreta de trabalho na forma de um *e-learning* que possa ser utilizada por qualquer instituição de ensino, motivo pelo qual também se optou pela plataforma eletrônica de aprendizagem de uso livre, ILIAS, em detrimento de plataformas proprietárias em conformidade com o padrão.

Foram abordados, no *e-learning* desenvolvido, os conceitos do Princípio Fundamental da Contagem, Permutação Simples, Arranjo Simples e Combinação Simples. Espera-se que este trabalho inicial seja expandido futuramente, permitindo o estudo da Análise Combinatória em sua totalidade, com a inclusão de problemas combinatórios com repetição de elementos, o princípio da inclusão e exclusão e o desenvolvimento de estratégias para o tratamento de situações complexas e solucionadas através da decomposição em problemas menores, assim como o uso efetivo para o ensino da Análise Combinatória.

Dessa forma, na análise dos resultados da investigação, verificou-se, em virtude dos objetivos declarados, que a pesquisa cumpriu seus propósitos. Apresentando um *e-learning* que valoriza a autoavaliação do aluno, com o tema matemático Análise Combinatória que é relevante à formação do pensamento formal.

## REFERÊNCIAS

ALMEIDA, Adriana Luziê de; FERREIRA, Ana Cristina. **Aprendendo análise combinatória através da resolução de problemas**: um estudo com classes de 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio. Disponível em:

<[http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/261-1-A-gt11\\_almeida\\_e\\_ferreira\\_ta.pdf](http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/261-1-A-gt11_almeida_e_ferreira_ta.pdf)>. Acesso em: 18 dez. 2010.

ANDRADE, Dalton Francisco; TAVARES, Heliton Ribeiro; VALLE, Raquel da Cunha. **Teoria da resposta ao item**: conceitos e aplicações. São Paulo: Associação Brasileira de Estatística, 2000.

ANDRIOLA, Wagner Bandeira. Uso de la teoría de respuesta al ítem (TRI) para analizar la equidad del proceso de evaluación de aprendizaje docente. **Revista Iberoamericana de Evaluación Educativa**, v.1, n.1, 2008. Disponível em:

<[http://www.rinace.net/riee/numeros/vol1-num1/art12\\_hm.html](http://www.rinace.net/riee/numeros/vol1-num1/art12_hm.html)>. Acesso em: 18 jan. 2011.

BAKER, Frank B. **The basics of item response theory**. 2. ed. [Washington, DC] : Eric, 2001.

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan Diaz; PELAYO, V. Navarro. Razonamiento combinatorio em alumnos de secundaria. *Educación Matemática*, México, v.8, n.1, abr. 1996. p. 26-39.

BRASIL, SECRETARIA DE EDUCAÇÃO MÉDIA E TECNOLÓGICA. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. PCN+ Ensino Médio. Brasília: MEC, SEMTEC, 2002.

BRASIL, GOVERNO FEDERAL. Notícias. Disponível em:

<<http://www.brasil.gov.br/noticias/arquivos/2011/03/29/universidades-vaoparticipar-da-ampliacao-de-questoes-nas-provas-do-enem>>. Acesso em: 21 abr. 2011.

CANTORAL, R. et al. **Desarrollo del pensamiento matemático**. México: Trillas, 2000.

CHACHAMOVICH, Eduardo. **Teoria de resposta ao item: aplicação do modelo Rasch em desenvolvimento e validação de instrumentos em saúde mental**. 2007. 288 f. Tese (Doutorado) Programa de Pós-Graduação em Ciências Médicas: Psiquiatria, Faculdade de Medicina, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

COSTA, Denise Reis. **Métodos estatísticos em testes adaptativos informatizados**. 2009. 107 f. Dissertação (Mestrado em Estatística) – Instituto de Matemática, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2009.

GROENWALD, Claudia Lisete Oliveira; ZOCH NETO, Lisiane; HOMA, Agostinho Iaqchan Ryokiti. Sequência didática com análise combinatória no padrão SCORM. **Bolema: Boletim de Educação Matemática**, Rio Claro, v. 22, n. 34, 2009. p. 27-56.

GROSSI, E. Assim não dá. **Nova Escola**, Ano XXIII, n. 214, p. 20-21, agosto de 2008.

HADAR, N; HADASS, R : The road to solving a combinatorial problem is strewn with pitfalls. **Educational Studies in Mathematics**, V 12, p 435-443, 1981.

HAMBLETON, R. K.; SWAMINATHAN, H. **Item response theory: Principles and applications**. Hingham, MA: Kluwer-Nijhoff, 1984.

HEINZE, Aleksej. **Blended learning: an interpretive action research study**. Submitted in Partial Fulfilment of the Requirements of the Degree of Doctor of Philosophy, University of Salford, Salford, UK, 2008.

HODGINS, H. Wayne. **The Future of Learning Objects**. Disponível em: <<http://www.reusability.org/read/chapters/hodgins.doc>>. Acesso em: 17 mai. 2008.

HOMA, Agostinho Iaqchan R. **Seqüência Didática com Análise Combinatória no Padrão Scorm**, 2008. Trabalho de Conclusão (Bacharelado em Matemática), Ulbra, Canoas, 2008.

HOMA, Agostinho Iaqchan R. **Testes Adaptativos no padrão SCORM com Análise Combinatória**, 2011. Monografia (Especialização em Ensino de Matemática), Ulbra, Canoas, 2011.

KHAN, Salman. **Khan Academy**. Disponível em: <<http://kahnacademy.org>>. Acesso em: nov 2011

KAPUR, J. N. : Combinatorial analysis and school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, V 3, p 111-127, 1970.

MACHADO, Antonio dos Santos. **Matemática temas e metas**. São Paulo: Atual, 1986.

MARQUES, Katia Antunes. **Análise bayesiana em modelos TRI de três parâmetros**. 2008. 78 f. Dissertação (Mestrado em Ciência - Concentração em Estatística) – Instituto de Matemática e Estatística, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2008.

MORGADO, A. C. et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: IMPA/VITAE, 2001.

MUNSIGNATTI JR., Mauro. Combinatória: números de soluções inteiras e não negativas de uma equação. **Revista do Professor de Matemática**. São Paulo: SBM, v.28, n.73, 3º quadrimestre, 2010.

NCTM. National Council of Teachers of Mathematics. **Estándares curriculares y de evaluación para la educación matemática**. Reston: NCTM, 1989.

REHAK , Daniel. **Implications for Instructional Design for Content Developers**. Disponível em: <<http://141.225.40.64/lisal/expertise/projects/developersguide/>>. Acesso em: 8 mar. 2008.

RIBNIKOV, K : **Análisis Combinatorio**. Moscou: Mir, 1988.

RIBNIKOV, K : **Análisis Combinatorio. Problemas y ejercicios**. Moscou: Mir, 1988.

RIVED. Objetos de aprendizagem. Disponível em <<http://rived.mec.gov.br/>> Acesso em jan 2011.

ROA, Rafael; PELAYO, Virginia Navarro. Razonamiento combinatorio e implicaciones para la enseñanza de la probabilidad. **Jornadas Europeas de Estadística**, Ilhas Baleares, 10 e 11 de out. 2001.

SANDS, William A.; WATERS, Brian K. Introduction to ASVAB and CAT. In: SANDS, William A.; WATERS, Brian K.; MCBRIDE, James R. (Eds.). **Computerized adaptive testing: from inquiry to operation**. Washington : American Psychological Association, 1997.

SANTOS, Fabricia; RIBEIRO Lucília G.; GUEDES, Leonardo G. R.; MARTINS, Weber. **Ferramenta avaliativa dinâmica a partir da teoria de resposta ao item**. Disponível em: <[http://wsmartins.net/ermacs/trabalho\\_22.pdf](http://wsmartins.net/ermacs/trabalho_22.pdf)>. Acesso em 12 jan. 2011.

SCORM 2004 4rd **Edition Content Aggregation Model**, version 1.1, Ago 2009.

Disponível em: <<http://www.adlnet.gov/>> Acesso em: mai. 2011.

SCORM 2004 4rd **Edition Sequencing and Navigation**, version 1.1, Ago 2009.

Disponível em: <<http://www.adlnet.gov/>> Acesso em: mai. 2011.

SCORM 2004 4rd **Edition Run-Time Environment**, version 1.1, Ago 2009. Disponível em: <<http://www.adlnet.gov/>> Acesso em: mai. 2011.

SOARES, Tufi Machado; GAMERMAN, Dani; GONÇALVES, Flávio Bambirra. Análise bayesina do funcionamento diferencia do item. **Pesquisa Operacional**, Rio de Janeiro, v.27, n.2, Maio/Ago. 2007. p. 271-291.

Software Flash 8.0. Disponível em: <<http://www.adobe.com/>> Acesso em: jan. 2010.

Software ILIAS. Disponível em: <<http://www.ilias.de/>> Acesso em: jun. 2010.

Software Moodle 2.0.2. Disponível em: <<http://www.moodle.org.br/>> Acesso em: jun. 2010.

Software RELOAD Disponível em: <<http://www.reload.ac.uk/new/editor.html>> Acesso em: jan. 2011.

WAINER, Howard. **Computerized adaptive testing: a primer**. New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 2000.

W3C. Ubiquitous web domain: Extensible markup language (XML), HyperText Markup Language (HTML). Disponível em: <<http://www.w3.org/XML/>>. Acesso em: 18 dez. 2010.

## **APÊNDICES**



## APÊNDICE 1

### Ficha de Observação

Data:

Local:

Observador:

Plataforma de Aprendizagem ILIAS:

- Acesso e interação do aluno à plataforma (Interface)

---

---

- Apresentação e regras de controle dos objetos de aprendizagem

---

---

Sequência Didática:

- A descrição das atividades estavam inadequadas, gerando dúvidas e consultas ao professor de como proceder?

|                                   | Instruções adequadas | Instruções inadequadas | Observação |
|-----------------------------------|----------------------|------------------------|------------|
| Princípio Fundamental da Contagem |                      |                        |            |
| Permutação Simples                |                      |                        |            |
| Arranjo Simples                   |                      |                        |            |
| Combinação Simples                |                      |                        |            |
| Testes                            |                      |                        |            |

-As atividades interativas das atividades apresentaram-se adequadamente?

---

---

Aula presencial:

- Os alunos interagiram entre si durante as aulas presenciais?

---

---

## APÊNDICE 2

Simulado de uma avaliação com o conteúdo de Arranjo Simples

1. Considerando os algarismos de 0 a 9, quantos números de 4 algarismos distintos podem ser formados, de forma que o algarismo mais significativo seja ímpar? (ex: 3XXX) – nível 3
  - a. Acerto, resp = 2520
2. Considerando os algarismos de 1 a 9, quantos números pares de 5 algarismos distintos podem ser formados, sendo que os mesmos devem iniciar com um algarismo ímpar. (ex;3XXX2; 5XXX4) – nível 4
  - a. Acerto, resp = 4200
3. De quantas maneiras os 5 assentos numerados podem ser ocupados por 7 pessoas sendo 3 delas uma família que sempre se senta junta ? – nível 5
  - a. Acerto, resp = 216
4. Existem 10 cadeiras numeradas de 1 a 10. De quantas formas duas pessoas podem se sentar, devendo haver ao menos uma cadeira entre elas? – nível 5
  - a. Acerto, resp = 72

### **Habilidade estimada em 5**

Simulado de uma avaliação com o conteúdo de Combinação Simples

1. Escolhemos cinco números, sem repetição, dentre os inteiros de 1 a 20. Calcule quantas escolhas distintas podem ser feitas, sabendo que ao menos dois dos cinco números selecionados devem deixar um mesmo resto quando divididos por 5. – nível 3
  - a. Erro, resp = 14480
2. Com as letras da palavra MAGNITUDE, quantos grupos de quatro letras pode-se formar de modo que em cada grupo tenha exatamente duas vogais? – nível 2
  - a. Acerto, resp = 60
3. Um grupo tem 10 pessoas. Quantas comissões de, no mínimo, 4 pessoas podem ser formadas, com as disponíveis? – nível 3
  - a. Acerto, resp = 848
4. Com 6 rapazes e 6 moças, quantas comissões de 5 pessoas podemos formar, tendo em cada uma delas pelo menos 3 moças? – nível 3
  - a. Acerto, resp=396

5. Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 quantos números distintos, tomados 4 a 4, têm o dígito 1 em qualquer posição a esquerda do 4? – nível 4
- a. Erro, resp = 72
6. Uma empresa tem 3 diretores e 5 gerentes. Quantas comissões de 5 pessoas podem ser formadas, contendo no mínimo um diretor? – nível 3
- a. Acerto, resp = 55

**Habilidade estimada em 3**