UNIVERSIDADE LUTERANA DO BRASIL
PRÓ-REITORIA DE PESQUISA E PÓS-GRADUAÇÃO
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM
ENSINO DE CIÊNCIAS E MATEMÁTICA

CARACTERÍSTICAS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DE ESTUDANTES DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

EDNEI LUÍS BECHER

Canoas

2009

EDNEI LUÍS BECHER

CARACTERÍSTICAS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DE ESTUDANTES DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Luterana do Brasil, como requisito para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Orientadora: Prof. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

Canoas

2009

EDNEI LUÍS BECHER

CARACTERÍSTICAS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO DE ESTUDANTES DO 1º ANO DO ENSINO MÉDIO

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, da Universidade Luterana do Brasil, como requisito parcial para obtenção do título de Mestre em Ensino de Ciências e Matemática.

Aprovada em 29 de maio de 2009.

Banca Examinadora

Prof[a]. Dr[a]. Carmen Teresa Kaiber

Prof[a]. Dr[a]. Patrícia Rosana Linardi

Prof[a]. Dr[a]. Silvia Dias Alcântara Machado

Dedico este trabalho aos meus amados pais.

“É melhor tentar e falhar, que preocupar-se e ver a vida passar.

É melhor tentar, ainda que em vão, que sentar-se fazendo nada até o final.

Eu prefiro na chuva caminhar que em dias tristes em casa me esconder.

Prefiro ser feliz, embora louco, que em conformidade viver.”

Marthin Luther King

AGRADECIMENTOS

Primeiramente, A Deus pela presença constante.

Ao apoio e incentivo dos meus pais e minha irmã.

A minha namorada pela compreensão.

Em especial, a professora Claudia pela atenção, paciência e orientação.

Resumo

O desenvolvimento do pensamento algébrico é essencial para que o estudante seja capaz de compreender, representar e operar algebricamente com a finalidade de fazer representações, generalizações e resolução de problemas. Buscando compreender como esse processo de desenvolvimento ocorre, esse trabalho buscou mapear, com estudantes do 1º ano do Ensino Médio de uma escola pública do município de Osório - RS, as competências e habilidades algébricas desenvolvidos durante o Ensino Fundamental com os conteúdos comumente estudados naquelas séries, através de uma investigação qualitativa segundo uma abordagem de estudo de caso. Ao mesmo tempo também se procurou identificar as dificuldades e as concepções errôneas dos estudantes participantes do experimento. Para a realização dessa investigação, partiu-se de uma pesquisa sobre as principais competências e habilidades algébricas requeridas em testes de avaliação e sobre os conteúdos propostos nos livros didáticos para a aprendizagem da Álgebra e o desenvolvimento das referidas competências e habilidades. A seguir, procedeu-se a estruturação de um banco de questões que permitisse o mapeamento das competências, habilidades e conhecimentos dos estudantes, fazendo-se uso do *software* SCOMAX, com o intuito de realizar um mapeamento mais preciso através do uso de testes adaptativos informatizados, baseados na teoria de resposta ao item (TRI). Ao final do processo, foi possível verificar que os estudantes investigados apresentavam as habilidades relacionadas com a manipulação mais desenvolvidas que as habilidades relacionadas com generalização e resolução de problemas, além disso os resultados obtidos pelos estudantes mostraram-se melhores quando as questões utilizavam uma linguagem próxima daquela que eles conheciam dos livros didáticos. A investigação também foi capaz de identificar os erros mais freqüentes cometidos pelos estudantes, o que oportunizou constatar que os estudantes participantes do experimento têm muitos de seus procedimentos algébricos baseados na aprendizagem anterior da Aritmética. Por fim, os dados obtidos permitiram que se obtivesse um mapa das habilidades algébricas desenvolvidas pelos estudantes participantes do experimento.

Palavras-chave: Álgebra, pensamento algébrico, ensino médio, Matemática

Abstract

The development of algebraic thinking is essential for students to be able to understand, to represent and to operate algebraically, with purpose of doing representations, generalizations and problem solving. Looking for to understand as this development process happens, this work pursue to map, with 1st year High School students of a public school from Osório – RS, the algebraic competences and skills developed during their Elementary School with the contents generally studied in those grades, through an qualitative investigation using a approach of case study. Simultaneously also tried to identify the difficulties and students' erroneous conceptions. For accomplishment of this investigation, we did a search about main competences and algebraic skills requested in evaluation tests and on contents proposed in the text books for the learning of the algebra and the development of the referred competences and skills. After, we structured the question database that allow to map the students' competences, skills and knowledge, using SCOMAX software, with intention of to accomplish a realistic mapping through the use of computer adaptive tests, based on item response theory. At the end of investigation, it was possible to verify that investigated students presented the skills related with manipulation more developed than skills related with generalization and problem solving, besides the results shown that question with language close that used in text books were easier for students. The investigation was also capable to identify the most frequent mistakes committed by the students, what allowed to verify that participant students of the experiment have many of their algebraic knowledge based on the previous learning of Arithmetic. Finally, the obtained data allowed to map of the algebraic competences and skills developed by the students.

Keywords: algebra, algebraic thinking, high school, mathematics

Sumário

LISTA DE FIGURAS.. 10

INTRODUÇÃO.. 13

1 Referencial Teórico.. 16
1.1 Perspectivas da Álgebra... 17
1.2 Álgebra e Simbolismo... 24
1.3 Erros algébricos.. 32
1.4 Resolução de problemas e Álgebra... 38

2 A investigação.. 44
2.1 Problema de Investigação... 44
2.2 Objetivo Geral.. 44
2.2.1 Objetivos Específicos.. 45
2.3 Metodologia da pesquisa 45
2.3.1 Perfil da amostra 47
2.3.2 Perfil da escola 48
2.3.3 Software SCOMAX... 49
2.3.4 Instrumentos de pesquisa 53
2.3.5 Testes... 56

3. Análise dos resultados 61
3.1 Análise de erros 74
3.2 Características do pensamento algébrico dos estudantes pesquisados....... 77

CONCLUSÃO.. 80

REFERÊNCIAS.. 83

Apêndice A.. 90

Apêndice B.. 103

Apêndice C.. 104

Apêndice D.. 105

Apêndice E.. 106

Anexo A... 107

Lista de Figuras

FIGURA 01 – Quadro com a caracterização do campo conceitual da Álgebra... 19
FIGURA 02 – Grafo do teste 01.. 50
FIGURA 03 – Grafo do teste 02.. 50
FIGURA 04 – Grafo do teste 03.. 51
FIGURA 05 – Grafo do teste 04.. 51
FIGURA 06 – Exemplo de tabela de resultados gerado pelo SCOMAX............. 52
FIGURA 07 – Competências e habilidades mapeadas pelos testes.................. 54
FIGURA 08 – Mapa dos conteúdos algébricos da 5ª série................................ 56
FIGURA 09 – Mapa dos conteúdos algébricos da 6ª série................................ 57
FIGURA 10 – Mapa dos conteúdos algébricos da 7ª série................................ 57
FIGURA 11 – Mapa dos conteúdos algébricos da 8ª série................................ 58
FIGURA 12 – Quadro das competências e habilidades algébricas desenvolvidas nas séries finais do Ensino Fundamental.................................... 59
FIGURA 13- Quadro das competências e habilidades algébricas mapeadas, divididas entre processual e estrutural.. 60
FIGURA 14 – Quadro das competências e habilidades mapeadas divididas por grupo.. 61
FIGURA 15 – Exemplo de questão proposta no grupo 01................................. 62
FIGURA 16 – Exemplo de questão proposta no grupo 02................................. 62
FIGURA 17 – Exemplo de questão proposta no grupo 03................................. 62
FIGURA 18– Exemplo de questão proposta no grupo 04.................................. 63
FIGURA 19 – Exemplo de questão proposta no grupo 05................................. 63
FIGURA 20 – Exemplo de questão proposta no grupo 06................................ 64
FIGURA 21 – Exemplo de questão proposta no grupo 07................................ 64

FIGURA 22 – Exemplo de questão proposta no grupo 08................................. 65
FIGURA 23 – Exemplo de questão proposta no grupo 09................................. 66
FIGURA 24 – Exemplo de questão do teste 01... 66
FIGURA 25 – Exemplo de questão do teste 01... 66
FIGURA 26 – Exemplo de questão do teste 01... 67
FIGURA 27 – Resultados dos estudantes com relação a compreensão e representação algébrica.. 67
FIGURA 28 – Resultados dos estudantes com relação a operações algébricas 69
FIGURA 29 – Resultados dos estudantes com relação ao reconhecimento e representação de padrões.. 71
FIGURA 30 – Resultados dos estudantes com relação a resolução de problemas.. 72
FIGURA 31 – Exemplo de questão proposta no teste 04................................... 74
FIGURA 32 – Registros da resolução do aluno 02.. 74
FIGURA 33 – Registros da resolução do aluno 04.. 75
FIGURA 34 – Registros da resolução do aluno 07.. 75
FIGURA 35 – Registros da resolução do aluno 04.. 76
FIGURA 36 – Registros da resolução do aluno 03.. 76
FIGURA 37 – Exemplo de problema simples... 77
FIGURA 38 – Resolução do aluno 12 para a questão da figura 34.................... 77
FIGURA 39 – Gráfico do desempenho médio dos estudantes em cada competência... 78

Página em Branco

Introdução

O momento histórico atual é caracterizado pelas constantes mudanças sociais, em particular na última década, onde os avanços científicos e tecnológicos criaram um momento singular da existência humana, alterando a maneira como nos comunicamos e nos relacionamos com as pessoas e o mundo a nossa volta. Nessa nova realidade quase toda informação que possa interessar a alguém está disponível, no entanto, uma pessoa e uma sociedade não evoluem apenas com informação, é necessário que essa informação seja transformada em conhecimento de forma a produzir novos conhecimentos.

Para Groenwald & Nunes (2006) o conhecimento matemático é uma forma de pensamento a ser desenvolvido pelos indivíduos, fornecendo-lhes um sistema de expressão através do qual podem organizar, interpretar e dar significado a aspectos da realidade.

Portanto, a escola atual não possui a função de apenas fornecer informações aos estudantes, pois essas podem ser facilmente obtidas e, sendo o momento histórico atual muito dinâmico, fica praticamente impossível determinar o que o estudante de hoje precisará saber no seu futuro. Logo , a escola deve ajudar e orientar os estudantes a transformarem informações em conhecimento.

Esta sociedade fundamentada na informação e na comunicação se desenvolveu sobre o alicerce da informática e, por conseguinte, sobre a Matemática que forneceu as bases para o desenvolvimento dos *softwares* que fazem as máquinas funcionarem. Em particular, a Álgebra constitui-se na base da programação desses equipamentos, o que torna esse tema de relevância para a formação do pensamento matemático que os estudantes necessitam para atuarem no mundo moderno.

D'Ambrósio (1990) defende que a matemática se justifica nas escolas, por ser útil como instrumentador para a vida, para o trabalho, por ser parte integrante de nossas raízes culturais, porque ajuda a pensar com clareza e a raciocinar melhor.

Também, por sua universalidade, sua beleza intrínseca como construção lógica, formal, etc.

Assim, diante dessa realidade que se estrutura e, por conseguinte, exige cada vez mais conhecimentos matemáticos, é necessário que os estudantes tenham uma formação matemática que vá além da utilização de algoritmos e mera repetição de técnicas.

Discussões sobre o ensino de Álgebra e sobre as expectativas a respeito do que se deseja que um estudante saiba ao final da Educação Básica, com relação às especificidades da Álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico, vem sendo feitas a muito tempo (FIORENTINI, MIGUEL e MIORIM, 1993), no entanto, ainda não existe um consenso sobre o que e qual a melhor abordagem para esse ensino.

Martins (2008) pesquisou o banco de dados da revista Zetetiké, da CAPES, da PUC-SP, da USP e da Unicamp, as teses e dissertações relacionadas a Álgebra e encontrou, no período de 1998 a 2004, um total de 140 dissertações e 80 teses (pág. 22), no entanto, encontrou apenas 8 dissertações e nenhuma tese relacionada ao ensino e aprendizagem da Álgebra com um viés de pesquisa de acordo com a Educação Matemática. O que reforça a necessidade de que se pesquise mais sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico dos estudantes em nosso país.

Nesse processo de mapeamento a que esse trabalho se propôs, partiu-se da concepção, *a priori*, de que os estudantes, durante seu processo de escolarização, desenvolvem um "pensar algébrico" que não é, necessariamente formalizado e uma "escrita algébrica" que consiste no uso das representações simbólicas de que a Álgebra formal faz uso.

Além disso, assumiu-se que a expressão "raciocínio algébrico" usada por alguns pesquisadores, está mais relacionada a calcular, enquanto o termo pensamento algébrico é um conceito mais amplo que engloba todo o conjunto de competências e habilidades algébricas. Assim, nesse trabalho, sempre que for citado algum trabalho onde se utiliza raciocínio algébrico deve-se entender pensamento algébrico.

Neste trabalho, o capítulo 1 apresenta uma revisão da literatura sobre o ensino e aprendizagem da Álgebra, bem como, sobre o pensamento algébrico.

No capítulo 2, o problema da investigação, os objetivos e a descrição da metodologia utilizada são apresentados e descritos, com o detalhamento dos procedimentos, testes e ferramentas utilizadas ao longo desse trabalho.

Apresentam-se, no capítulo 3, os dados coletados e a análise dos mesmos com o objetivo de caracterizar o pensamento algébrico dos estudantes investigados.

O contexto apresentado nos desafia a repensar o ensino da Álgebra, diminuindo a atenção exagerada que, por vezes, se dá às técnicas de manipulação e, trazendo para o foco a discussão do pensamento algébrico, uma vez que, entende-se que a Álgebra não é apenas um instrumento matemático que facilita e permite a resolução de problemas, ela é, também, uma forma particular de pensamento e de leitura do mundo.

1. Referencial Teórico

Historicamente a evolução dos conhecimentos matemáticos está relacionada a momentos e situações, em que o homem precisou desenvolver conhecimentos que fossem capazes de resolver situações-problema presentes no seu cotidiano.

Os primeiros registros formais de conhecimento algébrico foram realizados pelos Alexandrinos, no Oriente (EVES, 2002). Isso se deve provavelmente a dois motivos: o primeiro, foi que Alexandria constituía-se um entreposto comercial, assim era uma cidade na qual conviviam muitas culturas diferentes, e onde se desenvolviam muitas atividades comerciais e de manufatura que exigiam conhecimentos algébricos; e o segundo motivo, foi que Alexandria se constituiu em uma cidade com liberdade de pensamento e muito segura, em uma época de muitas guerras, dessa forma, muitos matemáticos foram viver lá, entre eles Arquimedes, Apolônio, Hiparco, Diofanto e Papus de Alexandria, entre outros.

De modo especial, Arquimedes e Diofanto deram importantes contribuições ao conhecimento algébrico. Arquimedes, segundo Eves (2002, p.194), elaborou trabalhos que foram obras-primas de exposição matemática, lembrando muito revistas especializadas modernas. Diofanto, principalmente através da sua obra *Aritmética*, que tinha uma abordagem analítica sobre a teoria algébrica dos números, considerada fundamental para os estudos posteriores sobre a Álgebra de Viéte e a de Fermat.

A palavra “Álgebra” tem, segundo Eves(2002), sua origem no século XIX no tratado “Al-jabr wa‘l mugäbala” do matemático e astrônomo Mahommed Ibn Musa Al-Kharizmi. “Al-jabr” a palavra da qual deriva “Álgebra” significa “restauração” do equilíbrio mediante a transposição de termos de uma equação. “Mugäbala” significa a simplificação da expressão resultante da simplificação dos termos semelhantes de cada lado da equação. Com o passar do tempo a Álgebra passou a ser entendida como a Ciência da resolução de equações, o que se manteve até o fim do século

XIX, quando a Álgebra tomou novos rumos, mudando-se a ênfase para a ideia da generalização. Algo que sempre esteve presente na história da Álgebra foi o estudo das equações, chamadas no passado apenas de igualdades.

Uma ampla revisão histórica sobre o desenvolvimento da Álgebra não é o objetivo desse trabalho, logo, essa breve retrospectiva serve para situar o estudo da Álgebra no processo de desenvolvimento do pensamento matemático e científico.

1.1 Perspectivas da Álgebra

A Álgebra, atualmente, pode ser caracterizada por ter seu foco no estudo de relações matemáticas abstratas, incluindo fórmulas, equações e inequações, estudando ainda, conjuntos numéricos e não numéricos, onde as operações são definidas de modo abstrato.

Alguns autores, por exemplo, Lins e Gimenez (1997) têm procurado caracterizar a Álgebra considerando quatro características da atividade algébrica: conteúdos, notação, ação do pensamento e campo conceitual. Os conteúdos, são os tópicos da Álgebra que, consensualmente, entende-se que possuam significado dentro do estudo algébrico – equações, cálculo literal, funções...

Lins e Gimenez (1997, pág. 90) entendem que a atividade algébrica se caracteriza por resolver problemas de Álgebra, quer eles sejam contextualizados ou não. Deste modo, a atividade algébrica é “fazer ou usar Álgebra”. Caracterizar a atividade algébrica, a partir da notação é considerado por esses autores, uma tendência “letrista”.

Com relação às mudanças conceituais produzidas com o estudo da Álgebra, acredita-se que sejam relacionadas com o estágio do desenvolvimento do pensamento algébrico. Lins e Gimenez (1997, pág. 92), referem-se, inclusive, que a “introdução de notação especial (no caso, letras) corresponde diretamente a essa mudança conceitual”.

Para Lins e Gimenez (1997) atividade algébrica resulta da ação do pensamento formal, assim o pensamento formal é algébrico. Consequentemente, “todo o pensamento daquele que atingiu o estágio operatório formal constituiria alguma atividade algébrica” (p. 99). Como desta maneira se produziria um campo muito vasto, os autores optam por restringir-se ao pensamento de quem opera com operações (concretas) aritméticas, o que leva à noção de Álgebra escolar como Aritmética generalizada e, obtém-se uma caracterização dependente de conteúdos (p. 99-100).

Outra caracterização para Linz e Gimenez (1997, p.102), resulta de uma proposta de Vergnaud (1990), que está associada a um campo conceitual, que seria constituído por um conjunto de esquemas operacionais e invariantes comuns a uma área de conhecimento; um conjunto de formas notacionais; um conjunto de problemas que, ao mesmo tempo são resolvidos por aqueles esquemas e que lhes dão sentido. Atendendo a esta noção, alguém que esteja envolvido em atividade algébrica, estará trabalhando no campo conceitual da Álgebra.

O momento adequado para que o estudante inicie seus estudos com a Álgebra formal, é também foco de muitas discussões. Em especial a pré-álgebra que contemplaria o aprendizado escolar anterior ao estudo formal da Álgebra, recebe cada vez mais atenção por parte de pesquisadores em Educação Matemática. A pré-álgebra para Kieran e Chalouh (1993) constitui um momento crucial no processo de aprendizagem da Matemática, pois é quando ocorre a transição da Aritmética para a Álgebra, é o momento em que os estudantes constroem o significado dos símbolos e das operações da Álgebra com base nos seus conhecimentos de Aritmética. Para Carraher, Schliemann & Brizuela (2008) a pré-álgebra refere-se tanto a uma abordagem geral para o ensino da matemática nos primeiros anos de escolarização como a um campo de investigação, assim estes autores distinguem a atividade do professor da atividade de investigação.

Dois aspectos fundamentais na concepção pré-algébrica, são o uso de letras para representar números e o conhecimento explícito dos métodos matemáticos que são simbolizados com o uso de números e de letras. A pré-álgebra (KIERAN e CHALOUH, 1993), é uma preparação para a aprendizagem da manipulação de símbolos, muitas vezes sem sentido, que deve ir além do uso de regras aprendidas, decoradas ou sobreaprendidas. A pré-álgebra deve buscar “uma exploração de algumas ideias chave algébricas, entre as quais os estudantes devem (a) pensar sobre as relações numéricas de uma situação, (b) discutir na linguagem do dia-a-dia, e (c) eventualmente aprender a representá-las com letras ou outra notação não ambígua” (pp. 181-2). Estes autores acrescentam que o sucesso do pensamento algébrico depende da correta e significativa passagem da Aritmética para a Álgebra.

Por outro lado, de acordo com Falcão (2003), a Álgebra não pode ser vista somente como a generalização da Aritmética, pois no seu entender, ela tem propriedades intrínsecas, relacionadas com o seu campo conceitual específico. A Álgebra tem uma série de relações entre números, estabelecidas no domínio da Aritmética, para depois as generalizar com letras (variáveis e/ou incógnitas). Ainda para Falcão, para muitos pesquisadores a Álgebra tem a dupla função de *representar* fenômenos e relações e, *auxiliar na resolução* de problemas matemáticos. Na figura 1, apresentam-se os elementos básicos de caracterização do campo conceitual da Álgebra segundo Falcão (2003).

Atividades em Álgebra	
Ferramenta representacional	Ferramenta de resolução de problemas
Modelação: captura e descrição dos fenômenos do real. Função: explicitação simbólica de relações elementares. Generalização: passagem de descrições específicas ligadas a um contexto para leis gerais.	Algoritmos: regras sintáticas, prioridades de operações, princípio da equivalência entre equações
Elementos básicos do campo conceitual algébrico	
Números, medidas, incógnitas e variáveis, regras de atribuição de símbolos, gama de acepções do sinal de igual, trânsito entre formas de linguagem.	Operadores, sintaxe, prioridade de operações, princípio da equivalência, conhecimentos-em-ação vinculados a experiências extra-escolares, fatos aritméticos instrumentais (por exemplo: elemento neutro da adição).

Fonte: Falcão, 2003, p.31.

Figura 01: Quadro dos Elementos básicos de caracterização do campo conceitual de Álgebra.

Para Kaput (2005), a visão tradicional da Álgebra está relacionada com a aprendizagem de regras para a manipulação de símbolos, simplificação de expressões algébricas e resolução de equações. Assim, a Álgebra escolar tem servido para ensinar um conjunto de procedimentos que, na visão dos alunos, não têm relação com outros conhecimentos matemáticos e nem com o seu mundo cotidiano. Além disso, na sua opinião, a Álgebra dedica-se a capacitar os estudantes para produzir sequências de símbolos corretas e não foca na compreensão dos conceitos e do raciocínio matemático. De acordo com sua visão, as aplicações utilizadas são artificiais, pelo que os alunos não têm a oportunidade de refletir sobre as suas próprias experiências, nem de articular os seus conhecimentos. Sendo assim, eles apenas memorizam procedimentos que são assumidos como operações sobre sequências de símbolos e que resolvem problemas artificiais sem significado.

Segundo Kaput (2005) o raciocínio algébrico[1] e o uso de representações algébricas como gráficos, tabelas, planilhas eletrônicas e fórmulas, são as ferramentas intelectuais mais poderosas, e é lamentável que os estudantes muitas vezes se afastem da Matemática por não compreenderem o significado dos conteúdos estudados, deixando de desenvolver competências e habilidades ligadas ao simbolismo algébrico, sem o qual, não existiria a Matemática superior nem a Ciência como a conhecemos. Portanto, para esse autor, o grande empreendimento é fazer a Álgebra acessível a todos os alunos e ensinar criando um ambiente na sala de aula que possibilite a aprendizagem com compreensão. Assim, a Álgebra deve ser entendida de forma muito mais ampla do que ocorre tradicionalmente, devendo-se contemplar nos currículos cinco perspectivas da Álgebra: (a) como generalização e formalização de padrões e como aritmética generalizada; (b) como manipulação de formalismos guiada sintaticamente; (c) como estudo de funções e de variação; (d) como estudo de estruturas abstratas; e (e) como linguagem de modelação.

Na visão de Kaput (2005), estas cinco perspectivas contribuem para o desenvolvimento do pensamento algébrico dos alunos, promovendo a compreensão e levando-os a fazer generalizações a partir de suas concepções e experiências, não limitada a Álgebra somente, mas também, a aplicação de regras de manipulação simbólica onde os estudantes, por vezes, perdem as relações com o significado do símbolo, algo comum quando entende-se a Álgebra simplesmente como manipulação formal. Assim, devemos centrar-nos menos nos símbolos e nas regras para a manipulação do que no significado, pois dessa maneira, a atenção dos alunos estará voltada mais para o significado dos símbolos.

Para Kieran (1992) existem duas perspectivas diferentes no estudo da Álgebra: a *processual* e a *estrutural*. A Álgebra *processual* não lida com a transformação de expressões algébricas, mas sim com a substituição de variáveis por números, realizando depois as correspondentes operações aritméticas. Enquanto que, a Álgebra *estrutural* diz respeito a um conjunto diferente de operações realizadas, não com números, mas sim com expressões algébricas, onde

---

[1] Raciocínio algébrico é aqui entendido como pensamento algébrico.

os objetos operados são as próprias expressões algébricas, e o resultado obtido é também uma expressão algébrica.

Podemos também estudar as diferentes concepções da Álgebra a partir dos vários usos dados à variável. Neste sentido, Usiskin (1995) aponta quatro concepções da Álgebra.

- Como Aritmética generalizada, onde a variável é entendida como um padrão aritmético para traduzir e generalizar.
- Como um meio para resolver determinados problemas, a Álgebra utiliza as variáveis como incógnitas ou constantes, tendo como principal uso a simplificação e resolução de equações.
- Como estudo de relações, onde a variável é considerada como argumento ou parâmetro, sendo usada para estabelecer relações e definir funções e sendo também utilizada para a construção de gráficos.
- Como o estudo das estruturas, quando a variável é entendida como um símbolo arbitrário para manipular e para justificar determinadas propriedades.

O estudo das ideias fundamentais da Álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico tem sido discutido por muitos (NCTM[2], 1989, 2000; DRISCOLL, 1999), o que leva inevitavelmente a uma reflexão sobre o que é o pensamento algébrico, que se admite, evolui com o estudo da Álgebra e que deve capacitar o estudante no uso da Matemática, com mais desenvoltura na resolução de problemas.

Para Howden (1990) o conhecimento de conteúdos específicos e vocabulário são ingredientes necessários para a fundamentação da Álgebra, e ao menos de igual importância, é a habilidade de olhar além dos detalhes numéricos ou dimensões para a essência de uma situação. Essa habilidade é aprendida e não herdada. Desenvolver essa habilidade requer o foco da instrução no processo, bem como no conteúdo, ou seja, é necessário que o professor seja capaz de orientar o processo de aprendizado dos procedimentos, estratégias e conteúdos.

No entanto, o pensamento algébrico tem sido um conceito controverso, embora seja abordado por muitos autores. Levando Lins e Gimenez (1997) a afirmarem que, "...não existe um consenso sobre o que é pensar algebricamente" (p. 89).

---

[2] National Council of Teachers of Mathematics

Assim, apesar das controvérsias podemos constatar que na opinião dos pesquisadores em educação matemática, existe uma convergência, no sentido de que o pensamento algébrico consiste em um conjunto de habilidades cognitivas que contemplam a representação, a resolução de problemas, as operações e análises matemáticas de situações tendo as ideias e conceitos algébricos como seu referencial.

Diante dessa realidade, é possível concluir que o estudo da Álgebra, sua compreensão e ensino, vêm ocupando espaço a muito tempo nas pesquisas em Educação Matemática. E se por um lado existem muitos enfoques para esses estudos, o que todos possuem em comum é o fato de assumirem que a Álgebra é caracterizada como uma área com assuntos e aspectos específicos, que possuem uma linguagem e um modo de pensar e trabalhar próprios.

Nesse contexto, o desenvolvimento do pensamento algébrico e o conhecimento de conteúdos específicos são aspectos importantes e indissociáveis, pois apenas o desenvolvimento conjunto desses conhecimentos e habilidades irá capacitar o estudante no uso efetivo do seu conhecimento matemático, uma vez que o estudo isolado dos conceitos algébricos leva o estudante a entender esses como fatos isolados e sem significado.

De acordo com Davis (1989), existe grande preocupação dos professores, que também é identificada nos livros didáticos, quanto a fluência dos alunos no uso da linguagem formal algébrica, como parte fundamental da aprendizagem da Álgebra. Essa preocupação, muitas vezes exagerada, dos professores faz com que muitos alunos saibam encontrar a solução de equações quadráticas, por exemplo, sem no entanto saberem quando utilizar essa mesma equação para resolver problemas. Kieran (1992) relata que os estudantes em muitos casos memorizam as regras e procedimentos acreditando que isso represente a essência da Matemática.

Como, muitas vezes, é difícil encontrar problemas reais que mostrem aos alunos como e onde aplicar a Álgebra que aprendem na escola básica, eles acabam por não compreender que seja necessário saber Álgebra para “matematizar” o mundo segundo Fey, apud Davis (1989). Ainda segundo Davis (1989), ao analisar livros didáticos é possível observar que grande parte dos problemas propostos poderiam ser resolvidos através da Aritmética.

No entanto, cada vez mais o estudo da Álgebra tem se tornado importante para a formação dos futuros cidadãos. Para House (1995), a Álgebra tem lugar de destaque nos currículos de Matemática da Educação Básica há muito tempo e, afirma que embora sejam feitas modificações frequentes, geralmente, essas consistem apenas na reorganização dos mesmos conteúdos, isso porque as tecnologias da informação e as forças sociais atuam fortemente durante o processo de definição dos conteúdos.

Ainda segundo House (1995) o desenvolvimento advindo com as tecnologias da informação, por exemplo na Biologia e nas Ciências Sociais, tornaram-nas dependentes da Matemática, pois processos algébricos e análises gráficas, são de importância fundamental nessas áreas atualmente. Outra implicação, segundo a autora, nos currículos é que os algoritmos terão seu papel diminuído e ao mesmo tempo realçado. Diminuído com relação à memorização, mas realçado quanto à necessidade de se aprender a planejar e criar algoritmos para execução de tarefas.

Já com relação às forças sociais, House (1995) destaca que o impacto das novas tecnologias produziu no cotidiano das pessoas novas demandas, criando novas exigências. Por exemplo, passou-se a procurar indivíduos que tenham facilidade para o raciocínio quantitativo e procedimentos matemáticos relacionados com tópicos como estatística e probabilidade. Essa nova realidade acaba por demandar uma resposta da escola que deve introduzir o estudante nesse novo mundo.

De acordo com o NCTM (2000), a fluência no simbolismo algébrico ajuda os estudantes a representar e resolver problemas em muitas áreas do currículo, por exemplo, os estudantes devem poder operar fluentemente com expressões algébricas, combinando-as e re-expressando-as em formas alternativas. Estas capacidades estão na base da capacidade de encontrar soluções exatas de equações e funções que estão presentes no estudo da Física, da Química, da Estatística e em muitas outras áreas.

Para Godino e Font (2003), o professor deve ter compreensão da importância que a Álgebra e o pensamento algébrico tem no estudo da Matemática:

> O raciocínio algébrico implica em representar, generalizar e formaliza padrões e regularidades em qualquer aspecto da Matemática. E a medida que se desenvolve esse raciocínio, se vai evoluindo no uso da linguagem e seu simbolismo, necessário para apoiar e comunicar o pensamento algébrico, especialmente nas equações, nas variáveis e nas funções. Esse tipo de pensamento está no coração da Matemática concebida como a ciência dos padrões e da ordem, já que é difícil encontrar em outra área da Matemática em que formalizar e generalizar não seja um aspecto central. Em conseqüência, os professores em formação têm que construir essa visão do papel das ideias algébricas nas atividades

> matemáticas, e sobre como desenvolver o pensamento algébrico durante todos os níveis de ensino(GODINO & FONT, 2003, p.8).

Nos PCN+[3] (2002) o estudo da Álgebra é adotado com um eixo orientador da formação do estudante, devendo-se buscar um estudo relacionado ao cotidiano.

> Aprender Matemática de uma forma contextualizada, integrada e relacionada a outros conhecimentos traz em si o desenvolvimento de competências e habilidades que são essencialmente formadoras, à medida que instrumentalizam e estruturam o pensamento do aluno, capacitando-o para compreender e interpretar situações, para se apropriar de linguagens específicas, argumentar, analisar e avaliar, tirar conclusões, tomar decisões e generalizar [...] . (PCN+, 2002, p.111).

É importante não compreender mal o uso do termo “instrumentalizar” nos PCN+, pois eles não aceitam a visão da Matemática apenas como uma ferramenta.

> Nessa etapa da escolaridade, portanto, a Matemática vai além de seu caráter instrumental, colocando-se como ciência com características próprias de investigação e de linguagem e com papel integrador importante junto às demais Ciências da Natureza. (PCN+, 2002, p.111)

Portanto, evidencia-se a necessidade de um ensino da Álgebra de forma contextualizada e que oportunize aos estudantes o desenvolvimento das competências e habilidades algébricas, que permitirão a ele dar continuidade a sua formação educacional, mas que ao mesmo tempo, capacite os estudantes no uso desses conhecimentos no seu cotidiano.

A Matemática escolar e, em especial, a Álgebra orientam esse trabalho pois é na escola que o estudante irá aprender, organizar e usar primeiramente seus conhecimentos, competências e habilidades algébricas. Sendo a representação através de símbolos o ponto de partida para o estudo da Álgebra, que como já referido, deve levar o estudante a uma mudança conceitual, ampliando sua compreensão da Matemática e de sua capacidade de resolver problemas.

1.2 Álgebra e simbolismo

Os símbolos fazem parte da vida do homem a muito tempo, como mostram o registros encontrados em tábuas de barro, papiros ou mesmo em rochas dentro de cavernas. No entanto, como todo símbolo tem uma natureza idiossincrática[4] a

[3] PCN+ Ensino Médio: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais
[4] Maneira de ver, sentir, reagir, própria de cada pessoa.

compreensão do seu significado nem sempre é fácil para todos membros de uma comunidade.

A relação que a Álgebra tem com os símbolos reside no fato de que para pensar sobre ideias e conceitos matemáticos é necessária uma representação interna, de forma que o cérebro seja capaz de operar e comunicar estas ideias e conceitos. Da mesma forma, é preciso uma representação externa que nos possibilite a comunicação. Assim, os signos externos de representação têm um equivalente mental, o que torna necessária uma distinção entre as representações internas e externas.

A relação entre essas duas modalidades de representação foi expressa por Duval (2004): as representações mentais e as representações externas não podem ser vistas como domínios diferentes, pois o desenvolvimento das representações mentais se dá com a interiorização das representações externas e a diversificação das representações de um mesmo objeto, aumenta a capacidade cognitiva do sujeito e, por conseguinte suas representações mentais. Da mesma forma, as representações externas, como enunciados em linguagem natural, fórmulas algébricas, gráficos, etc, são os meios através dos quais os indivíduos exteriorizam suas representações mentais e as tornam acessíveis aos demais. Assim, as representações externas desempenham uma dupla função: (a) atuar como estímulo dos sentidos nos processos de construção de novas representações e, (b) como expressão dos conceitos e ideias que possuem os sujeitos que utilizam essas representações.

Kieran (1981) realizou um estudo, que objetivava observar o comportamento de alunos de todos os anos de escolaridade com relação a sua compreensão do sinal de igual. E constatou que, apesar do sinal de igual poder ser usado para mostrar equivalência, nem sempre é entendido assim. Além disso, pôde verificar que muitos alunos têm muita dificuldade na interpretação da equivalência do sinal de igual, que não é fácil nem rápida. Em crianças da pré-escola (3 a 5 anos) o conceito de igualdade surge atrelado a uma noção comparativa, quando as crianças são capazes de contar o número de elementos de dois ou mais conjuntos e determinar se possuem ou não o mesmo número de elementos. Kieran observou ainda que dois significados intuitivos do sinal de igual podem ser identificados com crianças: um envolvendo a comparação entre dois conjuntos, quando se contam os elementos de cada um e, tendo por base a cardinalidade, se estabelece a igualdade; e o outro envolvendo a adição de dois conjuntos, onde a criança os combina e depois conta os elementos do conjunto resultante.

Entre os alunos do 1.º ao 6.º ano, de acordo com Kieran (1981), o sinal de igual pode ser encarado como uma relação de equivalência. Segundo ela os alunos são capazes de executar operações como 3+4= ?, contudo, muitos não conseguem ler afirmações simples como 4=4. Para Kieran os alunos parecem ver o sinal de igual como um sinal de comando para fazer algo, assumindo que depois do = deve estar uma resposta.

No seu trabalho, Kieran (1981) também se refere a um estudo de Collis, realizado com alunos com idades entre os 6 e 10 anos, onde ele constata que os estudantes esperam que exista um operador que relacione os dois elementos para depois obter um terceiro. Por exemplo, não entendem 4+5=3+6 e esperam ver um único resultado para a operação, ou seja, 4+5=9.

Já, os alunos com idades entre 10 e 13 anos podem considerar o resultado como único, mas não necessitam fazer uma reposição para garantir a igualdade. Depois dos 13 anos, os alunos estão aptos a inferir além de modelos físicos e usar casos específicos para fazer generalizações. Kieran (1981) nota que existe um período de transição para os alunos de 13 anos, no sentido de necessitarem de uma resposta depois do sinal de igual e de aceitarem o sinal de igual como um símbolo de equivalência.

A falta de compreensão da ideia de equivalência do sinal de igual também conduz a erros. Falkner, Levi & Carpenter (1999) apresentaram a alunos do 6º ano o seguinte problema: 8+4=[ ]+5. Todos os 145 alunos deram a resposta de 12 ou 17. Estas respostas podem, segundo o autor, ser o resultado de executar-se 8+4=12 e os alunos terem continuado o problema fazendo 12+5=17. Esta dificuldade pode conduzir à dificuldade de compreensão de que a adição e subtração da mesma quantidade em ambos os membros de uma equação mantém a igualdade.

Segundo Rojano (2002), os trabalhos de Kieran permitem uma análise dos erros mais comuns e das interpretações equivocadas dos estudantes no estudo da Álgebra. Estes trabalhos ajudam a mostrar como a variação do significado dos símbolos matemáticos na transição da Aritmética para a Álgebra representam um obstáculo na aprendizagem da linguagem algébrica, visto que, o significado dos símbolos altera conforme o domínio em que é considerado.

Booth & Cook (1995) acreditam que, muitas vezes a justificação de que *2a+5b* não pode ser 7ab recorre, muitas vezes, à atribuição de significado para as letras, dizendo-se 2 maças mais 5 bananas. Abordagem essa criticada por confundir o aluno, porque na verdade, ele tem 7 maças e bananas. Os autores alegam que deve existir uma distinção entre os próprios objetos e o seu número. Estas situações podem levar a confusão entre Aritmética e Álgebra e a uma má interpretação, quer das expressões quer da simplificação das mesmas.

Arcavi (1994) tem uma visão de que o “sentido do número” em Aritmética e o “sentido do símbolo” em Álgebra são similares e, concentra-se na descrição e discussão de comportamentos, de exemplos que ilustram o sentido do símbolo, apesar de não ter como objetivo defini-lo. Assim indica oito aspectos.

1. *Fazer os símbolos amigos*. É desejável que os alunos apreciem o poder dos símbolos e tê-los sempre prontos para dar sentido às ferramentas. Assim, o sentido do símbolo deve incluir a consciência, a comunicação e o poder dos símbolos para mostrar e provar relações de modo que a Aritmética não pode fazer. Contudo é necessário ter presente o sentimento de invocar os símbolos e também de os abandonar.

2. *Ir além da manipulação*. É importante ler através dos símbolos em vez de apenas manipular, por exemplo, na equação $3x+5=4x$ há que reparar que $4x$ é $3x$ mais x, pelo que se pode concluir que x é 5. Esta abordagem leva a que haja o cuidado de ler e notar a relação simbólica, interrompendo uma rotina quase automática de manipulação. Perante uma equação, o primeiro impulso é resolvê-la de modo a encontrar no final $x=?$. É ainda importante ler com o objetivo da manipulação, no sentido de procurar o significado do símbolo para verificar se este é essencial para a resolução do problema ou apenas tornar o problema compreensível. É igualmente importante ler para ser razoável, com o intuito de desenvolver o saudável hábito de reler e verificar a razoabilidade da expressão simbólica encontrada.

3. *Construir expressões simbólicas ajustadas aos dados*. O sentido do número deve incluir: uma apreciação que uma expressão simbólica possa ser criada para uma proposta desejada e que possa ser construída; a realização de uma expressão com certas características que são necessárias; o sentido do símbolo deve incluir a capacidade de construir a expressão com sucesso.

4. *Expressões equivalentes com significados não equivalentes*. Ter presente que os símbolos guiam a procura de novos aspectos no significado inicial.

5. *A escolha dos símbolos.* Onde cada estudante pode escolher um símbolo para representar um problema, a escolha deve ser feita no sentido de simplificar o cálculo ou o resultado final. O símbolo deve ser escolhido no sentido de otimizar a própria escolha. Contudo pode-se voltar a representar um problema sempre que se verificar que uma determinada escolha não é a adequada.
6. *Capacidade para manipular com flexibilidade*. A manipulação correta destes símbolos consiste em muito mais do que na aceitação das regras. É muito importante a escolha de manipulações necessárias para atingir o objetivo proposto.
7. *Usar símbolos em retrospectiva*. Na resolução de um problema recorre-se à construção de um modelo matemático da situação, onde os símbolos e os significados estão geralmente relacionados, quer com o início quer com o fim do problema, no sentido de interpretar os resultados. Em passos intermédios geralmente os progressos são feitos ignorando os significados do problema.
8. *Usar símbolos num contexto*. A componente desejável do sentido do símbolo consiste no reconhecimento dos diferentes papéis que os símbolos podem ter na Álgebra. O sentido do símbolo deve incluir a habilidade para libertar o símbolo da situação intermédia de resolução de um problema, recorrendo às ferramentas disponíveis para recuperar o significado do símbolo.

Arcavi (1994) acrescenta ainda que o "sentido do símbolo" é um sentimento complexo e multifacetado que inclui:

- a compreensão e um sentimento estético para o poder dos símbolos;
- a capacidade para ser capaz de abandonar símbolos em favor de outras abordagens;
- a capacidade para manipular e ler expressões simbólicas;
- a consciência de que um símbolo pode construir com sucesso uma relação simbólica;
- a capacidade para selecionar possíveis representações simbólicas do problema;
- a realização de uma constante necessidade de verificar o significado dos símbolos;
- a sensibilidade para os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar em diferentes contextos (p. 31).

A vinculação entre a Álgebra e os símbolos utilizados na sua escrita ou notação é algo praticamente indissociável, tanto que para muitos estudantes a

Álgebra consiste no estudo e manipulação de letras. Esse simbolismo utilizado na Álgebra evoluiu ao longo da história. Harper (1987) considera três períodos do desenvolvimento da manipulação do simbolismo algébrico: o primeiro, designado pelo autor por "*Álgebra retórica*", ocorre antes de Diofanto (cerca 250 a.C.) e é caracterizado por existirem descrições por extenso na linguagem comum para a resolução de problemas e por não existirem símbolos para representar o desconhecido, ou seja, é caracterizada pelo uso exclusivo de palavras. O segundo período, "*Álgebra sincopada*", vai desde Diofanto até ao final do século XVI e envolve o uso de letras para representar quantidades desconhecidas. Ives (2002, p.206) concorda com Harper e relata que Diofanto criou abreviaturas para incógnitas, potência de incógnitas até a de expoente seis, subtração, igualdade e inverso.

Diofanto foi o primeiro a resolver equações com uma ou duas incógnitas, usando apenas símbolos. Note-se que nesse procedimento a segunda incógnita resultava de uma combinação da primeira, ou seja, se a primeira era x a segunda poderia ser, por exemplo, $x + 4$. Segundo Harper, a preocupação dos algebristas durante esse período foi exclusivamente a descoberta do valor de letras, sem fazer tentativas para expressar o geral. Assim, todas as letras eram passíveis de ter um valor numérico, mas não eram usadas para expressar uma solução geral. Portanto há a preocupação com o uso de alguma notação especial (em particular palavras abreviadas).

O terceiro, "*período simbólico*", teve início no século XVII e inicia-se com Viète, que introduziu o uso de letras para representarem variáveis e quantidades desconhecidas. Assim, passou a ser possível expressar soluções gerais através de símbolos e usar a Álgebra como uma ferramenta para provar regras no domínio das relações numéricas, ou seja, há o uso de símbolos e sua manipulação É exemplo desta situação a expressão $x + y = a$, onde a pode ser considerada uma variável, que representa todo e qualquer número e, por outro lado, existe uma correlação entre as variáveis x e y. Os elementos históricos referidos demonstram a importância da linguagem como o primeiro passo no processo de expressar o pensamento através de símbolos, logo um fato importante é percebermos que o simbolismo que utilizamos hoje no estudo da Álgebra tem menos do que 400 anos.

De acordo com Socas, Camacho, Palarea e Hernández (1996), a linguagem algébrica é constituída por dois níveis. No primeiro nível, semântico[5], "os símbolos e as notações são tratados com significados claros e precisos" (p. 15). Assim, neste nível existe um paralelismo com a linguagem comum. O segundo nível, sintático[6], é aquele onde "as regras podem ser operadas sem referência direta a nenhum significado" (p. 15).

Kieran (1992), tomando como referência o trabalho que Kuchemann (1981), desenvolveu entre 1974 e 1979 o projeto *Concepts in Secondary Mathematics and Science* (CSMS), utilizando a classificação proposta por Collis em 1975, descreve seis níveis de interpretação da letra relacionada ao nível mínimo de compreensão necessário, para um estudante realizar corretamente tarefas propostas:

(a) *Letra avaliada*: quando se atribui um valor à letra desde o princípio.

Exemplo: Se $s=4$, qual é o valor da expressão s+5 ?

(b) *Letra não considerada*: ignora-se a letra ou a sua existência é reconhecida sem que lhe seja dado um significado.

Exemplo: Se x+y=4 , $x+y+6=...$?

(c) *Letra considerada como objeto*: a letra é entendida como sendo o nome de um objeto concreto.

Exemplo: O cálculo do perímetro de um quadrado é $4l$, onde l é o comprimento do lado do quadrado.

(d) *Letra considerada como incógnita*: entende-se a letra como um número específico porém desconhecido.

Exemplo: Dada a equação 2y+1=9 , qual o valor de y?

(e) *Letra considerada como número generalizado*: a letra interpretada como uma representação de vários possíveis números e não de apenas um.

Exemplo: A expressão dos números impares, 2n-1 .

(f) *Letra considerada como variável*: a letra é entendida como uma representação de uma série de valores desconhecidos, ela está relacionada com existência de um vínculo sistemático entre dois conjuntos de valores.

Exemplo: Qual é maior, $2n$ ou n^2 ?

Lins e Gimenez (1997) fizeram a análise dos trabalhos de Harper (1987) e Kuchemann (1981) e alegam que, "de modo algum, seguir a trajetória do uso de

---

[5] Refere-se ao significado
[6] Refere-se às regras

letras permite seguir a trajetória do desenvolvimento de um pensamento algébrico" (p. 94). Eles alegam que:

> A crítica mais contundente a estudos que seguem essa tradição, [...] é que ignoram o fato [...] de que a Álgebra, incluindo aí qualquer tipo de 'cálculo com letras', é assunto praticamente exclusivo do domínio da escola, e que é provável, que estudo assim estejam investigando, na verdade, um efeito bastante particular: as crianças que já passaram por processo de ensino-aprendizagem ligado a um tema deveriam naturalmente ter mais sucesso em situações que envolvam esse tema. (Linz e Gimenez, 1997, p.95)

Para Lins e Gimenez portanto, caracterizar o uso das letras em Álgebra não é suficiente para se entender os processos da atividade algébrica desenvolvida por estudantes em um ambiente escolar.

Kieran e Chalouh (1993), abordam o tema da linguagem e fazem uma distinção entre dois aspectos: "(a) representação de quantidades desconhecidas, na resolução de equações ou na representação de problemas através de equações, onde a letra funciona como incógnita e (b) representação de variáveis, quando na especificação de uma solução geral ou na generalização de padrões ou ainda na representação de propriedades numéricas e fórmulas" (p. 180).

O desenvolvimento histórico desses dois enfoques no uso de letras sugere que o uso de letras para representar quantidades desconhecidas, pode ser mais acessível para os jovens aprendizes do que o uso de letras para representarem variáveis.

Entretanto, precisamos estar atentos, pois a distinção entre incógnita e variável não é tão simples como pode parecer a princípio, pois alguns autores defendem que se tratam de um único conceito, enquanto para outros são conceitos diferentes. Em geral, a diferenciação se dá a partir do objeto que se está estudando, o termo incógnita surge no estudo das equações e o termo variável está associada ao conceito de função.

No entanto, a própria concepção de variável tem mudado ao longo do tempo. Hart (1951) citado por Usiskin (1995), não utilizava o termo variável até o estudo dos sistemas de equações e depois tratava as variáveis como números que mudam. Por exemplo, Hart apresenta uma definição formal de variável, conceituando esta como um número literal que pode ter mais de um valor durante o estudo de uma situação. Já, Usiskin (1995) mostra que nos anos 80 a tendência era evitar a distinção entre nome e objeto, pensando as variáveis como símbolos que podiam ser substituídos por objetos concretos.

No início do século XX, devido a influência da escola formalista as variáveis eram consideradas, como sendo todos os símbolos matemáticos, como marcas no papel relacionadas umas com as outras. Usiskin (1995) acrescenta que o advento dos computadores permite que os estudantes realizem operações algébricas sem terem de se preocupar em compreender o que estão fazendo (p. 10). Um grande número de estudantes têm a convicção de que as letras representam sempre números. Contudo, se olharmos para alguns exemplos, rapidamente verificamos que não é assim.

Por exemplo, na geometria utilizamos letras para representar pontos, em lógica são utilizadas as letras *p* e *q* para representar proposições e em análise infinitesimal a letra *f* é utilizada para representar uma função. Deste modo podemos observar que as variáveis têm muitas definições, referências e símbolos possíveis.

O processo de aprendizagem tem um caráter idiossincrático, fazendo com que cada indivíduo construa seus conhecimentos e desenvolva suas habilidades de modo particular, o que pode em muitos casos, produzir erros ou compreensões equivocadas. Assim, identificar os erros que ocorrem durante o processo de aprendizagem, e que muitas vezes são produzidos pelo enfoque utilizado pelo professor, pode ajudar o professor a melhorar a sua prática, além é claro, permitir que o aluno corrija suas concepções e procedimentos.

1.3 Erros Algébricos

Tradicionalmente, a maioria das escolas separa o estudo da Aritmética e da Álgebra, começando com a Aritmética e depois, nas séries finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio, muda o foco para a Álgebra. Porém, existe um crescente consenso de que esta separação torna mais difícil para os estudantes aprenderem Álgebra (KIERAN, 1992, 2004).

Diante dessa realidade, conhecer os erros dos alunos é importante, uma vez que fornecem informações sobre suas interpretações e compreensões, bem como, sobre eventuais dificuldades de manipulação simbólica dos estudantes.

Estudos nessa área têm sido realizados por muitos pesquisadores, dentre os quais, Filloy e Sutherland (1996) que a partir da análise de trabalhos publicados sobre erros em Álgebra, afirmam que a correção de erros sintáticos, assim como as dificuldades que ocorrem na resolução de equações ou problemas complexos, não devem ser deixados para serem resolvidos espontaneamente pelos alunos com a ampliação da sua base de domínio das operações algébricas.

Nesse sentido é importante que o professor encare o erro como uma oportunidade, que serve para introduzir novas questões, permitindo o aprofundamento do que se está estudando.

Para alguns pesquisadores como Socas et al. (1996), a interpretação da Álgebra como a Aritmética generalizada implica que se usem letras em vez de números na escrita de expressões gerais que representam e/ou descrevem regras aritméticas o que leva os estudantes a cometerem muitos erros que podem ser atribuídos a muitas causas, tendo em comum entre elas o fato de que a compreensão da aritmética e da Álgebra se confunde. Para esse autor podemos identificar os seguintes tipos de erros:

a) *De natureza e de significado dos símbolos e das letras.* O uso de símbolos, é um recurso que dá a possibilidade de representar e manipular abstrações, porém é importante que não se perca a sua natureza e significado, para que se possa compreender o modo como se pode operar e como se devem interpretar os resultados. Logo, quando um estudante não tem claras as diferenças entre a aritmética e Álgebra ele tende a cometer erros, utilizando procedimentos aritméticos em ambientes que requerem um procedimento algébrico. Um erro comum é responder 9x como resultado da expressão 5x + 4, este erro pode estar relacionado ao fato de se associar o sinal + como uma ação a realizar, como acontece em Aritmética. Outro erro típico em Álgebra, diz respeito à associação de que a cada algarismo ou letra tem um lugar correspondente. Assim, se $x = 6$ então $4x = 46$. O uso dos procedimentos aprendidos no estudo das frações mistas em Aritmética, condiciona erros como escrever $xy=-8$ se $x=-3$ e $y=-5$. Outro símbolo que por vezes gera dificuldades é o sinal de =. Em Aritmética escrevemos, por exemplo, $7 + 2 = 9$, $9x2 = 6x3$ ou $2x(6-4) = 2 \times 2 = 4$, onde o sinal de igual tem o sentido bidirecional. Portanto, na Aritmética, o sinal de igualdade representa uma afirmação verdadeira em ambos os sentidos. No entanto, numa equação o sinal obriga a incógnita a assumir um valor de modo que a expressão torne-se verdadeira, funcionando assim como um signo que induz o estudante a buscar uma solução. Além de tudo isso, na Aritmética, as letras são geralmente associadas às unidades, onde por exemplo usa-se *m* para metros e *g* para gramas, no entanto, quando o estudante começa a estudar Álgebra, essas mesmas letras são muitas vezes usadas para representar o número de metros ou o número de gramas como uma quantidade desconhecida, ou seja, como uma incógnita ou variável.

b) *De objetivo da atividade e da natureza das respostas. Enquanto na* Aritmética busca-se encontrar e trabalha-se com soluções numéricas concretas, em Álgebra a situação é bem diferente, uma vez que se pretende obter relações e/ou expressões gerais simplificadas. Assim, muitas vezes o estudante adota na Álgebra os mesmos parâmetros, e da mesma forma que na Aritmética, a solução é única e numérica, em Álgebra ele busca a mesma coisa, consequentemente muitas vezes acaba simplificando *3x+8y* como 11xy .

c) *De compreensão da Aritmética.* As dúvidas dos alunos em Álgebra, muitas vezes são aquelas que eles já tinham em aritmética. Por exemplo, o uso de parênteses e as frações. Se um aluno efetua erradamente a adição de frações, por exemplo, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$, $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{5}$ ou $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ certamente que esse problema se repetirá posteriormente em Álgebra. Outro exemplo, mas relacionado com o uso de parênteses: $-(a+b)=-a+b$.

d) *Devido ao uso inapropriado de fórmulas ou regras de procedimentos. O*s alunos usam, com freqüência, fórmulas ou regras da maneira que aprenderam e como as conhecem, sem o cuidado de as adaptarem às diferentes situações, o que muitas vezes produz falsas generalizações sobre os operadores ou sobre os números. A propriedade distributiva é geralmente uma fonte de erros, por exemplo $a(b+c)=ab+c$. A simplificação de expressões tal como $\frac{Ax}{x}=A$ origina erros como $\frac{9x+6}{6}=9x$ ou $\frac{4x-3}{4}=x-3$.

Um estudo sobre os erros na simplificação de expressões e na resolução de equações foi feito por Greeno (1982), referido em Kieran (1992), que realizou uma investigação com alunos que iniciavam o estudo da Álgebra, envolvendo tarefas como expressões algébricas, onde constatou que o desempenho dos estudantes durante um certo tempo parecia aleatório, uma vez que estes usavam procedimentos com erros aleatórios, indicando a ausência de marcas estruturais algébricas. A confusão entre aritmética e Álgebra era visível através do modo como consideravam as diversas partes de uma expressão algébrica. Por exemplo, numa situação podiam simplificar $4(6x+3y)+5x$ como $4(6x+3y+5x)$ e em outra situação fazer outra coisa. Para o autor os erros ocorriam porque os estudantes não compreendiam o que era uma expressão algébrica e, ele classificou os erros cometidos pelos alunos em três tipos:

(a) *Eliminação*: produzidos por uma generalização excessiva de algumas operações matematicamente válidas em domínio mais restritos. Um exemplo deste erro é simplificar 39x - 4 como 35x ou 2xy – 2x como *y*.

(b) *Troca de membros*: ao se considerar a equação x+37=150 , a resolução passa pela transformação em *x=37+150* .

(c) *Redistribuição*: na resolução da equação x+10=25 , os alunos subtraem 10 ao primeiro membro e adicionam 10 ao segundo, x+10 –10=25+10.

Carry, Lewis e Bernard (1980) fizeram um estudo sobre o primeiro erro apontado acima, com relação ao processo de resolução de equações com estudantes universitários. Observaram que o erro realizado com maior frequência, quando da resolução de equações, era o de *eliminação*. Kieran (1992) também analisou este erro e acrescentou que ele é resultado de uma generalização excessiva de algumas operações matemáticas, que são válidas em domínios mais restritos.

Já, o segundo e o terceiro erro costumeiramente ocorrem na resolução de equações pelos métodos mais formais. Kieran (1992), considera que os estudantes "podem de algum modo estar inseguros quanto às relações estruturais entre a adição e a subtração ou, pelo menos, inseguros na forma escrita destas relações quando estas envolvem um termo literal" (p. 402).

Kieran (1992) destaca que na resolução de equações pelo método formal, faz parte a transposição e realização da mesma operação em ambos os lados da equação, apontando que "existe alguma evidência para sugerir que muitos alunos que usam a transposição não estão a operar nas equações como um objeto matemático, mas a aplicar cegamente a regra muda de membro – muda de sinal" (p. 400).

Ainda nesse trabalho, Kieran (1992) cita Brown, afirmando que ele e seus colaboradores concluíram que estudantes secundários (norte-americanos, 7º e 11º graus) parecem ter algum conhecimento dos conceitos e regras básicas da Álgebra, todavia os resultados mostram que, com frequência, não são capazes de aplicar estes conhecimentos em situações problemas, nem parecem entender as estruturas que estão sob estes conceitos e as técnicas matemáticas.

Hall (2007) identifica outro procedimento comum entre estudantes ao calcularem: $\frac{x}{2}+3=5 \Leftrightarrow x+3=10$. Como se pode ver, os alunos tendem a generalizar abusivamente uma regra muito utilizada, que funciona perfeitamente em equações mais simples, como $\frac{x}{2}=3 \Leftrightarrow x=6$. Nesse caso em particular, observa-se um fato destacado por Hilbert e Carpenter (1992), segundo os quais na Matemática escolar, os alunos confiam em estratégias inventadas para resolver uma grande variedade de problemas.

Hall (2002) identificou ainda outros erros cometidos pelos alunos, quando resolviam equações lineares, ao realizar um estudo piloto com alunos do primeiro ano do ensino secundário. Esse estudo foi ampliado logo em seguida, investigando uma amostra de 246 alunos, com idades entre os 12 e 16 anos, de uma escola secundária, através de um exame final. Hall, além de reconhecer os erros referidos acima, observa novos erros, que classifica assim:

(1) *Omissões*: ocorre quando um termo é deixado para trás na resolução de uma expressão aparentemente sem razão.

(2) *Divisão*: ocorre quando o aluno não efetua a divisão final para encontrar o valor da incógnita.

(3) *Ausência de estrutura*: surge quando o aluno não compreende a expressão "fazer o mesmo em ambos os membros".

(4) *Operação inversa* : surge quando se realiza um raciocínio semelhante ao que conduz ao erro de *eliminação* referido por Carry, Lewis e Bernard (1980). Um exemplo desse erro é a transformação de 4x=1 em x=4-1 . Nesse caso foi utilizada a operação inversa da adição em vez da operação inversa da multiplicação.

(5) *Fila de números*: por exemplo a simplificação de –3 +1, na resolução de equações, como -4. Este erro talvez tenha por base a prioridade que muitos alunos atribuem para a operação entre os números e só depois ao sinal.

Investigar por que a Álgebra é tão difícil de compreender foi o tema estudado por Booth & Cook (1995). Eles realizaram um estudo com alunos entre os 13 e 16 anos com a intenção de descobrir o que torna a Álgebra tão difícil, recorrendo à identificação do tipo de erros mais frequentes cometidos e também buscaram identificar a razão desses erros. Apesar de existirem alunos de diferentes idades e, consequentemente, em níveis de escolaridade diferentes, existiram erros similares. O estudo centrou-se em quatro temas:

1. *Foco na atividade algébrica e a natureza das respostas*. Na Aritmética pretende-se sempre obter um número como resposta, enquanto que na Álgebra não. O foco passa a ser nos procedimentos e relações, bem como nas expressões na forma simplificada. Assim, os alunos demonstram dificuldade em aceitar $11x$ ou $a + b$ como uma resposta final, dado que a expressão algébrica representa quer o procedimento quer a resposta.

2. *O uso da notação e de convenções em Álgebra*. A dificuldade reside na interpretação dos símbolos pelos alunos. Por exemplo, 7ab é dado como resposta *5a* + 2b. Neste caso os alunos têm a tendência a juntar os termos.

3. *Significado das letras e variáveis*. O uso de letras é comum tanto na Aritmética como na Álgebra, porém na Aritmética recorre-se às letras para indicar a unidade, por exemplo *m* para metros. Já, na Álgebra a letra é utilizada de diversos modos.

4. *O tipo de relações e métodos utilizados em Aritmética.* É fato que em muitos aspectos a Álgebra é entendida como Aritmética generalizada, assim, consequentemente, as concepções erradas dos alunos em Aritmética afetam o desempenho em Álgebra. Exemplo desta situação é o fato de os alunos tenderem a esquecer o uso de parênteses. Outras vezes, os alunos recorrem a métodos informais em Aritmética, o que acarreta implicações em Álgebra.

Para a sua dissertação de mestrado Nobre, (1996) pesquisou algumas dificuldades que os alunos da 6.ª série tinham ao iniciar o estudo da Álgebra:

- dificuldade em dar sentido a uma expressão algébrica;
- não distinguir a adição aritmética (3 + 5) da adição algébrica (*x* + 3);
- não ver a letra como a representação de um número;
- atribuição de um significado concreto às letras;
- dificuldade para pensar numa variável como significando um número qualquer;
- interpretações diferentes para as ações que correspondem aos símbolos + e = na Aritmética e na Álgebra;
- significados distintos para algumas letras na Aritmética (por exemplo, 3*m* em Aritmética significa 3 metros e em Álgebra é o triplo de *m*);
- dificuldade em passar da linguagem natural para a linguagem algébrica.

As dificuldades identificadas por Nobre evidenciam que os alunos não lidam bem com os símbolos, buscando constantemente referências na Aritmética já estudada por eles e muito mais precisa. Logo, o que parece suscitar essa crise nos estudantes é a ideia de variável.

Sfard (2000), buscando explicar porque para tantas pessoas a Matemática é tão difícil, descreve a seguinte circularidade no caso dos símbolos algébricos: se o significado é função do uso, alguém deve manipular um conceito para entendê-lo, por outro lado, como podemos usar algo sem entendê-lo ? Para Sfard é exatamente essa circularidade o que constituí uma grande armadilha para os alunos, no entanto, ao mesmo tempo é o combustível para os processos de aprendizagem.

1.4 Resolução de Problemas e Álgebra

A Álgebra e o conhecimento prático se relacionam, geralmente, através dos problemas. Em 1980 o NCTM declarou que o foco do ensino da Matemática deveria ser a resolução de problemas. Nesse sentido, Filloy e Sutherland (1996) defendem que estes problemas têm um papel importante no ensino e aprendizagem da Álgebra. Entretanto, o viés adotado no ensino da Matemática com relação aos problemas tem sido criticado devido a sua natureza artificial com que geralmente são apresentados aos alunos.

Filloy e Rubio (1993), investigaram a solução aritmética e algébrica de problemas com estudantes de 15 e 16 anos da cidade do México. O estudo consistiu na aplicação de três métodos didáticos para a resolução de problemas aritméticos/algébricos. Os dois primeiros métodos são fundamentados na Aritmética e o terceiro requer competência algébrica.

Método de Inferência Analítica Sucessiva. Este é o método clássico para resolver problema usando apenas Aritmética. O enunciado do problema é concebido como uma descrição de uma “situação real”, ou uma “possível afirmação do mundo”. Em seguida, é transformado através de sentenças analíticas, isto é, usando fatos que são válidos em qualquer parte do mundo. Depois, são feitas inferências lógicas que atuam como uma descrição das transformações da “possível situação” até que se alcança uma que é reconhecida como a solução do problema.

Método Analítico de Explorações Sucessivas. Este método utiliza explorações numéricas no sentido de começar a análise do problema, para depois encontrar a solução. Assim, inicia-se com a resolução procurando identificar o que se pretende descobrir no problema. Em seguida, são atribuídos possíveis valores numéricos, desse modo, existe uma leitura do problema apenas com valores numéricos, dado que se consideram os dados, as relações entre estes e o valor assumido como solução. Segundo Filloy e Rubio (1993) este método é composto por 4 fases: (a) Leitura e explicitação das incógnitas. A representação inicial do problema através da leitura é consequência da primeira análise da situação que o aluno faz, no sentido de a compreender. As quantidades que se pretende determinar (as incógnitas) são separadas. O resultado desta análise ajuda na compreensão do problema e no estabelecimento da relação entre os dados e outras incógnitas (como as incógnitas secundárias). (b) Introdução de uma situação hipotética. São propostos valores numéricos para as incógnitas, assumindo assim uma possível solução do problema. Deste modo, o aluno pode fazer inferências. Nesta fase há uma primeira análise da situação, contudo, não há ainda necessariamente a noção de relações entre os elementos do problema. Todavia há duas possíveis situações, o problema foi ou não compreendido. No primeiro caso, foi reconhecida a informação, pelo que mecanismos cognitivos que antecipam a solução entram em ação, procurando a solução. No segundo, o aluno necessita recorrer a outros mecanismos cognitivos, como o método de translação, uma adaptação do método cartesiano. Neste caso, o uso de uma linguagem intermediária permite a construção de uma ponte entre esta e os símbolos utilizados na Álgebra, e uma abordagem numérica pode levar ao desenvolvimento da situação e posteriormente à solução. (c) Comparação entre dois valores que representam o mesmo no problema. Esta comparação tem de ser estabelecida e, pelo menos um deles, é consequência da relação mútua entre os dados e o valor da incógnita. E (d) Recuperação das operações efetuadas e obtenção da equação. Esta fase está dependente da fase anterior. A construção do significado para a representação de problemas usando equações tem de passar através da análise da situação, onde as relações devem ter significado para o aluno. Assim, com o uso de uma linguagem intermediária, espera-se que o aluno possa dar significado às relações no problema e finalmente conferir significado para a relação de equivalência representada por uma equação, conduzindo à solução do problema.

Método cartesiano. Neste método, alguns dos elementos desconhecidos são representados por expressões algébricas. Assim, o enunciado é expresso em linguagem algébrica, o que conduz a uma ou várias equações, cuja solução é depois contextualizada e indica a solução do problema. O método cartesiano também foi alvo de estudo por Puig e Cérdan (1990), os quais afirmam que este se situa no terreno da Álgebra, dado que o processo de tradução do problema parte da Álgebra e se encontra ligado à Álgebra. Assim, este método permite a tradução de expressões dadas na linguagem natural para textos matemáticos no sistema de representação (sistema de sinais matemáticos) e depois a aplicação de transformações. No que diz respeito às regras para traduzir um problema para uma equação ou sistema de equações, Puig e Cérdan (1990) citam Pólya (1966). Indicando quatro regras: (a) Compreender bem o problema, de seguida convertê-lo na determinação de um certo número de quantidades desconhecidas. (b) Examinar o problema da maneira mais natural possível, considerando-o como resolvido e apresentado, com uma ordem conveniente, todas as relações que devem verificar-se entre as incógnitas e os dados, de acordo com a condição indicada. (c) Separar uma parte da condição que permita expressar uma mesma quantidade de duas maneiras diferentes e obter assim uma equação. Decompor eventualmente a condição em partes, de modo a obter assim tantas equações como incógnitas. (d) Transformar o sistema de equações numa única equação.

Tendo por base os três métodos referidos, Filloy e Rubio (1993) acreditam que o método analítico de explorações sucessivas é realizável, por exemplo, com uma planilha eletrônica. Acrescentam que do ponto de vista da didática, este método dá significado aos métodos numéricos para a resolução de equações.

Os três primeiros métodos foram estudados por Filloy e Rubio (1993), no sentido de descreverem os tipos de dificuldades, obstáculos e facilidades promovidos pelo uso de cada um deles. Segundo eles, para o uso de qualquer um dos métodos é necessário desenvolver competências para “(a) separar a questão principal do problema […]; (b) considerar o problema separado de um modo que se existir uma incógnita implícita, seja posteriormente explícita e transformada na incógnita principal (competência para mudar a incógnita); (c) criar novas incógnitas partindo da situação do problema e utilizá-las para definir estratégias de solução; (d) representar relações entre as diversas incógnitas; (e) identificar representações de relações no sentido de encontrar um elemento comum; (f) representar a situação utilizando uma equação; e (g) usar procedimentos algébricos para resolver equações como uma técnica para procurar a incógnita no problema" (p. 160).

No que diz respeito ao método cartesiano, para Filloy e Rubio (1993), o uso competente deste método para resolver problemas aritmético-algébricos implica uma evolução no uso de simbolização. O aluno pode dar significado à representação do problema que surge de determinados exemplos concretos trabalhados na aula, criando assim problemas de referência, a partir dos quais são identificados outros com o mesmo esquema de solução. Acrescentam ainda que o uso do método cartesiano faz sentido quando o aluno "está consciente que através da sua aplicação pode resolver problemas daquele tipo" (p. 158). Por outro lado, a representação simbólica de problemas no método cartesiano, recorrendo às relações entre os dados e a incógnita de um problema, faz com que não seja necessário um esforço de memória no sentido de recordar todas as descrições semânticas referidas no enunciado. Contudo, é necessário que o aluno reconheça as expressões algébricas utilizadas na resolução do problema.

Filloy e Rubio (1993) mencionam que são necessárias várias competências para resolver situações problemáticas mais complexas. É necessário o uso técnicas intermediárias, tal como o uso de (a) expressões algébricas, (b) proporcionalidade, (c) percentagem, (d) situações multiplicativas como: $? \times A = B$, $A \times B = ?$ e $A \times ? = B$, e (e) manipulação de números negativos, entre outros. Na sua perspectiva, estas e outras técnicas devem ser utilizadas para a aprendizagem de conceitos mais abstratos que surjam em determinadas situações.

Recomendam ainda o recurso a situações concretas, para o desenvolvimento de competências com o método cartesiano, ou a produção de novas regras sintáticas partindo de textos concretos, destacando que o uso de uma abordagem adequada evita que o aluno caia em determinadas tendências cognitivas que o impedem de utilizar o método cartesiano para a resolução de problemas, tais como (a) a presença de mecanismos que levam a processos errôneos (por exemplo, o aparecimento de um determinado tipo de equação na resolução de um problema e o aluno não a sabe resolver), (b) a presença de obstáculos derivados da semântica ou da sintaxe (por exemplo, dar significado aos símbolos algébricos), e (c) a presença de mecanismos inibitórios (por exemplo, a existência de um número racional em vez de um inteiro), etc. Vale ainda referir que, para compreender o progresso no uso competente do método cartesiano, devem ser exploradas as tensões entre o uso de conceitos, representação de número generalizado, representação da incógnita, incógnita, variável e relação.

Kieran (1981) acredita que, uma das dificuldades relacionadas com o uso de problemas, no sentido de dar significado ao simbolismo matemático é, precisamente, o assunto da relação *versus* procedimento do uso do sinal de igual. Lochhead e Mestre (1988), referem-se às instruções em Álgebra, que parecem, muitas vezes não fornecer aos alunos uma oportunidade adequada para aprender a interpretar símbolos matemáticos. Além disso, os alunos não aprendem a ler e escrever em Matemática. Esta omissão, não só limita o seu desempenho em problemas como também os põe em clara desvantagem quando se trata de aprender a manipulação simbólica de regras em Álgebra. Sem a capacidade para interpretar expressões, os alunos não têm mecanismos para verificarem se um determinado procedimento é correto. Assim, têm muitas vezes de confiar em aspectos mecanizados para resolver os problemas.

Um aspecto importante a se considerar é que dizer aos alunos que algo está errado, e dar a explicação, nem sempre é suficiente para eliminar a concepção errada. Muitas vezes, os alunos só parecem ultrapassar a concepção errada se conseguirem utilizar a correta pouco tempo depois de aprendida, fato previsível visto que o conhecimento vai sendo construído com base em noções anteriores. Com o intuito de superar as concepções erradas, o professor deve trabalhar com esses alunos levando-os a compreender o que estava errado. Para isso, Lochhead e Mestre (1988), consideram que se pode recorrer a um processo com três passos: compreensão qualitativa, compreensão quantitativa e compreensão conceitual. O primeiro consiste em clarificar a situação com base na compreensão da idéia. No segundo recorre-se a exemplo de quantidades, relacionando-as. O último consiste em solicitar uma equação que traduza a situação, tendo por base a relação expressa no enunciado. Pode acontecer que o aluno não escreva a equação correta contudo este confrontou o problema que tinha e eliminou a concepção errada.

A transição da Aritmética para a Álgebra é difícil para muitos estudantes, inclusive para aqueles que possuem um bom nível de proficiência em Aritmética, requerendo deles muitos ajustes nas suas concepções matemáticas (KIERAN, 2004, KILPATRICK et al., 2001). O ponto central que deve ficar claro para os estudantes, é que no estudo da aritmética o foco está nas respostas, enquanto que no estudo da Álgebra esse se transfere para as relações que existem.

Para Lesh, Post & Behr (1988) o procedimento descrição-transformação-cálculo é uma das características que diferencia a Álgebra da Aritmética. Note-se que não é necessário que a equação que descreve ou modela o problema especifique imediatamente uma série de cálculos para apresentar uma resposta. Na Álgebra, as fases de descrição e de apresentação da solução na resolução de um problema podem ser separadas. Na Aritmética, os alunos geralmente realizam uma série de procedimentos de cálculo para produzir uma resposta.

2. A Investigação

Nesse capítulo são apresentados o problema de investigação, os objetivos, a metodologia da investigação e os instrumentos de pesquisa utilizados.

2.1 Problema de investigação

A aprendizagem da Álgebra formal constitui-se em uma grande barreira para os estudantes e, em virtude disso, tem recebido atenção de muitos pesquisadores (KIERAN, 1992; SOCAS et al, 1996; NCTM, 2000) que buscam entender melhor a origem das dificuldades, e ao mesmo tempo, compreender como acontece o processo da aprendizagem da Álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Durante o Ensino Fundamental, geralmente a partir da 6ª série, os estudantes começam o seu aprendizado formal da Álgebra, no entanto, quando chegam ao Ensino Médio apresentam grandes dificuldades no uso de habilidades e conhecimentos algébricos, que estudaram no Ensino Fundamental. Esse trabalho busca identificar e mapear quais competências, habilidades e conhecimentos algébricos desenvolvidos na escola, que os estudantes efetivamente sabem utilizar quando ingressam no Ensino Médio.

2.2 Objetivo Geral

Esta investigação possui como objetivo geral identificar e mapear os conhecimentos, competências e habilidades algébricas que estudantes de 1º ano do Ensino Médio desenvolveram ao longo dos anos de escolarização no Ensino Fundamental, em uma escola pública estadual no município de Osório/RS.

2.2.1 Objetivos Específicos

- investigar quais as competências e habilidades algébricas que estudantes do 1º Ano do Ensino Médio desenvolveram durante o período em que cursaram o Ensino Fundamental e caracterizam seu pensamento algébrico;
- investigar o que estudantes do Ensino Médio aplicam dos conteúdos algébricos estudados no Ensino Fundamental;
- quais as dificuldades e concepções errôneas apresentadas por esses estudantes.

2.3 Metodologia

Segundo Bodgan e Biklen (1994), em uma investigação qualitativa as questões a investigar são determinadas com o objetivo de estudar o fenômeno em sua complexidade e no contexto natural, assim, adotou-se nesse trabalho um viés qualitativo.

Ainda para Bodgan e Biklen (1994) existem cinco características que definem uma investigação qualitativa:

1. os dados são obtidos no ambiente natural, sendo o investigador o instrumento principal;
2. os dados recolhidos têm caráter descritivo;
3. o interesse do investigador está centrado no processo e não simplesmente nos resultados;
4. a análise dos dados tende a ser feita de uma forma indutiva;
5. o investigador deseja essencialmente compreender o significado que os participantes atribuem às suas experiências.

A abordagem adotada nessa investigação seguiu um enfoque de estudo de caso, pois não visou à descoberta de leis sociais, e sim há, na investigação, uma preocupação com a compreensão e/ou interpretação do fenômeno social estudado (TAYLOR & BOGDAN (1984) apud SANTOS FILHO, 2002).

Além disso, os estudos de caso são um modo de estruturar uma investigação em que se busca a compreensão de fenômenos que não se pode destacar do contexto e são que úteis, especialmente, quando se precisa compreender algum problema ou situação específica com profundidade (PATTON, 1987,p.19).

Também se considera que esta forma de estruturar a investigação foi vantajosa pela realidade do cotidiano escolar ser bastante complexa, e em particular, pelo fato de que o investigador também desempenhou o papel de professor.

Para a execução da investigação dividiu-se o trabalho em quatro etapas:

1ª) caracterização do pensamento algébrico, desenvolvido nas séries finais do Ensino Fundamental (5ª, 6ª, 7ª e 8ª séries);

2ª) realização de uma experiência piloto, utilizando o *software* SCOMAX[7] com estudantes do Ensino Médio, visando verificar a viabilidade da metodologia de investigação;

3ª) implementação de uma experiência, com o *software* SCOMAX, visando identificar as características do pensamento algébrico de alunos do 1º ano do Ensino Médio;

4ª) identificação das características do pensamento algébrico dos alunos participantes do experimento e dos principais erros cometidos, a partir dos bancos de dados gerados pelo SCOMAX e dos registros dos alunos.

A caracterização do pensamento algébrico foi desenvolvida a partir de um cruzamento entre as habilidades que os estudantes devem desenvolver durante o Ensino Fundamental, tendo NCTM (2000), PISA[8](2004), PCN+(2002) e ENEM (2001) como referência e, também os conteúdos de Matemática estudados na escola, conforme os livros didáticos utilizados nessa fase. Após esta caracterização, foi necessária uma ampla investigação de atividades didáticas (exercícios, problemas ou modelagens) que pudessem ser utilizadas nos testes, para indicar como os estudantes lidam com situações que exijam conhecimentos algébricos. As atividades utilizadas foram classificadas em níveis (fáceis, médias e difíceis), pois os indivíduos podem estar em momentos diferentes da construção dos conceitos.

A experiência piloto, para a validação da metodologia a ser utilizada, foi realizada com 12 estudantes do 2º Ano do Ensino Médio de uma escola pública do município de Osório, com os conteúdos de equações e funções de 1º grau, que resultou na publicação de um artigo (Apêndice A), no International Congress on Mathematical Education - ICME 11, em Monterrey, no México, em julho de 2008.

A terceira etapa do processo foi uma experiência, realizada com 12 estudantes de uma turma de 1º Ano do Ensino Médio, em uma escola pública do

[7] Student Concept Map Explore, descrito no item 2.3.3
[8] Programme for International Student Assessment

município de Osório, objetivando caracterizar o pensamento algébrico dos estudantes investigados.

Para a realização dos testes, os estudantes foram divididos em 4 grupos de 3 alunos, para que fosse possível um acompanhamento individualizado pelo professor/pesquisador. Os testes foram resolvidos individualmente, em dois encontros semanais de aproximadamente 2 horas e 30 minutos cada um, no turno da tarde pois os alunos estudavam regularmente pela manhã, no laboratório de informática da escola, sendo resolvidos os testes 01(5ª série) e 02(6ª série) no primeiro encontro e os testes 03(7ª série) e 04(8ª série) no segundo encontro.

Concluiu-se o trabalho com a análise dos dados, tendo as palavras de Moraes (1987) como referência:

> A análise de conteúdo investe tanto em descrição como em interpretação. A descrição, nesta perspectiva de análise, é uma etapa essencial e necessária, mesmo que não se possa permanecer nela. As categorias construídas no processo de análise de algum modo envolvem tanto descrição como interpretação. Bons trabalhos necessitam chegar à interpretação... (MORAES, 1987, P.57) .

Também é importante salientar que nesse estudo, para preservar o anonimato dos estudantes, a referência aos mesmos acontece como aluno 01 até aluno 12.

2.3.1 Perfil da Amostra

Todos os participantes do experimento eram alunos do professor/pesquisador, no 1º ano do Ensino Médio da Escola Estadual de Educação Básica Prudente de Morais, no município de Osório/RS, no turno da manhã. Os estudantes foram convidados a participar da pesquisa, comparecendo de forma espontânea no turno aposto ao horário normal de aula.

A turma que participou da pesquisa era formada por 28 alunos (19 meninos e 9 meninas), sendo que 12 compareceram para a realização do teste, 7 meninos e 5 meninas, com idade média de 16 anos.

Entre os 12 alunos que compareceram, 10 deles haviam cursado todo o Ensino Fundamental na Escola Prudente de Morais e os outros 02 cursaram o Ensino Fundamental em outra escola estadual da periferia da zona urbana da cidade. Onze alunos nunca foram reprovados e apenas um aluno já tinha sido reprovado no 1º ano do Ensino Médio.

Os alunos demonstraram interesse na realização do teste, essencialmente por curiosidade, para descobrirem o "quanto" de Matemática sabiam, segundo eles. Ao final de cada sessão os alunos participantes do experimento demonstraram um pouco de cansaço e de impaciência, manifestadas através de comentários feitos ao pesquisador sugerindo que alguns testes eram longos.

Antes da realização dos testes os estudantes que participaram do experimento responderam a um questionário (Anexo E), para que fosse possível traçar um perfil dos estudantes participantes do experimento. Sendo que, aproximadamente 50% dos estudantes têm computador em casa e 80% dizem utilizar *internet* pelo menos 3 vezes por semana, o que evidencia um perfil de estudante com bom acesso à tecnologia.

A maioria dos estudantes participantes (9 alunos) mostrou-se favorável ao estudo da Matemática, no entanto, também consideram a disciplina difícil (6 alunos) e afirmam muitas vezes não saberem porque estudam determinados conteúdos (8 alunos).

Os estudantes participantes do experimento não realizavam rotineiramente testes de avaliação com questões de múltipla escolha, como prática avaliativa rotineira na escola são utilizadas avaliações onde os estudantes devem apresentar a resolução das questões propostas.

2.3.2 Perfil da Escola

A Escola Estadual de Educação Básica Prudente de Morais está localizada no estado do Rio Grande do Sul, no município de Osório, no Bairro Porto Lacustre.

Geograficamente, a escola fica localizada no centro do município e atende aos alunos do bairro em que está localizada e também aos alunos de outros bairros próximos, com destaque para dois periféricos, principalmente no turno da noite.

A escola oferece Ensino Fundamental completo, Ensino Médio regular diurno e noturno e Ensino Técnico noturno. Além dos períodos regulares, a escola oferece aos alunos atividades paralelas como teatro e prática esportiva.

No total, a escola tem aproximadamente 1400 alunos divididos nas três modalidades oferecidas, sendo que o maior número cursa o Ensino Médio diurno. Ela é dividida em dois blocos horizontais numa área de 12 hectares, às margens de uma lagoa. Este ambiente amplo dá aos alunos muito contato com a natureza e, ao mesmo tempo, muita liberdade.

A prática predominante no cotidiano escolar é tradicional, com aulas basicamente expositivas. É claro que existem práticas que rompem com esta realidade, mas isso ocorre de forma isolada por parte de alguns professores, não sendo uma atitude de escola, embora a revisão das práticas seja constantemente discutida.

2.3.3 SOFTWARE SCOMAX

O SCOMAX é um sistema de inteligência artificial, que está sendo desenvolvido pelo Grupo de Estudos Curriculares da Universidade Luterana do Brasil e pelo Grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna, de Tenerife na Espanha, implementado em Java, que mostra os resultados de um teste adaptativo individualizado, de cada nodo[9] (conceito) de um mapa conceitual. Esse sistema informático faz a ligação do mapa conceitual ao teste adaptativo, através de um grafo, gerando o mapa individualizado dos conhecimentos dos alunos investigados. O teste é fundamentado na Teoria de Resposta ao Item (TRI) e nas redes bayesianas. O SCOMAX, a partir dos resultados obtidos pelos alunos, gera os mapas individualizados dos seus conhecimentos (MORENO et al, 2007).

Os testes adaptativos gerados pelo SCOMAX, tem por base a Teoria de Resposta ao Item (TRI) que reúne uma variedade de modelos estatísticos usados para fazer predições, estimativas ou inferências sobre conhecimento e habilidades (ou competências) medidas em um teste. Usando modelos estatísticos, é possível predizer habilidades por meio de correspondências entre a pontuação obtida por um estudante em uma situação de teste e os itens a ele fornecido (HAMBLETON & SWAMINATHAN, 1985; BAKER, 2001).

A TRI propõe modelos que buscam representar a relação entre a probabilidade de uma resposta certa a um item e a habilidade de um aluno, nos proporcionando avaliar individualmente, pois cada estudante responderá itens referentes à sua habilidade, tornando a avaliação personalizada.

[9] Nodo é o nome que se dá a cada etapa do grafo que será utilizado pelo SCOMAX para estruturar o teste adaptativo individualizado.

O SCOMAX gera testes individualizados para cada estudante, a partir de grafos elaborados pelo pesquisador, tendo os mapas conceituais dos conhecimentos que se deseja avaliar ou mapear como referência. Estes grafos são interpretados pelo SCOMAX e informam ao sistema a seqüência que deverá ser seguida na aplicação dos testes, visando a avaliação e o mapeamento dos conhecimentos e das habilidades. As figuras 02, 03, 04 e 05, a seguir, mostram os grafos utilizados para a estruturação dos testes adaptativos, que foram realizados pelos estudantes participantes do experimento.

Na figura 02 pode-se verificar que o teste concentra-se em habilidades algébricas e matemáticas desenvolvidas antes da formalização da Álgebra, que só ocorre na 7ª série. Em particular, o teste busca verificar se o estudante consegue trabalhar com representações, quer sejam de padrões ou em fórmulas.

Os 7 nodos que fazem parte deste grafo são: ler representações algébricas, representar relações algébricas, usar fórmulas, valor numérico, propriedades e operações dos números naturais e reconhecimento de padrões. O nodo 5ª série é somente o objetivo do teste identificando o seu fim.

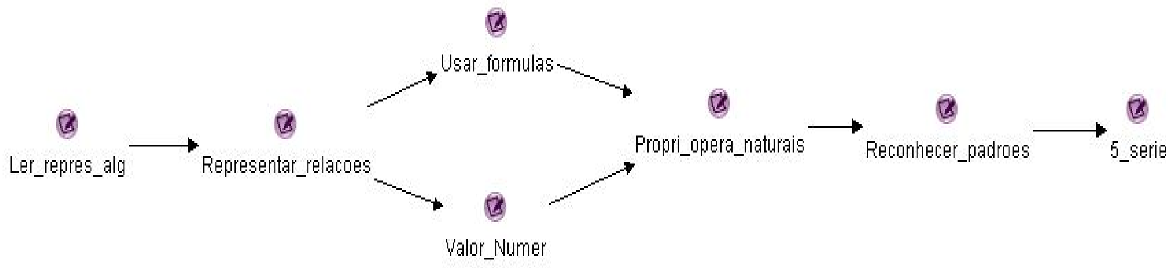


Figura 02: Grafo do teste 01 (5ª série)

Na figura 03 é apresentado o grafo do teste 02, referente a 6ª série. Evidenciando a ênfase desse teste nas habilidades operacionais relacionadas a equações de 1º grau e, ao nível de compreensão que os estudantes participantes do experimento tinham para representações algébricas.

Esse teste foi composto por 7 nodos, sendo eles: compreender e representar algebricamente, usar fórmulas, calcular e compreender razão e proporção, reconhecer padrões, operar algebricamente e resolver e compreender soluções de equações de 1º grau. Sendo o nodo 6ª série o nodo objetivo, indicando o final do teste.

Figura 03: Grafo do teste 02 (6ª série)

Na figura 04 pode-se ver o grafo do teste 03, que tem como parâmetro os conteúdos e as respectivas habilidades desenvolvidas na 7ª série. Como é nessa série que os estudantes normalmente formalizam a Álgebra, nesse teste deu-se ênfase ao mapeamento das habilidades vinculadas com as propriedades operacionais e as operações algébricas, ao mesmo tempo em que se buscou verificar se os estudantes seriam capazes de utilizar os seus conhecimentos algébricos na resolução de situações problema.

O grafo deste teste foi composto por 5 nodos: propriedades e operações algébricas, resolver sistemas e inequações de 1º grau, compreender e expressar ideias algebricamente, fazer generalizações e deduzir fórmulas e resolver problemas. O nodo 7ª série indicava o final do teste, sendo considerado o nodo objetivo.

Figura 04: Grafo do teste 03 (7ª série)

A figura 05 mostra o grafo que estruturou o teste relacionado com a 8ª série. Esse teste centrou-se no mapeamento das habilidades dos estudantes no uso da Álgebra para descrever situações, fazer generalizações e resolver problemas.

Esse teste era formado por 6 nodos, sendo eles: compreender e usar propriedades dos números reais, usar propriedades e operações algébricas, criar representações, resolver equações de 2º grau, usar e compreender gráficos, fazer generalizações e deduzir fórmulas e resolver problemas. O nodo "usar e compreender gráficos" presente nesse grafo, foi desconsiderado em todas as análises porque os resultados obtidos não foram conclusivos. O nodo 8ª série indicava apenas o fim do teste, sendo considerado o nodo objetivo.

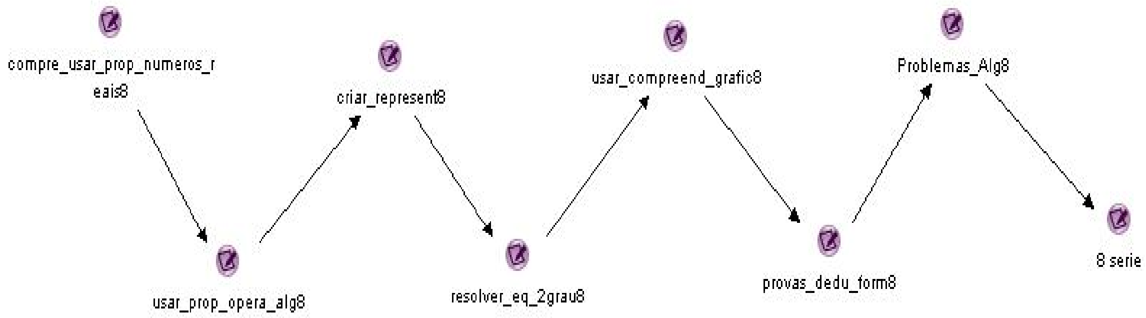


Figura 05: Grafo do teste 04 (8ª série)

Para proceder a testagem de cada nodo, o SCOMAX acessa o banco de questões criado pelo pesquisador, selecionando uma questão de acordo com os resultados anteriores obtidos pelo aluno. Sendo que os bancos de questões usados nesse experimento tinham em média 15 questões em cada nodo, classificadas em fáceis, médias ou difíceis. Além da classificação por graus de dificuldade, o pesquisador define, a priori, a expectativa de acerto ou erro aleatório e o grau de relação entre a questão e o nodo com o qual ela está vinculada. Por fim, o pesquisador define o tempo esperado para que o estudante resolva cada questão. Nesse caso, para as fáceis, cada estudante tinha 100 segundos, nas médias 180 segundos e nas questões difíceis eles tiveram 270 segundos para a resolução.

Ao final dos testes o sistema SCOMAX gera um banco de dados com os resultados de cada nodo, indicando: o dia e o horário da resposta, a questão respondida, o número do item e se o resultado foi certo ou errado, o grau de dificuldade para a questão, a probabilidade de adivinhar a resposta e a escala de pontuação, conforme se pode observar na figura 06.

El tiempo de la respuesta	Pregunta	Num.respuesta	Tipo de la respuesta	Tiempo restante(s)	Dificultad	Adivinanza	puntos antes
06/10/08 18:47:01.035	Quando um determinado número é fatorado obtém-se: a.a.a.b.c.c Qual das opções abaixo representa o resultado obtido.	3	Incorrecto	176	0.55	0.2	0.1
06/10/08 18:47:39.142	Mariana tem 17 anos menos que o triplo da idade de Dora. A soma das idades das duas é 39. A expressão que nos permite calcular a idade de Dora é:	2	correcto	130	0.4	0.15	0.1
06/10/08 18:48:20.274	Eliminando parênteses e colchetes, escreva da forma mais simples possÃvel a expressÃ£o: 3x-(-2x+7x)-[10x+(-4x-2x)-(7x+10x)].	3	Incorrecto	181	0.55	0.2	0.22857141
06/10/08 18:49:10.701	A diagonal de um quadrado pode ser calculada usando a fórmula , onde d é a medida da diagonal e a medida do lado. Porém, se desejarmos calcular a medida do lado, a partir, da medida da diagonal devemos usar:	0	Incorrecto	130	0.4	0.15	0.22857141
06/10/08 18:49:41.395	Simplificando a expressÃ£o -9(X+3)-18 , obtemos:	4	Incorrecto	38	0.3	0.15	0.22857141
06/10/08 18:50:51.608	Qual o valor de X na expressão 3X+X- 8 = X + 8?	4	correcto	44	0.3	0.15	0.22857141
06/10/08 18:51:55.277	Qual o valor de Z na expressÃ£o Z + 2Z + 4 = Z + Z +5?	1	correcto	96	0.4	0.15	0.37209302
06/10/08 18:52:55.285	A simplificação de 4x+4-x+y-2+x resulta em:	2	Incorrecto	50	0.3	0.15	0.61244017
06/10/08 18:53:51.274	Para calcular a área de um círculo usamos a fórmula , onde A é a área do círculo e r é a medida do raio. Qual é a área de um círculo que tem diâmetro de 24 cm?	2	Incorrecto	128	0.4	0.15	0.61244017
Puntos en total							0.61244017

Figura 06: Exemplo de tabela de resultados gerado pelo SCOMAX

No exemplo da figura 06, retirado do banco de dados gerados pelo sistema SCOMAX, pode-se observar que o estudante obteve um resultado de 0,61, superando neste nodo o mínimo requerido, estipulado como sendo 0,50. Também é possível verificar o dia de realização do teste e o horário em que o aluno respondeu as questões, da mesma forma que, é possível visualizar as questões respondidas, o nível de dificuldade de cada uma e o tipo de resposta.

2.3.4 Instrumentos de Pesquisa

Para o mapeamento do pensamento algébrico foram estruturados 4 bancos de dados, cada um com aproximadamente 110 questões que serviram de fonte para o SCOMAX gerar os testes adaptativos individualizados, um para cada série final do Ensino Fundamental, que deveriam ser resolvidos pelos estudantes com o objetivo de caracterizar o pensamento algébrico dos estudantes investigados. Como já referido, a caracterização do pensamento se fez através dos conteúdos, buscando identificar que habilidades e por conseqüência que competências algébricas os estudantes desenvolveram. Adotou-se a mesma concepção de competência proposta para o ENEM , onde se entende que:

> Competências são modalidades estruturais da inteligência, ou melhor, ações e operações que utilizamos para estabelecer relações com e entre objetos, situações, fenômenos e pessoas que desejamos conhecer. (Relatório Pedagógico 2000, pág. 11)

Enquanto que:

> Habilidades são especificações das competências estruturais em contextos específicos, decorrem das competências adquiridas e referem-se ao plano imediato do “saber fazer”. Por meio de ações e operações, as habilidades aperfeiçoam-se e articulam-se, possibilitando nova reorganização das competências.(Relatório Pedagógico 2000, pág. 11)

A partir desta caracterização geral, entende-se que competências algébricas são ações e operações de pensamento que utilizam representação, operação e interpretação abstrata de termos, incógnitas e variáveis que descrevem e/ou generalizam situações. Enquanto que as habilidades algébricas estão relacionadas à capacidade do estudante de implementar e aplicar determinada competência para compreender fatos e situações algébricas, bem como, para resolver problemas.

Os testes centraram-se especialmente em 4 competências básicas (PCN, 1998, PCN+, 2002, NCTM, 2000) que os estudantes devem ter desenvolvido ao longo dos anos de Ensino Fundamental, conforme a figura 07, que mostra como foram estruturados os testes, com o objetivo de mapear as competências e habilidades algébricas dos estudantes e o conteúdo tradicionalmente estudado no Ensino Fundamental utilizado pelos estudantes.

Cada teste buscou identificar se o estudante desenvolveu as quatro competências algébricas referidas, sendo que se dava ênfase a uma competência em cada teste, embora todas as 4 fossem avaliadas com os conteúdos de cada série. Por exemplo, na 5ª série a ênfase foi na compreensão de representações algébricas, na 6ª série foi na resolução de expressões, na 7ª série foi nas operações algébricas, enquanto que na 8ª série, foi no reconhecimento e representações de padrões, bem como, na resolução de problemas.

Competência	Habilidade	Nodo	Grupo	Série
Compreender e representar	Ler representações algébricas	Ler representações algébricas	01	5ª
	Representar relações algébricas	Representar relações algebricamente	01	5ª
	Compreender/representar algebricamente	Compreender/representar algebricamente	02	6ª
		Compreender/expressar algebricamente	02	7ª
Operar algebricamente	Usar fórmulas	Usar fórmulas 1	03	5ª
		Usar fórmulas 2	03	6ª
	Valor numérico	Valor numérico	03	5ª
	Usar propriedades e operações	Propriedades/operações com N	04	5ª
		Propriedades/operações com R	04	8ª
		Propriedades/operações algébricas	04	7ª
		Operar algebricamente	06	6ª
		Compreender/usar propriedades algébricas	06	8ª
	Resolver equações	Resolução de equações de 1º grau	05	6ª
		Resolução de equações de 2º grau	05	8ª
		Resolução de sistemas e inequações	05	7ª
Reconhecer e generalizar	Reconhecer padrões	Reconhecer padrões 1	07	5ª
		Reconhecer padrões 2	07	6ª
	Generalizar e deduzir fórmulas	Criar representações	08	8ª
		Generalizar e deduzir fórmulas 1	08	7ª
		Generalizar e deduzir fórmulas 2	08	8ª
Resolver problemas	Resolver problemas algébricos	Problemas algébricos 1	09	7ª
		Problemas algébricos 2	09	8ª

Figura 07: Quadro das competências e habilidades mapeadas pelos testes.

Evidentemente algumas habilidades algébricas são desenvolvidas em mais de uma série, pois a aprendizagem da Álgebra é um processo longo, portanto, existem casos onde a mesma habilidade é avaliada mais de uma vez e, além disso, uma competência pode exigir muitas habilidades diferentes. Assim, para permitir uma análise mais apurada foram organizados 9 grupos, conforme a figura7.

As questões utilizadas nos testes adaptativos, gerados pelo SCOMAX, foram baseadas em questões encontradas em livros didáticos de 5ª, 6ª 7ª e 8ª séries (CAVALCANTE, 2006; MORI, 2005; NAME, 1979; SOUZA e SPINELLI, 2002; IEZZI, 2004; IMENES e LELLIS, 1997; GUELLI, 1998, 2004; GIOVANNI, 2002; GIOVANNI e PARENTE, 1999; DANTE, 2004; FILHO e SILVA, 2003) e, encontram-se disponíveis no CD anexo.

As questões, em cada nodo, eram classificadas em fáceis médias e difíceis, com relação a habilidade principal que se desejava avaliar com aquela questão. As questões dos testes, dependendo do grau de dificuldade, tinham um tempo diferente para que os estudantes as resolvessem, variando de 100 segundos as questões classificadas com fáceis, 180 segundos as questões classificadas como médias e 270 segundos para as questões difíceis.

O banco de dados gerado pelo SCOMAX foi utilizado nas análises posteriores para o mapeamento do pensamento algébrico dos estudantes participantes do experimento, bem como, os registros feitos pelos estudantes durante a realização dos testes no computador.

Durante a resolução dos testes, os estudantes podiam utilizar lápis e papel, para procederem a qualquer registro (cálculo, anotação,...) que julgassem necessário para a resolução das questões propostas. Esses registros também foram considerados como instrumentos de pesquisa, pois fornecem informações para a análise das atividades dos estudantes, principalmente para identificação de erros cometidos.

Além disso, outra fonte utilizada nas análises foram os registros escritos do professor/pesquisador, pois durante a resolução dos testes o professor/pesquisador buscou observar as atitudes, reações e estratégias dos estudantes ao longo da resolução dos testes.

2.3.5 TESTES

Para a estruturação dos testes, foi necessária uma ampla pesquisa em livros didáticos afim de identificar em que conteúdos estudados nas séries finais do Ensino Fundamental, são exigidos dos estudantes competências e habilidades algébricas. Para isso, todos os conteúdos matemáticos onde são utilizados conceitos algébricos, conforme os livros didáticos analisados de 5ª a 8ª série do Ensino Fundamental, foram organizados para melhor visualização e organização em mapas conceituais, para a construção dos bancos de questões a serem utilizados pelo SCOMAX.

Na figura 08, pode-se visualizar no mapa conceitual construído, que na 5ª série faz-se uso de habilidades algébricas na utilização de fórmulas, no estudo da geometria, bem como, quando é realizada atribuição de nomes para pontos, retas e ângulos utilizando letras. Também é comum, o uso de letras para generalizar operações e propriedades no conjunto dos números naturais.

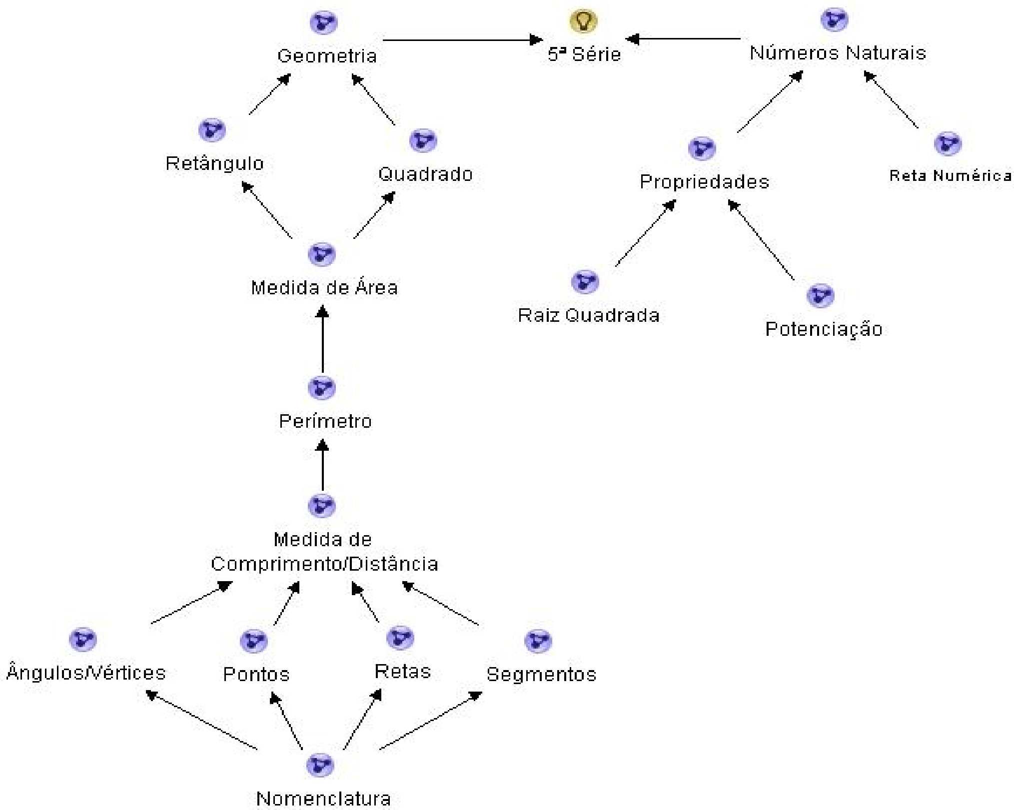


Figura 08: Mapa dos conteúdos algébricos da 5ª série

A figura 09 mostra o mapa conceitual com os conteúdos da 6ª série que utilizam alguma habilidade algébrica no seu estudo, sendo que destaca-se novamente o uso de fórmulas em geometria, no estudo das razões e proporções e na matemática financeira. Os estudantes utilizam habilidades algébricas, principalmente, no estudo das equações de 1º grau.

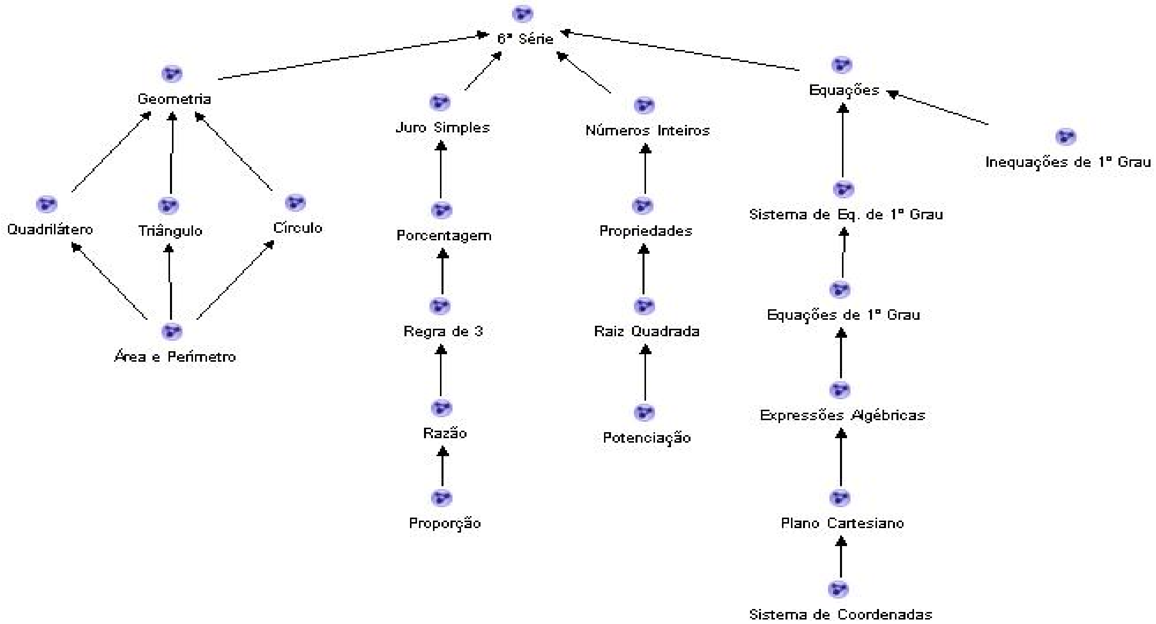


Figura 09: Mapa dos conteúdos algébricos da 6ª série

Os conteúdos da 7ª série que utilizam habilidades algébricas são mostrados no mapa conceitual da figura 10, sendo importante destacar que, nesse momento existe a preocupação de formalizar a Álgebra estudada e, por vezes, já utilizada pelos estudantes. Da mesma maneira que nas séries anteriores, faz-se uso de habilidades algébricas no estudo da geometria, no entanto, na 7ª série, o aluno estuda detalhadamente as propriedades e operações algébricas, além de aprender a resolver e operar expressões sofisticadas.

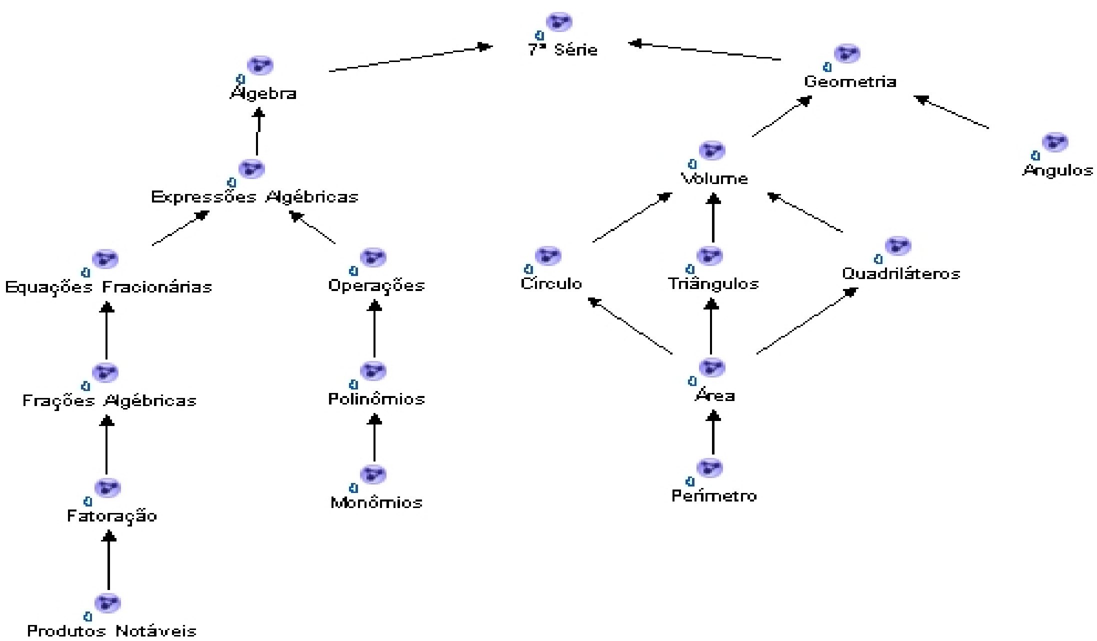


Figura 10: Mapa dos conteúdos algébricos da 7ª série

A figura 11 mostra o mapa conceitual dos conteúdos estudados na 8ª série que utilizam habilidades algébricas, merecendo destaque às provas e generalizações das propriedades dos números reais, a resolução de equações e sistemas de equações de 1º e 2ª graus.

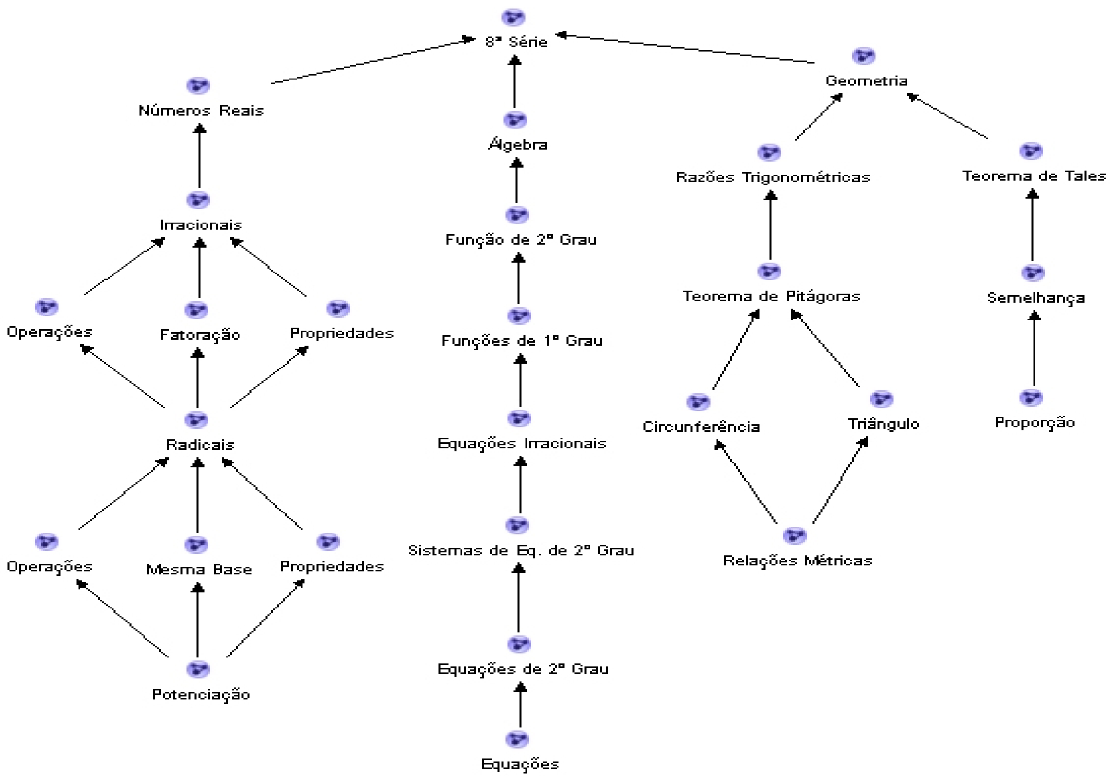


Figura 11: Mapa dos conteúdos algébricos da 8ª série

Levando em consideração os mapas conceituais dos conteúdos elaborados a partir dos livros didáticos e as competências e habilidades propostas pelo NCTM, ENEM, PCN e Pisa, sugere-se que o estudante, ao longo do processo de aprendizado da Álgebra, deve gradativamente desenvolver as competências e habilidades algébricas apresentadas na figura 12.

As competências de “fazer representação algébrica” e “fazer generalizações” foram divididas em níveis básico e pleno em virtude de entender-se que algumas habilidades podem ser desenvolvidas independentemente do estudo da Álgebra formal. Ao contrário das outra duas competências que exigem o estudo específico da Álgebra para o seu bom desenvolvimento.

Competências		Habilidades
Compreender representações algébricas	Básica	Reconhecer representações
		Ler representações
	Plena	Expressar ideias e relações usando representações algébricas
		Comparar e relacionar a representação algébrica com diferentes formas de representação
		Compreender o significado de soluções
Operar algebricamente		Determinar o valor numérico
		Usar fórmulas
		Resolver equações
		Executar operações algébricas
		Usar propriedades algébricas
		Resolver sistemas e inequações
		Explicar fatos e procedimentos matemáticos utilizando álgebra
Reconhecer padrões e fazer generalizações	Básica	Reconhecer padrões usando métodos numéricos
		Usar tabelas para representar variações
		Provar propriedades numéricas
	Plena	Reconhecer padrões de variação
		Expressar relações usando funções e expressões
		Provar propriedades algébricas
Resolver problemas		Usar representações algébricas na resolução de problemas
		Utilizar métodos e técnicas algébricas para resolver problemas
		Elaborar justificativas algébricas para a resolução de problemas
		Fazer uso de diferentes formas de representação e análise para resolver problemas algébricos.

Figura 12 – Quadro das competências e habilidades algébricas desenvolvidas nas séries finais do Ensino Fundamental.

No processo que construção do banco de questões que foi utilizado pelo SCOMAX, buscou-se contemplar também as perspectivas processual e estrutural (KIERAN, 1992) que existem no estudo da Álgebra, pois se entende que a distinção proposta por Kieran complementa naturalmente a proposta deste trabalho, já que algumas das habilidades mapeadas, como se pode observar na figura 13, são eminentemente processuais enquanto outras têm caráter estrutural. Alem disso, na maioria dos livros didáticos consultados para a elaboração das questões as perspectivas processual e estrutural são tratadas separadamente.

<table>
<tr><th colspan="2">Álgebra Processual</th></tr>
<tr><th>Competência Algébrica</th><th>Habilidade algébrica</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Compreender representações algébricas</td><td>Ler representações algébricas</td></tr>
<tr><td>Representar relações algébricas</td></tr>
<tr><td>Compreender e representar algebricamente</td></tr>
<tr><td>Compreender e expressar algebricamente</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Operar algebricamente</td><td>Usar fórmulas 1</td></tr>
<tr><td>Usar fórmulas 2</td></tr>
<tr><td>Valor numérico</td></tr>
<tr><td>Resolução de equação de 1º grau</td></tr>
<tr><td>Resolver equações de 2º grau</td></tr>
<tr><th colspan="2">Álgebra Estrutural</th></tr>
<tr><th>Competência Algébrica</th><th>Habilidade algébrica</th></tr>
<tr><td rowspan="6">Operar algebricamente</td><td>Propriedades e operações com N</td></tr>
<tr><td>Operar algebricamente</td></tr>
<tr><td>Propriedades e operações algébricas</td></tr>
<tr><td>Resolução de sistemas e inequações</td></tr>
<tr><td>Propriedades e operações com R</td></tr>
<tr><td>Compreende e usar propriedades algébricas</td></tr>
<tr><td rowspan="5">Reconhecer e representar padrões</td><td>Reconhecer padrões 1</td></tr>
<tr><td>Reconhecer padrões 2</td></tr>
<tr><td>Criar representações</td></tr>
<tr><td>Generalizar e deduzir fórmulas 1</td></tr>
<tr><td>Generalizar e deduzir fórmulas 2</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Resolver problemas</td><td>Problemas algébricos 1</td></tr>
<tr><td>Problemas algébricos 2</td></tr>
</table>

Figura 13: Quadro das competências e habilidades algébricas mapeadas, divididas entre processual e estrutural.

Grande parte dos trabalhos que buscam entender como se dá o processo de aprendizado da Álgebra e o desenvolvimento do pensamento algébrico tem centrado-se no estudo de como os estudantes aprendem, resolvem e entendem equações e funções. Assim, tomando os trabalhos de Kieran (1992) e Socas et al (1996), os bancos de questões daqueles nodos que mapeavam as habilidades relacionadas ao conteúdo de equações também buscaram contemplar a classificação proposta por Kieran (1992) e ao mesmo tempo, abranger a distinção feita por Socas (1996), entre um enfoque semântico ou sintático para o tipo de linguagem algébrica utilizada.

Objetivou-se com o uso dessas classificações contemplar perspectivas algébricas já evidenciadas e/ou descobertas por esses pesquisadores.

3. Resultados e análise

Para a análise global, foram utilizadas como referência 4 competências (compreender representações algébricas, operar algebricamente, reconhecer e representar padrões e resolver problemas) que os testes buscavam mapear, além disso, os nodos que mapeavam as habilidades relacionadas a essas competências foram reunidos em 9 grupos, como mostrado na figura 14, de modo que fosse possível uma análise das habilidades algébricas dos alunos.

Competência	Habilidade	Nodo
Compreender representações algébricas	Grupo 01	Ler representações algébricas
		Representar relações algebricamente
	Grupo 02	Compreender/representar algebricamente
		Compreender/expressar algebricamente
Operar algebricamente	Grupo 03	Usar fórmulas 1
		Usar fórmulas 2
		Valor numérico
	Grupo 04	Propriedades/operações com N
		Propriedades/operações com R
		Propriedades/operações algébricas
	Grupo 05	Resolução de equações de 1º grau
		Resolução de equações de 2º grau
		Resolução de sistemas e inequações
	Grupo 06	Operar algebricamente
		Compreender e usar propriedades algébricas
Reconhecer padrões e fazer generalizações	Grupo 07	Reconhecer padrões 1
		Reconhecer padrões 2
	Grupo 08	Criar representações
		Generalizar e deduzir fórmulas 1
		Generalizar e deduzir fórmulas 2
Resolver problemas	Grupo 09	Problemas algébricos 1
		Problemas algébricos 2

Figura 14: Quadro das competências e habilidades mapeadas divididas por grupo.

Assim, a competência de compreensão de representações algébricas mapeou duas habilidades, através de 4 nodos.

Grupo 01 – buscou mapear a habilidade dos alunos de lerem e reconhecerem representações, faziam parte desse grupo os nodos: ler representações algébricas e representar relações algebricamente. A figura 15 apresenta um exemplo de questão de representações algébricas que faz parte do grupo 01.

A fórmula CP=0,5PU+IP é bem traduzida da seguinte forma:
(a) o custo de produção é igual à metade do preço unitário
(b) o custo de produção é igual à metade do preço unitário mais metade dos impostos
(c) o custo de produção é igual à metade do custo de produção, mais impostos
(d) o custo de produção é igual R$0,50 mais o custo de produção mais imposto
(e) nenhuma dessas

Figura 15: Exemplo de questão proposta no grupo 01.

Grupo 02 – mapeou a capacidade dos alunos de compreenderem representações, sendo que este grupo é composto pelos nodos: compreender e representar algebricamente e, compreender e expressar algebricamente, sendo a ênfase adotada nesse grupo mais formal, no sentido de propor questões com linguagem parecida com a utilizada costumeiramente na escola. A figura 16 mostra um exemplo de questão

A expressão algébrica que representa a soma de um número com seu triplo é:
(a) $x+3$
(b) $x+\frac{3}{x}$
(c) $x+3x$
(d) $x+3+x$
(e) $x+\frac{x}{3}$

Figura 16: Exemplo de questão proposta no grupo 02.

As questões utilizadas para mapear essa primeira competência tinham um enfoque semântico (SOCAS. et al. 1996) pois as questões priorizavam o significado, além disso, as questões buscavam trabalhar a perspectiva da Álgebra como linguagem (KAPUT, 2005).

Com relação à competência de operar algebricamente, a análise centrou-se em quatro habilidades, mapeadas pelo grupo descritos a seguir.

Grupo 03 – buscou mapear a capacidade dos alunos de determinar valores numéricos, a partir de fórmulas e expressos. Esse grupo apresenta os nodos: usar fórmulas 1 (teste 01 – 5ª série), usar fórmulas 2 (teste 02 – 6ª série) e valor numérico. O exemplo da figura 17, apresenta uma questão proposta nesse grupo na qual se buscava identificar se os estudantes saberiam utilizar a fórmula proposta.

Podemos calcular o perímetro de um hexágono utilizando P=6L. Qual o é o perímetro, em metros de um hexágono com 2,5 m de lado?

(a) 2,5 m
(b) 10 m
(c) 15 m
(d) 8,5 m

Figura 17: Exemplo de questão proposta no grupo 03.

Grupo 04 – mapeou a habilidade dos alunos em utilizar propriedades, sendo os nodos desse grupo: propriedades e operações com números naturais; propriedades e operações com números reais e, propriedades e operações algébricas. Aqui, se busca identificar se os estudantes conhecem as propriedades operacionais ou se operam matematicamente ao acaso, sem saberem exatamente porque realizam determinado procedimento ou representação. O exemplo da figura 18 mostra uma questão onde se avalia o conhecimento de uma propriedade das potências.

Quando dividimos potências com a mesma base é válida a seguinte propriedade: $c^m \div c^n = c^{m-n}$. Em qual alternativa abaixo essa propriedade foi corretamente empregada?

(a) $3^2 \div 3 = 1^2$
(b) $3^8 \div 3^4 = 3^2$
(c) $3^{10} \div 3^5 = 3^5$
(d) $3^{10} \div 3^2 = 3^5$
(e) Em nenhuma dessas

Figura 18: Exemplo de questão proposta no grupo 04.

Grupo 05 – mapeia a habilidade dos alunos em resolverem equações, sendo composto pelos nodos: resolução de equações de 1º grau, resolução de equações do 2º grau e resolução de sistemas e inequações de 1º grau. Nesse grupo desejava-se verificar se os alunos sabem resolver equações, inequações e sistemas de equações, bem como, se são capazes de utilizar essas formas de representação matemática na resolução de problemas simples. Na figura 19 está um exemplo de questão que buscava verificar se os estudantes sabem resolver uma equação de 1º grau com denominador.

Qual o valor de X na equação $\frac{x-3}{3} = x - 19$?

(a) 19
(b) 27
(c) 3
(d) 0

Figura 19: Exemplo de questão proposta no grupo 05.

Grupo 06 – é composto pelos nodos relacionados, especificamente, à habilidade de executar operações algébricas, sendo os nodos: operar algebricamente e compreender e usar propriedades algébricas. Como já referido, nesse grupo deu-se ênfase a questões relacionadas fundamentalmente a operações com representações algébricas, e a figura 20 apresenta uma questão que visava identificar se os estudantes conseguiriam executar o produto dos termos. Além disso, nessa questão, desejava-se verificar como os estudantes fariam a resolução, se procederiam ao produto dos lados ou se utilizariam alguma regra de produto notável sem a formalização escrita do cálculo.

Qual polinômio representa a área do quadrado abaixo?

(a) $a + 2ab + b$
(b) $a^2 + 2ab + b^2$
(c) $2a + 2b$
(d) $2(a + b)$
(e) $a^2 - 2ab + b^2$

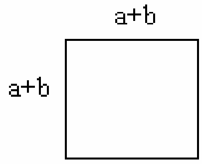


Figura 20: Exemplo de questão proposta no grupo 06.

As questões utilizadas no mapeamento desta segunda competência tiveram como referência a distinção feita por Kieran (1992) entre Álgebra processual (grupo 03) e Álgebra estrutural (grupos 04, 05 e 06). Com relação aos trabalhos de Socas (1996), as questões priorizaram o enfoque sintático, pois davam ênfase as regras operacionais. E com relação a Kaput (2005), as questões tinham a manipulação de formalismos e o estudo de funções como perspectiva.

A terceira competência que se objetivava foi: reconhecer e representar padrões, sendo que foram consideradas duas habilidades centrais:

Grupo 07 – neste grupo deseja-se mapear a capacidade dos alunos de reconhecerem padrões, fazendo parte do grupo os nodos: reconhecer padrões 1 (teste 03 – 7ª série) e reconhecer padrões 2 (teste 04 – 8ª série). Na figura 21 temos um exemplo de uma questão que avaliava se os estudantes conseguiam reconhecer padrões, prevendo, a partir disso, os termos ou passos seguintes.

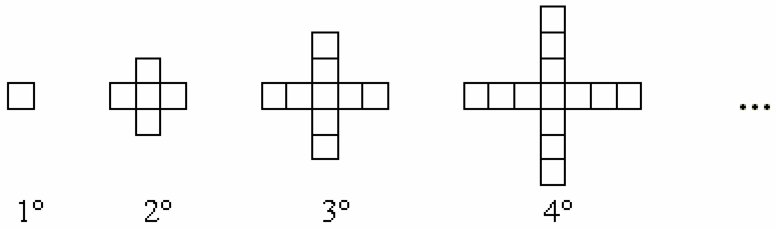
Qual o termo vem depois na seqüência 1, 1, 2, 3, 5, 8, ... ?

(a) 11
(b) 13
(c) 12
(d) 15
(e) nenhum desses

Figura 21: Exemplo de questão proposta no grupo 07.

Grupo 08 – mapeia a habilidade dos alunos de representarem padrões e situações algebricamente, os nodos deste grupo são: criar representações, generalizar e deduzir fórmulas 1 (teste 03 – 7ª série) e generalizar e deduzir fórmulas 2 (teste 04 – 8ª série). Esse grupo desejava identificar se os alunos seriam capazes de reconhecer padrões, como no grupo 08, e se conseguiriam representar os padrões percebidos utilizando linguagem algébrica. Na figura 22 temos uma questão proposta no teste com os objetivos já referidos.

Observe a seqüência abaixo:



Qual expressão nos permite calcular o número de quadradinhos da 80ª posição?
(a) $2n+1$
(b) $4n+1$
(c) $4n-3$
(d) não tem um padrão

Fonte: Giovanni; Castrucci e Giovanni (2002, v.3, p.36)

Figura 22: Exemplo de questão proposta no grupo 08.

A perspectiva adotada nesses grupos foi a da Álgebra como generalização e formalização de padrões (KAPUT, 2005); sendo que não se adotou a distinção entre processual ou estrutural e entre semântica ou sintática como referência de elaboração e análise das questões, já que os trabalhos que fazem essas categorizações focam-se no estudo de funções e expressões.

A última competência considerada foi resolver problemas algébricos, e a Álgebra, como linguagem de modelação, foi a perspectiva (KAPUT, 2005) que orientou a pesquisa dessa competência.

Grupo 09 – essa competência foi testada duas vezes, nos nodos: problemas algébricos 1 (teste 03 – 7ª série) e problemas algébricos 2 (teste 04 – 8ª série). Como entende-se que a resolução de problemas ou, mais especificamente, o uso dos conhecimentos matemáticos para a resolução de problemas seja o ápice do processo de aprendizagem, nesse grupo se buscou verificar até que ponto os estudantes seriam capazes de utilizar os conhecimentos de Álgebra para resolver problemas que exigiam um enfoque algébrico, e outros, que também permitiam uma abordagem aritmética. A seguir, temos um exemplo de questão que permitia uma resolução algébrica, mas que também permitia uma resolução aritmética. Na figura 23, observa-se um exemplo desse tipo de questão.

Em um jogo de basquete, as equipes A e B fizeram, ao todo, 153 pontos. A equipe B fez o dobro de pontos da equipe A, menos 3 pontos. Quantos pontos fez cada equipe?

(a) 51 pt e 101 pt

(b) 50pt e 103 pt

(c) 52 pt e 101 pt

(d) 51 pt e 102 pt

Fonte: Cavalcante; Sosso; Vieira e Poli (2006, v.3., p.155)

Figura 23: Exemplo de questão proposta no grupo 09.

Tendo os grupos descritos acima como referência, podemos constatar nas análises que:

1º) Como já referido, a competência de compreender representações algébricas foi mapeada pelos grupos 01 e 02, sendo que os nodos do grupo 01 centravam-se em questões relacionadas à leitura de representações algébricas. Como o exemplo da figura 24.

Para calcular a nota final uma escola utiliza a fórmula $NF = \frac{N1 + N2 + (2 \times N3)}{4}$, que pode ser entendida da seguinte forma:

(a) a nota final é igual ao dobro das notas dividido por 4
(b) a nota final é igual a soma das duas primeiras notas, mais o dobro da terceira.
(c) A nota final é igual a soma das duas primeiras notas mais o dobro da terceira, e depois se divide por 4.
(d) A nota final é igual a soma das duas primeiras notas, mais o dobro da terceira dividida por 4

Figura 24: Exemplo de questão do teste 01

E situações que requeriam a habilidade de representar algebricamente relações ou procedimentos, como apresentado na figura 25.

A cidade A tem 14000 habitantes e dista 20 km da cidade B que tem dois terços da população de A. Podemos afirmar que a cidade B em relação a cidade A tem:
(a) $2a + 3$ habitantes
(b) $\frac{2}{3}a$ habitantes
(c) $\frac{3}{2}a$ habitantes
(d) $2(a + 3)$ habitantes

Figura 25: Exemplo de questão do teste 01

A partir dos resultados (Apêndice B), podemos constatar que somente dois alunos (Aluno 01 e 06) obtiveram um desempenho igual ou superior a 0,5[10] nesses dois nodos.

Já no grupo 02, cinco alunos (Alunos 01, 04, 05, 07 e 09) atingiram os objetivos esperados nos dois nodos, enquanto os demais tiveram um desempenho superior a 0,5 em apenas um dos nodos. As questões utilizadas nesse grupo, como se pode observar na figura 26, tinham uma redação que utilizavam uma linguagem matematicamente mais formal.

A expressão algébrica que representa a soma de um número com seu triplo é:

(a) x+3

(b) $x+\frac{3}{x}$

(c) x+3x

(d) x+3+x

(e) $x+\frac{x}{3}$

Figura 26: Exemplo de questão do teste 01

A figura 27 apresenta os resultados do mapeamento dessa competência, com relação a esses 2 grupos, onde se pode visualizar com clareza que, como já referido, o desempenho dos estudantes participantes do experimento foi melhor no segundo grupo, sugerindo que para esses estudantes a linguagem algébrica é aplicada fundamentalmente em questões usualmente utilizadas em sala de aula e comuns nos livros didáticos do Ensino Fundamental.

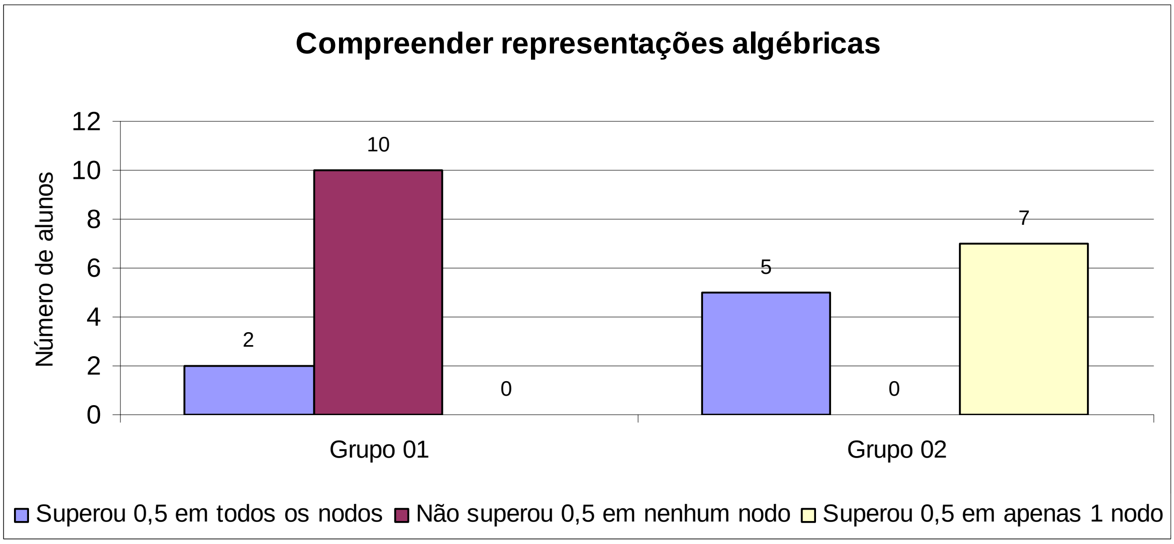


Figura 27: Resultados dos estudantes com relação ao desenvolvimento da compreensão e representação algébrica

---

[10] 0,5 é o resultado mínimo requerido, para os objetivos de um nodo serem considerados atingidos.

2º) Com relação à competência de operar algebricamente, buscou-se mapear 4 habilidades.

A primeira habilidade centrava-se no uso de fórmulas e na determinação do valor numérico e chamou atenção o fato de nenhum aluno superar 0,5 nos três nodos desse grupo (grupo 03), sendo que 3 alunos tiveram bons resultados[11] em 2 nodos (Alunos 05 e 06 nos nodos usar fórmulas 1 e valor numérico e, o aluno 01 nos nodos usar fórmulas 1 e usar fórmulas 2); 4 alunos tiveram bom resultado em apenas 1 nodo (Alunos 02, 07 e 08 no nodo usar fórmulas 1 e aluno 10 no nodo usar fórmulas 2) enquanto os outros 5 alunos não tiveram um desempenho superior a 0,5 em nenhum dos nodos.

Esse desempenho instigou uma análise mais detalhada das questões e dos erros dos alunos, pois foi constatado um índice baixo de acertos. De modo particular as questões que requeriam algum conhecimento de geometria foram aquelas que tiveram índice de acerto baixo, o que acabou comprometendo o resultado dos estudantes.

Assim, pode-se inferir que os estudantes participantes do teste não tiveram no Ensino Fundamental, uma formação que lhes oportunizasse conhecimento dos conteúdos relacionados à geometria, pois nas questões em que eram necessários conhecimentos de conceitos geométricos os estudantes tiveram baixo desempenho, enquanto que, nas questões que não exigiam conhecimento específico de geometria o desempenho dos estudantes foi superior.

A segunda habilidade estudada está vinculada à capacidade dos estudantes de utilizarem as propriedades e operações nos conjuntos numéricos dos números naturais e reais, além das propriedades algébricas (grupo 04). Onde se constata que os alunos 06 e 09 evidenciaram o pleno desenvolvimento dessas habilidades, pois tiveram desempenho superior a 0,5 nos 3 nodos. Já, os alunos 01, 04, 05 e 12 apresentaram um desempenho satisfatório, pois superaram o índice mínimo exigido em 2 nodos (propriedades e operações em N e propriedades e operações algébricas). Entre os seis alunos restantes, três obtiveram um resultado dentro do esperado em apenas 1 nodo (propriedades e operações algébricas), e três tiveram resultado inferior a 0,5 em todos os nodos.

[11] Entenda-se “bons resultados” como aqueles que são maiores ou iguais a 0,5.

Na terceira habilidade dessa competência avalia-se a capacidade dos alunos de resolverem equações de 1º e 2º grau, sistemas de equações e inequações. Onde constata-se que somente 2 alunos (Alunos 02 e 05) tiveram um desempenho superior a 0,5 nos 3 nodos. Enquanto isso, 5 alunos (Alunos 04, 09, 10, 11 e 12) obtiveram um bom resultado nos nodos relacionados a equações de 1º e 2º grau e, 3 alunos (Alunos 03, 06 e 07) obtiveram bons resultados apenas no nodo referende a equação do 2º grau. Sendo que o aluno 08 não obteve um resultado superior a 0,5 em nenhum nodo.

A quarta habilidade (grupo 06) que integra essa competência está relacionada à capacidade dos estudantes de realizarem operações algébricas com expressões, onde apenas 3 alunos (Alunos 03, 05 e 10) tiveram resultados superiores a 0,5 em ambos os nodos, 4 alunos (Alunos 06, 06, 09 e 10) superaram o mínimo requerido apenas no nodo compreender e usar propriedades algébricas, enquanto o aluno 01 saiu-se bem apenas no nodo operar algebricamente. Os outros 4 alunos (Alunos 02, 04, 08 e 12) não tiveram um desempenho acima do mínimo desejado em nenhum dos nodos.

Analisando os resultados descritos acima, se pode concluir que 5 alunos tiveram bom desempenho em apenas 1 nodo, tendo um domínio parcial das propriedades e operações algébricas, realizando, por vezes, as operações de forma intuitiva, enquanto os 3 que tiveram bom resultado em ambos os nodos, demonstraram melhor compreensão dos processos e procedimentos desenvolvidos.

Sob a distinção proposta por Kieran (1992) entre Álgebra processual e Álgebra estrutural, verifica-se que os estudantes participantes do experimento que tiveram os melhores resultados com relação a esta competência, tiveram bons resultados tanto nos grupos processuais como nos estruturais, enquanto que os outros alunos não evidenciaram o desenvolvimento de nenhuma das duas perspectivas. O grupo 05 foi aquele que teve os melhores resultados e visava mapear a habilidade dos estudantes para resolverem equações.

Nos grupos relacionados à competência de operar algebricamente deu-se prioridade a um enfoque sintático (SOCAS, 1996) e, pode-se verificar que os estudantes em sua maioria têm dificuldade para realizarem operações algébricas. Pois eles, muitas vezes, utilizam procedimentos e propriedades adequados, mas não fazem adaptações necessárias ao contexto apresentado pela questão.

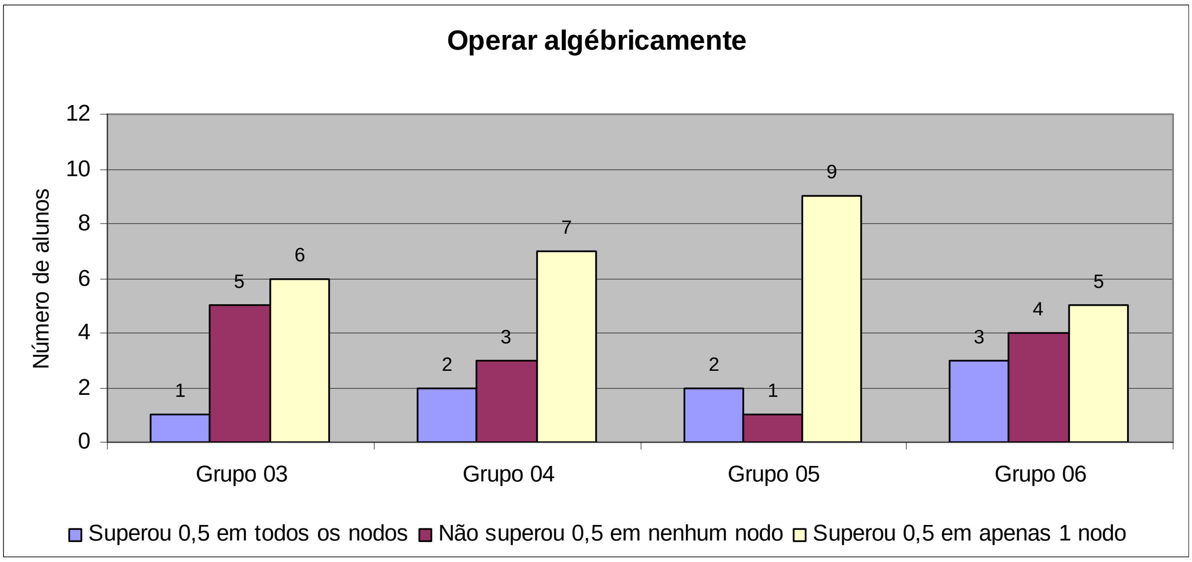


Figura 28: Resultado dos estudantes com relação a operações algébricas

A figura 28 sintetiza os resultados obtidos pelos alunos por grupo de questões, sendo possível verificar que os grupos 03 e 06 foram aqueles em que mais estudantes evidenciaram não dominar as habilidades mapeadas por esses grupos. Enquanto os grupos 04 e 05, embora poucos alunos tenham demonstrado pleno desenvolvimento das habilidades mapeadas, foram os grupos em que menos alunos tiveram desempenho abaixo do mínimo desejado, evidenciando um desenvolvimento parcial dessas habilidades.

3º) A terceira competência que se desejou mapear foi: reconhecer e representar padrões algebricamente.

Buscou-se mapear essa competência através de duas habilidades, sendo a primeira, reconhecer padrões (grupo 07), e a segunda, representar esses padrões a partir de generalizações e deduções (grupo 08).

O reconhecimento de padrões foi avaliado em 2 nodos, sendo que somente o aluno 06 não teve desempenho acima do esperado no primeiro nodo, enquanto no segundo nodo desta habilidade o resultado foi totalmente contrário, pois somente 2 alunos (Alunos 01 e 05) tiveram desempenho acima do mínimo esperado de 0,5. Essa situação leva a conclusão que esses estudantes têm a habilidade de reconhecer apenas padrões simples.

Em termos de representação de padrões, os estudantes mostraram, da mesma forma que no reconhecimento dos padrões, terem desenvolvido essa habilidade apenas basicamente. Essa inferência decorre do fato de nenhum aluno ter tido um desempenho acima do mínimo desejado nos três nodos que avaliavam esta habilidade. Sendo que 6 alunos (Alunos 03, 07, 08, 09, 10 e 11) tiveram um desempenho acima do mínimo desejado em 2 dos 3 nodos , 4 alunos (Alunos 01, 02, 05 e 12) em apenas 1 dos 3 nodos e 2 alunos (Alunos 04 e 06) não obtiveram um resultado acima de 0,5 em nenhum dos nodos.

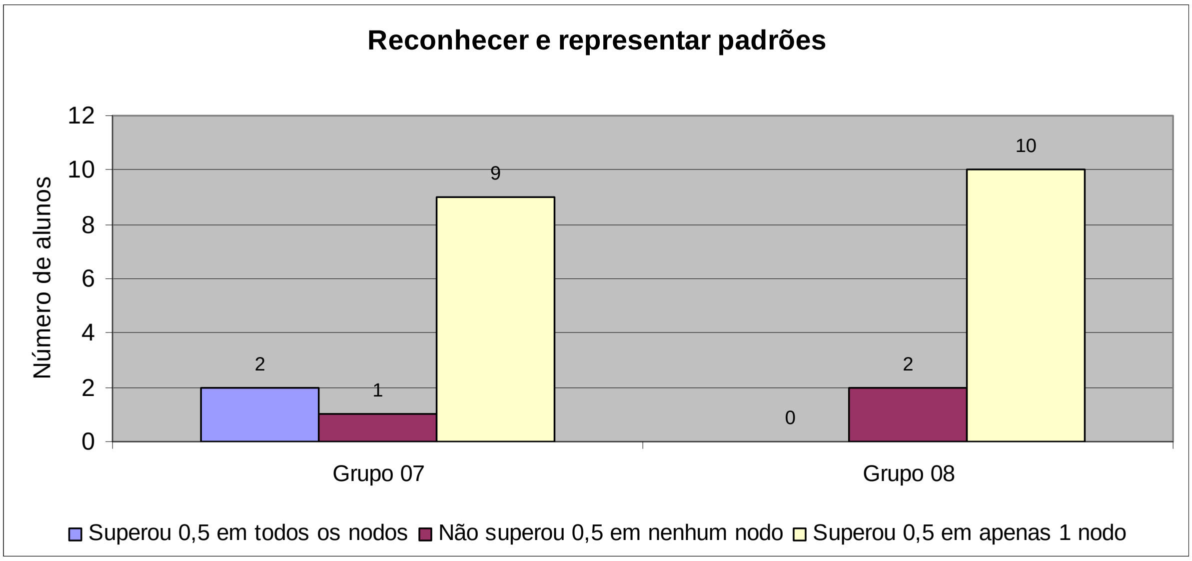


Figura 29: Resultado dos estudantes com relação a reconhecimento e representação de padrões.

A figura 29 resume os resultados do mapeamento dessa competência, evidenciando que os estudantes desenvolveram apenas parcialmente as habilidades relacionadas à competência de reconhecer e representar padrões.

A quarta competência estudada foi resolução de problemas (grupo 09), pois entende-se que o ápice do aprendizado matemático e do desenvolvimento do pensamento algébrico ocorre quando o estudante é capaz de mobilizar seus conhecimentos, competências e habilidades para a resolução de problemas.

Esta competência foi avaliada em dois nodos, no teste referente a 7ª série e no teste referente a 8ª série, e os resultados obtidos demonstram uma situação preocupante, pois somente o aluno 06 obteve resultados acima de 0,5 nos dois nodos e 6 alunos (Alunos 01, 02, 04, 06. 08 e 12) obtiveram resultados acima do mínimo desejado em apenas 1 nodo, sendo os 5 primeiros no teste 3 (7ª série). Os outros 5 alunos (Alunos 03, 05, 09, 10 e 11) obtiveram resultados inferiores a 0,5 em ambos os nodos, que avaliavam essa competência.

Como se observa na figura 30, o grupo de estudantes participantes do experimento mostrou-se bastante heterogêneo, pois metade dos estudantes não superou o mínimo desejado em nenhum dos nodos, enquanto outros cinco alunos obtiveram um desempenho acima do mínimo em somente um dos nodos. Essa situação, permite que se considere que esses alunos possuem pouca capacidade de utilizarem Álgebra para resolver problemas, transitando entre um nível baixo, para aqueles que obtiveram um sucesso parcial e um nível zero, para aqueles que não conseguiram resultados acima do mínimo desejado em nenhum dos nodos que buscavam avaliar e mapear esta competência.

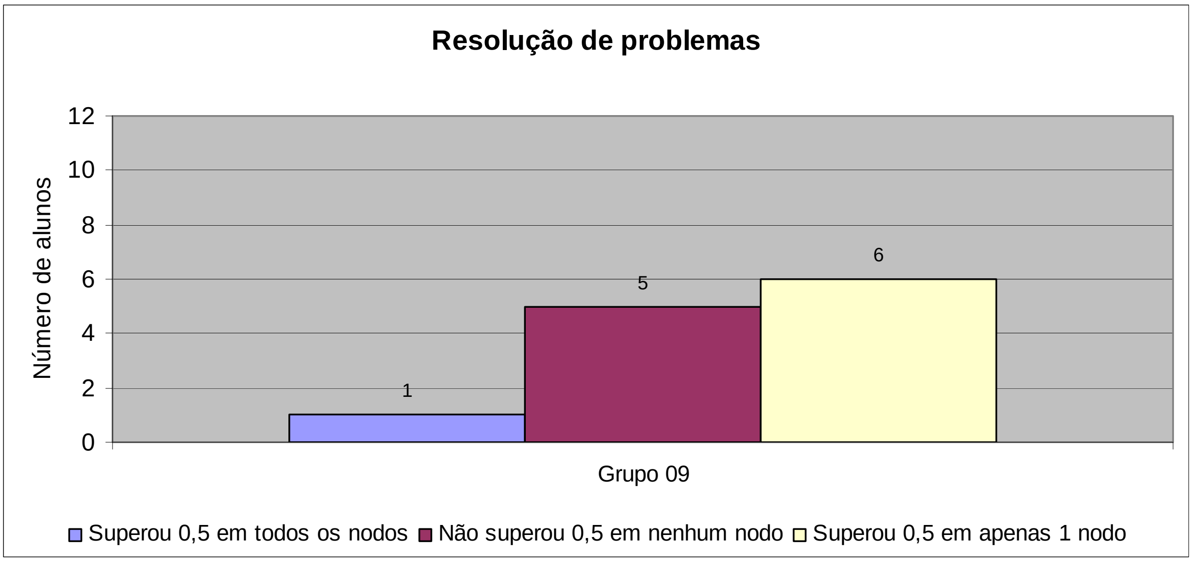


Figura 30: Resultado dos estudantes com relação a resolução de problemas

Como já referido, buscamos identificar com relação às 4 competências, como os estudantes lidam com os enfoques processuais e estruturais da Álgebra segundo (KIERAN, 1992). No mapeamento da compreensão e representação algébrica, as questões enfocaram a Álgebra processual, enquanto no mapeamento das habilidades relacionadas a operações algébricas, buscou-se mapear tanto questões com enfoque processual quanto questões com enfoque estrutural. O reconhecimento e representação de padrões e a resolução de problemas enfocaram apenas a Álgebra estrutural.

Verificou-se que a Álgebra processual mostrou-se difícil para a maioria dos estudantes participantes do experimento, pois esse enfoque foi mapeado em 9 nodos e somente 3 alunos (Alunos 01, 05 e 06) obtiveram desempenho acima de 0,5 em pelo menos 5 nodos, o que se considerou aceitável, pois representa mais de 50% dos nodos, enquanto os outros alunos superaram 0,5 em no máximo 4 nodos, sendo importante destacar que as questões que não utilizam linguagem semelhante à utilizada em livros didáticos ofereceram maior dificuldade, pois se verificou menor índice de acerto. Um fato que merece destaque no aspecto processual são os resultados obtidos pelos estudantes com relação ao nodo resolução de equações de 2º grau, no qual 10 dos 12 alunos superaram o mínimo desejado.

Os resultados encontrados, com relação à Álgebra estrutural, mapeada em 13 nodos, foram percentualmente iguais, pois mantendo o mesmo percentual de sucesso em 50% dos nodos, 3 alunos (Alunos 01, 05 e 07) obtiveram resultados superiores a 0,5 em pelo menos 7 dos 13 nodos. Os resultados obtidos pelos demais alunos também foram semelhantes, se comparados aos obtidos na Álgebra processual, pois esses alunos tiveram um desempenho médio superior a 0,5 em no máximo 4 nodos.

Os nodos em que os estudantes tiveram melhor desempenho, foram aqueles em que deveriam utilizar propriedades algébricas e naqueles em que tinham que reconhecer e representar padrões simples. Analisando as questões propostas nesses 2 nodos, novamente se observa que as questões que utilizavam uma linguagem próxima daquela utilizada nos livros didáticos e, consequentemente, de sala de aula, parecem ser mais fáceis para os estudantes, sendo isso um fator que pode influenciar o seu desempenho.

Especificamente sobre os nodos que mapearam as habilidades e os conhecimentos dos estudantes com relação a resolução de equações e, tendo como referência o trabalho de Kieran (1992), não foi possível identificar erros dos estudantes participantes da pesquisa, relacionados a interpretação do significado das letras utilizadas nas representações algébricas, referenciados por aquela pesquisadora.

Da mesma forma, na análise dos resultados é possível identificar maior dificuldade por parte dos estudantes, com relação às questões de enfoque mais sintático e estruturais, relacionadas a contextos matemáticos, como utilizar propriedades em situações puramente matemáticas.

3.1 Análise de erros

A análise dos erros cometidos pelos alunos é um ponto importante na pesquisa, pois permite que se identifique concepções errôneas dos estudantes, bem como procedimentos e conceitos utilizados indevidamente.

Durante a análise dos registros dos alunos participantes do experimento foi possível identificar vários erros, por exemplo, a questão da figura 31 visava identificar se os estudantes sabiam utilizar as propriedades dos radicais no conjunto dos números reais e, era considerada de nível fácil, pois exigia apenas uma resolução numérica.

Qual o valor numérico da expressão $\sqrt{\frac{a^2 + ax}{m}}$, quando a= 8, x= 10 e m= 9?

(a) 3
(b) 4
(c) 12
(d) 9

Figura 31: Exemplo de questão proposta no teste 04.

Entre os estudantes que realizaram o teste, 6 acertaram a questão apresentando resoluções corretas, enquanto que os outros 6, erraram. Em particular entre esses 6 estudantes, o erro cometido por 4, foi extrair a raiz quadrada apenas no numerador, conforme figura 32. Já com relação aos outros dois alunos, não foi possível identificar nenhum erro específico.

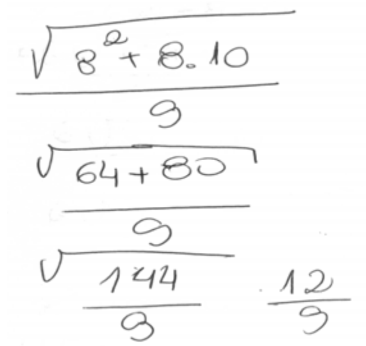


Figura 32: Registros da resolução do aluno 02

Pode-se concluir, a partir dessa situação, que os erros são devido ao uso incorreto da propriedade dos radicais, segundo a qual, dever-se-ia extrair a raiz quadrada nos dois termos, assim, os estudantes utilizam a propriedade de forma incorreta, o que pode significar que estes erros não estão relacionados à falta de compreensão da questão. Esse erro também evidencia a dificuldade, já destacada, de alguns estudantes participantes do experimento com a Álgebra processual.

Um erro cometido pelos alunos, em várias ocasiões, está relacionado ao uso da propriedade distributiva, sendo importante destacar que alguns alunos em determinadas questões usavam corretamente a propriedade distributiva, enquanto em outras, a utilização se dava de maneira equivocada.

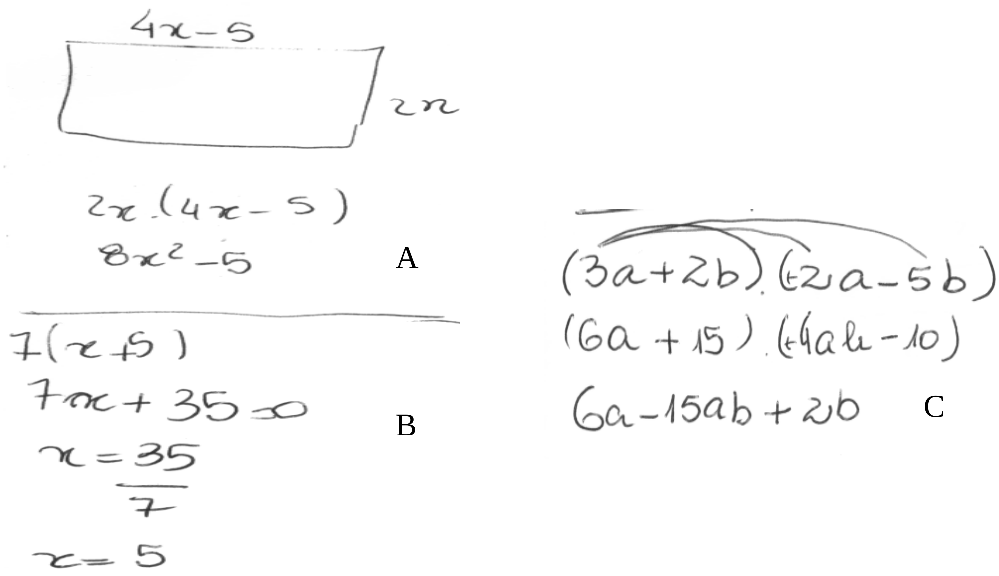


Figura 33: Registros da resolução do aluno 04.

Nos registros da figura 33 podemos verificar que o aluno 04 utiliza corretamente a propriedade distributiva na resolução B, enquanto na resolução A, ele não multiplica $2x$ por –5. Já na resolução C, ele distribui corretamente os termos, mas não opera as potências corretamente, erro cometido também pelo aluno 07, conforme a figura 34.

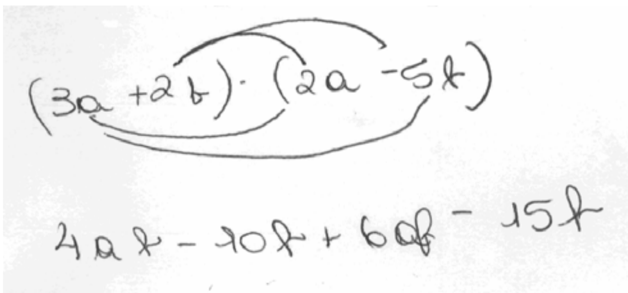


Figura 34: Registros da resolução do aluno 07.

Esses erros sugerem o uso inadequado do procedimento distributivo, o que segundo Socas et al.(1996) pode ocorrer quando os alunos aplicam regras ou procedimentos da maneira como aprenderam, sem o cuidado de fazer as adaptações necessárias a cada situação.

Um terceiro erro cometido, são os erros relacionados à resolução de expressões e equações, onde os alunos não “trocam o sinal” dos termos, ou ainda erros relacionados a adição ou multiplicação de números e letras (incógnitas ou variáveis), conforme figura 31B.

Na figura 35, pode-se ver que o aluno 04 percebeu o erro e refez os cálculos, cometendo os mesmos erros que havia cometido antes. Além disso, chama atenção o uso de dois sinais de igual na resolução desse aluno.

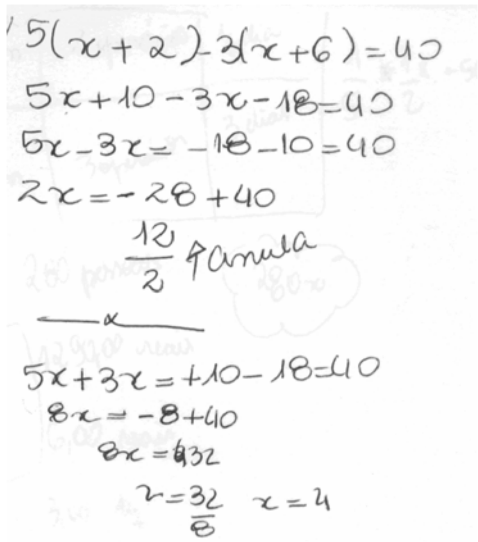


Figura 35: Registros da resolução do aluno 04.

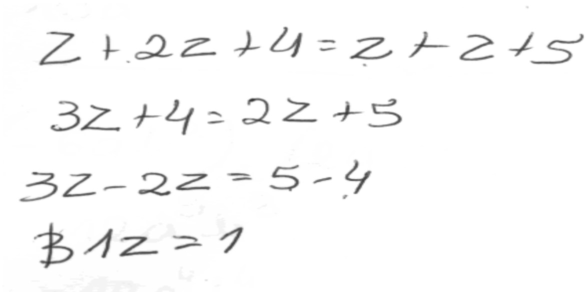


Figura 36: Registros da resolução do aluno 03.

No exemplo da figura 36 não ocorreu erro relacionado ao sinal dos termos, no entanto, podemos ver que o estudante fez $2+z=2z$, um erro descrito por Filloy e Sutherland (1996), ao observarem que, quando os estudantes não têm clara a diferença entre a Aritmética e a Álgebra, eles tendem a cometer erros operacionais ao utilizarem procedimentos aritméticos para resolverem problemas algébricos.

De modo geral, pode-se identificar os erros a e d, identificados por Socas et al. (1996). O primeiro erro é visível na figura 34, quando o estudante opera com a letra e com o número como se possuíssem a mesma natureza, utilizando um procedimento com raízes na aritmética, o segundo erro é visível na figuras 30 e 31C. Não se observou a ocorrência dos erros b e c relatados por Socas.

Especificamente com relação à resolução de problemas, os erros estão relacionados principalmente ao uso de abordagens aritméticas para resolver problemas algébricos. O que em principio, não constitui um erro, no entanto, em muitos casos, mesmo em questões simples, os estudantes tentam seguir os enunciados como a descrição de um conjunto de passos, resultando em erros, como podemos ver nas figuras 37 e 38, onde a figura 37 mostra uma questão proposta para o aluno 12 e a figura 38 mostra a resolução dada pelo aluno 12 para esta questão.

Para calcular o valor de uma corrida de táxi, um taxista utiliza a seguinte fórmula: $V = 3{,}50 + (d \times 0{,}75)$, onde V é o valor a ser cobrado e d é a distância percorrida. Utilizando essas informações determine o valor de uma corrida de 11km que demorou 15 min devido ao trânsito lento.

(a) R$ 15,25
(b) R$ 19,25
(c) R$ 11,75
(d) R$ 14,75

Figura 37: Exemplo de problema simples.

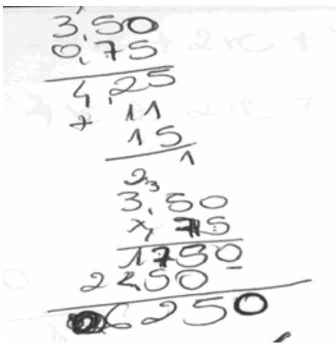


Figura 38: Resolução do aluno 12 para a questão da figura 34.

3.2 Características do Pensamento Algébrico dos Estudantes Pesquisados

Caracterizar o pensamento algébrico dos estudantes através do mapeamento das habilidades relacionadas às competências algébricas consideradas, mostrou-se uma tarefa complexa.

Como foram avaliadas e mapeadas várias habilidades, relacionadas a cada uma das 4 competências algébricas, não se esperou que os estudantes participantes do experimento atingissem o desempenho desejado em todos os nodos. Assim, com vistas a obter uma medida global, optou-se pelo calculo da média aritmética dos resultados obtidos em cada conjunto de habilidades de cada competência e o respectivo desvio padrão.

Os resultados obtidos mostram que apenas 2 alunos (Aluno 01 e 05) tiveram um desempenho médio superior a 0,5 na compreensão e representação algébrica, o que representa 17% dos alunos. Com relação à competência de operar algebricamente, 5 alunos (Alunos 01, 03, 05, 06 e 09) obtiveram média maior que

0,5 nos nodos que mapeavam essa competência, representando 42% dos alunos participantes do experimento.

O reconhecimento e representação de padrões foi a competência em que o maior número de estudantes obteve média superior a 0,5. Sendo que 6 dos estudantes (Alunos 01, 03, 05, 09, 10 e 11) obtiveram médias que superaram o mínimo esperado, atingindo um percentual de 50% dos alunos. A resolução de problemas foi avaliada em apenas 2 nodos, o que influenciou o resultado da média aritmética utilizada na análise, uma vez que neste tipo de média o resultado alto em um dos nodos pode encobrir um resultado baixo no outro. Fato esse, que se pode verificar com os alunos 01, 02, 07 e 12, que obtiveram médias maiores que 0,5 em virtude de terem obtido resultado alto em apenas 1 dos nodos, em particular no primeiro nodo que propunha questões que podiam ser resolvidas algebricamente e aritmeticamente, abordagem essa preferida pelos estudantes. Enquanto que, no segundo nodo que propunha questões com enfoque essencialmente algébrico os estudantes não obtiveram resultado semelhante ao primeiro. Portanto, o uso da média aritmética para analisar a competência de resolução de problemas precisou ser feito com cuidado.

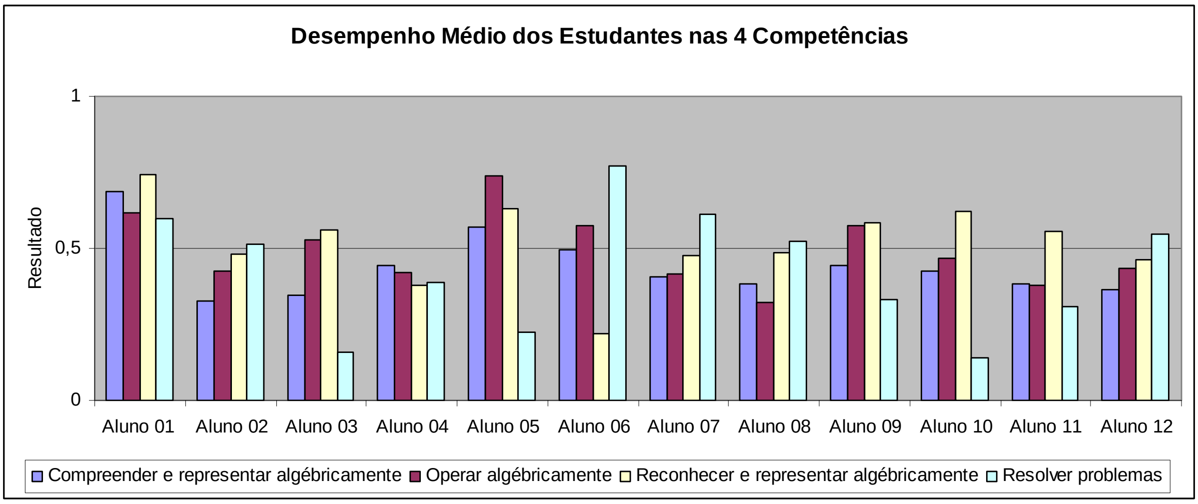


Figura 39: Gráfico mostrando o desempenho médio dos estudantes em cada competência.

O gráfico da figura 39 apresenta os resultado médios dos alunos participantes do experimento em cada competência e, evidencia que se pode considerar que apenas o aluno 01 desenvolveu as competências e habilidades algébricas esperadas durante o Ensino Fundamental. O aluno 05 também mostrou bom desempenho, obtendo uma média aritmética superior a 0,5 em três das quatro competências mapeadas, embora não tenha obtido bons resultados na resolução de problemas. Os alunos 03, 06 e 09 superaram o mínimo desejado em duas competências, e os demais estudantes, ou tiveram resultados superiores ao mínimo desejado em apenas uma das competências ou em nenhuma delas.

Analisando a amostra, se pode considerar que esses estudantes não desenvolveram plenamente as competências e habilidades algébricas, com o estudo dos conteúdos de Matemática propostos no Ensino Fundamental. Com exceção do aluno 01 que atingiu plenamente os objetivos esperados e dos alunos 05 e 06 que atingiram parcialmente, mas que globalmente evidenciaram bons resultados, todos os outros estudantes participantes do experimento apresentaram resultados insatisfatórios para alunos ingressantes no Ensino Médio. Ao mesmo tempo, percebe-se que embora exista variação entre os resultados obtidos pelos alunos nas diferentes competências, os 9 alunos que tiveram resultado insatisfatório desenvolveram as suas competências algébricas tendo o aprendizado da Matemática centrado na manipulação, o que explica, em parte, os resultados relacionados à segunda competência, além disso, estes estudantes demonstraram serem capazes de representar e reconhecer padrões simples, baseando-se em análises aritméticas.

Conclusão

Influenciada por um conjunto de fatores que interagem na sociedade, dentre os quais os econômicos, os culturais, os religiosos e os políticos, a escola, assim como a sociedade muda, ao longo dos tempos, e com a mudança dos valores e o desenvolvimento do conhecimento, a escola também precisa mudar para se adequar à realidade social dessa nova sociedade.

Os resultados recentes obtidos pelos estudantes brasileiros em avaliações nacionais (ENEM e SAEB) e internacionais (PISA), evidenciam a necessidade de que a escola brasileira seja qualificada em relação aos métodos e técnicas de ensino, de modo a adequarem-se as atuais necessidades histórico-culturais, de uma sociedade que vive avanços tecnológicos e rápidas mudanças.

A Álgebra é para a Matemática uma de suas formas de expressão e para muitos estudantes, representa uma barreira no seu processo de escolarização, pois como relatam muitos pesquisadores a transição da Aritmética para a Álgebra é um processo complexo e muitas vezes difícil. Assim, “significar” a álgebra como linguagem formal é importante para que o estudante possa compreender melhor a Matemática escolar, todavia é preciso que se priorize o desenvolvimento de um pensar algébrico que não passe, obstinadamente apenas pela escrita formal, mas que permita que a Álgebra seja aprendida e compreendida em um contexto de aplicação e resolução de problemas (ARCAVI, 1994).

Assim, compreender como os estudantes brasileiros constroem seus conhecimentos e desenvolvem suas competências e habilidades algébricas é fundamental para que as mudanças necessárias possam ocorrer.

Esse trabalho de pesquisa foi estruturado de forma a investigar como 4 competências algébricas, e as suas respectivas habilidades, foram desenvolvidas por um grupo de estudantes durante o Ensino Fundamental, permitindo mapear o que eles sabem de Álgebra e quais competências e habilidades algébricas foram desenvolvidas ao longo do Ensino Fundamental.

É evidenciado pelos erros e pelos nodos em que os estudantes participantes da pesquisa tiveram maior sucesso, que o pensamento algébrico, para os estudantes participantes do experimento, de fato tem suas raízes na Aritmética, como já evidenciado por Falcão (2003) e Nobre (1996), pois se identifica, no grupo de estudantes pesquisados, que boa parte dos erros cometidos por eles tem suas raízes no uso e generalização de procedimentos aritméticos, para a resolução de situações e problemas algébricos.

Analisando os mapas de conteúdos e de habilidades algébricas que devem ser desenvolvidas durante a escolarização fundamental, se pode perceber que a quantidade de conteúdos e habilidades algébricas que os estudantes estudam durante o Ensino Fundamental é extensa, no entanto, não se observa o uso de todo esse conhecimento. Os estudantes participantes do experimento, como já referido, tendem a usar seus conhecimentos prévios de Aritmética para resolver problemas de Álgebra, e só utilizam conhecimentos essencialmente algébricos para resolver problemas elementares.

Os resultados apontam que esses estudantes não vivenciaram suficientemente, no seu processo de ensino e aprendizagem do Ensino Fundamental, situações em que fossem confrontados com a necessidade de resolver problemas. Pois pode-se identificar na pesquisa realizada, que os estudantes tiveram muita dificuldade para estruturar formalmente a resolução dos problemas, utilizando pouquíssimas vezes abordagens algébricas, dando preferência pela resolução através de uma solução numérica, com estratégias de tentativa e erro. Situação que evidencia a dificuldade dos alunos em utilizar seus conhecimentos algébricos, produzindo-se assim, erros que transitam entre a Aritmética e a Álgebra.

O perfil algébrico dos estudantes participantes do experimento é caracterizado pelo domínio de habilidades de manipulação e representação, bem delimitados em contextos matemáticos, ou seja, os alunos participantes do experimento não evidenciaram serem capazes de utilizar seus conhecimentos de Álgebra e as respectivas competências e habilidades para resolverem problemas novos.

Ainda associada à boa capacidade evidenciada pelos estudantes em realizarem processos de manipulação, eles mostraram serem capazes de resolver equações, embora não tenham evidenciado que sejam capazes de utilizar equações para modelar e resolver problemas.

Além das habilidades algébricas relacionadas a manipulação de símbolos, os estudantes participantes do experimento também mostraram serem capazes de reconhecer e representar padrões simples ou que possam ser determinados aritmeticamente.

Os resultados encontrados ao final deste trabalho, não foram satisfatórios, o que evidencia a necessidade que se adote, em sala de aula no Ensino Fundamental, uma metodologia segundo Arcavi (1994), onde durante o ensino da Álgebra se oportunize aos estudantes aprendê-la e compreendê-la sob um contexto de resolução de problemas, de modo que esse aprendizado se torne significativo para o estudante. Além disso, a pesquisa evidenciou que os alunos participantes utilizam apenas os conhecimentos relacionados à manipulação algébrica e de resolução de equações.

Ao final do trabalho, se pode afirmar que os objetivos foram parcialmente atingidos, pois foi possível mapear as habilidades algébricas que os estudantes desenvolveram e utilizam, bem como os erros cometidos. No entanto, não foi possível uma identificação precisa das concepções errôneas dos estudantes participantes da pesquisa. Além disso, também foi possível identificar a relação existente entre a Álgebra e a Aritmética durante o processo de aprendizagem.

Aspectos importantes deste trabalho são a implementação de uma metodologia de pesquisa que utiliza, ao mesmo tempo, as facilidades dos sistemas informatizados e os recursos tradicionais. E a constatação de que os erros e as competências e habilidades algébricas utilizadas pelos estudantes participantes do experimento são similares aos de outros estudantes, evidenciando que o aprendizado da Álgebra tem dificuldades intrínsecas.

Concluímos o trabalho esperando que os resultados ajudem na compreensão dos processos de aprendizagem da Álgebra que ocorrem nas escolas de nosso país, e por conseguinte, ajudem a melhorar a qualidade destes processos, vivenciados pelos estudantes em nossas escolas.

Referências

ARCAVI, Abraham. Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. **For the Learning of Mathematics**, *14*(1), 24-35, 1994.

BAKER, Frank B. The **Basis of Item Response Theory.** 2º Ed.. ERIC Clearinghouse on Assessment and Evaluation, 2001.

BOGDAN, Robert C.; BIKLEN, Sari K. **Investigação qualitativa em educação**. Porto: Porto Editora, 1994.

BOOTH, Lesley R.; COOK, James Dificuldades das crianças que se iniciam em álgebra. In:Coxford Arthur F. & Shulte Albert P. (Org.)**As ideias da álgebra** (Chap. 3, pp. 23-36). São Paulo, Brasil: Atual, 1995.

BRASIL. Secretaria de Educação Média e Tecnlógica. **PCN+ Ensino Médio**: Orientações Educacionais complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais. Brasília: Mec, 2002.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**, São Paulo: Ed. Edgard Blücher , 10º reimpressão, 1993.

CARRAHER, David. W.; SCHLIEMANN, Analúcia. D.; BRIZUELA, Bárbara. M., Algebra in Early Mathematics: a Longitudinal Intervention. In:International Congress on Mathematical Education 11, 2008, Monterrey. **Anais**. Monterrey: ICMI, 2008. Disponível em: <http://tsg.icme11.org/document/get/520> Acesso em: 20 de jun. de 2008.

CARRY, L. Ray; LEWIS, Clayton; BERNARD, John E. **Psychology of equation solving: An information processing study** (Final Technical Report). Austin Tx: University of Texas at Austin, Department of Curriculum and Instruction, 1980.

CAVALCANTE, Luiz G.; SOSSO, Juliana; VIEIRA, Fábio; POLI, Ednéia. **Para saber Matemática**, 5ª série. 2º ed. São Paulo: Saraiva, 2006.

CAVALCANTE, Luiz G.; SOSSO, Juliana; VIEIRA, Fábio; POLI, Ednéia. **Para saber Matemática**, 6ª série. 2º ed. São Paulo: Saraiva, 2006.

CAVALCANTE, Luiz G.; SOSSO, Juliana; VIEIRA, Fábio; POLI, Ednéia. **Para saber Matemática**, 7ª série. 2º ed. São Paulo: Saraiva, 2006.

CAVALCANTE, Luiz G.; SOSSO, Juliana; VIEIRA, Fábio; POLI, Ednéia. **Para saber Matemática**, 8ª série. 2º ed. São Paulo: Saraiva, 2006.

D'AMBRÓSIO, Ubiratan. **Etnomatemática – elo entre as tradições e a modernidade***.* São Paulo: Ática, 1990.

DANTE, Luiz Roberto. **Matemática**. V.1 São Paulo: Ática, 2004.

DAVIS, Robert B. Research Studies in How Humans Think about Algebra. In.: Wagner, Sigrid & Kieran, Carolyn (Editores) **Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra**. Vol. 4, p.266 –174, 1989.

DRISCOLL, Mark **Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers Grades 6-10**. Portsmouth, NH: Heinemann, 1999.

DUVAL, Raymond. **Semiosis y Pensamiento Humano. Registros Semióticos y Aprendizajes Intelectuales***.* Traducido por la Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía. Grupo de Educación Matemática. México, 2004.

EVES, Howard. **Introdução a História da Matemática**. 3 ed. Campinas: Ed. Da Unicamp, 2002.

FALCÃO, Jorge T. R. Alfabetização algébrica nas séries iniciais. Como começar? **Boletim *GEPEM***, *42*, 27-36, 2003.

FILHO, Benigno Barreto; SILVA, Cláudio Xavier da. **Matemática aula por aula**. São Paulo: FTD, 2003. V.1.

FALKNER, Karen P.; LEVI, Linda; CARPENTER, Thomas P. Children's understanding of equality: a foundation for algebra. **Teaching Children Mathematics**, *6*, 232-236, 1999.

FILLOY, Eugenio; RUBIO, Guilhermo. Didactic models, cognition and competence in the solution of arithmetic & algebra word problems. In . Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu, & F.-L. Lin (eds.). In **7th Annual Conference of the International Group for Psychology of Mathematics Education**, *1*, 154-161, 1993.

FILLOY, Eugenio; SUTHERLAND, Rosamund Designing curricula for teaching and learning Algebra. In A. Bishop, K. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick, & C. Laborde (Eds.), **International handbook of mathematics education** (Vol. 1, pp. 139-160). Dordrecht: Kluwer, 1996.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria A,; MIGUEL, Antonio. As concepções de educação algébrica. In.: **Pro-posições**. São Paulo: Cortez, V.4, nº1 (10):39-54, 1993.

FURASTE, Pedro A., **Normas Técnicas para o Trabalho Científico: Elaboração e Formatação**. 14ª Ed. Porto Alegre: s.n., 2006.

GIOVANNI, José R.; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI, José R. J. **A conquista da matemática: a + nova**. São Paulo: FTD, 2002. V.1.

GIOVANNI, José R.; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI, José R. J. **A conquista da matemática: a + nova**. São Paulo: FTD, 2002. V.2.

GIOVANNI, José R.; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI, José R. J. **A conquista da matemática: a + nova**. São Paulo: FTD, 2002. V.3.

GIOVANNI, José R.; CASTRUCCI, Benedito; GIOVANNI, José R. J. **A conquista da matemática: a + nova**. São Paulo: FTD, 2002. V.4.

GIOVANNI, José Ruy e PARENTE, Eduardo. **Aprendendo Matemática**. São Paulo: FTD, 1999. V.3.

GUELLI, Oscar. **Matemática: uma aventura do pensamento**. São Paulo: Ática, 1998. V.1.

GUELLI, Oscar. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2004. V.1.

GODINO, Juan. D.; FONT. Vicenç. **Razonamiento Algebraico y su Didáctiva para Maestros**. Disponível em: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/ Acesso em : janeiro de 2008. Granada, Espanha: Universidade de Granada, 2003.

GROENWALD, Claudia L.; NUNES, Giovanni. Currículo de Matemática no Ensino Básico: A Importância do Desenvolvimento de Pensamentos de Alto Nível. **RELIME**, México D.F., 2006.

HALL, Richard. **An analysis of errors made in the solution of simple linear equations**. Documento retirado de http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome15/hall_errors.pdf em 10 de novembro de 2007.

HAMBLETON, Ronald; SWAMINATHAN, Hariharan. **Response Theory: Principles an Application**. Kluwer /Nijhoff Publishing, 1985.

HARPER, Eon. Ghosts of Diophantus. **Educational Studies in Mathematics**, *18*, 75-90, 1987.

HIEBERT, James; CARPENTER, Thomas. Learning and teaching with understanding. In D. A. Grouws (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning** (pp. 65-97). New York, NY: MacMillan, 1992.

HOUSE, Peggy. A. Álgebra: ideias e questões. In:Coxford Arthur F. & Shulte Albert P. (Org.)**As ideias da álgebra** (Chap. 1, pp. 1-8). São Paulo, Brasil: Atual, 1995.

HOWDEN, Hilde. Prior Experiences. In: Edwards, Edgar L. Jr., Ed. **Algebra for Everyone** (Chap. 2, pp. 7-23) Reston, Virginia: NCTM, 1990.

IEZZI, Gelson. [et al.] **Matemática: ciência e aplicações**, 1ª série. 2ª ed. São Paulo: Atual, 2004.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática** São Paulo: Scipione, 1997. V.3.

IMENES, Luiz Márcio; LELLIS, Marcelo. **Matemática** São Paulo: Scipione, 1997. V.4.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS - INEP. ENEM – **Relatório Pedagógico 2000**. Brasília: O instituto, 2001.

JANVIER, Claude. Traslation Proceses in mathematics Education. En Janvier (ed.). **Problems of Representation in the Teaching and Learning of Mathematics**. LEA, Hisllsdale. New Jersey, 1987.

KAPUT, James. **Teaching and learning a new algebra with understanding**. Documento retirado de http://www.simcalc.umassd.edu/downloads /KaputAlgUnd.pdf em 21de Outubro de 2005.

KIERAN, Carolyn. Concepts associated with the equality symbol. **Educational Studies in Mathematics**, 12(3), 317-326, 1981.

KIERAN, Carolyn. The learning and teaching of school algebra. In Grows, D. A. (Ed.), **Handbook of research on mathematics teaching and learning** (pp. 390-419). New York, NY: MacMillan, 1992.

KIERAN, Carolyn. Algebraic thinking in the early grades: What is it? – In: **The Mathematics Educator** (Singapore) 8(No. 1), p. 139-151, 2004.

KIERAN, Carolyn.; CHALOUH, Louise. Prealgebra: The transition from arithmetic to algebra. In Owers, D. (Ed) **Research ideas for the classroom middle grades mathematics** (pp. 179-198). New York, NY: MacMillan, 1993.

KILPATRICK, Jeremy.; BRADFORD, Findell; SWAFFORD, Jane. **Adding it up: Helping children learn mathematics**. – Washington, DC: National Academy Press, 2001.

KÜCHEMANN, Dietmar. Algebra. In K. M. Hart (Ed.) **Children's understanding of mathematics: 11~16** (pp. 102-119). London: Murray, 1981.

LESH, Richard; POST, Thomas; BEHR, Merlyn. Proportinal reasoning. In J. Hiebert & M. Behr (Eds.) **Number Concepts and Operations in the Middle Grades** (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics, 1988.

LINS, Romulo C.; GIMENEZ, Joaquim. **Perspectivas em aritmética e álgebra para o século XXI**. Campinas: Papirus, 1997.

LOCHHEAD, Jack; MESTRE, José P. Das palavras à álgebra: corrigindo concepções erradas. In:Coxford Arthur F. & Shulte Albert P. (Org.)**As ideias da álgebra** (Chap. 13, pp. 144-154). São Paulo, Brasil: Atual, 1995.

MARTINS, Adriano de Morais. **Uma Metanálise qualitativa das dissertações sobre equações algébricas no Ensino Fundamental**, 2008 (Dissertação de mestrado em Educação Matemática, PUC, São Paulo.

MORAES, Roque. **Análises qualitativas: Análise de conteúdos? Análise de discurso?** Rio de Janeiro: Paz e Terra, 1987.

MORENO, Lorenzo. [et al.] Hacia un Sistema Inteligente basado en Mapas Conceptuales Evolucionados para la Automatización de un Aprendizaje Signifiativo. Aplicación a la Enseñanza Universitaria de la Jerarquía de Memoria. **XII Jornada de Enseñanza Universitaria de la Informática**. Tenerife, 2007.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce S. **Matemática: Ideias e Desafios**, 6ª série. 14 ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce S. **Matemática: Ideias e Desafios**, 7ª série. 14 ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

MORI, Iracema; ONAGA, Dulce S. **Matemática: Ideias e Desafios**, 8ª série. 14 ed. São Paulo: Saraiva, 2005.

NAME, Miguel Asis. **Matemática Atualizada**: 7ª série. São Paulo: Ed. do Brasil, 1979.

NAME, Miguel Asis. **Matemática Atualizada**: 8ª série. São Paulo: Ed. do Brasil, 1979.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM. **Curriculum and evaluation standards for school mathematics**. Reston, VA, 1989.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS - NCTM. **Principios e Estándares para la Educación Matemática.** Trad. Manuel Fernández Reyes. Sevilla: Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales, 2000.

NOBRE, Ana Maria V. **Elaboração/leitura de códigos para entender o "x da questão**", (Dissertação de mestrado em Ensino da Matemática, PUC, São Paulo), 1996.

ORGANISATION FOR ECONOMIC CO-OPERATION AND DEVELOPMENT – OECD. **Problem Solving for Tomorrow's World – First Measures of Cross-Curricular Competencies from PISA 2003**. Paris: OECD, 2004.

PATTON, Michael Q. **How to use qualitative methods in evaluation**. Newbury Park, CA: Sage, 1987.

PUIG, Luis; CERDAN, Fernando. Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. In **Proceedings of the 2nd International Symposium on Mathematics Education Research** (pp. 35-48), PNFAPM/Universidad Autónoma del Estado de Morelos, México, 1990.

ROJANO, Teresa. Mathematics learning in the junior secondary school: Students' access to significant mathematical ideas. In L. English (Ed.), in **Handbook of International Research in Mathematics Education** (pp.143-161) Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 2002.

SANTOS FILHO, José Camilo dos.; GAMBOA, Silvio S. (Org.) **Pesquisa Educacional: quantidade-qualidade**. 5. ed., São Paulo: Ed. Cortez, 2002.

SFARD, Anna. "Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other". In P. Cobb, K. E. Yackel & K. McClain (Eds.), **Symbolizing and communicating: perspectives on Mathematical Discourse, Tools, and Instructional Design**. Mahwah, NJ: Erlbaum, pp. 37-98), 2000.

SOCAS, Martin Manuel; CAMACHO, Matias; PALAREA, Maria Mercedes; HERNÁNDEZ, Josefa. **Iniciación al algebra**. Madrid: Síntesis, 1996.

SOUZA, Marie Helena de; SPINELLI, Walter. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2002. V.1.

SOUZA, Marie Helena de; SPINELLI, Walter. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2002. V.2.

SOUZA, Marie Helena de; SPINELLI, Walter. **Matemática**. São Paulo: Ática, 2002. V.4.

USISKIN, Zalman. Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis In:Coxford Arthur F. & Shulte Albert P. (Org.)**As ideias da álgebra** (Chap. 2, pp. 9-22). São Paulo, Brasil: Atual, 1995.

VERGNAUD, Gerard. Multiplicative strutures. In. Lesh & Landau (ed.), **Aquisitions of mathematics concepts and procedures**. New York: Academic Press, p. 127-174, 1983.

___________La théorie des champs conceptuels. **Recherches en Didactique des Mathématiques** 23, vol. 10, p. 133-170, 1990.

___________ A comprehensive theory of representation for mathematics education. **Journal of Mathematical Behavior**, vol. 17, n.2, p. 167-181, 1998.

Apêndices

Apêndice A

Artigo apresentado no Topic Study Group 11 (TSG 11) no ICME 11

CARACTERÍSTICAS DO PENSAMENTO ALGÉBRICO, EM ALUNOS DO ENSINO MÉDIO, COM EQUAÇÕES DO 1º GRAU

Claudia Lisete Oliveira Groenwald e Ednei Luis Becher

Universidade Luterana do Brasil

Resumo

Este trabalho apresenta os resultados da implementação de uma experiência piloto, com alunos do Ensino Médio de uma escola pública do estado do Rio Grande do Sul, Brasil, com a utilização do sistema SCOMAX (Student Concept Map Explore), com o conteúdo de equações do 1º grau. O SCOMAX é um sistema inteligente desenvolvido, em convênio, pelo grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna, Espanha e o grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática da Universidade Luterana do Brasil em Canoas, Brasil, que visa modelar os conhecimentos dos alunos, em qualquer área do conhecimento. O objetivo desse trabalho foi investigar as características do pensamento algébrico desenvolvido no Ensino Fundamental, em equações do 1º grau, com alunos do Ensino Médio.

Palavras chave: Pensamento Algébrico, Educação Matemática, Álgebra no Ensino Fundamental, Equação do 1º Grau.

Introdução

Uma preocupação, no processo de ensino e aprendizagem da Matemática em estudantes brasileiros, está no fato de que o desempenho dos alunos nessa disciplina, segundo testes de avaliação como PISA (Programme for International Student Assessment), SAEB (Sistema de Avaliação da Educação Básica) e ENEM (Exame Nacional do Ensino Médio) não são satisfatórios e, ao mesmo tempo, os alunos não compreendem e não encontram utilidade prática no que aprendem na escola.

Essas preocupações são justificadas diante do mundo moderno onde o avanço na tecnologia e as rápidas mudanças impedem, segundo Groenwald & Timm

(2000), que se faça uma previsão exata de que conhecimentos e habilidades são necessárias no futuro dos estudantes. Logo, a escola e os professores devem refletir sobre a necessidade de um planejamento curricular em Matemática que esteja em sintonia com o progresso científico e tecnológico da sociedade atual (GROENWALD & NUNES, 2007). Para isso há necessidade de estruturar o currículo de Matemática, onde o eixo central não seja a repetição de exercícios, mas "aprender a interpretar problemas, desenvolver sistemas de ações, comparar ideias, métodos e soluções, saber comunicar ideias através da Matemática e concluir processos de forma clara, rigorosa e precisa, entre outras estratégias" (AZCÁRATE, 1997, p. 82).

Também é importante conhecer o quanto à escola está influenciando no desenvolvimento do pensamento matemático dos alunos. Essa investigação procurou modelar o pensamento algébrico, com o conteúdo de equações do lº grau, em alunos concluintes do Ensino Fundamental, identificando os conceitos em que apresentam dificuldades e os erros cometidos pelos alunos participantes do experimento realizado.

Pressupostos teóricos

De acordo com House (1995), há muito tempo a álgebra desfruta de um lugar de destaque no currículo de Matemática, representando para muitos alunos tanto a culminação de anos de estudo de aritmética como o início de mais anos de estudo de outros ramos da Matemática.

Em um contexto intra-matemático pode-se verificar que essa importância atribuída a álgebra se dá por todas as possibilidades que ela fornece à Matemática, para Usiskin (1995) a álgebra permite ampliar o conhecimento através de generalizações, fornecendo ferramentas para a representação, descrição e solução de muitas situações-problema, além é claro do estudo das estruturas intrínsecas da Matemática.

Já em ambientes extra-matemáticos atribui-se importância à álgebra para descrição e generalização de modelos em diversas áreas, como Física, Biologia, Informática, etc.

A álgebra faz parte do processo de Educação Matemática vivenciado pelos estudantes desde as séries iniciais do Ensino Fundamental, embora não de forma formalizada. Já nos primeiros anos de vivência escolar, quando o aluno aprende a calcular o valor desconhecido em problemas de Matemática, mesmo sem atribuir a esse um valor ou símbolo que o represente, já está sendo introduzido o pensamento algébrico. A partir da 5ª série inicia-se na escola o ensino da álgebra formal, caracterizado pela representação dos valores desconhecidos, por símbolos e uso de fórmulas. Essa escrita genérica e abstrata passa a ser o tema principal, das aulas de Matemática, a partir da 7ª série, onde a idade média dos alunos é 13 anos, desse momento em diante desenvolvem-se os 5 aspectos da linguagem algébrica (variáveis, fórmulas, generalização de padrões, valor numérico, relações), mesmo assuntos que não sejam necessariamente algébricos, passam a ter um tratamento algébrico.

Para Krieger (2006) existe um “pensar” algébrico e uma “escrita” algébrica. Dessa forma, há o pensamento ou raciocínio algébrico que compreende os conceitos e estratégias aprendidas e utilizadas na escola e fora dela, mas que não necessariamente possuem uma formalização algébrica, e o aprendizado da álgebra formal, a linguagem utilizada na Matemática e que se caracteriza pela representação simbólica dos valores desconhecidos, das variáveis, etc.

De acordo com os *Principios e Estándares para la Educación Matemática do NCTM (*2000), as grandes ideias do pensamento algébrico envolvem representação, raciocínio proporcional, significado de variáveis, padrões e funções, igualdades, raciocínio dedutivo e indutivo. Para Kieran and Chalouh (1993) pensamento algébrico envolve o desenvolvimento do raciocínio matemático dentro de um contexto algébrico de pensamento através da construção de significados de símbolos e operações algébricas em termos aritméticos. Durante o desenvolvimento destas competências destaca-se no estudo da álgebra o uso de símbolos como uma parte fundamental do aprendizado proficiente da álgebra e conseqüentemente da solução de problemas que requeiram a aplicação da álgebra na sua solução. Para Krieger (2006) o "pensamento algébrico" tornou-se aquilo que todos buscam no ensino e aprendizagem, o que irá preparar os estudantes para experiências de sucesso em álgebra.

Considerando os conteúdos algébricos constantes dos programas escolares, do Ensino Fundamental, no Brasil, uma abordagem centrada na aplicação de algoritmos e manipulação mecânica dos símbolos revela-se problemática, já que, para avançar na compreensão dos conceitos algébricos é necessário que o aluno desenvolva um pensamento matemático de alto nível. Raciocínio de alto nível, segundo Resnick citado por Lins e Gimenez (1997), é aquele que estabelece relações. Não é imediato, e faz com que o sujeito estabeleça processos não-algorítmicos. Exige um nível de abstração mais elevado, o qual permite relações entre os conhecimentos já adquiridos, exigindo mais que a aplicação de algoritmos e regras. Normalmente, segundo Groenwald e Nunes (2007) , a resolução de problemas em Matemática exige do resolvente raciocínios de alto nível, ou seja, é necessário relacionar os conhecimentos prévios e aplicá-los em uma situação nova.

Método

Essa investigação teve como objetivos investigar as características do pensamento algébrico em alunos concluintes do Ensino Fundamental, com o conteúdo de equações do 1º grau e implementar uma experiência, utilizando o sistema SCOMAX, em alunos do Ensino Médio.

Foi aplicado um experimento com o *sofware* SCOMAX (Student Concept Map Explore), uma ferramenta informática que auxilia no conhecimento das dificuldades dos alunos, permitindo o planejamento de uma recuperação de conteúdos individualizada.

O experimento foi desenvolvido com 12 alunos, do 2º ano do Ensino Médio, da Escola Estadual Prudente de Moraes, da cidade de Osório, Rio Grande do Sul, Brasil, no ano de 2007. A idade média dos alunos é de 16 anos, e estão no 10º ano de escolarização.

Utilizou-se um enfoque qualitativo, de acordo com Taylor & Bogdan (1984 apud Santos Filho 2002), [...] a pesquisa qualitativa rejeita a possibilidade de descoberta de leis sociais e está mais preocupada com a *compreensão* ou interpretação do fenômeno social. Buscou-se identificar e mapear as competências e habilidades algébricas dos alunos do 2º ano do Ensino Médio, caracterizando o nível de pensamento algébrico.

Essa investigação faz parte de um projeto mais amplo entre o GECEM (Grupo de Estudos Curriculares de Educação Matemática) da ULBRA (Universidade Luterana do Brasil), no Rio Grande do Sul, Brasil e o grupo de Tecnologias Educacionais da ULL (Universidade de La Laguna), em Tenerife na Espanha, firmado através do convênio realizado no ano de 2006.

O *software* SCOMAX

O SCOMAX é um sistema de inteligência artificial, implementado em Java, mostrando os resultado, de um teste adaptativo individualizado, de cada nodo (conceito) de um mapa conceitual geral. Esse sistema informático faz a ligação do mapa conceitual ao teste adaptativo, gerando o mapa individualizado dos conhecimentos prévios dos alunos investigados. Utiliza redes bayesianas para o teste adaptativo, conectando os conceitos com as perguntas e interligados através de um mapa conceitual. O professor desenvolve o mapa conceitual de acordo com a seqüência dos conteúdos desenvolvidos na escola, depois organizá-o interligando os conceitos, começando pelos conceitos prévios, avançando para os conceitos intermediários até atingir os conceitos objetivos, gerando assim o grafo que liga os conceitos ao teste adaptativo. O SCOMAX, a partir dos resultados obtidos pelos alunos, gera os mapas individualizados (Moreno et all, 2007).

Experiência

O experimento foi desenvolvido com o objetivo de identificar as características relativas aos conhecimentos conceitual, procedimental e de resolução de problemas dos estudantes, sobre equações de 1º grau.

Segundo Coll, Pozo, Sarabia & Valls (1998) devem ser levados em consideração, no ensino da Matemática, três tipos de conteúdos, que são os conteúdos e fatos propriamente ditos, os procedimentos e atitudes. Para o autor conhecimento conceitual é aquele relacionado às definições, propriedades e características de um determinado assunto, e o procedimental é um conjunto de ações ordenadas, orientadas para a consecução de uma meta, por exemplo, a construção de um gráfico.

A resolução de problemas consiste na utilização de estratégias heurísticas utilizando conhecimentos e criatividade, com a finalidade de resolver uma situação desconhecida total ou parcialmente sobre que se tenha de tomar uma decisão razoável, em um período de tempo determinado (Groenwald, 1999).

No SCOMAX foi utilizado um grafo de nove nodos (fig. 01) com os conceitos que determinaram as atividades do teste adaptativo. O banco de dados do teste foi construído com 10 questões em cada nodo, classificadas em fáceis, médias e difíceis.

Os alunos resolveram as atividades individualmente, no laboratório de informática da escola, e demoraram, em média, 50 minutos cada um.

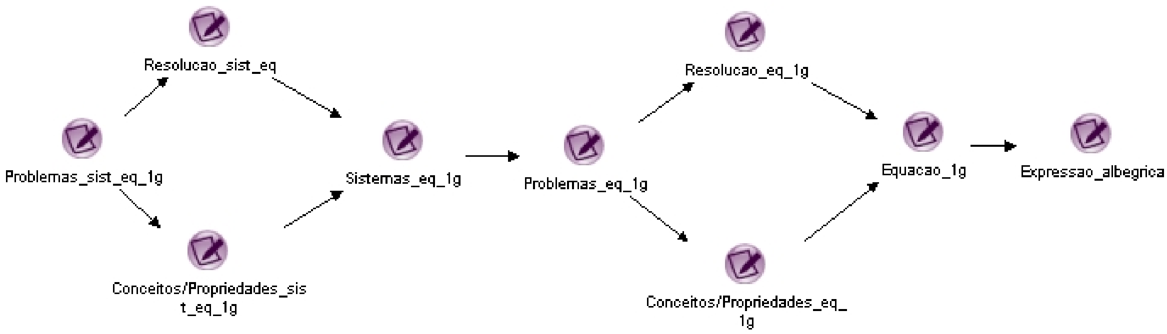


Fig. 01 – Grafo de Equações do lº grau

Os nodos considerados conceituais são expressões algébricas, conceitos e propriedades das equações de 1º grau, equação de 1º grau, sistemas de equações de 1º grau, conceitos e propriedades dos sistemas de equações de 1º grau. Os nodos considerados procedimentais são resolução de equação de 1º grau e resolução de sistemas de equações de 1º grau. Os nodos problemas de equações do 1º grau e problemas de sistema de equações do 1º grau objetivaram determinar a capacidade de resolução de problemas dos alunos.

Resultados

A análise foi realizada em duas categorias, que são: análise geral do desempenho dos alunos nos conceitos do grafo e análise individualizada de cada aluno.

Análise geral do desempenho dos alunos

O nodo de expressões algébricas, considerado um conceito prévio, buscou identificar o nível de compreensão sobre o conceito e o cálculo do valor numérico de uma expressão algébrica. Apenas 4 alunos conseguiram superar o índice de 50% de sucesso, sendo que desses, 3 atingiram apenas um nível satisfatório e 8 alunos não atingiram o nível desejado na resolução das atividades. Os erros mais freqüentes foram em questões do cálculo do valor numérico de uma expressão.

Por exemplo: Qual o resultado da expressão 3X+4, se X tiver um valor igual a 2? (a) 36 (b) 324 (c) 10 (d) 14 (e) 0.

Quatro alunos marcaram a opção “a”, pois não entenderam que 3X representa uma multiplicação. Substituíram o X por 2 e depois somaram 32+4, obtendo 36. Saber representar e operar com expressões algébricas é importante para a compreensão do conceito e compreensão das aplicações de equações do 1º grau.

Nos nodos conceituais de equação do 1º grau, conceitos e propriedades, os resultados também não foram os esperados, como é possível observar na tabela 1.

Conceitos/Propried. da Eq. de 1º grau

Aluno	Qt. Fácil		Qt. Média		Qt. Dificil		Num. Qt.	Aval.
	Nº	Certas	Nº	Certas	Nº	Certas		
1	0	0	2	1	3	2	5	0.80
2	2	1	2	1	3	1	7	0.71
3	1	1	2	0	2	1	5	0.62
4	0	0	2	1	3	1	5	0.71
5	1	1	2	0	2	0	5	0.50
6	2	0	2	0	1	0	5	0.50
7	0	0	2	2	3	1	5	0.78
8	2	0	2	0	1	0	5	0.50
9	0	0	2	1	3	0	5	0.60
10	2	0	2	0	1	0	5	0.50
11	2	1	2	0	2	0	6	0.50

Equação de grau 1

Aluno	Qt. Fácil		Qt. Média		Qt. Dificil		Num. Qt.	Aval.
	Nº	Certas	Nº	Certas	Nº	Certas		
1	1	1	3	2	2	1	6	0.71
2	1	0	3	0	1	0	5	0.40
3	1	0	3	1	2	1	6	0.62
4	1	0	3	2	2	1	6	0.71
5	1	1	3	1	1	0	5	0.50
6	0	0	3	1	2	1	5	0.62
7	1	0	2	1	2	0	5	0.50
8	1	1	3	1	1	0	5	0.50
9	1	0	3	0	1	0	5	0.40
10	1	0	3	1	2	1	6	0.71
11	1	0	3	0	1	0	5	0.40

Tabela 1: Resultados do teste com nodos conceituais de equações

Na tabela 1, no nodo de conceitos e propriedades o valor inicial é 0.5 e no nodo de equação do 1 grau o valor inicial é 0.4. Logo, os valores mínimos esperados são 0.75 e 0.7, respectivamente.

Como se pode verificar o desempenho não foi o esperado, apenas 3 alunos conseguiram obter o desempenho desejado nos dois nodos e apenas 1 conseguiu um bom desempenho em ambos os nodos.

Os alunos, participantes do experimento, relataram que não conheciam os termos utilizados nas atividades, relativas a denominação das propriedades e que não lembravam da sua utilização.

O terceiro ponto a ser analisado se refere à resolução de equações de 1º grau, onde os alunos mostraram um melhor desempenho, embora isso não tenha se refletido no resultado final. Aqui os alunos tentaram resolver as atividades de maneira adequada, no entanto, nesse processo vários alunos cometeram erros que poderíamos classificar como básicos, conforme observa-se na figura 2.

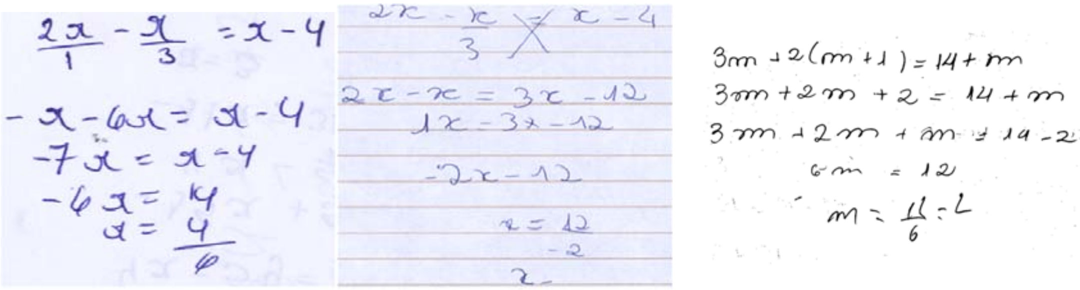


Fig. 2: Registros dos alunos durante o experimento

Os erros cometidos estão relacionados à manipulação algébrica dos termos, onde se evidenciam erros relacionados com o método da transposição, utilizado por todos os alunos, os alunos esquecem ou mudam o sinal dos termos indevidamente. Nas resoluções que envolvem frações, os erros estão relacionados no algoritmo do mínimo múltiplo comum, os registros demonstram que utilizaram a multiplicação dos extremos pelos meios, indevidamente.

Quanto à resolução de problemas, o desempenho apresentado pelos alunos pode ser classificado como satisfatório, pois 8 alunos obtiveram notas acima do mínimo desejado em ambos os nodos. No entanto, é importante observar que mesmo os alunos que resolveram os problemas utilizando uma notação algébrica (4 alunos) para sua posterior resolução, encontraram a solução realizando a substituição das alternativas no problema, caracterizando um pensamento matemático elementar, de tentativa e erro.

Na figura 3 observa-se uma resolução aritmética e uma resolução onde o aluno soma termos indevidamente.

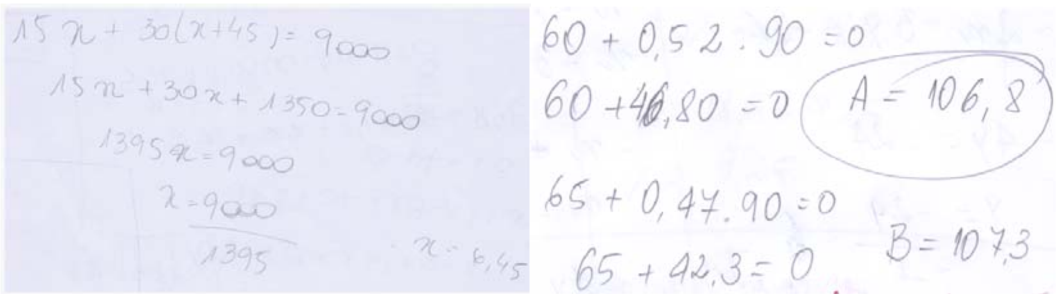


Fig. 3: Registros dos alunos na resolução de problemas

Análise Individualizada

Como já referido os alunos, participantes do experimento, foram analisados de acordo com seu desempenho na utilização do pensamento algébrico no conteúdo de equações de 1º grau, para isso.

É possível identificar, de acordo com o desempenho do aluno, os itens que o mesmo apresenta dificuldades e em quais nodos do grafo avaliado possui um desempenho considerado adequado para o seu ano de escolaridade.

A partir do resultado obtido pelo estudante, em cada nodo, realizou-se uma categorização:

1 **Plenamente satisfatório -** para os nodos onde a diferença entre os conceitos *a priori* e o resultado atingido foi superior a 80%, considerando o intervalo entre o conhecimento *a priori* e 1.

2 **Satisfatório -** para os nodos em que o desempenho ficou entre um acréscimo de 50% e 80%;

3 **Não satisfatório -** para os nodos que ficou com desempenho inferior a 50%.

Desempenho do aluno 1			
Nodo	**Conhecimento *a priori***	**Conhecimento***	**Categoria**
Expressões algébricas	0.2	0.27	3
Equação de 1º grau	0.4	0.71	2
Resolução de equações de 1º grau	0.5	0.86	2
Conceitos e Propriedades de equações de 1º grau	0.5	0.8	2
Problemas envolvendo equações de 1º grau	0.6	0.96	1
Sistemas de equações de 1º grau	0.6	0.69	3
Conceitos e propriedades de sistemas de equações de 1º grau	0.7	0.92	2
Resolução de sistemas de equações de 1º grau	0.8	0.9	2
Problemas envolvendo sistemas de equações de 1º grau	0.9	0.97	2

* Valor máximo igual a 1.

Tabela 02 : Resultados obtidos no teste, em cada nodo, pelo aluno 1.

A partir dos resultados obtidos pelo aluno 1, podemos verificar que apresenta um desempenho satisfatório na maioria dos nodos o que permite concluir que, esse aluno, desenvolveu as competências e habilidades matemáticas desejadas durante os anos de escolarização já realizados. Importante ressaltar que os alunos participantes do experimento não conheciam previamente qual conteúdo seria avaliado.

É possível identificar que esse necessita de reforço na compreensão e interpretação da linguagem matemática.

Desempenho do aluno 5			
Nodo	**Conhecimento *a priori***	**Conhecimento**	**Categoria**
Expressões algébricas	0.2	0.31	3
Equação de 1º grau	0.4	0.5	3
Resolução de equações de 1º grau	0.5	0.86	2
Conceitos e Propriedades de equações de 1º grau	0.5	0.5	3
Problemas envolvendo equações de 1º grau	0.6	0.96	1
Sistemas de equações de 1º grau	0.6	0.84	2
Conceitos e propriedades de sistemas de equações de 1º grau	0.7	0.84	3
Resolução de sistemas de equações de 1º grau	0.8	0.98	1
Problemas envolvendo sistemas de equações de 1º grau	0.9	0.93	3

Tabela 03: Resultados obtidos no teste, em cada nodo, pelo aluno número 5.

O estudante 5 possui um desempenho excelente em conteúdos procedimentais. No entando, não conseguiu resolver problemas, não conhece satisfatoriamente os conceitos, as propriedades e as características das equações de 1º grau. Concordando com os resultados de Kieran (1992) “os estudantes de escolas secundárias geralmente parecem ter conhecimento de conceitos e habilidades algébricos e geométricos básicos. Todavia, os resultados dessa avaliação (NAEP – National Assessment of Educational Progress) indicam, como também resultados de avaliações passadas, que os estudantes freqüentemente não são capazes de aplicar esse conhecimento em situações de resolução de problemas, nem parecem entender muitas das estruturas subjacentes a esses conceitos”.

O aluno 10 apresenta um desempenho abaixo do esperado, apresentando dificuldades em 6 nodos, concluímos que durante seus anos de escolarização as competências e habilidades avaliadas não foram desenvolvidas de forma significativa.

Desempenho do aluno 10			
Nodo	**Conhecimento *a priori***	**Conhecimento**	**Categoria**
Expressões algébricas	0.2	0.36	3
Equação de 1º grau	0.4	0.71	2
Resolução de equações de 1º grau	0.5	0.6	3
Conceitos e Propriedades de equações de 1º grau	0.5	0.5	3
Problemas envolvendo equações de 1º grau	0.6	0.86	2
Sistemas de equações de 1º grau	0.6	0.89	2
Conceitos e propriedades de sistemas de equações de 1º grau	0.7	0.77	3
Resolução de sistemas de equações de 1º grau	0.8	0.8	3
Problemas envolvendo sistemas de equações de 1º grau	0.9	0.93	3

Tabela 04: Resultados obtidos no teste, em cada nodo, pelo aluno número 10.

Conclusão

É possível concluir, em relação ao desempenho dos alunos, que: apresentaram maior dificuldade nos nodos conceituais do que nos procedimentais; mesmo os alunos que resolveram equações e sistemas de equações de 1º grau corretamente, não utilizam esses conhecimentos na resolução dos problemas, a tendência dos alunos foi resolver os problemas por substituição; apresentaram dificuldades na aplicação dos princípios aditivo e multiplicativo, algo inesperado, pois os alunos, a priori, deveriam dominar essa habilidade, visto que, sendo alunos do 2º ano do Ensino Médio já estudam álgebra há 4 anos.

Os resultados do experimento demonstram que esses alunos têm o seu aprendizado da álgebra baseado na aprendizagem de técnicas de manipulação. Embora o conhecimento e o domínio de técnicas seja importante, dentro do estudo da álgebra, é importante um entendimento fundamentado dos conceitos e o posterior uso desses na resolução de situações problema.

Por outro lado, esse trabalho preliminar nos permite verificar que é possível, baseado na análise do desempenho de cada nodo avaliado, identificar pontualmente em que tópicos o aluno tem dificuldades e quais são, para em um segundo momento, a partir dessas informações obter um mapeamento individualizado dos conhecimentos desse aluno.

Podendo assim, a partir dessas informações construir atividades didáticas que objetivem aprimorar ou corrigir possíveis equívocos. A vantagem de um sistema informatizado reside no fato de possibilitar que o professor realize uma recuperação individualizada voltada às dificuldades de cada aluno.

Uma constatação é que os estudantes participantes do experimento já tinham estudado álgebra, durante 5 anos e os resultados mostraram que além de terem assimilado pouco conteúdo teórico e razoável habilidade operacional, não aplicam os conhecimentos na resolução de problemas, ficando, esses conhecimentos, restritos ao ambiente escolar, ou seja, os alunos não conseguem aplicar o que aprenderam de álgebra em contextos do seu cotidiano.

Agradecimentos:

Agradecemos a colaboração do grupo de Tecnologias Educativas da Universidade de La Laguna, principalmnete a Lorenzo Moreno Ruiz e Beatrice Popusku desenvolvedores do SCOMAX. Bem como, aos alunos e professores da Escola Estadual Prudente de Morais.

Referências

Azcárate, P. (1997). Qué matemáticas necesitamos para comprender el mundo actual? *Investigación en la Escuela*, 32, 77-85.

Coll, C., Pozo J. I., Sarabian B. & Valls E.(1998). Os conteúdos da reforma. Porto Alegre, Brasil: Arttmed.

House P. A. (1995) Reformular a álgebra da escola média: por que e como? In:Coxford Arthur F. & Shulte A. P. (Org.)*As ideias da álgebra* (Chap. 1, pp. 1-8). São Paulo: Atual.

Kieran, C. & Chalouh, L. (1993). "Prealgebra: the Transition from Arithmetic to Algebra". In *Research ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics* edited by Douglas T. Owens. Reston, VA: NCTM.

Krieger, S. (2007). Just what is algebraic thinking?. Disponível em: <http:// www.math.ucla.edu/~kriegler/index.html> Acesso em: 27 ago. 2007.

Lins, R.C. & Gimenez, J. (1997). *Perspecitivas en aritmética e álgebra para o século XXI*. São Paulo, Brasil: PAPIRUS.

Moreno, L. et all. (2007). Hacia un Sistema Inteligente basado en Mapas Conceptuales Evolucionados para la Automatización de un Aprendizaje Signifiativo. Aplicación a la Enseñanza Universitaria de la Jerarquía de Memoria. XII Jornada de Enseñanza Universitaria de la Informática. Tenerife.

Groenwald, C. L. O. (1999). A Matemática e o Desenvolvimento do Raciocínio Lógico. *Educação Matemática em Revista- RS*. Nº 1 Janeiro/Junho, Ano I.

Groenwald, C. L. O. & Nunes, G. Da S. (2007). Currículo de matemática no ensino básico: a importância do desenvolvimento dos pensamentos de alto nível*. Revista Latinoamericana de Investigación em Matemática Educativa*. 10(1), 97-116.

Kieran, C. (1992) The learning and teaching of school algebra. In: Grouws, Douglas A. Handbook of research on mathematics, teaching and learning (pp. 390-419). New York: Macmillan.

SANTOS FILHO, J. C. dos. & GAMBOA, S. S. (2002) Pesquisa Educacional: quantidade-qualidade. 5. ed., São Paulo: Cortez.

Usiskin Z. (1995) Concepções sobre a álgebra da escola média e utilizações das variáveis In:Coxford Arthur F. & Shulte Albert P. (Org.)*As ideias da álgebra* (Chap. 2, pp. 9-22). São Paulo, Brasil: Atual.

Compreender representações algébricas												
Habilidade algébrica	**Aluno 01**	**Aluno 02**	**Aluno 03**	**Aluno 04**	**Aluno 05**	**Aluno 06**	**Aluno 07**	**Aluno 08**	**Aluno 09**	**Aluno 10**	**Aluno 11**	**Aluno 12**
Ler representações algébricas	0,73	0,24	0,18	0,3	0,3	0,54	0,44	0,18	0,3	0,3	0,1	0,3
Representar relações algébricas	0,63	0,18	0,1	0,18	0,18	0,55	0,1	0,18	0,1	0,37	0,18	0,1
Compreender e representar algebricamente	0,99	0,18	0,3	0,64	0,78	0,18	0,61	0,75	0,96	0,82	0,18	0,75
Compreender e expressar algebricamente	0,99	0,94	0,94	0,93	0,99	0,97	0,67	0,44	0,64	0,1	0,85	0,45
Operar algebricamente												
Habilidade algébrica	**Aluno 01**	**Aluno 02**	**Aluno 03**	**Aluno 04**	**Aluno 05**	**Aluno 06**	**Aluno 07**	**Aluno 08**	**Aluno 09**	**Aluno 10**	**Aluno 11**	**Aluno 12**
Usar fórmulas 1	0,52	0,61	0,37	0,37	0,86	0,54	0,7	0,54	0,3	0,37	0,18	0,3
Usar fórmulas 2	0,98	0,37	0,37	0,1	0,22	0,22	0,3	0,37	0,22	0,61	0,37	0,3
Valor numérico	0,1	0,1	0,22	0,22	0,64	0,55	0,22	0,1	0,44	0,1	0,44	0,44
Propriedades e operações com N	0,81	0,22	0,44	0,54	0,86	0,86	0,18	0,18	0,94	0,55	0,22	0,61
Propriedades e operações com R	0,37	0,1	0,37	0,37	0,3	0,61	0,18	0,1	0,89	0,1	0,1	0,18
Propriedades e operações algébricas	0,73	0,18	0,99	0,94	0,97	0,83	0,18	0,7	0,92	0,37	0,1	0,7
Resolução de equação de 1º grau	0,97	0,86	0,18	0,61	0,99	0,44	0,1	0,18	0,86	0,95	0,75	0,55
Resolver equações de 2º grau	0,18	0,86	0,86	0,55	0,86	0,95	0,91	0,18	0,61	0,75	0,75	0,61
Resolução de sistemas e inequações	0,4	0,54	0,37	0,18	0,98	0,1	0,22	0,18	0,18	0,18	0,3	0,3
Operar algebricamente	0,99	0,18	0,54	0,44	0,61	0,18	0,44	0,37	0,1	0,67	0,1	0,23
Compreender/usar propriedades algébricas	0,47	0,47	0,86	0,18	0,7	0,7	0,7	0,18	0,55	0,83	0,86	0,1
Reconhecer e representar padrões												
Habilidade algébrica	**Aluno 01**	**Aluno 02**	**Aluno 03**	**Aluno 04**	**Aluno 05**	**Aluno 06**	**Aluno 07**	**Aluno 08**	**Aluno 09**	**Aluno 10**	**Aluno 11**	**Aluno 12**
Reconhecer padrões 1	0,98	0,99	0,61	0,68	0,61	0,1	0,64	0,82	0,96	0,82	0,55	0,61
Reconhecer padrões 2	0,94	0,23	0,44	0,23	0,94	0,23	0,23	0,23	0,1	0,22	0,45	0,23
Criar representações	0,37	0,1	0,18	0,37	0,18	0,3	0,61	0,61	0,3	0,3	0,61	0,18
Generalizar e deduzir fórmulas 1	0,99	0,98	0,96	0,18	0,98	0,1	0,1	0,55	0,94	0,96	0,81	0,85
Generalizar e deduzir fórmulas 2	0,44	0,1	0,61	0,44	0,44	0,37	0,8	0,22	0,61	0,8	0,37	0,44
Resolver problemas												
Habilidade algébrica	**Aluno 01**	**Aluno 02**	**Aluno 03**	**Aluno 04**	**Aluno 05**	**Aluno 06**	**Aluno 07**	**Aluno 08**	**Aluno 09**	**Aluno 10**	**Aluno 11**	**Aluno 12**
Problemas algébricos 1	0,98	0,85	0,1	0,68	0,22	0,93	0,85	0,61	0,22	0,1	0,18	0,23
Problemas algébricos 2	0,22	0,18	0,22	0,1	0,23	0,61	0,37	0,44	0,44	0,18	0,44	0,86

Média aritmética dos alunos participantes por competência.

Média Aritmética dos 12 alunos em cada competência												
	Aluno 01	Aluno 02	Aluno 03	Aluno 04	Aluno 05	Aluno 06	Aluno 07	Aluno 08	Aluno 09	Aluno 10	Aluno 11	Aluno 12
Compreender e representar algebricamente	0,688	0,328	0,348	0,446	0,572	0,494	0,408	0,384	0,444	0,426	0,384	0,364
Operar algebricamente	0,616	0,425	0,528	0,421	0,738	0,577	0,417	0,324	0,573	0,465	0,378	0,434
Reconhecer e representar algebricamente padrões	0,744	0,48	0,56	0,38	0,63	0,22	0,476	0,486	0,582	0,62	0,558	0,462
Resolver problemas	0,6	0,515	0,16	0,39	0,225	0,77	0,61	0,525	0,33	0,14	0,31	0,545

Apêndice D

Classificação dos nodos em Processuais ou Estruturais

Álgebra Processual

Compreender representações algébricas												
Habilidade algébrica	**Aluno 01**	**Aluno 02**	**Aluno 03**	**Aluno 04**	**Aluno 05**	**Aluno 06**	**Aluno 07**	**Aluno 08**	**Aluno 09**	**Aluno 10**	**Aluno 11**	**Aluno 12**
Ler representações algébricas	0,73	0,24	0,18	0,3	0,3	0,54	0,44	0,18	0,3	0,3	0,1	0,3
Representar relações algébricas	0,63	0,18	0,1	0,18	0,18	0,55	0,1	0,18	0,1	0,37	0,18	0,1
Compreender e representar algebricamente	0,99	0,18	0,3	0,64	0,78	0,18	0,61	0,75	0,96	0,82	0,18	0,75
Compreender e expressar algebricamente	0,99	0,94	0,94	0,93	0,99	0,97	0,67	0,44	0,64	0,1	0,85	0,45
Operar algebricamente												
Usar fórmulas 1	0,52	0,61	0,37	0,37	0,86	0,54	0,7	0,54	0,3	0,37	0,18	0,3
Usar fórmulas 2	0,98	0,37	0,37	0,1	0,22	0,22	0,3	0,37	0,22	0,61	0,37	0,3
Valor numérico	0,1	0,1	0,22	0,22	0,64	0,55	0,22	0,1	0,44	0,1	0,44	0,44
Resolução de equação de 1º grau	0,97	0,86	0,18	0,61	0,99	0,44	0,1	0,18	0,86	0,95	0,75	0,55
Resolver equações de 2º grau	0,18	0,86	0,86	0,55	0,86	0,95	0,91	0,18	0,61	0,75	0,75	0,61

Álgebra Estrutural

Operar algebricamente												
Habilidade algébrica	**Aluno 01**	**Aluno 02**	**Aluno 03**	**Aluno 04**	**Aluno 05**	**Aluno 06**	**Aluno 07**	**Aluno 08**	**Aluno 09**	**Aluno 10**	**Aluno 11**	**Aluno 12**
Propriedades e operações com N	0,81	0,22	0,44	0,54	0,86	0,86	0,18	0,18	0,94	0,55	0,22	0,61
Operar algebricamente	0,99	0,18	0,54	0,44	0,61	0,18	0,44	0,37	0,1	0,67	0,1	0,23
Propriedades e operações algébricas	0,73	0,18	0,99	0,94	0,97	0,83	0,18	0,7	0,92	0,37	0,1	0,7
Resolução de sistemas e inequações	0,4	0,54	0,37	0,18	0,98	0,1	0,22	0,18	0,18	0,18	0,3	0,3
Propriedades e operações com R	0,37	0,1	0,37	0,37	0,3	0,61	0,18	0,1	0,89	0,1	0,1	0,18
Compreender e usar propriedades algébricas	0,47	0,47	0,86	0,18	0,7	0,7	0,7	0,18	0,55	0,83	0,86	0,1
Reconhecer e representar padrões												
Reconhecer padrões 1	0,98	0,99	0,61	0,68	0,61	0,1	0,64	0,82	0,96	0,82	0,55	0,61
Reconhecer padrões 2	0,94	0,23	0,44	0,23	0,94	0,23	0,23	0,23	0,1	0,22	0,45	0,23
Criar representações	0,37	0,1	0,18	0,37	0,18	0,3	0,61	0,61	0,3	0,3	0,61	0,18
Generalizar e deduzir fórmulas 1	0,99	0,98	0,96	0,18	0,98	0,1	0,1	0,55	0,94	0,96	0,81	0,85
Generalizar e deduzir fórmulas 2	0,44	0,1	0,61	0,44	0,44	0,37	0,8	0,22	0,61	0,8	0,37	0,44
Resolver problemas												
Problemas algébricos 1	0,98	0,85	0,1	0,68	0,22	0,93	0,85	0,61	0,22	0,1	0,18	0,23
Problemas algébricos 2	0,22	0,18	0,22	0,1	0,23	0,61	0,37	0,44	0,44	0,18	0,44	0,86

105

Apêndice E

Questionário para determinar o perfil dos estudantes

Identificação do aluno na pesquisa: ......

1) Você é do sexo:
( ) masculino ( ) feminino

2) Atualmente você:
( ) apenas estuda. ( ) estuda e trabalha meio turno.

3) Você tem:
( ) até 15 anos
( ) 16 anos
( ) 17 anos
( ) 18 anos ou mais

4) Durante a sua vida escolar você já reprovou:
( ) apenas uma vez
( ) duas vezes
( ) três vezes
( ) mais de três vezes
( ) nunca reprovou

5) Dentre as disciplinas que você tem e/ou teve na escola, as três que mais contribuem ou contribuirão na sua vida são na sua opinião:
( ) Português
( ) Matemática
( ) Física
( ) Biologia
( ) Inglês
( ) Química
( ) Geografia/História
( ) Religião/Relações Humanas
( ) Filosofia
( ) Educação Física
( ) Literatura
( ) Outra. Qual?_________________

6) Indique o seu grau de concordância com as afirmações abaixo, sendo que:

→ **1 indica que você concorda totalmente** com a afirmação
→ 5 que você discorda totalmente.

Grau de Concordância	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
O bom desempenho do aluno depende apenas dele					
A família não influencia o sucesso do estudante					
Basta o professor ser bom para que o aluno aprenda					
Sou um bom aluno na disciplina de Matemática					
Eu adoro Matemática					
Matemática não é importante					
Matemática é uma matéria muito difícil					
Álgebra é a parte da Matemática que trabalha com letras					
Eu gosto da escola					
Penso que o nível de exigência da minha escola está bom					
Saber Álgebra não é importante					
Álgebra não serve para nada					
Pretendo continuar estudando depois do Ensino Médio					
A escola é importante na minha vida					
Matemática desenvolve o raciocínio					

Anexo A

CD com os bancos de dados gerados pelo SCOMAX e banco de questões utilizadas na pesquisa.

Dados Internacionais de Catalogação na Publicação (CIP)

B391c Becher, Ednei Luis

Características do pensamento algébrico de estudantes do 1º ano de ensino médio. / Ednei Luis Becher. – Canoas, 2009.

107 f. : il.

Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) – Universidade Luterana do Brasil, 2009

Orientação: Profa. Dra. Claudia Lisete Oliveira Groenwald

1. Educação ensino médio – pensamento algébrico. 2. Matemática – álgebra - ensino. I. Groenwald, Claudia Lisete Oliveira, II. Título.

Bibliotecária Responsável: Ana Lígia Trindade CRB/10-1235